arXiv:2611.32366v1 [math.CO] 24 Nov 2026

无立方因子阶阿贝尔群上凯莱图同构的 Sylow 约化

Tingzeng Wu[1,2*], LiangQin[1], YongYu[3], XingGao[3,4]

[1]青海民族大学数学与统计学院，青海西宁 810007，中国。[2]青海应用数学研究所，青海西宁 810007，中国。[3]兰州大学数学与统计学院、应用数学与复杂系统重点实验室，兰州 730000，中国。[4]甘肃省数学与统计基础学科研究中心，兰州 730070，中国。

*通讯作者。电子邮箱：mathtzwu@163.com；贡献作者：ql22120806@126.com；yuyong lzu@yeah.net；gaoxing@lzu.edu.cn；

摘要

凯莱图的同构问题是代数组合学中的基本问题之一。Dobson 研究了这一同构问题，并提出疑问：假设由左正则表示及其在某个同构下的共轭所生成的群具有正规块系的完备序列，是否可以将无立方因子阶有限阿贝尔群上的 Cayley 有向图的同构问题约化为其西洛子群上的相应问题。我们对此问题给出了肯定的回答。我们首先证明，对于由互素阶阿贝尔群的直积构成的$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H}$，当 $|\boldsymbol{H}|$ 为素数或素数的平方时，保持纤维划分的保色同构具有乘积分解性质。将这一性质依次应用于无立方因子阶阿贝尔群 $\boldsymbol{G}$的西洛子群，我们证明：如果 $\boldsymbol{G}$ 上的两个彩色二元 Cayley 结构通过保色同构 $\boldsymbol{f}$ 相连接，并且 $\langle \boldsymbol{G_L}, \boldsymbol{f}^{-1}\boldsymbol{G_L}\boldsymbol{f}\rangle$ 具有块系的完备序列，那么它们也通过保色的 Sylow 坐标同构相连接。这为求解集给出了相应的 Sylow 约化。

关键词：凯莱图、阿贝尔群、西洛子群、保色同构

数学主题分类：20B25，05C25，05C60，20B35

1 引言

设 G为有限群，并令 $S \subseteq G \setminus \{1\}$。Cayley 有向图 Cay($G, S$) 的顶点集为 G，连接集为 S，弧集为 $\{(g, gs)\colon\ g \in G,\ s \in S\}$。当 $S = S^{-1}$时，我们将其视为无向图。双射 $f\colon\ G \to G$是从 Cay(G, S) 到 Cay(G, T) 的同构，当且仅当

$$g^{-1}h \in S \quad \Longleftrightarrow \quad f(g)^{-1}f(h) \in T \qquad (g, h \in G).$$

若群 G 满足：对于定义在 G 上的任意两个同构的 Cayley 有向图， G 的某个自同构会将一个连接集映射到另一个连接集，则称 G 为有向凯莱同构群（DCI-group，directed Cayley isomorphism group）。设 $G = G_1 \times \cdots \times G_r$为有限阿贝尔群，并表示为其西洛子群的直积。令 Sym(G) 表示 G上的对称群，并令$D_G = \prod_i$ Sym(G_i) $\leq$Sym(G)，其中（h_i）通过（$x_1, \ldots, x_r$）$\mapsto$（$h_1(x_1) \ldots, h_r(x_r)$）作用。我们称 D_G 中的同构为 Sylow 坐标同构 。此外，令 G_p 表示 G 的 Sylow p-子群。若定义在 G上的任意两个同构的 Cayley 结构之间都存在 Sylow 坐标同构，则称同构问题可约化到西洛子群。令 C_m 表示阶为 m 的循环群，令 C_m^k 表示 k 个 C_m 的直积。 G 的左正则表示为 $G_L = \{L_g\colon\ g \in G\}$，其中 $L_g(x) = gx$。对于任意群 A，令 A_L 表示其左正则表示。

凯莱图的同构问题是代数组合学中的经典问题之一 [8]。Muzychuk [10, 11] 证明了平方自由阶的循环群是有向凯莱同构群，并解决了任意阶循环群上彩色凯莱图的同构问题。如果一个整数的每个素因子都恰好以一次幂出现，则称该整数为平方自由数。对于双射 $f\colon\ G \to G$，Dobson [1]证明了：如果由两个正则阿贝尔置换群 G_L 和$f^{-1}G_L f$ 生成的群具有完备块系统序列，那么这两个群中的一个可以在该群内进行共轭，使得所得有序对生成一个可解群。Feng 和 Kov´acs [3] 证明了初等阿贝尔群 C_p^5 对于每个奇素数 p都是有向凯莱同构群。对于一个阿贝尔群 G ，其阶为 n，Dobson [2] 随后证明，在满足以下假设的情况下，可以将求解集约化到西洛子群上：

$$\gcd\big(\mathrm{rad}(n), \varphi(\mathrm{rad}(n))\big) = 1 \tag{1}$$

并且，对于每个 $f \in$ Sym(G)，由 G_L 和 $f^{-1}G_L f$ 生成的群都具有一个正规块系的完备序列。其中，rad(n) 是 n 的不同素因子的乘积，而 φ 是欧拉函数。Kov´acs 等人 [7] 证明了

$C_p \times C_n$ （p 素数， n 无平方因子）和 $C_p^2 \times C_q^2$ （p， q 不同素数）也是 DCI-群。这些结果表明，Sylow 约化方法是解决凯莱图同构问题的有效途径。

整数 n 称为无立方因子，如果对于每个素数 $p^3 \nmid n$ ，都有 p；若一个阿贝尔群的阶为无立方因子，则称其为无立方因子阶群。此类阶不一定满足（1），这促使 Dobson 提出了以下问题。

问题1（Dobson [2]）假设由 G_L 和 $f^{-1}G_L f$ 生成的群具有一个正规块系的完备序列。阿贝尔群无立方因子阶上的 Cayley 有向图的同构问题，是否可以归约为其西洛子群上的相应问题?

由于 G_L 是一个正则阿贝尔子群，下面的内容将说明每个不变块系都是正规的，因此块链假设的正规表述与不变表述是一致的。

我们肯定地回答问题1。为陈述我们的结果，我们首先介绍一些术语。设 Ω 为一个大小为 n 的集合，并设 $K \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ 为传递的。Ω 的一个划分 $\mathcal{B}$ 是由两两不相交的非空子集组成的集合，这些子集称为块，其并集为 Ω。对于 K，如果对所有 $g \in K$ 和 $B \in \mathcal{B}$， $\mathcal{B}$ 满足 $g(B) \in \mathcal{B}$ ，则称 $\mathcal{B}$ 为 K-不变的，或称为 K 的一个块系 。对于二元关系 $Q \subseteq \Omega^2$ 和 $g \in K$，令 $g(Q) = \{(g(x), g(y)) : (x, y) \in Q\}$。若对所有 $g \in K$，关系 Q 满足 $g(Q) = Q$ ，则称其为 K-不变。

令 $t = \Omega(n) = \sum_{p|n} v_p(n)$，表示 n 的素因子个数，按重数计算。 K-不变划分链 $\mathcal{B}_0 \prec \mathcal{B}_1 \prec \cdots \prec \mathcal{B}_t$ 是 K 的完备块系统序列 ，若其始于离散划分 $\{\{x\} : x \in \Omega\}$，并以平凡划分 $\{\Omega\}$ 结束，且每一步相邻块大小之比都是素数。若每个划分都是 K 的某个正规子群的轨道划分，则该序列是正规的 。

G 上的彩色二元 *Cayley* 结构 是一个有序对 $X = (G, (R_c)_{c \in \mathcal{C}})$，其中 $\mathcal{C}$ 是有限颜色集， $R_c \subseteq G^2$ 对每个 $c \in \mathcal{C}$ 都成立，且 $G_L \leq \mathrm{Aut}(X)$。这里，$\mathrm{Aut}(X)$ 由 G 上保持每个关系 R_c 的置换组成。对于另一个具有相同颜色集的此类结构 $Y = (G, (R'_c)_{c \in \mathcal{C}})$，若双射 $f : G \to G$ 满足：对每个 $c \in \mathcal{C}$ 及所有 $g, h \in G$， $(g, h) \in R_c$ 当且仅当 $(f(g), f(h)) \in R'_c$，则称其为从 X 到 Y 的保色同构 。

令 $\pi_H : A \times H \to H$ 为投影（a， h） $\mapsto h$。对于 $h \in H$，我们称 $\pi_H^{-1}(h) = A \times \{h\}$ 为 A上的纤维 h，并称 $\mathcal{E}_A = \{A \times \{h\} : h \in H\}$ 为 A纤维划分。若双射 $f : A \times H \to A \times H$ 将每个 A-纤维映射到一个 A-纤维上，则称其保持纤维划分。

对于由互素阶阿贝尔群构成的直积 $A \times H$ ，其中 $|H|$ 是素数或素数的平方，我们首先证明保持 A-纤维划分的保色同构具有乘积分解性质。

定理 **1 1** *Let A be a finite abelian group let q be a prime not dividing $|A|$ and let H , be an abelian group of order q or q^2. Let X and Y be colored binary Cayley structures on , $A \times H$, and suppose that*

$$f(a, h) = (\beta_h(a), \tau(h)) : X \longrightarrow Y$$

is a color-preserving isomorphism that preserves the fiber partition. Put $R = ($ $A \times H_L$ *and*),Aut( ),(,)
$B = \langle R\ fRf^{-1} \rangle \leq$ Y . *Then there exists* $b \in B$ *such that on writing* $bf\ a\ h =$ (
$\beta_h\ a\ \widetilde{\tau}\ h$ *the map* $a\ h \mapsto \beta_{h_0}\ a\ \widetilde{\tau}\ h$ *from* X *to* Y *is a color-preserving isomorphism*() ( )) (,) (() ( ))
for every $h_0 \in H$.

将上述乘积分解性质应用于无立方因子阶有限阿贝尔群的西洛子群，可得到以下结果。

定理 **1 2** *Let* G *be a finite abelian group of cube-free order and let* X *and* Y *be colored* 。， ：
binary Cayley structures on G. *Suppose that there is a color-preserving isomorphism* $Xf\rightarrow$
Y *such that* $\langle G_L\ f^{-1}G_Lf \rangle$ *admits a complete sequence of block systems. Then there is a*,

color-preserving isomorphism $d = \prod_{p||G|} d_p$ $X \to Y$ *with* $d_p \in$ G_p *for each prime* p ： 对称群()
dividing $|G|$.

设 X 是 G上的彩色二元 Cayley 结构。集合 $S \subseteq$Sym(G)称为 X 的求解集，如果对于 G 上与 X同构的每个彩色二元 Cayley 结构 Y，都有某个$s \in S$ 是从 X 到 Y 的保色同构。如果 S 是 G上每个有限彩色二元 Cayley 结构的求解集，则称其为 G 的通用保色求解集 。下面的结果给出了求解集相应的 Sylow 约化。

定理 **1 3** *Let* G *be a finite abelian group of cube-free order and let* X *be a Cayley* 。，
digraph on G. *Suppose that for every Cayley digraph* Y *on* G *isomorphic to* X *there is*
, *an isomorphism* f $X \to Y$ *for which* $\langle G_L\ f^{-1}G_Lf \rangle$ *admits a complete sequence of block*： ， ，
systems. For each $p \mid |G|$
let S_p *be any universal color-preserving solving set for* G_p. *Then*
$\prod_{p||G|} S_p$ *is a solving set for* X.

注 1 定理 ： 1.2 和1.3 共同给出了肯定的回答 问题1。

本文其余部分的组织如下。第2 节汇总预备结果。我们在第3 节证明定理1.1；第4 节证明定理1.2和1.3。最后一节总结全文。

2 预备知识

本节汇集下文所需的一些预备知识。除非另有说明，全文中的群和集合均为有限的。我们将置换按从右到左的顺序复合，因此 $(ga)(x) = g(a(x))$，并令 $U^a = a^{-1}Ua$ 表示子集 U 在 a 下共轭后的图像。对于子群 $K \leq G$，令 $N_G(K) = \{g \in G :$ $gKg^{-1} = K\}$ 表示其正规化子，并令 $C_G(K) = \{g \in G :\ gk = kg$ 对所有 $k \in K\}$ 表示其在 G 中的中心化子。令 $\pi(n)$ 表示正整数 n 的素因子集合。

对于素数集合 π，有限群 G 是 π-群，若 $\pi(|G|) \subseteq \pi$。设 R 为有限幂零群，设 R_p 表示其 Sylow p-子群，并设 $R_{p'} = \prod_{q \neq p} R_q$ 表示其 Hall p'-子群，亦称为 p-补。

设 $K \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$。 $x \in \Omega$ 的点稳定子为 $\mathrm{Stab}_K(x) = \{g \in K : g(x) = x\}$，且 $D \subseteq \Omega$ 的集合稳定子为 $\mathrm{Stab}_K(D) = \{g \in K : g(D) = D\}$。一个置换群是半正则的，若其所有点稳定子均为平凡的；若它既传递又半正则，则它是正则的。对于 K-不变子集 $B \subseteq \Omega$，设 K^B 表示由 K 在 B 上诱导的置换群。对于 K-不变划分 $\mathcal{B}$，设 $K^{\mathcal{B}}$ 表示在其块上诱导的群。该作用的核为 $\mathrm{fix}_K(\mathcal{B}) = \{g \in K : g(B) = B \text{ 对每个 } B \in \mathcal{B}\}$。子群 $V \leq U$ 在 U 中是特征的，记作 $V \mathrm{char}\ U$，若 U 的每个自同构都将 V 映射到自身。

令 $C_p^2 = C_p \times C_p$。令 $\mathbb{F}_q$ 表示阶为 q 的有限域，$\mathrm{GL}(n, q)$ 表示域 $\mathbb{F}_q$ 上次数为 n 的一般线性群，而 $\mathrm{AGL}(n, q) = \mathrm{GL}(n, q) \ltimes \mathbb{F}_q^n$ 表示相应的仿射一般线性群。有限群 A 的指数 $\exp(A)$ 是其元素的阶的最小公倍数。对于素数 q 和正整数 m，令 $v_q(m)$ 表示 q 在 m 的素因数分解中的指数，并令 ζ_m 表示一个本原 m 次单位根。

矩阵 $B = (b_{x,y})_{x,y \in \Lambda}$ 的支撑（其中 Λ 是有限集合）为 $\mathrm{supp}(B) = \{(x, y) \in \Lambda^2 : b_{x,y} \neq 0\}$。对于这类矩阵的族 $(B_c)_{c \in \mathcal{C}}$，令 $\mathrm{supp}((B_c)_{c \in \mathcal{C}}) = \bigcup_{c \in \mathcal{C}} \mathrm{supp}(B_c)$。以 Λ 为顶点集、以该支撑为弧集的有向图称为该族的关联有向图 。对于单个矩阵 B，以 Λ 为顶点集、以 $\mathrm{supp}(B)$ 为弧集的有向图称为 B 的关联有向图。单项矩阵 的每一行和每一列恰好有一个非零元素。

引理 2.1 [16] *Let $K \leq$ and let $x \in$. The* 。（Wielandt；轨道-稳定子定理）Sy *length of the K-orbit of x is $|x^K| = [K$* m(Ω) Ω: Stab（） *$_K\ x\ ]$.*

引理 2.2 [5] *Let G be a finite solvable group and let π be a set of* 。（Hall；Hall'定理）， *primes. Then the following hold.*

（i） G 具有一个 *Hall* π-子群。（ii） G 的每个 π-子群都包含于 G 的一个 *Hall* π-子群中。（iii） G 的任意两个 *Hall* π-子群在 G中共轭。

引理 2.3 [13] *Let G be a finite group and let q be a prime.* 。（Sylow；西洛定理） *Then the following hold.*

（i） G 具有一个 *Sylow* q-子群。（ii） G 的每个 q-子群都包含于 G 的一个 *Sylow* q-子群中。（iii） G 的任意两个 *Sylow* q-子群在 G中共轭。

引理 2.4（Wielandt [16]） *If $R \leq$ 对称群(Ω) is regular and abelian, then $C_{\mathrm{Sym}(\Omega)}(R) = R$.*

引理 2.5 [4] *Let G be a group and let G_L be its left regular* .(Godsil 和 Royle) *representation. Then*

$$N_{\mathrm{Sym}(G)}(G_L) = \{x \mapsto g\theta(x) : g \in G,\ \theta \in \mathrm{Aut}(G)\} = \mathrm{Aut}(G) \ltimes G_L.$$

In particular if G is abelian and written additively then $\tau \in N_{\mathrm{Sym}(G)}\ G_L$ if and only if,,( ) Aut( ) ( ) () *there are $g_* \in G$ and $\theta \in$ G such that $\tau\ x\ = g_* + \theta\ x$ for all $x \in G$. If q is prime and*,( ) AGL(,) *G is the additive group of $\mathbb{F}_q^n$ then $N_{\mathrm{Sym}(G)}\ G_L\ =$ $n\ q$.*

引理 2 6 [12] *Let R be a finite abelian group and let $S \leq R$. Then $S =$* 。(Robinson) ()( ) $\prod_{q\in\pi\ |R|}\ S \cap R_q$ *where R_q is the Sylow q-subgroup of R.*

引理 2 7 [12] *Let A be a finite abelian group and let m be a positive integer* 。(Robinson) :, *coprime to $|A|$. Then the multiplication map $\mu_m\ \ a \mapsto ma$ is a bijection on A. In particular if $m \equiv 1$ A then $\mu_m =\ _A$. For any finite group H if $m = |H|^t$ with $t \geq 1$* (mod exp( )) id.,, *then $h^m = 1$ for every $h \in H$. In additive notation* , *this says that multiplication by m is the zero map on H.*

引理 2.8 (Washington [15]) *Let m and n be coprime positive integers. Then $\mathbb{Q}(\zeta_m, \zeta_n)$ $=$ $\mathbb{Q}\ \zeta_{mn}$ and $[\mathbb{Q}\ \zeta_m\ \ \mathbb{Q}] = \varphi\ m$.* ( ) ( ) : ()

引理 2 9 [6] *Let q be a prime and let a be a* 。(Hardy 和 Wright; 勒让德公式) (!) ,(( )!) *positive integer. Then $v_q\ a\ = \sum_{i\geq 1}\lfloor a/q^i \rfloor$. In particular $v_q\ \ q^2\ \ = q + 1$.*

此外，我们将使用以下傅里叶对角化性质。关于凯莱图谱理论的综述，参见 Liu 和 Zhou [9]。

引理 2 10 [14] *Let A be a finite abelian group let A be its group of complex* 。(Terras) ,,(χ()) *characters and let $F = \chi(a)_{a\in A,\ \chi\in\widehat{A}}$. Then the following hold.*

(i) $F^{T}F = |A|I$，所以 $F^{-1} = |A|^{-1}F^{T}$。(ii) F 同时对角化所有 A-循环矩阵，即所有 $|A| \times |A|$矩阵 M，其(x, y)项仅取决于 $y - x$。对于每个这样的 M，$F^{-1}MF$中以 χ为索引的对角项是与特征向量 χ对应的特征值 M。

引理 2 11 [1] *Let $K \leq$ be transitive and let $R \leq K$ be regular and* 。(Dobson) Sym(Ω) *abelian. Then every K-invariant partition is normal and is the orbit partition of a normal subgroup of R.*

引理 2 12 [1] *Let n be a positive integer and put $\pi = \pi\ n$. Let R and T be* 。(Dobson) () *regular abelian permutation groups on the same set of size n. If $\langle R, T\rangle$ admits a complete* Ω ,*sequence of block systems then there is some $\delta \in \langle R\ T\rangle$ for which $\langle R$* ,,, $T^{\delta}\rangle$ *is a solvable π-group.*

引理 2 13 *Let $K \leq$ be transitive of degree $n = |\ \ | > 1$ and let $\mathcal{B}_0 \prec \mathcal{B}_1 \prec \cdots \prec$* 。Sym(Ω) Ω, *$\mathcal{B}_\ell$ be a complete sequence of block systems for K. Let $q =$ $\pi\ n$ and let $n = q^a s$ with* min ( ) 最大公约数$(q,\ \ s) = 1$. *If $H \leq K$ satisfies $\pi(|H|) \subseteq \{r \in \pi(n)\colon\ \ r > q\}$, then $|x^H| \leq s$ for every $x \in \Omega$*。

*Proof*固定 $x \in \Omega$。对于 $0 \le i \le \ell$，令 $B_i(x)$ 表示包含 x 的 $\mathcal{B}_i$ 块，并设 $H_i = \mathsf{Stab}_H(B_i(x))$。每个 $\mathcal{B}_i$ 都是 H-不变的。因此，H 中稳定 $B_{i-1}(x)$ 的任意元素，也会稳定包含 $B_{i-1}(x)$ 的唯一块 $B_i(x)$。由此可得 $H_0 \le H_1 \le \cdots \le H_\ell = H$。由于 $H_0 = \mathsf{Stab}_H(x)$，由引理 2.1 得

$$|x^H| = [H : H_0] = \prod_{i=1}^{\ell} [H_i : H_{i-1}]. \tag{2}$$

令 $p_i = |B_i(x)|/|B_{i-1}(x)|$。每个 p_i 都是素数，且它们的乘积为 $|B_\ell(x)|/|B_0(x)| = n$。群 H_i 在 $\mathcal{B}_{i-1}$ 中包含于 $B_i(x)$ 的 p_i 个块上诱导出置换群 $L_i \le \mathsf{Sym}(p_i)$。$H_i$ 中块 $B_{i-1}(x)$ 的稳定子为 H_{i-1}，因此 $[H_i : H_{i-1}] \le p_i$。

若 $p_i = q$，则 $|L_i|$ 同时整除 $|H_i|$ 和 $q!$。$|H_i|$ 的每个素因子都大于 q，因为 $H_i \le H$ 和 $\pi(|H|) \subseteq \{r \in \pi(n) : r > q\}$。$q!$ 的每个素因子至多为 q。因此 L_i 是平凡的，并且 H_i 固定 $B_i(x)$中包含的 $\mathcal{B}_{i-1}$ 的每个块。特别地，$H_i = H_{i-1}$。$\prod_i p_i = n = q^a s$ 中的因子恰有 a 个等于 q。将前述界代入（2）即可得到 $|x^H| \le \prod_{p_i \ne q} p_i = s$。□

引理 2.14 *Let R $T \le$ be regular abelian groups on a set of size $n > 1$. Suppose。, that $\mathcal{B}_0 \prec \mathcal{B}_1 \prec \cdots \prec \mathcal{B}_\ell$ is a complete sequence of block systems for $\langle R\ T\rangle$ and put $q =$ $\mathsf{Sym}(\Omega)$, , min*

π n . Then there exists $a_0 \in \langle R\ T\rangle$ such that $R_{q'}$ and $T^{a_0}{}_{q'}$ have the same orbit(), (), partition $\mathcal{E}$. Moreover the following hold.

(i) $\mathcal{E}$在 $\langle R, T^{a_0}\rangle$下不变。(ii) 对于每个 $B \in \mathcal{E}$，群 $R^B_{q'}$ 和 $(T^{a_0})^B_{q'}$ 在 B上正则。(iii) 对于每个 $B \in \mathcal{E}$，群 $\mathrm{Stab}_{\langle R,\ T^{a_0}\rangle}(B)^B$ 在 B上具有完备块系统序列。

*Proof*设 $n = q^a s$ 满足最大公约数$(q,\ s) = 1$。根据引理 2.12，存在某个 $b \in \langle R,\ T\rangle$ 使得 $K_1 = \langle R,\ T^b\rangle$ 是一个可解 $\pi(n)$-群。每个 $\mathcal{B}_i$ 在 $K_1 \le \langle R,\ T\rangle$下不变，因此给定序列也是 K_1的完备块系统序列。

令 $\pi_1 = \pi(|K_1|) \setminus \{q\}$。群 $R_{q'}$ 和 $(T^b)_{q'}$ 是 K_1 的 π_1-子群。由引理 2.2(ii)，存在 K_1 的 Hall π_1-子群 H_R 和 H_T，分别包含 $R_{q'}$ 和 $(T^b)_{q'}$。由同一引理的 (iii) 部分，存在某个 $c \in K_1$，使得 $H^c_T = H_R$。令$H = H_R$。由于 $(T^{bc})_{q'} = (T^b)^c_{q'} \le H^c_T = H$，因此 $R_{q'}$ 和 $(T^{bc})_{q'}$均属于 H。由于 K_1是一个 $\pi(n)$-群，且 q是 n 的最小素因子，因此我们有 $\pi(|H|) \subseteq \{r \in \pi(n) : r > q\}$。由引理 2.13 可得，对每个 $x \in \Omega$，$|x^H| \le s$。

分别作为正则阿贝尔群 R和 T^{bc} 的子群，$R_{q'}$和 $(T^{bc})_{q'}$是半正则的。两者的阶均为 s，因为 $|R| = |T^{bc}| = q^a s$ 和 $q \nmid s$。因此，这两个子群的每个轨道长度均为 s。对每个 $x \in \Omega$，$x^{R_{q'}}$和 $x^{(T^{bc})_{q'}}$都包含于 x^H 中，而其大小至多为 s。因此 $x^{R_{q'}} = x^H = x^{(T^{bc})_{q'}}$。取 $a_0 = bc$，并令 $\mathcal{E}$为 H 的轨道划分。

由于 $R_{q'}$ char R 且 $(T^{a_0})_{q'}$ char T^{a_0}，R 和 T^{a_0} 都置换 $\mathcal{E}$ 的块，从而证明 (i)。在每个 $B \in \mathcal{E}$ 上，两个 Hall q'-子群都是传递且半正则的，因此它们的诱导群是正则的。这就证明了 (ii)。

对于（iii），令 $K_2 = \langle R,\ T^{a_0}\rangle \le K_1$。给定的序列也是 K_2的完备块系统序列。固定 $B \in \mathcal{E}$并选取 $\omega_0 \in B$。由于 R是正则的，$r \mapsto r\ (\omega_0)$是从R到 Ω 的双射。在此对应下，B对应于 $M = R_{q'}$。根据引理2.11，序列中的每个划分

都是 R的某个子群的陪集划分。因此，该序列对应于一个子群链 $1 = S_0 < S_1 < \cdots < S_\ell = R$，其素数指数为 $[S_i : S_{i-1}] = p_i$。如果 S_i的一个陪集在一点 m处与 M相交，那么它与 M的交集为 $mS_i \cap M = m(S_i \cap M)$。因此，将 $\mathcal{B}_i$限制在 B上所得的是将 M划分为 $S_i \cap M$的陪集的划分。

由于 R是阿贝尔群，引理2.6给出 $S_i = (S_i \cap R_q) \times (S_i \cap M)$。因此

$$p_i = [S_i \cap R_q : S_{i-1} \cap R_q]\,[S_i \cap M : S_{i-1} \cap M].$$

第一个因子是 q 的幂，而第二个因子与 q互素。由于 p_i 是素数，

$$[S_i \cap M : S_{i-1} \cap M] = \begin{cases} 1, & p_i = q, \\ p_i, & p_i \neq q. \end{cases}$$

去掉重复项后，得到一个从 1 到 M、指数为素数的子群链。相应的划分构成 B 上的完备块系统序列。当 $M = 1$时，这是单元素集合上的平凡序列。

最后，$\mathrm{Stab}_{K_2(B)}$ 中的每个元素都保持 B 不变，并保持每个划分 $\mathcal{B}_i$，因此它置换非空交集 $D \cap B$ 与 $D \in \mathcal{B}_i$。于是，诱导群 $\mathrm{Stab}_{K_2(B)}^{B}$保持受限序列不变，从而证明了 (iii)。特别地，其子群 $\langle R_{q'}^{B},\ (T^{a_0})_{q'}^{B} \rangle$ 也保持 B 上的这一序列不变。□

3 定理1.1 的证明

本节证明定理 1.1。在证明之前，我们先记录一些必要的引理。

引理 3 1 *Let A and H be finite abelian groups of coprime orders and let X and Y。, be colored binary Cayley structures on $A \times H$. Suppose that f a $h = \beta_h$ a τ h is a (,) (() ())*

color-preserving isomorphism from X to Y where each β_h is a permutation of A and $\tau \in$, (),, $N_{\mathrm{Sym}(H)}(H_L)$. Then for every $h_0 \in H$ the map

$$f_{h_0}(a, h) = (\beta_{h_0}(a), \tau(h))$$

is a color-preserving isomorphism from X to Y.

*Proof*若其中一个因子是平凡的，则 $f_{h_0} = f$。假设两者均非平凡，并对群运算使用加法记号。由引理 2.5，$\tau(h) = h_* + \theta(h)$，其中某些 $h_* \in H$和 $\theta \in \mathrm{Aut}(H)$。令 $\eta = \mathrm{id}_A \times \tau$。由于 $\eta L_{(a,h)} \eta^{-1} = L_{(a,\theta(h))}$，重新标记后的结构 $\eta^{-1}Y$仍是 $A \times H$上的 Cayley 结构。此外，$\eta^{-1} f(a, h) = (\beta_h(a)\ h)$。因此，将 Y替换为 $\eta^{-1}Y$，并将 f替换为 $\eta^{-1} f$，我们可以假设 $\tau = \mathrm{id}_H$。

对于阿贝尔群 L，令 $(e_x)_{x \in L}$ 为 $\ell^2(L)$ 的标准基，并令 $P_s e_x = e_{x+s}$。与连接集 $S \subseteq L$ 相关联的邻接矩阵，其行和列均由 L 索引，为

$$A_S = (\mathbf{1}_{y-x \in S})_{x,y \in L} = \sum_{s \in S} P_{-s}.$$

对于 $c \in \mathcal{C}$，令 D_c^X，$D_c^Y \subseteq A \times H$为 X 和 Y 的颜色-c 连接集，从而

$$(x, y) \in R_c^X \iff y - x \in D_c^X, \qquad (x, y) \in R_c^Y \iff y - x \in D_c^Y.$$

对于 $d \in H$，定义切片

$$S_{c,d} = \{a \in A : (a, d) \in D_c^X\}, \qquad T_{c,d} = \{a \in A : (a, d) \in D_c^Y\}.$$

固定一个颜色 c，取 $a,b \in A$ 和 $h,d \in H$。由于 f 保持颜色，且 $f(a,h) = (\beta_h(a)\ h)$，有序对 $((a,h),(b,h+d))$ 属于 R_c^X，当且仅当 $((\beta_h(a)\ h),(\beta_{h+d}(b)\ h+d))$ 属于 R_c^Y。根据 D_c^X, D_c^Y 和切片的定义，这等价于

$$b - a \in S_{c,d} \quad \Longleftrightarrow \quad \beta_{h+d}(b) - \beta_h(a) \in T_{c,d}.$$

等价地，$P_f^{-1} A_{T_{c,\ d}\times\{d\}} P_f$ 的第 $(a,\ h)$ b，$h+d$ 项为 $\mathbf{1}_{\beta_{h+d}\ (b)\ -\beta_h\ (a)\ \in T_{c,\ d}}$，而 $A_{S_{c,\ d}\times\{d\}}$ 的对应项为 $\mathbf{1}_{b-a\in S_{c,\ a}}$；上述等价关系使得这两项相等。因此 $P_f^{-1} A_{T_{c,\ d}\times\{d\}} P_f = A_{S_{c,\ d}\times\{d\}}$，也就是说，

$$P_f A_{S_{c,d}\times\{d\}} P_f^{-1} = A_{T_{c,d}\times\{d\}}. \tag{3}$$

设 ℓ 为一个不整除 $\exp(A)$ 的素数。乘以 ℓ 是 A 的一个置换，由引理 2.7，因此元素 ℓs、$s \in S_{c,\ d}$ 两两不同。平移矩阵彼此交换。因此，在 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 上，我们有

$$\begin{aligned} A^{\ell}_{S_{c,d}\times\{d\}} &= \left(\sum_{s\in S_{c,d}} P_{-(s,d)} \right)^{\ell} \\ &= \sum_{s\in S_{c,d}} P_{-(\ell s,\ell d)} = A_{\ell S_{c,d}\times\{\ell d\}}. \end{aligned} \tag{4}$$

同样的计算给出 $A^{\ell}_{T_{c,\ d}\times\{d\}} = A_{\ell T_{c,\ d}\times\{\ell d\}}$ 在 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 上的结果；这里，$\ell T_{c,\ d}$ 中的元素由相同的论证可知彼此不同。对（ℓ 次幂，并在（3）中应用（4），得到两个（0，1）矩阵之间的同余关系。由于它们的元素为 0 或 1 且 $\ell \geq 2$，这两个矩阵在 $\mathbb{Z}$ 上一致，从而得到

$$P_f A_{\ell S_{c,d}\times\{\ell d\}} P_f^{-1} = A_{\ell T_{c,d}\times\{\ell d\}}. \tag{5}$$

由于 $|H|$ 与 $\exp(A)$ 互素，我们可以取 $t \geq 1$，使得 $k = |H|^t \equiv 1 \pmod{\exp(A)}$。令 $k = p_1 \cdots p_r$，其中每个 p_j 都是素数，因而与 $\exp(A)$ 互素。我们断言，对于每个 $j = 0$、……、r，

$$P_f A_{m_j S_{c,d}\times\{m_j d\}} P_f^{-1} = A_{m_j T_{c,d}\times\{m_j d\}}, \qquad m_j = p_1 \cdots p_j,$$

满足 $m_0 = 1$。对于 $j = 0$，这就是（3）。假设该断言对 $j-1$ 成立。取 p_j 次幂，并在 $\mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}$ 上应用（4）中的相同计算，可得该断言对 j 成立；由于两边都是 (0,1) 矩阵，且 $p_j \geq 2$，在 $\mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}$ 上的相等性 $\mathbb{Z}$ 蕴含在 $j = r$ 上的相等性 $m_r = k$，断言即为

$$P_f A_{kS_{c,d}\times\{kd\}} P_f^{-1} = A_{kT_{c,d}\times\{kd\}}. \tag{6}$$

乘以 k 会固定 A 中的每个元素，并且在 H 上是零映射。因此（6）给出

$$P_f A_{S_{c,d}\times\{0\}} P_f^{-1} = A_{T_{c,d}\times\{0\}}.$$

限制在纤维 $A \times \{h_0\}$ 上，我们得到

$$a' - a \in S_{c,d} \quad \Longleftrightarrow \quad \beta_{h_0}(a') - \beta_{h_0}(a) \in T_{c,d}$$

对于所有 c,d 以及所有 $a,a' \in A$。对于第二坐标为 h 和 h' 的顶点，取 $d = h' - h_0$。该等价性表明，$\beta_{h_0} \times \mathrm{id}_H$ 保持每一种颜色。在左侧与 η 复合，即可为原始的 Y 得到所需的同构。□

现在设 A 和 H 为有限阿贝尔群，设 X 和 Y 为定义在 $A\times H$ 上的着色二元 Cayley 结构，并设 $f(a,\ h) = (\beta_h(a)\ \tau(h))$ 是一个从 X 到 Y 的保色同构，且保持 A-纤维划分。按 H - 纤维为每个颜色 - A 关系的邻接矩阵的行和列编号。

对于 $c \in \mathcal{C}$ 和 $d \in H$，行纤维为 $A \times \{h\}$、列纤维为 $A \times \{h+d\}$ 的块是 $|A| \times |A|$ 矩阵

$$A_{c,d}(a,b) = \mathbf{1}_{\{((a,h),(b,h+d)) \in R_c^X\}} = \mathbf{1}_{b-a \in S_{c,d}} \qquad (a,b \in A). \tag{7}$$

平移不变性使得该块与 h 无关。将 X 替换为 Y，得到相应的块 $A'_{c,d}$。令 $e = \exp(A)$ 和 $E = \mathbb{Q}(\zeta_e)$。令 A 为复特征群 $\chi\colon A \to \mathbb{C}^\times$，并令 $F = (\chi(a))_{a \in A,\, \chi \in \widehat{A}}$。由引理 2.10，$F^{-1} = |A|^{-1} F^T$，且 F 同时将所有 A-循环矩阵对角化。定义 $P_h e_a = e_{\beta_h(a)}$ 和 $U_h = F^{-1} P_h F$。

引理 3。2 *There are scalars $\lambda_{c,d}(\chi), \mu_{c,d}(\psi) \in E$ such that*

$$F^{-1} A_{c,d} F = \operatorname{diag}(\lambda_{c,d}(\chi)), \qquad F^{-1} A'_{c,d} F = \operatorname{diag}(\mu_{c,d}(\psi)).$$

For $\psi, \chi \in \widehat{A}$, put $u_h = (U_h)_{\psi,\chi}$. Then

$$\mu_{c,\tau(k)-\tau(h)}(\psi) u_k = u_h \lambda_{c,k-h}(\chi) \qquad (c \in \mathcal{C},\ h,k \in H). \tag{8}$$

Moreover, $\beta_{h_0} \times \tau$ is a color-preserving isomorphism from X to Y if and only if

$$\mu_{c,\tau(k)-\tau(h)}(\psi) u_{h_0} = u_{h_0} \lambda_{c,k-h}(\chi) \tag{9}$$

for all $\psi, \chi \in \widehat{A}$, $c \in \mathcal{C}$, and $h, k \in H$.

Proof 根据（7），a，b项$A_{c,d}$只取决于 $b-a$。将 χ 视为其分量为 $\chi(a)$的列向量，我们得到

$$(A_{c,d}\chi)(a) = \sum_{s \in S_{c,d}} \chi(a+s) = \chi(a) \sum_{s \in S_{c,d}} \chi(s).$$

因此，F的第 χ列是一个特征值为$\lambda_{c,d}(\chi) = \sum_{s \in S_{c,d}} \chi(s)$ 的特征向量。同样，$A'_{c,d}(a, b) = \mathbf{1}_{b-a \in T_{c,d}}$，因此$A'_{c,d}$ 也只取决于 $b-a$，并且是 A-循环矩阵。对于$\psi \in A$ 和 $a \in A$,

$$(A'_{c,d}\psi)(a) = \sum_{b \in A} A'_{c,d}(a,b)\psi(b) = \sum_{t \in T_{c,d}} \psi(a+t) = \psi(a) \sum_{t \in T_{c,d}} \psi(t).$$

因此，F的第 ψ列是$A'_{c,d}$的一个特征向量，其特征值为$\mu_{c,d}(\psi) = \sum_{t \in T_{c,d}} \psi(t) \in E$。这就证明了这两个对角化公式。

固定 h，$k \in H$。由于 f 保持颜色不变，块条目满足

$$A'_{c,\tau(k)-\tau(h)}(\beta_h(a), \beta_k(b)) = A_{c,k-h}(a,b). \tag{10}$$

这些正是两边的（$\beta_h(a)$ b）-条目

$$A'_{c,\tau(k)-\tau(h)} P_k = P_h A_{c,k-h}.$$

通过 F 共轭可得

$$\operatorname{diag}\big(\mu_{c,\tau(k)-\tau(h)}(\psi)\big) U_k = U_h \operatorname{diag}\big(\lambda_{c,k-h}(\chi)\big).$$

左侧和右侧的对角矩阵分别对行和列进行缩放。因此（ψ，χ）-项为（8）。

$\beta_{h_0} \times \tau$ 保持颜色 c 不变的充要条件是

$$A'_{c,\tau(k)-\tau(h)} P_{h_0} = P_{h_0} A_{c,k-h}$$

对每个 h，$k \in H$。经过 F 的共轭后，当且仅当对所有 9，等式 (ψ，χ。逆转基变换即可证明反向结论。□

引理 **3 3** *Let H be a finite abelian group and let $\tau \in$ H . Fix $\psi\ \chi \in \widehat{A}$ and let*。对称群( ),,, $\lambda_{c\,d} = \lambda_{c\,d}\ \chi$ *and* $\mu_{c\,d} = \mu_{c\,d}\ \psi$ *. Suppose that the scalars* $u_h\ _{h\in H}$ *satisfy* $\mu_c\quad _{\tau(k)-\tau(h)} u_k =$ () ,,()(), $u_h \lambda_{c\ k-h}$ *for every c h k. Let* . , ,

$$J = \langle d \in H : \lambda_{c,d} \neq 0 \text{ for some } c\rangle,$$
$$J' = \langle d \in H : \mu_{c,d} \neq 0 \text{ for some } c\rangle.$$

If $u_{h_0} \neq 0$, *then* $u_h \neq 0$ *for every* $h \in h_0 + J$, *and* $\tau\ (h_0 + J)\ = \tau\ (h_0)\ + J'$. *In particular,* $|J| = |J'|$.

Proof 设

$$\Delta = \{d : \lambda_{c,d} \neq 0 \text{ for some } c\}, \qquad \Delta' = \{d : \mu_{c,d} \neq 0 \text{ for some } c\},$$

并在 H 上定义有向图 Γ 和 Γ'：对于 Γ 中的每个 $d \in \Delta$ 以及 Γ' 中的每个 $d \in \Delta'$，连接 h 和 $h+d$。由于对于每个 $d \in H$ 都有 $-d =\ (|H| - 1)\ d$，由 Δ 生成的加法子幺半群就是子群 J。因此，在 Γ 中从 h 可达的顶点构成陪集 $h + J$，而这些陪集恰好是 Γ 的强连通分量。对于 Γ'，同样的论证给出了 J' 的陪集。

设 $C = h_0 + J$。对于 $h \in C$，取一条有向路径

$$h_0 = h^{(0)} \longrightarrow h^{(1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow h^{(m)} = h$$

位于 Γ 中。我们对 m 进行归纳，证明 $u_{h^{(m)}} \neq 0$ 和 $\tau\ (h^{(m)})\ \in \tau\ (h_0)\ + J'$。当 $m = 0$ 时，这由 $u_{h_0} \neq 0$ 和 $\tau\ (h_0)\ \in \tau\ (h_0)\ + J'$ 得出。假设该断言对 m 成立。由于 $h^{(m)} \to h^{(m+1)}$ 是 Γ 的一条弧，存在 c 使得 λ_c、 $_{h^{(m+1)}-h^{(m)}} \neq 0$。在（8）中取 $h = h^{(m)}$ 和 $k = h^{(m+1)}$，得到

$$\mu_{c,\tau(h^{(m+1)})-\tau(h^{(m)})} u_{h^{(m+1)}} = u_{h^{(m)}} \lambda_{c,h^{(m+1)}-h^{(m)}}.$$

右端非零，因此 $u_{h^{(m+1)}} \neq 0$。由于系数 μ 非零，$\tau(h^{(m)}) \to$ τ $\in$ $\tau\ h_0\ + J'$ $u_h \neq 0 (h^{(m+1)})$ 是 Γ' 的一条弧，从而 $(h^{(m+1)})\ (h^{(m)})\ \in \Delta' \subseteq J'$。因此 $(h^{(m+1)})\ ( )$，归纳法得证。将该断言应用于所选路径，得到以及 $\tau(h) \in \tau(h_0) + J'$。

对于反向包含，取 $z \in \tau(h_0) + J'$ 以及一条有向路径

$$z = z^{(0)} \longrightarrow z^{(1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow z^{(m)} = \tau(h_0)$$

在 Γ'中。令 $x_i = \tau^{-1}(z^{(i)})$ 。我们对 i 进行反向归纳，证明 $x_i \in C$ 以及 $u_{x_i} \neq 0$。当 $i = m$ 时， $x_m = h_0 \in C$ 以及 $u_{x_m} = u_{h_0} \neq 0$。假设该断言对 $i + 1$成立。由于$z^{(i)} \to z^{(i+1)}$ 是 Γ' 的一条弧，存在 c 满足$\mu_{c,\ z^{(i+1)}-z^{(i)}} \neq 0$。取 $h = x_i$ 以及 $k = x_{i+1}$ 代入（8）可得

$$u_{x_i} \lambda_{c,x_{i+1}-x_i} = \mu_{c,z^{(i+1)}-z^{(i)}} u_{x_{i+1}}.$$

左边非零，因此 $u_{x_i} \neq 0$和$\lambda_{c,\ x_{i+1}-x_i} \neq 0$，从而得到 $x_{i+1} - x_i \in J$。由于 $x_{i+1} \in h_0 + J$，我们得到 $x_i \in h_0 + J = C$。这就完成了反向归纳。对于 $i = 0$, $x_0 \in C$ $z = \tau\ x_0\ \in \tau\ C$ $\tau\ C\ = \tau\ h_0\ + J'$ ，因此 ( ) ( )。我们得出 ( ) ( )。比较基数可得 $|J| = |J'|$。□

设 q 为奇素数， m 为与 q互素的正整数，并令 $E = \mathbb{Q}(\zeta_m)$。设 Λ 为一个大小为 q^a的集合，其中 $a \in \{1, 2\}$，并设 $Q_0 \leq$ Sym(Λ)为一个正则 q-群。假设 Q_0 和 sQ_0s^{-1} 属于 Sym(Λ) 的同一个 q-子群 W_0，其中$s \in$ Sym(Λ)。对于 $t \in$ Sym(Λ)，令 P_t 为由 $P_t e_x = e_{t(x)}$给出的置换矩阵。

引理 3.4 *Let B_c $_{c\in\mathcal{C}}$ and B'_c $_{c\in\mathcal{C}}$ be families of matrices over E each of whose matrices commutes with every P_t for $t \in Q_0$. Suppose that the digraph associated with B_c is strongly connected. If an invertible diagonal matrix D over E satisfies $B'_c = P_s D B_c D^{-1} P_s^{-1}$ for every $c \in \mathcal{C}$ then D is a scalar matrix.*

Proof 域 E 不含非平凡的 q 阶单位根。事实上，若 $\zeta_q \in E$，则引理 2.8 给出 $E = \mathbb{Q}(\zeta_m, \zeta_q) = \mathbb{Q}(\zeta_{mq})$，因此

$$\varphi(m) = [E : \mathbb{Q}] = \varphi(mq) = (q-1)\varphi(m),$$

这与 q 为奇数的假设相矛盾。任意具有非平凡 q-幂阶的单位根，都有一个阶为 q 的幂。因此，$E^\times$ 没有非平凡有限 q-子群。

令 $M = P_s D$，并考虑单项矩阵群

$$\mathcal{J} = \langle P_t, M P_t M^{-1} : t \in Q_0 \rangle.$$

将每一列中的唯一非零元素替换为 1，即可得到单项矩阵所对应的置换。这定义了一个同态 $\pi : \mathcal{J} \to \Lambda$。$\langle Q_0 \ sQ_0 s^{-1} \rangle \leq :$ Sym( )，其图 W_0 q P_t B_c MP_tM^{-1} 像为，一个有限的 -群。由于 与 交换，其共轭元与 $B'_c = M B_c M^{-1}$ 交换。矩阵 P_t 也与 B'_c 交换。因此，$\mathcal{J}$ 中的每个元素都与每个 B'_c 交换。

取 $Z =$ diag$(z_x) \in$ ker π。对 D 取共轭会保持每个 B_c 的支撑，而对 P_s 取共轭则会按 s 同时置换两个指标。因此，s 给出了关联有向图之间的同构，且 (B'_c) 的有向图是强连通的。由 $ZB'_c = B'_c Z$ 可得，只要 $(B'_c)_{x,\ y} \neq 0$，就有 $z_x = z_y$。由于 (B'_c) 的关联有向图是强连通的，任意两个顶点 x，y 之间都存在一条有向路径 $x = x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_m = y$。依次应用 $z_{x_i} = z_{x_{i+1}}$ 可得 $z_x = z_y$。因此 $Z = zI$。每个 $t \in Q_0$ 的阶都是奇数，所以其所有循环的长度都是奇数，且 det $P_t = 1$。由于相似变换保持行列式，$\det(MP_tM^{-1}) = \det P_t = 1$，而对 P_s 取共轭也保持行列式。因此，$\mathcal{J}$ 中的每个元素的行列式均为 1。特别地，$z^{q^a} = \det Z = 1$。关于单位根的前述论证给出 $z = 1$。因此，π 是单射，且 $\mathcal{J}$ 是一个有限的 q群。

对于 $x \in \Lambda$，令 $\mathcal{J}_x = \{j \in \mathcal{J} : \pi(j)(x) = x\}$。其在一维子空间 Ee_x 上的作用给出一个同态 $j \mapsto j_{x,\ x}$ 从 $\mathcal{J}_x$ 到 $E^\times$。图像是一个有限的 q-群，因此是平凡的。对于任意 $j \in \mathcal{J}$，令 $y = \pi(j)(x)$。由正则性，存在唯一的 $t \in Q_0$，使得 $t(x) = y$。于是 $P_t^{-1} j \in \mathcal{J}_x$，从而 $j_{y,\ x} = (P_t^{-1} j)_{x,\ x} = 1$。由于这对每一列都成立，$\mathcal{J}$的每个元素都是置换矩阵。

特别地，对于每个 $t \in Q_0$，$DP_tD^{-1} = P_s^{-1}(MP_tM^{-1})P_s$ 都是置换矩阵。令 $D =$ diag(d_x)。DP_tD^{-1} 的第 x 列中的非零元素为 $d_{t(x)}/d_x$，因此对于所有 x 和 t，都有 $d_{t(x)} = d_x$。现在由 Q_0 的传递性即可得到结论。□

引理 3.5 *Let q be a prime and let $H = C_{q^2}$. Let each $h \in H$ be written as $i + qj$, $\ with 0 \leq i, j < q$, and identify h with the pair $(i,\ j) \in \mathbb{F}_q^2$. To add $(i,\ j)$ and $(i',\ j')$ take $(i+i',\ j+j')$ if $i + i' < q$ and $(i + i' - q,\ j + j' + 1)$ otherwise, reducing the second coordinate modulo q. Let $Q = H_L$ and put*

$$W = \{(i,j) \mapsto (i + t, j + b_i) : t \in \mathbb{F}_q,\ (b_i) \in \mathbb{F}_q^q\}. \tag{11}$$

Then W is the unique Sylow q-subgroup of 对称群(H) *containing Q, and $N_{\mathrm{Sym}(H)}(W)$ consists precisely of the permutations of the form*

$$\tau(i,j) = (ci + d, aj + b_i), \qquad a, c \in \mathbb{F}_q^\times, \quad d \in \mathbb{F}_q, \quad (b_i) \in \mathbb{F}_q^q. \tag{12}$$

Moreover, every $\tau \in N_{\mathrm{Sym}(H)}(W)$ *satisfies*

$$\tau(h+qt)-\tau(h)=qat \qquad (h\in H,\ t\in \mathbb{F}_q), \tag{13}$$

where a *is as in* (12). *In particular, if* $Q,\ \tau Q\tau^{-1}\le W,$ *then* $\tau \in N_{\mathrm{Sym}(H)}(W)$ 。

*Proof*由引理 2.9，Sym(H) 的一个 Sylow q-子群的阶为 q^{q+1}。(11) 中的置换构成一个具有该阶的群，因此 W 是一个 Sylow q-子群。平移 $h\mapsto h+1$ 生成 Q，其作用为 $(i,\ j)\mapsto($ $i+1,\ j+\delta_{i,\ q-1})$。这里第一坐标模 q 计算，而克罗内克 δ 记录向第二坐标的进位。该平移属于 W，因此 $Q\le W$。

设 V 是 Sym(H) 中包含 Q 的任意 Sylow q-子群。由于 V 是一个非平凡的 q-群，其中心包含一个阶为 q 的子群 Z。由引理 2.4, $Z\le Q$。循环群 Q 有唯一的阶为 q 的子群，因此 Z 由 $h\mapsto h+q$ 生成。其轨道为 $B_i=\{(i,j)\colon\ j\in\mathbb{F}_q\}$，其中 $i\in\mathbb{F}_q$。由于 $Z\le Z(V)$，群 V 保持划分 $D=\{B_i\colon\ i\in\mathbb{F}_q\}$，且每个 $v\in V$ 都与 $(i,j)\mapsto(i,j+1)$ 交换。因此，对于某个 $\sigma\in\mathrm{Sym}(\mathbb{F}_q)$ 以及 $(b_i)\in\mathbb{F}_q^q$, $v(i,j)=(\sigma(i)\ j+b_i)$。作用在这些块上的群 V^D 是一个包含由 $i\mapsto i+1$ 生成的循环群的 q-群。由引理 2.9, $v_q(q!)=1$，因此 $|V^D|\le q$。该循环子群的阶已经是 q，所以它等于 V^D。于是 $V\le W$，比较阶即可得到等式。

每个 W-不变的、块大小为 q 的划分也都是 Q-不变的。正则循环群 Q 只有一个这样的划分。因此，每个 $\tau\in N_{\mathrm{Sym}(H)}(W)$ 都保持 D。它在 D 上的诱导作用正规化了由 $i\mapsto i+1$ 生成的循环群，因此具有 $i\mapsto ci+d$ 的形式。逐集合固定每个 B_i 的子群 $\mathrm{fix}_W(D)$ 在 B_i 上诱导出由 (i,j) 生成的循环群 $\mapsto(i,j+1)$。 τ 的共轭置换这些诱导群，因此

$$\tau(i,j)=(ci+d,a_ij+b_i), \qquad a_i\in\mathbb{F}_q^{\times}.$$

令 $\sigma_1(i,j)=(i+1,j)$，其中元素属于 W。由于 $\tau\sigma_1\tau^{-1}\in W$，其在第二坐标上的作用是每个块上的平移。它在 $\tau\ i\ j \quad \tau\ i+1\ j = c\ i+1\ +(,)$ 处的值为 $(,)(($ $),$ d $a_{i+1}j+b_{i+1})$。比较 j的系数得到 $a_{i+1}=a_i$。因此，所有 a_i都具有相同的非零值 a，如（12）中所述。

反之，设 τ具有（12）的形式。令 $x=ci+d$ 且 $y=aj+b_i$，则有

$$\tau\sigma_1\tau^{-1}(x,y)=(x+c,y+b_{i+1}-b_i), \qquad i=c^{-1}(x-d).$$

该共轭元属于 W。由 τ 进行共轭，会将支撑在 B_i上的第二坐标平移变为支撑在 B_{ci+d}上的平移，并将平移参数乘以 a。这些分块平移与 σ_1生成 W。因此 $\tau W\tau^{-1}\le W$，由阶数比较可知等号成立。最后， h和 $h+qt$具有相同的第一坐标，而它们的第二坐标相差 t。它们的图像的第二坐标相差 at，从而在13中得到（ C_{q^2}）。

若 $Q,\ \tau Q\tau^{-1}\le W$，则 W和 $\tau W\tau^{-1}$都是包含正则循环群 $\tau Q\tau^{-1}$ W 应用于该群，可得 $\tau W\tau^{-1}=$的 Sylow q-子群。将刚刚证明的唯一性 。 □

引理 3.6 *Let* q *be a prime, let* $H=C_q^2,$ *and let* $Q=H_L$. *If* W *is a Sylow* q*-subgroup of* 对称群（H） *containing* $Q,$ *then there are linear coordinates on* $H=\mathbb{F}_q^2$ *in which*

$$W=\{(i,j)\mapsto(i+t,j+b_i):t\in\mathbb{F}_q,\ (b_i)\in\mathbb{F}_q^q\}. \tag{14}$$

Every regular elementary abelian subgroup $T\le W$ *has the form* $T=wQw^{-1}$ *for some permutation*

$$w(i,j)=(i,j+c_i), \qquad (c_i)\in\mathbb{F}_q^q. \tag{15}$$

In particular, if $\tau Q\tau^{-1} \le W$, *then*

$$\tau = wn, \qquad n \in N_{\mathrm{Sym}(H)}(Q) = \mathrm{AGL}(2,q). \tag{16}$$

*Proof*选择一个阶为 q 的子群 $Z_0 \le Z(W)$。由于 $Q \le W$，群 Z_0 中心化 Q。根据引理 2.4，$C_{\mathrm{Sym}(H)}(Q) = Q$。因此，$Z_0 \le Q$，且 Z_0 由 H 的一维子空间中的向量所对应的平移组成。选取线性坐标，使得该子空间为 $V = \{(0,j)\colon\ j \in \mathbb{F}_q\}$。于是，$Z_0$ 由 $(i,j) \mapsto (i,j+1)$ 生成。

每个 $w_0 \in W$都与 Z_0交换，因此它置换 Z_0-轨道 $B_i = \{(i,j)\colon\ j \in \mathbb{F}_q\}$，并具有形式 $w_0(i,j) = (\sigma(i)\ j + b_i)$。作用在 $D = \{B_i\colon\ i \in \mathbb{F}_q\}$ 上的群 W^D 是一个 q-群，包含由 $i \mapsto i+1$ 生成的群。由于 $v_q(q!\ ) = 1$，根据引理 2.9，W^D的阶至多为 q，因而等于这个循环群。因此，W包含于公式 (14) 右侧的群中。两个群的阶均为 q^{q+1}，所以它们相等。

设 $T \le W$是正则的初等阿贝尔群，且 $\pi\colon W \to \mathrm{Sym}(D)$ 是 W在 D上的置换表示。由于 T 是传递的，其像 $\pi(T)$ 在 D上是传递的，因此等于由 $i \mapsto i+1$生成的、阶为 q的群。由此可得 $Z_T = \ker(\pi|_T)$ 的阶为 q。取诱导 $i \mapsto i+1$在 D上的 $t \in T$。那么 $t(i,j) = (i+1, j+b_i)$。由 (14)，每个 $z \in Z_T$都具有形式 $z(i,j) = (i, j+z_i)$。比较 $zt = tz$中的第二坐标可得 $z_{i+1} = z_i$。因此，Z_T包含于 $\{(i,j) \mapsto (i,j+z)\colon\ z \in \mathbb{F}_q\}$，且这两个群的阶均为 q。此外，$T = \langle t, Z_T\rangle$ 和 $t^q = 1$，因为 T 是初等阿贝尔群。由于 $t^q(i,j) = (i, j + \sum_{r=0}^{q-1} b_r)$，我们有

$$\sum_{i=0}^{q-1} b_i = 0. \tag{17}$$

令 $c_0 = 0$ 和 $c_i = \sum_{r=0}^{i-1} b_r$ 取 $1 \le i < q$。由（17），恒等式

$$c_{i+1} - c_i = b_i \qquad (i \in \mathbb{F}_q) \tag{18}$$

对 $i = q-1$ 也成立，其中指标按模 q 计算。定义 $w(i,\ j) = (i,\ j + c_i)$。那么 $w^{-1}tw(i,\ j) = (i+1,\ j + c_i + b_i - c_{i+1}) = (i+1,\ j)$，且 w 与 Z_T 中的每个元素都可交换。因此，$w^{-1}Tw$ 由 $(i,\ j) \mapsto (i+1,\ j)$ 和 Z_T 生成。它们生成 Q，从而证明了 $T = wQw^{-1}$。

现在将此结果应用于 $T = \tau Q\tau^{-1} \le W$ $w^{-1}\tau Q\tau^{-1}w = Q$ $n = w^{-1}\tau \in$。我们有，因 $N_{\mathrm{Sym}(H)}\ Q =$ $2\ q$ 2 5 16 □
此根据引理。，( ) AGL(,)。由此得到 ( )。

*Proof of Theorem 1.1*由于 f保持 A-纤维划分，$f(\mathcal{E}_A) = \mathcal{E}_A$。$R$和 fRf^{-1}都保持 $f(\mathcal{E}_A)$。将 $B = \langle R、\ fRf^{-1}\rangle$ 在该划分上诱导的群记为 B，并令 $Q = H_L$。将纤维 $A \times \{h\}$ 与 h等同。于是 R在这些纤维上诱导出 Q。由于 $f(a,h) = (\beta_h(a)\ \tau(h))$，共轭元 fRf^{-1}透导出 $\tau Q\tau^{-1}$。因此 B 包含这两个群。根据引理 2.3(ii)，B的某个 Sylow q-子群 S包含 Q。根据引理 2.3(iii)，存在元素 $b \in B$ 使得 $b\tau Q\tau^{-1}b^{-1} \le S$。取 b 在 B 中的一个原像 b。由于 $b \in \mathrm{Aut}(Y)$，映射 bf 再次是从 X 到 Y 的保色同构，并保持纤维划分。仍以 f 表示 bf，并令 $f(a,h) = (\beta_h(a)\ \tau(h))$ 表示其坐标映射。根据引理 2.3(ii)，存在 $\mathrm{Sym}(H)$ 的一个 Sylow q-子群 W包含 S。于是

$$Q, \tau Q\tau^{-1} \le W. \tag{19}$$

若 $|H| = q$，则 W的阶为 q，因此等于 Q。若 $H = C_4$，则 W是阶为八的二面体群，而 Q是其唯一的阶为四的循环子群。若 $H = C_2^2$，则 Q是正规克莱因四元群 $V_4 = \{1, (12)(34)、(13)(24)、(14)(23)\}$，位于 $\mathrm{Sym}(H) \cong \mathrm{Sym}(4)$ 中。在

每种情况下，$\tau Q\tau^{-1}=Q$，且引理 3.1 表明，$\beta_{h_0}\times\tau$对每个 $h_0\in H$ 都是保色同构。

现在假设 q 为奇数且 $|H|=q^2$。令 $E=\mathbb{Q}(\zeta_{\exp(A)})$。由于 gcd(|A|, |H|) = 1，且 exp(A) | |A|，我们有 $q\nmid\exp(A)$。固定 $h_0\in H$。对于每个特征有序对 $(\psi,\chi)\in\widehat{A}\times\widehat{A}$，令 $u_h=(U_h)_{\psi,\chi}$, $\lambda_{c,d}=\lambda_{c,d}(\chi)$，并令 $\mu_{c,d}=\mu_{c,d}(\psi)$。按照引理 3.3 定义 J 和 J'。首先假设 $u_{h_0}\neq 0$，并针对该有序对考察 (8)。

若 $J=H$，引理 3.3 给出每个 $h\in H$ 对应的 $J'=H$ 和 $u_h\neq 0$。令 $B_c(h,\ k)=\lambda_{c,\ k-h}$, $B'_{c\ h\ k}=\mu_{c\ k-h}$ $D_u=$ u_h $B_{c\ c\in\mathcal{C}}$ $B'_{c\ c\in\mathcal{C}}$ (,) . 以及 diag( )。矩阵族 ( ) 和 ( ) 都与 Q 的置换矩阵可交换，并且与 $(B_c)_{c\in\mathcal{C}}$ 相关联的有向图是强连通的。在 (8) 中，将 h, k 替换为 $\tau^{-1}(h)$ $\tau^{-1}(k)$，再除以 $u_{\tau^{-1}(k)}$。由此得到

$$\mu_{c,k-h}=u_{\tau^{-1}(h)}\lambda_{c,\tau^{-1}(k)-\tau^{-1}(h)}u^{-1}_{\tau^{-1}(k)}.$$

右侧的表达式是$\tau^{-1}(h)$ $\tau^{-1}(k)$ 项，因此是 $D_uB_cD_u^{-1}$的h,k) 项。于是 $P_\tau D_uB_cD_u^{-1}P_\tau^{-1}$。根据（19）和引理 3.4，$D_u$是数量矩阵，因此

$$\mu_{c,\tau(k)-\tau(h)}=\lambda_{c,k-h}\qquad(c\in\mathcal{C},\ h,k\in H).\tag{20}$$

如果 $J=\{0\}$，那么根据引理 3.3，$J'=\{0\}$。在（8）中取 $h=k=h_0$ 得到$\mu_{c,\ 0}=\lambda_{c,\ 0}$。对于 $k\neq h$，（20）中的两个系数都为零，因为 $J=J'=\{0\}$。因此在此情形下（20）同样成立。

设 $H=C_{q^2}$，并对其群运算使用加法记号，因此单位元为 0，h 的 t 次幂为 th。它唯一的 q 阶子群为 $qH=\{qt\colon\ t\in\mathbb{F}_q\}$，由元素 $q=q\cdot 1$ 生成；其陪集为 q 个大小为 q 的块。根据（19）和引理 3.5，$\tau\in N_{\mathrm{Sym}(H)}$ W qH $a\in\mathbb{F}_q^\times$ ()。它在每个陪集上的限制具有相同的乘子。在特别地，$\tau(h_0+qt)=\tau(h_0)+qat$对每个 $t\in\mathbb{F}_q$ 都成立。剩下的情形是 $|J|=q$，此时引理 3.3 给出 $J=J'=qH$。将 h_0+qH 参数化为 h_0+qt，并将其图像参数化为 $\tau(h_0)+qt'$。在这些坐标下，τ 的限制为 $t\mapsto at$。将两个陪集都同一为$\mathbb{F}_q$，令

$$C_c(t,r)=\lambda_{c,q(r-t)},\quad C'_c(t,r)=\mu_{c,q(r-t)},\quad D_0=\mathrm{diag}_{t\in\mathbb{F}_q}(u_{h_0+qt}).$$

由引理3.3，D_0 可逆。令 $s_a(t)=at$。方程（8）给出 $C'_c=P_{s_a}D_0C_cD_0^{-1}P_{s_a}^{-1}$。这两个矩阵族都与 Q_0 上的正则平移群 $\mathbb{F}_q$可交换。由于 $J=qH$，与（C_c）$_{c\in\mathcal{C}}$ 相关的有向图是强连通的。此外，$s_aQ_0s_a^{-1}=Q_0$。应用引理3.4，取 $W_0=Q_0$，可得 D_0 是数量矩阵。因此 u_h 在 h_0+qH上为常数，且

$$\mu_{c,qat}=\lambda_{c,qt}\qquad(c\in\mathcal{C},\ t\in\mathbb{F}_q).\tag{21}$$

对于 $k-h\in qH$，方程（13）和（21）给出（20）。对于$k-h\notin qH$，该陪集划分在τ下不变，因此 $\tau(k)-\tau(h)\notin qH$。由于 $J=J'=qH$，（20）中的两个系数均为零。

现在令 $H=C_q^2$。由引理 3.6，我们可以选取线性坐标，并令 $\tau=wn$，其中 $w(i,j)=(i,j+c_i)$ 且 $n\in\mathrm{AGL}(2,q)$。令 $\eta=\mathrm{id}_A\times n$并令 $X^*=\eta X$。由引理 2.5，$\mathrm{AGL}(2,q)=N_{\mathrm{Sym}(H)}(H_L)$。因此，$n$正规化 Q，且 η正规化 $(A\times H)_L$。于是，X^*仍然是 $A\times H$ 上的 Cayley 结构。同构 $f^*=f\eta^{-1}\colon X^*\to Y$具有如下形式：$f^*(a,z)=(\gamma_z(a)\ w(z))$，其中 $\gamma_z=\beta_{n^{-1}(z)}$。对于 X^*,Y，f^*，按式 (7) 定义块 $A_{c,d}, A'_{c,d}$，按引理 3.2 定义系数 λ,μ,u_z，并按引理 3.3 定义子群 J,J'，在新坐标中仍采用相同的记号。令 $z_0=n(h_0)$ 且令 $V=\{(0,j)\colon\ j\in\mathbb{F}_q\}$。于是 $\gamma_{z_0}=\beta_{h_0}$。由于 $nQn^{-1}=Q$ 且 $\tau=wn$，我们仍有 $Q,wQw^{-1}\leq W$。

假设某个特征对满足 $u_{z_0}\neq 0$，并生成一维子群 J，且该子群不同于 V。令 $z_0+J=\{(i,ri+s)\colon\ i\in\mathbb{F}_q\}$。它在 w 下的图像为 $\{(i,ri+s+c_i)\colon\ i\in\mathbb{F}_q\}$。由引理 3.3，该图像是陪集 $w(z_0)+J'$。由于 $|J'|=|J|=q$，子群 J'是

一维的，且图像中的点具有形式 $(i, r'i+s')$，其中 i 遍历 $\mathbb{F}_q$。比较第二坐标可得 $ri+s+c_i = r'i+s'$ 对所有 i 均成立。因此 $c_i = (r'-r)i+(s'-s)$，且 w 是仿射的。由此，引理 3.1 给出一个同构 $\gamma_{z_0} \times w\colon X^* \to Y$。

否则，每个具有 $u_{z_0} \neq 0$ 的特征对都具有 $J \in \{\{0\}, V, H\}$。若 $J = H$，则将 τ 替换为 w 后，导出（20）的论证仍然适用，因为 Q、$wQw^{-1} \leq W$。特别地，引理 3.4 使得 $\mathrm{diag}(u_z)$ 成为数量矩阵，从而对于所有 h、$k \in H$，都有 $\mu_{c,\,w(k)-w(h)} = \lambda_{c,\,k-h}$。若 $J = \{0\}$，则根据引理 3.3，有 $J' = \{0\}$。因此，对于 $d \neq 0$，有 $\lambda_{c,\,d} = \mu_{c,\,d} = 0$；当 $h \neq k$ 时，（20）的两边均为零。在（8）中取 $h = k = z_0$，得到 $\mu_{c,\,0} u_{z_0} = u_{z_0}\lambda_{c,\,0}$；由于 $u_{z_0} \neq 0$，我们得到 $\mu_{c,\,0} = \lambda_{c,\,0}$。这些系数与对角位置无关，因此（20）对于 $h = k$ 也成立。

若 $J = V$，令 $z_0 + V = \{(i_0, j) : j \in \mathbb{F}_q\}$，其中 i_0 是 z_0 的第一坐标。引理 3.3 给出 $w(z_0 + V) = w(z_0) + J'$。由于 $w(i,j) = (i, j + c_i)$ 将 V 的每个陪集作为集合固定，故 $w(z_0 + V) = w(z_0) + V$，从而 $J' = V$。通过对 $z_0 + (0,t)$ 与 $w(z_0) + (0,t)$ 赋予同一参数 $t \in \mathbb{F}_q$，将 $z_0 + V$ 与 $w(z_0) + V$ 参数化。在这些坐标下，w 的限制为恒等映射。置

$$C_c(t,r) = \lambda_{c,(0,r-t)}, \quad C'_c(t,r) = \mu_{c,(0,r-t)}, \quad D_0 = \mathrm{diag}_{t\in\mathbb{F}_q}(u_{z_0+(0,t)}).$$

由引理 3.3，D_0 是可逆的，且 (8) 给出 $C'_c = D_0 C_c D_0^{-1}$。两个矩阵族均与正则平移群 $Q_0 = (\mathbb{F}_q)_L$ 交换。由于 $J = V$，与 $(C_c)_{c\in\mathcal{C}}$ 相关联的有向图是强连通的。引理 3.4 在 $s = \mathrm{id}$ 与 $W_0 = Q_0$ 的条件下表明，D_0 是数量矩阵。由此可得，对 $c \in \mathcal{C}$ 与 $d \in V$，有 $\mu_{c,\,d} = \lambda_{c,\,d}$。若 $k = (i_1, j_1)$ 与 $h = (i_2, j_2)$ 位于 V 的同一陪集中，则 $i_1 = i_2$ 且 $w(k) - w(h) = (0, j_1 - j_2) = k - h \in V$。若 $i_1 \neq i_2$，则 $k - h$ 与 $w(k) - w(h)$ 均位于 V 之外。由于 $J = J' = V$，相应的系数为零。这就对所有 h、$k \in H$ 证明了 (20)。

固定一个特征对 (ψ)、(χ) 和一种颜色 c_0。如果 $u_{h_0} \neq 0$，将 (20) 乘以 u_{h_0} 以得到 (9)。如果 $u_{h_0} = 0$，则 (9) 的两边均为零。因此，对于每个特征对、每种颜色以及所有 h、$k \in H$，(9) 都成立（在初等阿贝尔情形中，z_0 表示 h_0 在新坐标下的图像）。根据引理 3.2，$\beta_{h_0} \times \tau\colon X \to Y$ 在循环情形下是一个保色同构；同样，$\gamma_{z_0} \times w\colon X^* \to Y$ 在初等阿贝尔情形下也是保色同构。将后一个映射与 η 复合，得到 $(\gamma_{z_0} \times w)\eta = \beta_{h_0} \times \tau$，因为 $wn = \tau$ 和 $\gamma_{z_0} = \beta_{h_0}$。因此，在此情形下，$(a,h) \mapsto (\beta_{h_0}(a)\ \tau(h))$ 也是从 X 到 Y 的保色同构。$b \in B$ 的选择先于 h_0，所以同一个 b 对每个 $h_0 \in H$ 都适用。□

定理1.2和1.3的证明

本节证明定理1.2 和1.3。我们先证明定理1.2，再证明引理4.1，最后由这两个结果推出定理1.3 。

Proof of Theorem 1.2 我们对 $|G|$ 的不同素因子个数 r 进行归纳。若 G 是平凡的，则 $r = 0$，而 X 和 Y 共有的那个顶点上的恒等映射，就是所需的保色同构。若 $r = 1$，则 G 本身就是它唯一的西洛子群。$D_G = \mathrm{Sym}(G)$，因此从 X 到 Y 的每个保色同构都属于 D_G。设 $r \geq 2$，并且定理对不同素因子个数少于 r 的无立方因子阶阿贝尔群成立。令 $q = \min \pi(|G|)$，并令 $G = A \times H$，其中 $A = \prod_{p>q} G_p$ 且 $H = G_q$。由于 $|G|$ 是无立方因子阶的，H 同构于 C_q、C_{q^2} 或 C_q^2。

置 $R = G_L$。群 $B = \langle R, fRf^{-1}\rangle \leq \mathrm{Aut}(Y)$ 与 $\langle G_L, f^{-1}G_L f\rangle$ 共轭。因此，对 $\langle G_L, f^{-1}G_L f\rangle$ 的完备块系统序列进行共轭可得到 B 的一个完备块系统序列。由引理 2.14，存在 $a_0 \in B$ 使得 A_L 和 $(fA_Lf^{-1})^{a_0}$ 具有相同的轨道划分，即 $a_0^{-1}(f(\mathcal{E}_A)) = \mathcal{E}_A$。因此，$f_1 = a_0^{-1} f$ 保持 A-纤维划分，并且

具有如下形式： $f_1(a,\ h)\ =(\beta_h(a)\ \tau(h))$。群 $B_1=\langle R,\ f_1Rf_1^{-1}\rangle\le B$ 保持完备序列中的每个划分以及纤维划分 $f_1(\mathcal{E}_A)$。

根据定理 1.1，存在 $b\in B_1$ 使得 $f_2=bf_1$ 具有如下性质：记f_2（$a,\ h$）$=$（γ_h（a）$\ \rho$（h））， 对于每个固定的 $h_0\in H$，选择 $\alpha=\gamma_{h_0}$ 给出一个保色同构

$$(\alpha,\rho)\colon X\longrightarrow Y. \tag{22}$$

由于 $B_2=\langle R,\ f_2Rf_2^{-1}\rangle\le B_1$，群 B_2 也保持完备序列中的所有划分以及纤维划分 $f_1(\mathcal{E}_A)$。

在 A上定义着色结构 U，V，其关系由（$c,\ h,\ k$）$\in\mathcal{C}\times H^2$索引，定义为

$$R^U_{c,h,k}=\{(a,a')\colon\big((a,h),(a',k)\big)\in R^X_c\},$$
$$R^V_{c,h,k}=\{(a,a')\colon\big((a,\rho(h)),(a',\rho(k))\big)\in R^Y_c\}.$$

这些关系在平移群 A_L下不变，因此 U，V是 A上的彩色二元 Cayley 结构。根据（22）， α: $U\to V$ 是一个保色同构。

令 $C=A\times\{\rho(h_0)\}$。 A_L 和$f_2A_Lf_2^{-1}$都稳定 C，因为 A_L 逐集固定每个纤维，而 f_2 将 $A\times\{h_0\}$ 映射到 C 上。通过第一坐标将 C 与 A 对应起来。在此纤维上， f_2 诱导出 α，因此这两个群在 C上分别诱导出 A_L 和 $\alpha A_L\alpha^{-1}$。特别地，

$$\langle A_L,\alpha A_L\alpha^{-1}\rangle\le\mathrm{Stab}_{B_2}(C)^C\le\mathrm{Stab}_{B_1}(C)^C.$$

由于 C 是纤维划分 f_1（$\mathcal{E}_A$）中的一个块，引理2.14（iii）表明，右侧的群在 C上保持一个完备块系统序列。左侧的群保持相同的序列。因而通过 α 进行共轭得到 $\langle A_L$的一个完备序列， $\alpha^{-1}A_L\alpha\rangle$。

A 的阶不含立方因子，并且有 $r-1$ 个不同素因子。根据归纳法，存在一个保色同构 $s=\prod_{p>q}s_p$: $U\to V$，其中 $s_p\in$ 对称群(G_p)。按照构造， s 将每个R^U_c、h、k 映射到R^V_c、h、k上。因此，$(s$、$\rho)$: $X\to Y$就是所需的保色同构，其中$(s$、$\rho)\in\prod_{p||G|}$对称群(G_p)。□

引理 4 *Let $G=G_1\times\cdots\times G_r$ be a direct product of finite groups, and let X Y be colored。 binary Cayley structures on G. For each i let S_i be a universal color-preserving solving set for G_i. Thus for any finite families Q_α and Q'_α of G_i $_L$-invariant binary relations in G_i^2 if a permutation σ of G_i maps Q_α onto Q'_α for every α then some $s_i\in S_i$ does so simultaneously for all α. Suppose that $h=h_1\ldots h_r\in\prod_i$ G_i is a color-preserving(、、) 对称群() isomorphism from X to Y、 acting by*

$$h(x_1,\ldots,x_r)=(h_1(x_1),\ldots,h_r(x_r)),\qquad h_i\colon G_i\to G_i.$$

Then there is an element s_1 $s_r\in\prod_i S_i$ such that $s=s_1$ $s_r\in\prod_i$ G_i is a(, ...,), color-preserving isomorphism from X to Y.
.....,) 对称群( )

*Proof*固定 i并令 $G_{-i}=\prod_{j\ne i}G_j$。将 G中的元素写成（$a,\ u$），其中 a位于第 i个因子中。对于每种颜色 c以及每个（$u,\ v$）$\in G^2_{-i}$，在 G_i上定义一个二元关系如下：

$$Q_{c,u,v}=\{(a,b)\in G_i^2\colon((a,u),(b,v))\in R^X_c\}. \tag{23}$$

对于 G上的映射 $\phi=(\phi_1,\ .....,\ \phi_r)$，令 $\phi_{-i}=\prod_{j\ne i}\phi_j$，并定义

$$Q'_{c,u,v}(\phi)=\{(a,b)\in G_i^2\colon((a,\phi_{-i}(u)),(b,\phi_{-i}(v)))\in R^Y_c\}. \tag{24}$$

由于 X，Y是 G上的 Cayley 结构，因此有 $G_L\le$Aut(X) 和 $G_L\le$Aut(Y)。对于任意 $g\in G_i$，在两个分量上分别左乘 (1，...，g，...，1)，都会保持属于每个 R^X_c和 R^Y_c的性质。由此可知，$Q_{c,\ u,\ v}$以及 $Q'_{c,\ u,\ v}(\phi)$ 都是 $(G_i)_L$-不变的。

设 $\phi = \prod_{j=1}^{r} \phi_j \in \prod_j \mathrm{Sym}(G_j)$ 是从 X 到 Y的保色同构。对于所有 $a,\ b \in G_i$，我们有

$$\begin{aligned}(a,b) \in Q_{c,u,v} &\iff ((a,u),(b,v)) \in R_c^X \\ &\iff ((\phi_i(a),\phi_{-i}(u)),(\phi_i(b),\phi_{-i}(v))) \in R_c^Y \\ &\iff (\phi_i(a),\phi_i(b)) \in Q'_{c,u,v}(\phi).\end{aligned}$$

因此，ϕ_i 将由 (23) 定义的每个关系 $Q_{c,u,v}$ 映射到由 (24) 定义的相应关系 $Q'_{c,u,v}(\phi)$。根据 S_i 的普适性，存在一个 $s_i \in S_i$，使得对于每个 c, u, v，$s_i(Q_{c,u,v}) = Q'_{c,u,v}(\phi)$。因此，对于从 X 到 Y 的每个保持颜色的同构 $\phi = \prod_{j=1}^{r} \phi_j \in \prod_j \mathrm{Sym}(G_j)$ 以及每个 i，都存在这样的 s_i。

令 $\phi^{(s)}$ 为从 ϕ 得到的映射，将其第 i 个因子替换为 s_i:

$$\phi^{(s)} = (\phi_1, \ldots, \phi_{i-1}, s_i, \phi_{i+1}, \ldots, \phi_r).$$

那么，对于所有 $a, b \in G_i$ 和 $u, v \in G_{-i}$,

$$\begin{aligned}((a,u),(b,v)) \in R_c^X &\iff (a,b) \in Q_{c,u,v} \\ &\iff (s_i(a),s_i(b)) \in Q'_{c,u,v}(\phi) \\ &\iff ((s_i(a),\phi_{-i}(u)),(s_i(b),\phi_{-i}(v))) \in R_c^Y.\end{aligned}$$

因此，$\phi^{(s)}$ 再次是从 X 到 Y 的保持颜色的同构。

现在我们依次替换各个因子。对于 $i = 1, \ldots, r$，我们构造一个保持颜色的同构 $\phi^{(i)} = (\phi_1^{(i)}, \ldots, \phi_r^{(i)}) \in \prod_j \mathrm{Sym}(G_j)$，它从 X 到 Y，并且满足 $\phi_j^{(i)} \in S_j$（对 $j \le i$）。令 $\phi^{(0)} = h$，则 $\phi^{(0)} \in \prod_j \mathrm{Sym}(G_j)$，且 $\phi^{(0)}$ 是从 X 到 Y 的保持颜色的同构。假设对于某个 i，我们已构造出一个保持颜色的同构 $\phi^{(i-1)} = (\phi_1^{(i-1)}, \ldots, \phi_r^{(i-1)}) \in \prod_j \mathrm{Sym}(G_j)$，它从 X 到 Y，且满足 $\phi_j^{(i-1)} \in S_j$（对 $j \le i-1$）。将前一段的结论应用于 $\phi = \phi^{(i-1)}$: 存在 $s_i \in S_i$，将 $\phi^{(i-1)}$ 的第 i 个因子替换为 s_i 后，得到一个保持颜色的同构 $\phi^{(i)}$，它从 X 到 Y，并且 $\phi^{(i)} \in \prod_j \mathrm{Sym}(G_j)$。于是，对于 $j \le i$，有 $\phi_j^{(i)} \in S_j$。对于 $i = r$，我们得到 $\phi^{(r)} = (s_1, \ldots, s_r) \in \prod_j \mathrm{Sym}(G_j)$，使得对每个 j 都有 $s_j = \phi_j^{(r)} \in S_j$，并且 $\phi^{(r)}$: $X \to Y$ 是一个保持颜色的同构。□

Proof of Theorem 1.3 令 $C = \{c_0\}$，并令 R_{c_0} 为弧集 $\{(g,\ gs)$: $g \in G,\ s \in S\}$ 的 $X = \mathrm{Cay}(G,\ S)$。则 $X = (G,\ (R_c)_{c \in C})$ 是一个颜色集为 C 的彩色二元 Cayley 结构，其中 $R_{c_0} \subseteq G^2$ 是 X 的弧关系，而 $G_L \le$ 是 $\mathrm{Aut}(X)$，因为 X 是 Cayley 有向图。对于任意在 G 上且同构于 X 的 Cayley 有向图 Y，令 R'_{c_0} 为其弧集。则 $Y = (G,\ (R'_c)_{c \in C})$ 是一个具有相同颜色集 C 的彩色二元 Cayley 结构，并且保色同构 $X \to Y$ 恰好是有向图同构 $X \to Y$。令 Y为任意一个这样的 Cayley 有向图。

定理 1.3 的假设断言，每个在 G 上且同构于X 的 Cayley 有向图 Y' 都存在一个同构 f: $X \to Y'$，使得 $\langle G_L,\ f^{-1} G_L f \rangle$ 具有一个完备块系统序列。因此，对于当前的 Y，存在这样的 f: $X \to Y$。定理 1.2 随即给出一个保色同构 $d = \prod_{p||G|} d_p$: $X \to Y$，其中 $d_p \in \mathrm{Sym}(G_p)$。由于 $d = \prod_{p||G|} d_p \in D_G$ 是一个保色 Sylow 坐标同构，引理 4.1 将每个因子 d_p 替换为一个元素 $s_p \in S_p$，并得到一个保色同构 $s = \prod_{p||G|} s_p$: $X \to Y$。

令 $\prod_{p||G|} S_p = \{ s_{p\ p||G|} \quad s_p \in S_p\}$ $s_{p\ p||G|}$ $G = (\,)$:，其中 $(\,)$ $\prod_{p||G|} G_p$ $s_{p\ p||G|}\ x_{p\ p||G|} = s_p\ x_{p\ \ p||G|}$ $s = s_{p\ p||G|}$
在 上逐分量作用，即 $(\,)\,(\,)\,(\,)\,(\,)$。那么 $(\,)$ 是一个保持颜色的

同构，从 X 到 Y，属于这个乘积。由于 Y 是 G 上与 X同构的任意 Cayley 有向图，同样的论证适用于每个这样的 Y。根据求解集的定义，这个乘积是 X的一个求解集。□

5 结论

本文研究了无立方因子阶阿贝尔群上的 Cayley 有向图的同构问题。我们证明，若两个彩色二元 Cayley 结构之间存在保色同构 f，且 $\langle G_L,\ f^{-1}G_L f\rangle$ 具有完备块系统序列，那么它们之间也存在保色 Sylow 坐标同构。因此，对于固定的 Cayley 有向图 X，只要每个与 X 同构的 Cayley 有向图都通过这种同构与 X 相连，那么针对每个西洛子群各取一个通用保色求解集，其乘积便是 X的求解集。由此得到 Sylow 约化，并对 Dobson 的公开问题给出了肯定答案。

声明与陈述

经费

本研究得到中国国家自然科学基金（项目编号：12261071、12571019）和青海省自然科学基金（项目编号：2025-ZJ-902T）的资助。

利益冲突

作者声明不存在任何利益冲突。

参考文献

[1] Dobson, E.：关于某些阶的幂零群的凯莱对象的凯莱同构问题。组合学电子期刊 **21**（3），#P3.8（2014年）。https://doi.org/10.37236/3123[2] Dobson, T.：关于 Sylow 子群为初等阿贝尔群或循环群的阿贝尔群的凯莱图同构问题。组合学电子期刊**25**（2），#P2.49（2018年）。https://doi.org/10.37236/4983[3] Feng, Y.-Q., Kov´acs, I.：秩为 5 的初等阿贝尔群是 DCI 群。组合学理论杂志 A 辑**157**，162–204（2018年）。https://doi.org/10.1016/j.jcta.2018.02.003[4] Godsil, C., Royle, G.：《代数图论》。数学研究生教材，第 207 卷。施普林格，纽约（2001年）。https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0163-9[5] Hall, P.：关于可解群的一则注记。伦敦数学学会杂志**3**，98–105（1928年）。https://doi.org/10.1112/jlms/s1-3.2.98

[6]Hardy, G.H., Wright, E.M.: 《数论导引》，第 6 版。牛津大学出版社，牛津（2008年）。https://doi.org/10.1093/oso/ 9780199219858.001.0001[7] Kov´acs, I., Muzychuk, M., P´alfy, P.P., Ryabov, G., Somlai, G.: $C_p^2 \times C_n$ 和 $C_p^2 \times C_q^2$ 的有向图 CI性质。组合学理论杂志 A 辑 196，105738（2023年）。https://doi.org/10.1016/j.jcta.2023.105738[8] Li, C.H.: 关于有限凯莱图的同构——综述。离散数学 256（1–2），301–334（2002年）。https://doi.org/10.1016/S0012-365X(01)00438-1[9] Liu, X., Zhou, S.: 凯莱图的特征值。组合学电子期刊 29（2），#P2.9（2022年）。https://doi.org/10.37236/8569[10] Muzychuk, M.: ´Ad´am 猜想在无平方因子情形下成立。组合学理论杂志 A 辑 72（1），118–134（1995年）。https://doi.org/10.1016/0097-3165(95) 90031-4[11]Muzychuk, M.: 循环图同构问题的一个解。伦敦数学学会学报（第 3 辑）88（1），1–41（2004年）。https://doi.org/10.1112/ S0024611503014412[12] Robinson, D.J.S.: 《群论教程》，第 2 版。数学研究生教材，第 80 卷。施普林格，纽约（1996年）。https://doi.org/10.1007/ 978-1-4419-8594-1[13] Sylow, L.: 关于置换群的定理。数学年刊 5，584–594（1872年）。https://doi.org/10.1007/BF01442913[14] Terras, A.: 《有限群上的傅里叶分析及其应用》。伦敦数学学会学生教材，第 43 卷。剑桥大学出版社，剑桥（1999年）。https://doi.org/10.1017/CBO9780511626265[15] Washington, L.C.: 《分圆域导论》，第 2 版。数学研究生教材，第 83 卷。施普林格，纽约（1997年）。https://doi.org/10.1007/ 978-1-4612-1934-7[16] Wielandt, H.: 《有限置换群》。学术出版社，纽约（1964年）。https://doi.org/10.1016/C2013-0-11702-3