# 自旋–轨道耦合超导薄膜中对N´eel畴壁的磁电响应：自发电流、涡旋钉扎和涡旋–反涡旋成核

P. J. F. Cavalcanti, [1, *] M. D. Croitoru, [1, 2, †] 和 A. I. Buzdin[1, 3, ‡]
[1] University Bordeaux, LOMA UMR-CNRS 5798, F-33405 Talence Cedex, France
[2] Departamento de Física, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE 50740-560, Brazil
[3] Institute for Computer Science and Mathematical Modeling, Sechenov First Moscow State Medical University, Moscow, Russia

arXiv:2611.32379v1 [cond-mat.supr-con] 24 Nov 2026

我们研究了在界面拉什巴自旋轨道耦合存在时，邻近耦合于铁磁层的薄超导膜中由N´eel畴壁诱导的超导响应。磁织构与反演对称性破缺的共同作用产生磁电耦合，进而诱导自发平衡电流。为建立对连续旋转磁织构的基本响应，我们首先将周期性谐波摆线作为一个解析上易于处理的参考问题。在 $T_c$附近，该参考问题展示了磁电耦合如何修正超导序参量；而在 $T_c$ 以下，它为描述相位响应、Pearl屏蔽以及与涡旋的相互作用提供了一个简单场景。随后，我们转向本文的主要问题——单个N´eel畴壁，并推导其平衡相位分布、自发电流、磁场和涡旋–畴壁相互作用能的解析表达式。我们表明，N´eel畴壁充当延展的磁电源，并通过畴壁宽度与有效屏蔽长度之间的竞争，产生涡旋度选择性钉扎景观。我们进一步证明，即使不存在外加磁场，足够强的磁电耦合也能使束缚涡旋–反涡旋对在能量上优于无涡旋态。我们的结果为理解自旋轨道耦合超导薄膜中N´eel畴壁引起的磁电涡旋钉扎和涡旋–反涡旋成核提供了一个解析框架。

## I. 引言

阿布里科索夫涡旋是 II 型超导体中的量子化磁通线。控制其钉扎、成核、运动和湮灭，对于超导应用和磁通电子学至关重要 [1, 2]。虽然涡旋运动常与耗散相关联，但涡旋也可以作为可控的信息载体，因此人们致力于寻找能够确定性地控制其位置、稳定性和动力学的机制。

一种特别有吸引力的涡旋调控途径是采用超导体–铁磁体混合结构 [3, 4], ，其中磁织构会产生具有空间结构的磁场和交换场，从而为涡旋创建有效的钉扎势景。早期的理论和实验研究表明，磁畴壁能够与超导体相互作用、改变局部电动力学，并操控单个涡旋 [5, 6]。相关理论研究还表明，非超导缺陷周围迈斯纳电流流线发生畸变所产生的杂散场分布，可用于推断II型超导体中此类缺陷的位置和形状 [7, 8]。随后，基于伦敦理论的研究证实，布洛赫畴壁可以充当高效的磁性微操纵器，产生涡旋吸引和引导效应 [9]。近期研究表明，图案化铁磁结构能够为涡旋运动创建可调通道和势垒，从而为构建阿布里科索夫涡旋微电路和存储元件开辟了途径 [1]。

涡旋–畴壁耦合的一个重要方面，是磁织构与超导涡旋之间相互进行动力学控制的可能性。由于涡旋可能被束缚在畴壁产生的钉扎势中，畴壁运动可以诱导受控的涡旋输运 [9, 10]。相反，涡旋超电流和磁场可能对磁织构作出响应，并影响畴壁动力学[11, 12]。这种相互耦合为超导–磁性混合器件开辟了新的前景，使其能够实现可重构的涡旋引导和可调控的磁织构[13–17]。在具有多个畴壁的系统中，相互重叠的磁电钉扎景观有望形成经过设计的涡旋通道和有效势网络，适用于磁通电子学应用和低耗散器件设计 [18]。经过设计的磁电景观也可能产生涡旋棘轮效应。在非对称或动态调制的钉扎势中，交替驱动可产生定向涡旋运动和超导整流 [19–22]。由于畴壁提供了空间延展且可能可重新配置的涡旋势，具有自旋–轨道耦合的超导体–铁磁体杂化结构可能为可调涡旋棘轮和可编程

* paulo-jose.fonseca-cavalcanti@u-bordeaux.fr
† mihail.croitoru@ufpe.br
‡ alexandre.bouzdine@u-bordeaux.fr

涡旋输运通道 [1, 18]。

对涡旋物质的控制并不局限于操纵预先存在的涡旋，还包括对其进行可控成核。在超导凝聚态中，涡旋–反涡旋对可能在限域、非均匀磁场、局部加热或超电流拥挤的作用下产生。特别是，已有研究表明，围绕钉扎中心流动的迈斯纳电流能够生成束缚涡旋偶极子，这些偶极子可被视为充分发展的涡旋–反涡旋对的前驱体 [23]。通过使用扫描隧道显微镜针尖局部抑制超导性，实现了对这一机制更直接的验证；在此过程中，形成的热点周围的超电流拥挤会导致可控的涡旋–反涡旋对产生 [2]。近期，研究人员还展示了在超导体内部任意位置按需光学生成单个稳定涡旋的方法：该方法基于紧聚焦激光脉冲被吸收后产生的快速淬火，使系统局部升温至临界温度以上 [24]。总的来说，这些结果表明，通过空间工程化设计非平衡态或载流超导态，可以为超导电流和拓扑激发的可控生成与操纵提供一条途径 [25–27]。

在不具有反演对称性的系统中，自旋–轨道耦合（SOC）提供了一种概念上截然不同的机制，用以调控超导相位和电流分布 [28, 29]。在这类系统中，超导凝聚态可能呈现磁电效应：超电流能够诱导自旋极化，而自旋极化或交换场与Rashba自旋轨道耦合相结合，则可以改变超导相位和电流响应 [30–32]。在金兹堡–朗道框架 [33], 中，这种物理现象由利夫希茨不变量描述，即与规范不变超导动量线性相关、并与磁场或交换场耦合的项 [32, 34]。在人工拉什巴超导体中也观测到了这类利夫希茨不变量物理的实验特征：面内磁场会使涡旋响应产生各向异性形变，并相应增强涡旋钉扎 [35]。在均匀的非中心对称系统中，这类项会促使形成具有有限库珀对动量的螺旋超导态[36–40], ，此类状态类似于富尔德–费雷尔–拉金–奥夫奇尼科夫（FFLO）态 [41–45]。然而，有限的库珀对动量本身并不意味着存在未补偿的电荷电流：在均匀系统中，反常自旋–轨道贡献可能会抵消常规轨道贡献 [46]。相比之下，在具有局域Rashba自旋轨道耦合和交换场的超导体–铁磁体界面处，这种抵消不会发生，从而产生自发界面电流及相应的屏蔽响应 [32]。

在此类界面处，结构反演对称性的破缺自然会产生Rashba自旋轨道耦合，因此磁电效应变得尤为重要 [32, 47–52]。与铁磁体接触的超导薄膜中，界面自旋轨道耦合即使在零外加磁场下也能诱导自发涡旋 [53]。类似地，磁斯格明子也可能通过相同的磁电机制产生自发电流并成核形成超导涡旋 [54]。近来还有研究表明，自旋–轨道耦合会显著改变涡旋与畴壁之间的相互作用，使畴壁能够根据其螺旋度推动、拖曳或引导涡旋 [10]。这些结果表明，磁织构是超导电流和涡旋势的主动来源。

周期性旋转的平面织构为分析磁化强度连续变化所产生的磁电响应提供了有用的参考几何。[55–60] 旋cycloidal 磁序中，磁矩沿着位于自旋旋转平面内的传播方向连续旋转。这种磁序存在于多种磁性材料中，包括 $TbMnO_3$,$DyMnO_3$, $Ni_3V_2O_8$, 和 $BiFeO_3$ [61–66]。不过，下文主要将周期性谐波摆线用作解析上清晰易解的参考问题，以确定超导系统对旋转磁电源的响应，然后再考察孤立的 N´eel 畴壁。

N´eel 畴壁是磁电机制一种尤为有趣的体现。与尖锐的磁性界面或局域磁织构不同，磁化强度在畴壁区域内连续旋转，从而产生分布式的超导相位梯度和自发电流。薄超导膜中的相应电动力学响应受 Pearl屏蔽 [67] 支配，因此取决于畴壁几何与有效屏蔽长度之间的相互作用。因此，磁织构的空间分布直接体现在由此形成的涡旋钉扎势景中。

在本文中，我们的主要目标是确定单个N´eel畴壁的超导电动力学响应，该畴壁的磁化强度在宽度为 $2w$的区域内发生旋转。我们将畴壁视为一种延展的界面磁电源，并确定由此产生的相位、自发电流、磁场、涡旋钉扎势以及涡旋–反涡旋对形成的条件。在讨论孤立畴壁之前，我们先将周期性谐波摆线作为参考问题进行研究。这种周期几何结构能够以特别直观的形式阐明连续旋转的磁电源所产生的基本影响。在 $T_c$附近，它展示了相变处超导序参量的调制；而在 $T_c$ 以下，它则提供了一个平衡相位响应、Pearl屏蔽电流和磁场以及涡旋相互作用的简单示例。随后，我们将相同的磁电耦合和London/Pearl理论框架应用于单个N´eel畴壁，这是本文所研究的核心几何结构。该畴壁产生延展的、具有涡旋度选择性的钉扎势景，并改变涡旋–反涡旋构型的能量。在用于涡旋–反涡旋相互作用的对数近似中

在用于涡旋–反涡旋对形成判据的涡旋–反涡旋相互作用中，足够强的磁电耦合能够使束缚涡旋–反涡旋对在没有外加磁场的情况下也具有能量优势。我们的研究结果为理解N´eel畴壁如何产生磁电电流和磁场，以及由此产生的电动力学响应如何控制涡旋钉扎和涡旋–反涡旋对形成，提供了一个解析框架。

本文结构安排如下。第 II 节介绍系统几何结构，以及由磁织构产生的磁电源。第 III 节将周期性谐波摆线作为参考问题，研究在 $T_c$ 附近及以下，超导系统对连续旋转的磁电源的响应。随后，我们转向本文的主要问题：孤立的 N´eel 畴壁。第四节推导其平衡相位分布和自发电流，第 V 节则给出 Pearl屏蔽电流、磁场以及涡旋–畴壁相互作用能。第 VI 节利用这一相互作用，提出稳定束缚涡旋–反涡旋对的能量判据。最后，第 VII 节总结主要结果。补充推导和技术细节见补充材料 [68]。

## II. 系统几何结构与磁电源

我们考虑一层位于平面 $z = 0$ 上的薄超导膜，其上方耦合着一层厚度为 $d_f$ 的铁磁层。磁化强度仅依赖于 $x$，并形成一个以 $x = 0$为中心的孤立 N´eel 畴壁，磁化旋转发生在区间 $|x| \leqslant w$内。远离畴壁处，磁化强度均匀；而在畴壁内部，磁化强度则在平面内连续旋转。界面法线取为 $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$。

在标准的一维微磁学描述中，平滑的N´eel畴壁轮廓可写为$\mathbf{M}(x) = m(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$，其中$\sin\theta = \tanh\left(\frac{x}{2w}\right)$，$\cos\theta = \operatorname{sech}\left(\frac{x}{2w}\right)$，$m$表示面内磁化强度的大小 [10, 69, 70]。为便于解析处理，我们将平滑的微磁学轮廓替换为单畴壁磁织构，其中磁化强度在区间 $|x| \leqslant w$ 内均匀旋转，并与两侧的均匀畴连续匹配：

$$\mathbf{M}(x) = m \begin{cases} (0,-1,0), & x < -w, \\ \left[\cos\left(\frac{\pi x}{2w}\right),\ \sin\left(\frac{\pi x}{2w}\right),\ 0\right], & |x| \le w, \\ (0,+1,0), & x > w. \end{cases} \tag{1}$$

在全文中，我们采用高斯（厘米-克-秒）单位。我们关注由自旋–轨道相互作用驱动的磁电响应。磁电感应超导电流产生的磁场通过Pearl屏蔽进行自洽处理。

我们用厚度平均的自由能密度 $f_{\rm sc}$ 描述薄膜，因此总自由能为

$$F = d_s \int d^2r\, f_{\rm sc} + \int d^3r\, \frac{\mathbf{h}^2}{8\pi}, \tag{2}$$

其中 $d_s$ 是超导薄膜厚度，而 $\mathbf{h} = \nabla\times\mathbf{A}$ 是周围三维空间中的磁感应强度。

我们从金兹堡–朗道泛函 [32]出发

$$\begin{aligned} f_{\rm sc} = a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 + \gamma|\mathbf{D}\psi|^2 \\ + \varepsilon\left\{\psi^*\left[(\mathbf{n}\times\mathbf{M})\cdot\mathbf{D}\right]\psi + \text{c.c.}\right\}. \end{aligned} \tag{3}$$

这里，$a = a_0(T - T_c^0)$ 和 $b$ 是标准的金兹堡–朗道系数，其中 $T_c^0$ 是裸临界温度，$\gamma$ 是刚度参数，$\psi$ 是超导序参量，而$\mathbf{A}$ 是矢势。协变导数为 $\mathbf{D} = -i\nabla - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}$，其中 $-e$ 是电子电荷，$c$ 是光速。单位矢量 $\mathbf{n}$ 垂直于薄膜。最后一项是利夫希茨不变量，描述了 Rashba自旋轨道耦合与面内磁化共同作用所产生的界面磁电耦合。

在均匀区域中，这种形式的利夫希茨不变量会使系统倾向于形成具有均匀相位梯度的螺旋超导态，$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$，其中 $\mathbf{q}$ 是螺旋波矢 [32, 34, 38, 71]。忽略直接轨道磁场并令 $\mathbf{A} = 0$，将此试探形式代入方程（3）得到

$$f(\mathbf{q}) = a|\psi_0|^2 + \frac{b}{2}|\psi_0|^4 + \gamma|\psi_0|^2 q^2 + 2\varepsilon|\psi_0|^2(\mathbf{n}\times\mathbf{M})\cdot\mathbf{q}. \tag{4}$$

该表达式明确表明，磁电耦合有利于超导相位的螺旋调制。对$\mathbf{q}$ 求极小可得

$$\mathbf{q} = -\frac{\varepsilon}{\gamma}(\mathbf{n}\times\mathbf{M}). \tag{5}$$

因此，磁电耦合选择了一种螺旋超导态，其优先相位梯度由磁化方向确定。在均匀区域且不存在轨道磁场时，电流的常规相位梯度贡献恰好被反常磁电贡献所补偿，从而使平衡电荷电流消失。

因此，引入相应的磁电源场较为方便。

$$\boldsymbol{\alpha}(x) = \alpha_0\,\frac{\mathbf{n}\times\mathbf{M}(x)}{m}, \qquad \alpha_0 = \frac{\varepsilon m}{\gamma}. \tag{6}$$

对于均匀磁化强度，局部优选的凝聚态动量简单地为 $\mathbf{q} = -\boldsymbol{\alpha}$。然而，对于空间变化的磁织构，$\boldsymbol{\alpha}(x)$会随空间变化，并充当分布式磁电源。超导相位可以通过平衡相位梯度补偿其纵向分量，

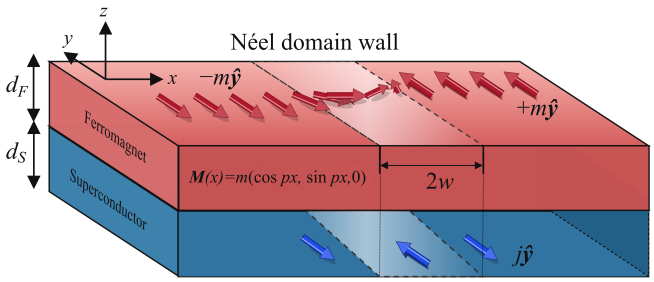


图1. 在 $z = 0$ 处的薄超导膜，其顶部覆盖着一层薄铁磁体；磁化强度仅依赖于 $x$，并形成一个宽度为 $2w$、中心位于 $x = 0$的N´eel畴壁。

而未被补偿的横向分量则会产生自发电流。下面推导的电动力学响应中，这一区别至关重要。

对于N´eel 畴壁轮廓，当$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{z}}$时，这变为

$$\boldsymbol{\alpha}(x) = \alpha_0 \begin{cases} (+1, 0, 0), & x < -w, \\ \left(-\sin\left(\frac{\pi x}{2w}\right), \cos\left(\frac{\pi x}{2w}\right), 0\right), & |x| \le w, \\ (-1, 0, 0), & x > w. \end{cases} \quad (7)$$

纵向分量 $\alpha_x(x)$决定平衡相位梯度，而横向分量$\alpha_y(x)$则作为平行于畴壁流动的自发电流的源。

图1总结了几何结构。N´eel畴壁沿 $y$ 方向延伸，而磁性纹理和磁电源都仅沿 $x$变化。对于单畴壁平衡问题，沿 $y$方向的平移不变性，加上均匀畴中的无电流渐近条件，使得伦敦相位可以选为 $\varphi = \varphi(x)$。这一维结构决定了下文推导的自发电流、磁场和涡旋钉扎势的对称性。

对界面拉什巴层的微观估算给出

$$|\alpha_0| \sim \left(\frac{v_R}{v_F}\right)\left(\frac{a_{\rm lat}}{d_s}\right)\left(\frac{h_{\rm ex}}{k_{\rm B}T_c}\right)\frac{1}{\xi}, \quad (8)$$

其中 $v_R$ 和 $v_F$ 分别为拉什巴速度和费米速度， $a_{\rm lat}$为原子界面长度， $h_{\rm ex}$ 为交换能量尺度 [53]。代表性比值 $v_R/v_F \sim 10^{-1}$、$a_{\rm lat}/d_s \sim 10^{-1}$和 $h_{\rm ex}/\left(k_{\rm B}T_c\right) \sim 1$ 给出 $|\alpha_0|\xi \sim 10^{-2}$。因此，局部螺旋波矢仍处于梯度展开区间内， $|\mathbf{q}|\xi \sim |\alpha_0|\xi \ll 1$。

请注意，上述估算对应于洁净极限处理，此时电子的平均自由程 $\ell \gtrsim \xi$， $d_s$。在脏极限下， $\ell \ll \xi$，杂质散射会重整化磁电耦合，但不会将其完全抑制。对于二维 Rashba 超导体，准经典计算表明，系数 $|\alpha_0|$会降低一个因子 $\ell/\xi$ [72]。因此，下面使用的 $|\alpha_0|$ 数值应被视为数量级估算。对于实际界面，原则上可以通过针对具体材料的相对论玻戈留波夫–德热纳计算来确定磁电耦合，例如参考文献 [73] 中的计算。

对于下文所采用的薄膜电动力学，我们假设 $d_s \ll \lambda_L$ 和 $d_s \ll w$，因此在畴壁尺度上可将薄膜表示为片电流。我们引入有效屏蔽长度 $\lambda_{\rm eff} = \lambda_L^2/d_s$，其中$\lambda_L^2 = \hbar^2 c^2/\left(32\pi e^2 \gamma \psi_0^2\right)$， $\lambda_L$ 为伦敦穿透深度。我们还使用 $\phi_0 = \pi\hbar c/e$ 表示磁通量子，并用 $\xi$ 表示金兹堡–朗道相干长度。具有代表性的薄膜参数值为 $\xi/\lambda_{\rm eff} \sim 10^{-3} - 10^{-2}$。

在我们的方法中，讨论仅限于半宽为 $w \gg \xi$的畴壁；更宽的畴壁则通过显式改变 $w/\lambda_{\rm eff}$ 来描述。这些参数范围与自旋轨道耦合超导体–铁磁体结构中通常研究磁电效应、自发电流和织构诱导的涡旋时所采用的范围一致 [32, 51, 53, 54]。

在求解孤立畴壁的电动力学问题之前，先考虑其旋转部分的周期性延拓是有益的。这个参考问题分离出对连续旋转磁电源的响应，并使若干结果能够以特别简单的解析形式得到。随后将在第 IV–VI 节讨论单畴壁问题。

## III. 周期性旋轮线作为参考问题

我们首先考虑周期性谐波摆线，以便在简单的参考几何中确立超导体对连续旋转磁电源的响应。这种周期性织构的旋转部分与第 II 节引入的单个 N´eel 畴壁完全相同。周期性使近$T_c$问题适合采用傅里叶模分析，并且在下文 $T_c$中将伦敦/珀尔电动力学简化为单一空间谐波。在我们于第四节回到作为主要研究对象的孤立 N´eel 畴壁之前，这些结果可作为有用的基准。

### A. $T_c$附近的线性化金兹堡–朗道分析

在超导转变附近，序参量由线性化的金兹堡–朗道方程确定。在相变点，该方程首次具有非平凡解，从而确定超导性起始时的序参量分布。我们考虑一种周期性谐波摆线。其磁化强度在薄膜平面内旋转，而磁调制沿 $x$ 方向传播，因此传播方向位于自旋旋转平面内。对于第 II 节中引入的磁电源，我们取

$$\boldsymbol{\alpha}_{\rm cyc}(x) = \alpha_0 \left[-\sin\left(\frac{\pi x}{2w}\right), \cos\left(\frac{\pi x}{2w}\right), 0\right]. \quad (9)$$

对于 $|x| \le w$，该源与方程 (7) 中单壁源的旋转分支重合。

对方程 (3) 关于 $\psi^*$ 求变分，得到

$$a\psi+b|\psi|^2\psi+\gamma\mathbf{D}^2\psi+\gamma\left[2\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{D}\psi-i(\nabla\cdot\boldsymbol{\alpha})\psi\right]=0. \quad (10)$$

对于均匀螺旋源，散度项不存在；但对于空间旋转的磁电纹理，它至关重要。在线性化问题中，初生凝聚态产生的磁场为 $|\psi|^2$ 阶，因此不会出现在本征值方程中。因此，我们令$\mathbf{A} = 0$，并确定在超导性起始时由周期性磁电源诱导的序参量分布。对铁磁杂散场的直接轨道耦合将在第 III B 节与 Lifshitz源进行比较，其中将具体说明自旋轨道耦合主导区间。

由于摆线源沿 $y$ 方向具有平移不变性，本征模可写为 $\psi(x,y) = \psi_{q_y}(x)e^{iq_y y}$，其中 $\psi_{q_y}(x+4w) = \psi_{q_y}(x)$。在超导性起始时，物理状态是具有最高转变温度的模。在下文考虑的弱磁电耦合区间 $2|\alpha_0|w/\pi \ll 1$中，对最低本征值关于 $q_y$ 进行微扰极小化，得到 $q_y = 0$。因此，我们采用$\psi(x,y) = \psi(x)$，其中 $\psi(x+4w) = \psi(x)$。线性化的金兹堡–朗道方程随后化为

$$0 = a\psi - \gamma\frac{d^2\psi}{dx^2} + i\gamma\alpha_0\left[2\sin\left(\frac{\pi x}{2w}\right)\frac{d\psi}{dx} + \frac{\pi}{2w}\cos\left(\frac{\pi x}{2w}\right)\psi\right]. \quad (11)$$

由于系数以 $4w$ 为周期，我们将其展开为

$$\psi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n \exp\left(in\frac{\pi x}{2w}\right). \quad (12)$$

将式（11）投影到 $\exp[i\ell\pi x/(2w)]$ 上，得到

$$0 = \left[a+\gamma\left(\frac{\pi}{2w}\right)^2\ell^2\right]\psi_\ell + i\gamma\alpha_0\left(\frac{\pi}{2w}\right)\left[\left(\ell-\frac{1}{2}\right)\psi_{\ell-1} - \left(\ell+\frac{1}{2}\right)\psi_{\ell+1}\right]. \quad (13)$$

因此，旋转磁电源仅耦合相邻的傅里叶谐波。

周期性源仅直接将均匀模 $\psi_0$ 耦合到第一对傅里叶对 $\psi_{\pm1}$；$\psi_{\pm2}$ 振幅仅通过第二次连续耦合产生。由此得到的最低阶 $0,\pm1$ 子系统为

$$\psi_{\pm1} = -i\frac{\gamma\alpha_0(\pi/2w)}{2\left[a+\gamma(\pi/2w)^2\right]}\psi_0, \quad (14)$$

以及主导阶 $0,\pm1$ 截断下相应的可解性条件为

$$2a\left[a+\gamma\left(\frac{\pi}{2w}\right)^2\right] - \gamma^2\alpha_0^2\left(\frac{\pi}{2w}\right)^2 = 0. \quad (15)$$

在 $0,\pm1$ 截断下，方程（15）中在 $\alpha_0\to0$ 极限下连续连接到 $a=0$ 的根，确定了临界值 $a_c$ 的主导阶近似，因而给出了超导转变的主导阶位移。更高阶傅里叶谐波不会改变这一主导贡献，但要得到 $(2\alpha_0w/\pi)^2$中的首个相对修正，则需要纳入 $\ell=\pm2$ 傅里叶分量。

在弱磁电区间 $2|\alpha_0|w/\pi \ll 1$ 内，递推关系生成傅里叶振幅的微扰层级。第一对满足 $\psi_{\pm1}/\psi_0 = \mathcal{O}(2\alpha_0w/\pi)$，而下一对傅里叶对仅在二阶出现。在最低非零阶，$\ell=\pm2$分量满足

$$\psi_{\pm2} = -i\frac{3\gamma\alpha_0(\pi/2w)}{2\left[a_c+4\gamma(\pi/2w)^2\right]}\psi_{\pm1}. \quad (16)$$

因此，

$$\left|\frac{\psi_{\pm2}}{\psi_{\pm1}}\right|\Big|_{a=a_c} = \frac{3|\alpha_0|w}{4\pi} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{2|\alpha_0|w}{\pi}\right)^3\right]. \quad (17)$$

由此可得 $\psi_{\pm2}/\psi_0 = \mathcal{O}[(2\alpha_0w/\pi)^2]$。因此，均匀分量和第一组傅里叶对构成相变处的主导阶本征函数，而更高阶的傅里叶对则随着磁电耦合的增大依次出现在更高阶中。将式（16）代入 $\ell=\pm1$ 递推关系，再结合$\ell=0$ 可解性条件，可得

$$a_c = \frac{\gamma\alpha_0^2}{2}\left[1+\frac{1}{16}\left(\frac{2\alpha_0w}{\pi}\right)^2 + \mathcal{O}\left[\left(\frac{2\alpha_0w}{\pi}\right)^4\right]\right]. \quad (18)$$

取 $a=a_0(T-T_c^0)$时，相应的临界温度为

$$T_{c,\mathrm{cyc}} = T_c^0 + \frac{\gamma\alpha_0^2}{2a_0}\times\left[1+\frac{1}{16}\left(\frac{2\alpha_0w}{\pi}\right)^2 + \mathcal{O}\left[\left(\frac{2\alpha_0w}{\pi}\right)^4\right]\right]. \quad (19)$$

因此，转变温度的主导磁电增强为 $\gamma\alpha_0^2/(2a_0)$，而式（19）中与$(2\alpha_0w/\pi)^2$ 成正比的修正项则源于与第二组傅里叶对的耦合。

在 $a=a_c$ 处，旋转磁电织构将均匀凝聚态分量与第一对空间傅里叶对混合。在弱磁电区间内，由此产生的主导修正是相位调制。除去任意的整体相位，临界序参量分布为

$$\psi_{\mathrm{cyc}}(x) = \psi_0\left[1 - i\frac{2\alpha_0w}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2w}\right) + \mathcal{O}\left[\left(\frac{2\alpha_0w}{\pi}\right)^2\right]\right]. \quad (20)$$

线性化方程确定了相对傅里叶权重，而 $\psi_0$ 的大小只有在相变以下保留非线性项时才能确定。相对阶数为 $(2\alpha_0 w/\pi)^2$ 的修正包含第二对傅里叶对，因此超出了三模近似的范围。在相同的控制阶数下，$\psi_{\rm cyc}(x)$ 的相位为

$$\varphi_{\rm cyc}(x) = -\frac{2\alpha_0 w}{\pi}\cos\!\Big(\frac{\pi x}{2w}\Big) + \mathcal{O}\left[\left(\frac{2\alpha_0 w}{\pi}\right)^3\right]. \tag{21}$$

### B. $T_c$以下的伦敦电动力学与涡旋相互作用

在 $T_c$ 以下，我们在模长恒定的伦敦近似 $\psi_{\rm cyc} = \psi_0 e^{i\varphi_{\rm cyc}}$ 下处理周期性旋轮线。纵向平衡条件$\partial_x\varphi_{\rm cyc} + \alpha_{{\rm cyc},\,x} = 0$ 意味着，在这一近似下，相位严格由公式（21）中的首个余弦项给出。横向分量保持为$\alpha_{{\rm cyc},\,y} = \alpha_0\cos(\pi x/2w)$。

模长恒定区间内的电流密度为

$$\mathbf{j} = \frac{2e\gamma}{\hbar}\left[i\psi\nabla\psi^* - i\psi^*\nabla\psi + 2\left(\boldsymbol{\alpha} - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}\right)|\psi|^2\right]. \tag{22}$$

利用 $2e/(\hbar c) = 2\pi/\phi_0$ 以及 $\lambda_L$ 的定义，公式变为 (22)

$$\mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2}\left[\mathbf{A} - \frac{\phi_0}{2\pi}\left(\nabla\varphi + \boldsymbol{\alpha}\right)\right]. \tag{23}$$

因此，磁电场通过 $(\phi_0/2\pi)\boldsymbol{\alpha}$ 进入伦敦组合。沿薄膜厚度积分后，片电流尺度为

$$j_0 \equiv d_s\frac{4e}{\hbar}\gamma\psi_0^2\alpha_0. \tag{24}$$

利用纵向平衡条件 $\partial_x\varphi_{\rm cyc} + \alpha_{{\rm cyc},\,x} = 0$，未屏蔽片电流为

$$j^{(0)}_{{\rm cyc},x} = 0, \qquad j^{(0)}_{{\rm cyc},y}(x) = j_0\cos\!\Big(\frac{\pi x}{2w}\Big). \tag{25}$$

在给定谐波源的模长恒定的伦敦描述中，方程 (25) 是精确的。近-$T_c$ 傅里叶展开与伦敦计算分别对应互补的适用范围：前者在 $2|\alpha_0|w/\pi \ll 1$ 条件下受微扰控制，而后者处理给定纹理时不对其空间分布进行截断。

周期性旋轮线磁化强度，$\mathbf{M}^{\rm cyc}(x) = m[\cos(\pi x/2w), \sin(\pi x/2w), 0]$, 携带磁荷密度 $\rho_m = -\nabla\cdot\mathbf{M}^{\rm cyc} = (\pi m/2w)\sin(\pi x/2w)$。在薄铁磁体极限 $d_f \ll w$下，将磁性层视为界面片层，杂散场和超导体一侧对应的矢势 $z < 0$ 为

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^{\rm M}(x,z) &= -\frac{\pi^2 m d_f}{w}\exp\!\Big(\frac{\pi z}{2w}\Big)\left[\cos\!\Big(\frac{\pi x}{2w}\Big)\,\hat{\mathbf{x}}\right.\\ &\qquad\left. + \sin\!\Big(\frac{\pi x}{2w}\Big)\,\hat{\mathbf{z}}\right],\\ A_y^{\rm M}(x,z) &= 2\pi m d_f\cos\!\Big(\frac{\pi x}{2w}\Big)\exp\!\Big(\frac{\pi z}{2w}\Big).\end{aligned} \tag{26}$$

在超导平面处，磁静力学矢势为 $A_y^{\rm M}(x,\,0^-) = 2\pi m d_f\cos(\pi x/2w)$。由于两个贡献具有相同的空间谐波，驱动超导响应的合成横向源为

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_y^{\rm eff}(x) &= \frac{\phi_0}{2\pi}\alpha_{{\rm cyc},y}(x) - A_y^{\rm M}(x,0^-)\\ &= \left[\frac{\phi_0\alpha_0}{2\pi} - 2\pi m d_f\right]\cos\!\Big(\frac{\pi x}{2w}\Big).\end{aligned} \tag{27}$$

因此，自旋–轨道贡献与直接轨道贡献可能相互增强，也可能部分抵消，这取决于它们的相对符号；该符号由 $\alpha_0$ 的符号以及磁织构相对于界面法线的取向决定。

为在电动力学响应中明确保留这两个贡献，我们将方程 (27) 写为 $\mathcal{S}_y^{\rm eff}(x) = \mathcal{S}_0^{\rm eff}\cos(\pi x/2w)$，其中 $\mathcal{S}_0^{\rm eff} = \phi_0\alpha_0/(2\pi) - 2\pi m d_f$。由于有效源仅包含波数为 $\pi/(2w)$ 的谐波，Pearl屏蔽保留其面内空间依赖性，而矢势沿远离薄膜的方向以 $\exp[-(\pi/2w)|z|]$ 衰减。因此，薄膜珀尔分母为 $1 + \pi\lambda_{\rm eff}/w$，薄膜平面处的矢势为

$$A_{{\rm cyc},y}(x,0) = \frac{\mathcal{S}_0^{\rm eff}}{1+\pi\lambda_{\rm eff}/w}\cos\!\Big(\frac{\pi x}{2w}\Big). \tag{28}$$

此处及下文中，$A_{{\rm cyc},y}$ 表示由超导屏蔽响应产生的矢势；直接磁静力贡献 $A_y^{\rm M}$已计入 $\mathcal{S}_y^{\rm eff}$。

因此，对于单谐波，Pearl屏蔽保留矢势的空间分布，并将其振幅降低$(1 + \pi\lambda_{\rm eff}/w)^{-1}$倍。在薄膜平面上，垂直磁场可直接由$h_{{\rm cyc},z}(x) = \partial_x A_{{\rm cyc},y}(x,0)$得到。利用式（28）可得

$$h_{{\rm cyc},z}(x) = -\frac{\pi\mathcal{S}_0^{\rm eff}}{2w}\frac{\sin\!\left(\frac{\pi x}{2w}\right)}{1+\pi\lambda_{\rm eff}/w}. \tag{29}$$

屏蔽片电流由横向伦敦关系得出

$$j_{{\rm cyc},y}(x) = \frac{c}{4\pi\lambda_{\rm eff}}\left[\mathcal{S}_y^{\rm eff}(x) - A_{{\rm cyc},y}(x,0)\right]. \tag{30}$$

将式（27）和式（28）代入式（30）可得

$$j_{\mathrm{cyc},y}(x)=\frac{c\mathcal{S}_0^{\mathrm{eff}}}{4\pi\lambda_{\mathrm{eff}}}\frac{\pi\lambda_{\mathrm{eff}}/w}{1+\pi\lambda_{\mathrm{eff}}/w}\cos\!\Big(\frac{\pi x}{2w}\Big). \tag{31}$$

方程 (28)–(31) 明确表明，自旋–轨道贡献和直接轨道贡献通过同一个有效源 $\mathcal{S}_0^{\mathrm{eff}}$ 进入 Pearl 屏蔽响应。

在下文考虑的自旋轨道耦合主导区间中，当 $2\pi m d_f \ll |\alpha_0|\phi_0/(2\pi)$ 时，可以忽略直接轨道贡献，因此

$$\mathcal{S}_0^{\mathrm{eff}}\simeq\frac{\phi_0\alpha_0}{2\pi}. \tag{32}$$

我们将此不等式用作下文单壁分析中自旋轨道耦合主导区间的数量级判据。利用 $H_{c2}=\phi_0/(2\pi\xi^2)$，条件可写为 $4\pi m \ll 2(|\alpha_0|\xi)H_{c2}\xi/d_f$。对于 $d_f\sim 2|\alpha_0|\xi^2$，它在参数上等价于 $4\pi m\ll H_{c2}$；对于较薄的铁磁体，后者是一个充分且保守的条件。

在此极限下，方程 (31) 化为

$$\frac{j_{\mathrm{cyc},y}(x)}{j_0}=\frac{\pi\lambda_{\mathrm{eff}}/w}{1+\pi\lambda_{\mathrm{eff}}/w}\cos\!\Big(\frac{\pi x}{2w}\Big), \tag{33}$$

下文将采用这一形式描述涡旋相互作用。

现在，我们根据 London/Pearl 能量中的混合项，计算拓扑荷为 $s=\pm1$ 、位于 $\mathbf{R}_0=(x_0,y_0)$ 的 Pearl 涡旋所受到的相互作用。在模长恒定区间内，旋轮线产生的正则源为

$$\mathbf{C}_{\mathrm{cyc}}(\mathbf{r})=\frac{\phi_0}{2\pi}\left[\nabla\varphi_{\mathrm{cyc}}(\mathbf{r})+\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{cyc}}(\mathbf{r})\right], \tag{34}$$

而涡旋源为

$$\mathbf{\Phi}^{(s)}(\mathbf{r})=\frac{\phi_0}{2\pi}\nabla\varphi^{(s)}_{\mathrm{vor}}(\mathbf{r}). \tag{35}$$

相应的相互作用能为

$$E^{(s)}_{\mathrm{int,cyc}}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{|\mathbf{k}|}{1+2\lambda_{\mathrm{eff}}|\mathbf{k}|}\times\Big[\mathbf{C}_{\mathrm{cyc},\mathbf{k}}\cdot\mathbf{\Phi}^{(s)*}_{\mathbf{k}}+\mathrm{c.c.}\Big]. \tag{36}$$

对于谐波旋轮线，$\nabla\varphi_{\mathrm{cyc}}+\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{cyc}}=\alpha_0\cos(\pi x/2w)\hat{\mathbf{y}}$，因此只有横向谐波分量会产生贡献。傅里叶空间中的涡旋源为

$$\mathbf{\Phi}^{(s)}_{\mathbf{k}}=is\phi_0e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_0}\frac{k_y\hat{\mathbf{x}}-k_x\hat{\mathbf{y}}}{|\mathbf{k}|^2}. \tag{37}$$

将这些源代入式（36），得到的相互作用与 $y_0$ 无关，这正是沿 $y$ 方向平移不变性所要求的：

$$E^{(s)}_{\mathrm{int,cyc}}(x_0)=-\frac{s\phi_0^2\alpha_0}{4\pi^2}\frac{\sin\!\big(\frac{\pi x_0}{2w}\big)}{1+\pi\lambda_{\mathrm{eff}}/w}. \tag{38}$$

作为一致性检查，对该相互作用能求导可得

$$F^{(s)}_{\mathrm{cyc},x}=-\frac{\partial E^{(s)}_{\mathrm{int,cyc}}}{\partial x_0}=\frac{s\phi_0}{c}j_{\mathrm{cyc},y}(x_0), \tag{39}$$

这就是屏蔽片电流对涡旋施加的洛伦兹力。

周期性涡旋势也可能有利于涡旋–反涡旋对的自发形成。为进行简单估算，考虑在零外加磁场下，一个拓扑荷为 $s=+1$ 、位于 $x>0$ 的涡旋，以及一个拓扑荷为$s=-1$ 、位于 $-x$ 的反涡旋，它们分别处于周期势中相应的吸引分支上。当 $\xi\ll 2x\ll\lambda_{\mathrm{eff}}$ 时，不存在旋轮线纹理时该涡旋–反涡旋对的能量为

$$E^{(0)}_{\mathrm{v\bar{v}}}(2x)=\frac{\phi_0^2}{8\pi^2\lambda_{\mathrm{eff}}}\ln\left(\frac{2x}{\xi}\right). \tag{40}$$

根据方程 (38)，两个涡旋从旋轮线势中获得相同的能量增益。因此，相应的总对能量为

$$E_{\mathrm{pair,cyc}}(x)=\frac{\phi_0^2}{8\pi^2\lambda_{\mathrm{eff}}}\ln\left(\frac{2x}{\xi}\right)-\frac{\phi_0^2|\alpha_0|}{2\pi^2}\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2w}\right)}{1+\pi\lambda_{\mathrm{eff}}/w}. \tag{41}$$

将涡旋和反涡旋分别置于各自旋轮线势的极小值附近，即可简单估算自发成对形成的阈值，$x=\pm w$。方程 (41) 得出

$$E_{\mathrm{pair,cyc}}(w)\simeq\frac{\phi_0^2}{8\pi^2\lambda_{\mathrm{eff}}}\ln\left(\frac{2w}{\xi}\right)-\frac{\phi_0^2|\alpha_0|}{2\pi^2}\frac{1}{1+\pi\lambda_{\mathrm{eff}}/w}. \tag{42}$$

因此，条件 $E_{\mathrm{pair,\ cyc}}(w)<0$ 给出的估算为

$$|\alpha_0|\lambda_{\mathrm{eff}}\gtrsim\frac{1}{4}\left(1+\frac{\pi\lambda_{\mathrm{eff}}}{w}\right)\ln\left(\frac{2w}{\xi}\right). \tag{43}$$

因此，原则上，仅周期性谐波摆线就能稳定零场涡旋–反涡旋对，前提是磁电耦合足够强。

在具有旋 cycloidal 磁序的已知磁性材料中，例如 $TbMnO_3$, $DyMnO_3$, $Ni_3V_2O_8$, 和 $BiFeO_3$[61–66] ，磁矩旋转周期不超过 100 nm，因此难以满足自发涡旋–反涡旋产生的判据 (43)。然而，在较弱的外磁场中，所提出的涡旋钉扎机制会使涡旋排列在磁结构中，并可能产生磁系统周期与涡旋晶格周期之间有趣的公度现象。

上述估算忽略了涡旋与反涡旋之间的相互吸引所导致的、它们偏离单涡旋势极小值的位置变化。通过极小化可得到更准确的阈值

式 (41) 关于 $x$的极小化。下文将对孤立的 N´eel 畴壁进行相应的完整极小化。

公式 (28) 和 (38) 所依据的 Pearl核的傅里叶空间推导见补充材料 [68]。

因此，周期性谐波摆线表现出相位调制、横向磁电流、符号交替的磁感应强度以及周期性涡旋势。这个参考问题展示了在响应具有解析透明性的几何构型中，连续旋转的磁电源所产生的基本电动力学后果。现在我们转向孤立的 N´eel 畴壁；对于该体系，旋转区域的有限范围导致屏蔽电流、磁场和涡旋钉扎势呈现出定性不同的空间结构。

## IV. 单个 N´eel 畴壁的平衡相位与自发电流

现在我们转向本文所研究的主要几何构型：第 II 节介绍的铁磁层中的单个 N´eel 畴壁。

在 $T_c$ 以下，对于可以忽略序参量振幅空间变化的长度尺度，超导薄膜的电动力学响应可在伦敦近似下描述。因此，我们将涡旋核外的序参量振幅视为均匀，并写作 $\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 e^{i\varphi(\mathbf{r})}$，其中$\nabla\psi_0 = 0$。随后，超导响应由相位 $\varphi(\mathbf{r})$和矢势 $\mathbf{A}$决定。除与 $\varphi$和$\mathbf{A}$无关的项外，超导自由能密度可写为

$$f_{\rm sc} = \gamma\psi_0^2 \left(\nabla\varphi - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2 + 2\gamma\psi_0^2\, \boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\nabla\varphi - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}\right). \tag{44}$$

上述表达式与配方法形式的区别仅在于一项与 $\alpha^2(x)$ 成正比的项，该项与 $\varphi$和 $\mathbf{A}$ 无关，因此不会影响变分方程。对 $F_{\rm sc} = d_s\int d^2r\, f_{\rm sc}$关于矢势进行变分，并使用$\mathbf{j}_s(\mathbf{r}_\parallel) = -c\,\delta F_{\rm sc}/\delta\mathbf{A}(\mathbf{r}_\parallel)$，得到超导片电流

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{r}_\parallel) = d_s\frac{4e}{\hbar}\gamma\psi_0^2\left(\nabla\varphi - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha}\right). \tag{45}$$

前两项表示传统的规范不变凝聚态动量，而 $\boldsymbol{\alpha}$ 给出了电流的反常磁电贡献。相应的未屏蔽电流记为 $\mathbf{j}_s^{(0)}$，通过令 $\mathbf{A} = 0$得到。

对于一维纹理，方程（44）中依赖相位的部分在 $\mathbf{A} = 0$ 处，除一个加性常数外，为

$$f_{\rm phase} = \gamma\psi_0^2\left[(\partial_x\varphi)^2 + 2\alpha_x(x)\,\partial_x\varphi\right]. \tag{46}$$

相应的欧拉–拉格朗日方程为

$$\partial_x^2\varphi + \partial_x\alpha_x(x) = 0. \tag{47}$$

计及屏蔽后，该方程仍然成立。事实上，对完整泛函关于相位进行变分可得

$$\nabla\cdot\left(\nabla\varphi - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha}\right) = 0. \tag{48}$$

对于第 II 节所述的一维几何构型，取 $\mathbf{A} = A_y(x,z)\hat{\mathbf{y}}$，方程 (48) 化为 $\partial_x(\partial_x\varphi + \alpha_x) = 0$。纵向薄膜电流为零将积分常数确定为零，从而得到

$$\partial_x\varphi(x) = -\alpha_x(x). \tag{49}$$

因此，磁电源的纵向分量被平衡相位梯度完全补偿，且下文得到的相位分布不受横向电磁屏蔽影响。

对于方程 (7) 中的单个 N´eel 畴壁源，对方程 (49) 积分可得

$$\varphi(x) = -\alpha_0\begin{cases} x + w, & x < -w, \\ \dfrac{2w}{\pi}\cos\!\left(\frac{\pi x}{2w}\right), & |x| \le w, \\ -(x - w), & x > w. \end{cases} \tag{50}$$

这里选取任意加性常数，使得 $\varphi(\pm w) = 0$。相位及其一阶导数在 $x = \pm w$ 处均连续。在旋转区域之外，即 $x < -w$ 和 $x > w$ 时，相位梯度取与两个螺旋态相对应的常数值，这两个螺旋态由磁化方向相反的磁化畴选定。相比之下，在旋转区域内，相位梯度遵循纵向磁电源的空间变化。

现在可以清楚看出，它与第 III B 节中讨论的周期性旋cycloid 之间的联系。在旋转区域$|x| \le w$内，周期性旋cycloid 和单个 N´eel 畴壁的纵向分量 $\alpha_x(x)$ 完全相同。因此，该区域内的伦敦相位分布与周期性织构的结果一致。

在式（45）中令 $\mathbf{A} = 0$，并代入式（7），得到未 (50) 屏蔽片电流分布

$$j_{s,x}^{(0)}(x) = 0, \qquad j_{s,y}^{(0)}(x) = j_0\begin{cases} 0, & |x| > w, \\ \cos\!\left(\frac{\pi x}{2w}\right), & |x| \le w. \end{cases} \tag{51}$$

由于相位仅沿 $x$ 方向变化， $y$ 分量的$\boldsymbol{\alpha}$ 不会被相位梯度抵消，因此会产生横向自发电流。

## V. 单个 N´eel 畴壁的 Pearl屏蔽与涡旋钉扎

在第四节中，我们展示了磁电源的横向分量会产生一股平行于畴壁的自发电流。

总自由能可写为

$$F = F_0 + F_{\rm film}[\mathbf{A}] + F_{\rm field}[\mathbf{A}], \tag{52}$$

其中 $F_0$ 包含与矢势无关的项，且

$$F_{\rm field} = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \mathbf{h}^2, \tag{53}$$

是磁场能。薄膜贡献为

$$F_{\rm film} = \frac{1}{8\pi\lambda_{\rm eff}}\int d^2r\, \left(\frac{\phi_0}{2\pi}\nabla\varphi + \mathbf{\Phi} - \mathbf{A} + \frac{\phi_0}{2\pi}\boldsymbol{\alpha}\right)^2. \tag{54}$$

此处， $\mathbf{\Phi}$表示规范不变凝聚态动量中的涡旋贡献。在计算仅由 N´éel 畴壁产生的电流和磁场时，将其设为零；但在下文考虑涡旋–畴壁相互作用时，则保留该项。

对 $F_{\rm film}$ 关于矢势进行变分，得到超导片电流

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{r}_\parallel) = \frac{c}{4\pi\lambda_{\rm eff}}\left[\frac{\phi_0}{2\pi}\nabla\varphi + \mathbf{\Phi} - \mathbf{A} + \frac{\phi_0}{2\pi}\boldsymbol{\alpha}\right]. \tag{55}$$

相应的三维电流密度为$\mathbf{j(r)} = \mathbf{j}_s(\mathbf{r}_\parallel)\delta(z)$。

对于仅畴壁问题， $\mathbf{\Phi} = 0$。利用第四节推导出的平衡条件 $\partial_x\varphi + \alpha_x = 0$，纵向贡献消失。剩余的横向磁电源为

$$\mathbf{S}_{\rm w}(x) = \frac{\phi_0}{2\pi}\alpha_y(x)\hat{\mathbf{y}}, \tag{56}$$

因此片电流可写为

$$\mathbf{j}_s = \frac{c}{4\pi\lambda_{\rm eff}}\left(\mathbf{S}_{\rm w} - \mathbf{A}\right). \tag{57}$$

在不存在电磁屏蔽的情况下，$\mathbf{A} = 0$，该表达式简化为方程（51）中得到的未屏蔽自发电流$\mathbf{j}_s^{(0)}$。

在库仑规范下，麦克斯韦方程的形式为

$$-\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_s(\mathbf{r}_\parallel)\delta(z). \tag{58}$$

我们采用二维傅里叶约定

$$f_{\mathbf{k}} = \int d^2r\, f(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \qquad f(\mathbf{r}) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, f_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{59}$$

对于$\mathbf{k} \neq 0$对应的傅里叶分量，远离薄膜处衰减的解具有如下形式

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(z) = \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(0)e^{-|\mathbf{k}||z|}. \tag{60}$$

对式（58）沿薄膜积分可得

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(0) = \frac{2\pi}{c|\mathbf{k}|}\mathbf{j}_s(\mathbf{k}). \tag{61}$$

在傅里叶空间中，式（55）写为

$$\frac{4\pi\lambda_{\rm eff}}{c}\mathbf{j}_s(\mathbf{k}) = \frac{\phi_0}{2\pi}\left[\nabla\varphi\right]_{\mathbf{k}} + \mathbf{\Phi}_{\mathbf{k}} - \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(0) + \frac{\phi_0}{2\pi}\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{k}}. \tag{62}$$

结合方程（62）和（61），可得薄膜结果

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(0) = \frac{\frac{\phi_0}{2\pi}\left[\nabla\varphi\right]_{\mathbf{k}} + \mathbf{\Phi}_{\mathbf{k}} + \frac{\phi_0}{2\pi}\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{k}}}{1 + 2|\mathbf{k}|\lambda_{\rm eff}}. \tag{63}$$

分母 $1 + 2|\mathbf{k}|\lambda_{\rm eff}$ 是 Pearl 屏蔽核函数。它决定磁电源的每个空间傅里叶分量对屏蔽电流和磁场的贡献。

对于单个 N´eel 畴壁，沿$y$ 的平移不变性将相关傅里叶分量限制为 $k_y = 0$，因此 $\mathbf{k} = k_x\hat{\mathbf{x}}$。纵向源由平衡相位梯度补偿后，只剩下横向分量。因此，畴壁诱导的矢势为

$$A_{k,y}(0) = \frac{\frac{\phi_0}{2\pi}\alpha_{k,y}}{1 + 2|k|\lambda_{\rm eff}}, \tag{64}$$

这为下文推导屏蔽电流和磁场提供了出发点。

方程 (64) 仅针对自旋–轨道磁电源书写，其中$A_{k,y}$(0) 表示由超导片电流自洽产生的矢势。同一个单 N´eel 畴壁的磁杂散场所产生的给定直接轨道贡献，会进入横向伦敦组合。因此，可以逐个模式地将 $(\phi_0/2\pi)\alpha_{k,y}$ 替换为 $(\phi_0/2\pi)\alpha_{k,y} - A^{\rm M}_{k,y}(0^-)$，从而将该贡献纳入。Pearl 分母保持不变，因为它源自超导片电流的自洽电磁响应。随后，屏蔽电流、超导片电流产生的屏蔽场，以及涡旋–畴壁相互作用，均可由含此带符号横向源的同一傅里叶空间核函数得出。在第 III B 节所述的自旋轨道耦合主导区间内，我们仅保留磁电项。

### A. 畴壁源的傅里叶变换

因此，磁电源场的二维傅里叶变换形式为

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{k}} = (2\pi)\delta(k_y)\,\boldsymbol{\alpha}_{k_x}, \qquad \boldsymbol{\alpha}_{k_x} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \boldsymbol{\alpha}(x)e^{-ik_x x}. \tag{65}$$

因子 $\delta(k_y)$表示沿畴壁方向的动量守恒，并将后续的涡旋–畴壁相互作用化简为对 $k_x$ 的积分。

我们首先考虑磁化强度旋转区域的贡献， $|x| \leq w$。对于

方程（7）中的N´eel 畴壁轮廓，该区域内磁电源的傅里叶分量为

$$\alpha_{\mathrm{rot},x}(k_x) = 2i\alpha_0 k_x \frac{\cos(k_x w)}{\left(\frac{\pi}{2w}\right)^2 - k_x^2},$$
$$\alpha_{\mathrm{rot},y}(k_x) = \frac{\alpha_0 \pi}{w} \frac{\cos(k_x w)}{\left(\frac{\pi}{2w}\right)^2 - k_x^2}. \tag{66}$$

$k_x = \pm\pi/(2w)$ 处表面上的奇点是可去的，因为在这些波矢处，分子和分母都为零。

均匀畴仅对纵向分量有贡献，

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{hom}}(k_x) = 2i\alpha_0 \,\mathrm{P.V.}\left(\frac{\cos(k_x w)}{k_x}\right)\hat{\mathbf{x}}, \tag{67}$$

其中 P.V. 表示柯西主值。因此，纵向源的完整傅里叶变换为

$$\alpha_{k_x,x} = \alpha_{\mathrm{rot},x}(k_x) + \alpha_{\mathrm{hom},x}(k_x), \tag{68}$$

而横向源则完全局限于旋转区域，

$$\alpha_{k_x,y} = \alpha_{\mathrm{rot},y}(k_x). \tag{69}$$

相位梯度为 $\nabla\varphi(x) = (\partial_x\varphi(x), 0)$，其中，对于单畴壁剖面，

$$\partial_x\varphi(x) = \alpha_0 \begin{cases} -1, & x < -w, \\ \sin\left(\frac{\pi x}{2w}\right), & |x| \le w, \\ +1, & x > w. \end{cases} \tag{70}$$

### B. 珀尔屏蔽的自发电流

电磁屏蔽会改变由式（51）导出的局域电流分布。结合式（55）和式（63），并令 $\boldsymbol{\Phi} = 0$，可得傅里叶空间中的屏蔽电流：

$$j_{s,y}(k_x) = j^{(0)}_{s,y}(k_x) \frac{2|k_x|\lambda_{\mathrm{eff}}}{1 + 2|k_x|\lambda_{\mathrm{eff}}}, \tag{71}$$

其中，$j^{(0)}_{s,y}(k_x)$ 是式（51）中未屏蔽自发电流的傅里叶变换。因子 $2|k_x|\lambda_{\mathrm{eff}}/[1+2|k_x|\lambda_{\mathrm{eff}}]$ 是片层电流的 Pearl屏蔽因子。特别地，当 $k_x = 0$ 时，该因子为零，这意味着

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, j_{s,y}(x) = 0. \tag{72}$$

因此，尽管未屏蔽电流在磁化旋转区域上的积分不为零，自洽屏蔽电流却不携带净输运电流。补偿部分通过长程 Pearl 响应分布在旋转区域之外。

引入无量纲坐标 $u = x/\lambda_{\mathrm{eff}}$和无量纲畴壁半宽 $\eta = w/\lambda_{\mathrm{eff}}$，逆傅里叶变换给出

$$j_{\mathrm{wall},y}(u) = \frac{j_0}{\eta}\Big[J_c(|u+\eta|) + J_c(|u-\eta|)\Big], \tag{73}$$

其电流标度 $j_0$ 与式（25）和式（51）中的相同。等价地，$j_0 = c\phi_0\alpha_0/(8\pi^2\lambda_{\mathrm{eff}})$。核函数为

$$J_c(\beta) = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{\eta}\right)^2 - 1}\left[\mathcal{F}_0\left(\frac{\beta}{2}\right) - \mathcal{F}_0\left(\frac{\pi\beta}{2\eta}\right) + \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{\eta} - 1\right)\sin\left(\frac{\pi\beta}{2\eta}\right)\right], \tag{74}$$

with

$$\mathcal{F}_0(t) = \cos(t)\,\mathrm{Ci}(t) + \sin(t)\left[\mathrm{Si}(t) - \frac{\pi}{2}\right]. \tag{75}$$

这里，$\mathrm{Si}(t) = \int_0^t ds\,\sin(s)/s$ 和 $\mathrm{Ci}(t) = -\int_t^\infty ds\,\cos(s)/s$ 分别表示正弦积分和余弦积分。式（74）中 $\eta = \pi$ 处表面上的奇异性是可去的，核函数在该点定义为相应的极限值。同样，极限 $\beta \to 0$ 是有限的，因为两个 $\mathcal{F}_0$ 项的对数奇点相互抵消。以下对于含有相同分母的磁场核函数和涡旋–畴壁相互作用核，也采用相同的极限定义。由于 $J_c$ 取决于$|u \pm \eta|$，电流分布是偶函数，

$$j_{\mathrm{wall},y}(-u) = j_{\mathrm{wall},y}(u), \tag{76}$$

正如N´eel 畴壁纹理的反射对称性所要求的那样。

Pearl屏蔽的影响如图2所示。在引入屏蔽之前，自发电流局限于磁化旋转区域内，并在 $|u| \le \eta$ 范围内遵循 $\cos(\pi u/2\eta)$。屏蔽电流保持相同的反射对称性，但延伸至旋转区域之外，并形成长程尾部。其空间形式取决于比值 $w/\lambda_{\mathrm{eff}}$。

对于窄畴壁 $\eta \ll 1$，在$|u| \gg 1$处的远场行为（对应于 $w \ll \lambda_{\mathrm{eff}}$ 和 $|x| \gg \lambda_{\mathrm{eff}}$）为

$$\frac{j_{\mathrm{wall},y}(u)}{j_0} \simeq -\frac{8}{\pi^2}\frac{\eta}{u^2}\left(1 - \frac{24}{u^2}\right). \tag{77}$$

对于宽畴壁 $\eta \gg 1$，在 $|u| \gg\eta$处的渐近分布（对应于 $w \gg \lambda_{\mathrm{eff}}$ 和 $|x| \gg w$）变为

$$\frac{j_{\mathrm{wall},y}(u)}{j_0} \simeq -\frac{8}{\pi^2}\frac{\eta}{u^2}\left[1 - \frac{3(8-\pi^2)}{\pi^2}\frac{\eta^2}{u^2}\right]. \tag{78}$$

对于窄壁，还存在一个中间空间范围 $\eta \ll |u| \ll 1$，或等价地写作 $w \ll |x| \ll \lambda_{\mathrm{eff}}$，在此范围内电流呈对数变化：

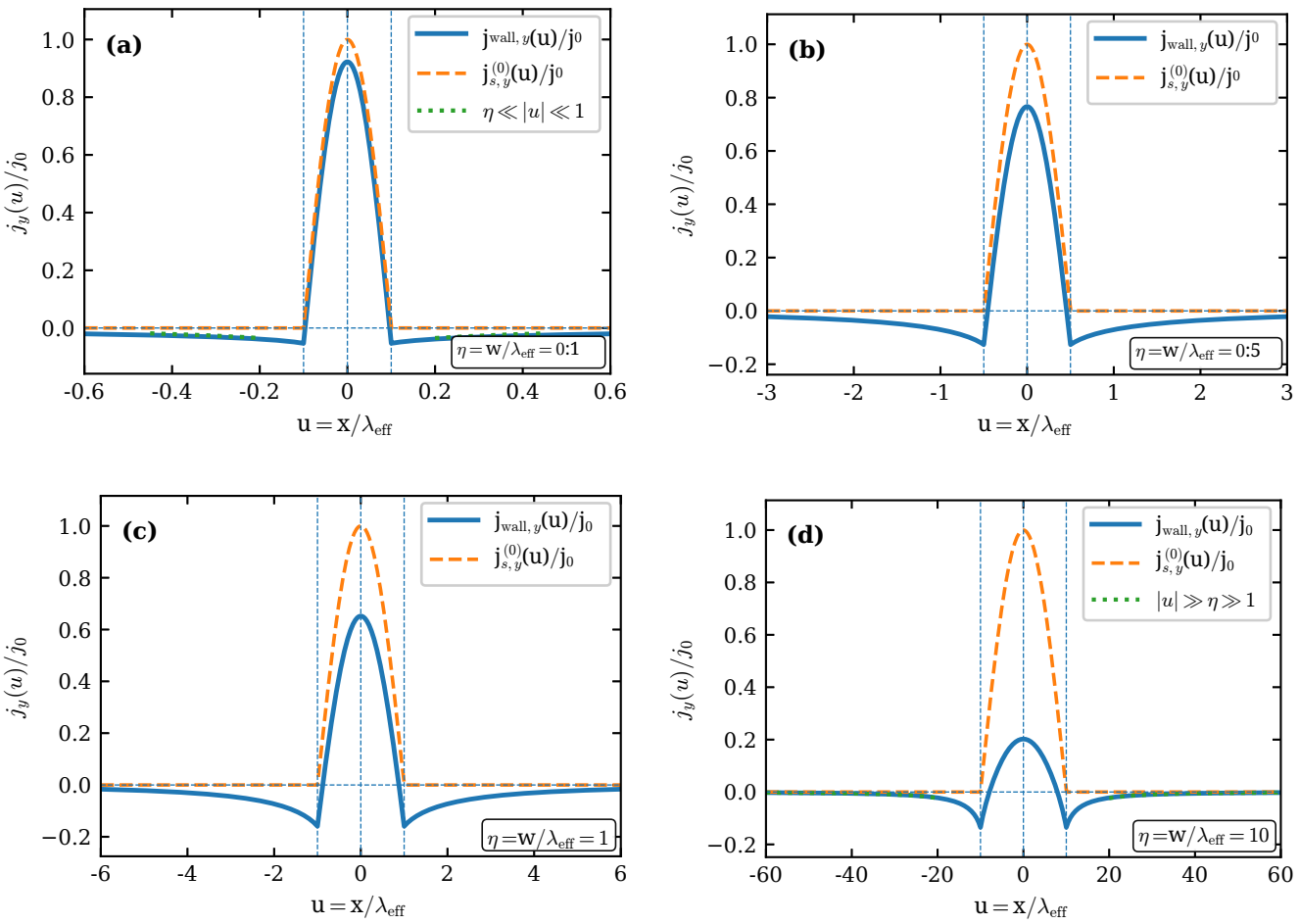


图2. Pearl屏蔽和未屏蔽的自发片电流分布，由N´eel畴壁诱导。实线曲线表示由式（73）得到的Pearl屏蔽电流 $j_{\mathrm{wall},y}(u)/j_0$，而虚线曲线表示由式（51）得到的未屏蔽片电流 $j_s^{(0)}(u)/j_0$。面板（a）–（d）分别对应于 $\eta = 0.1$、0.5、1.0和10.0。位于 $u = \pm\eta$ 处的竖直虚线标示磁化旋转区域的边界。每个面板中的绘图范围均经过选择，以同时解析该区域内的电流以及由Pearl屏蔽产生的长程延伸。在有显示的情况下，点线曲线表示屏蔽电流相应的受控渐近极限，而非拟合结果：面板（a）显示中间范围 $\eta \ll |u| \ll 1$ 内由式（79）给出的对数行为，而面板（d）显示由式（78）给出的 $|u| \gg \eta \gg 1$ 对应的宽畴壁远场渐近式。面板（b）和（c）对应于窄畴壁和宽畴壁区域之间的交叉，因此未显示渐近曲线。

$$\frac{j_{\mathrm{wall},y}(u)}{j_0} \simeq \frac{2\eta}{\pi^2}\left(\gamma_E + \ln\frac{|u|}{2}\right), \tag{79}$$

其中，$\gamma_E$ 是欧拉–马歇罗尼常数。

图 2 比较了在满足相应尺度分离的空间范围内，精确电流分布与渐近表达式的结果。对于窄畴壁，近畴壁行为由公式 (79) 中的对数形式描述，而公式 (77) 中的代数渐近式只有在距离 $|x| \gg \lambda_{\mathrm{eff}}$ 时才达到。$\eta = 0.5$ 和 $\eta = 1$ 的情形代表窄畴壁和宽畴壁区域之间的交叉，而对于 $\eta = 10$，公式 (78) 中的宽畴壁渐近式则在距离远大于 $w$ 时达到。

上文采用的分段 N´eel 畴壁参数化是连续的，但在 $x = \pm w$ 处存在导数不连续性。这些不连续性会导致相应傅里叶变换在大-$|k_x|$ 距离下呈代数衰减，因此可能影响畴壁宽度尺度上的详细电流分布。不过，它们并不是造成长距离代数电流尾部的原因。为验证这一点，我们对光滑的微磁学剖面 $\sin\theta = \tanh(x/2w)$ 和 $\cos\theta = \mathrm{sech}(x/2w)$ 重新进行了计算。对于这一剖面，横向源的傅里叶变换为

$$\alpha_y(k_x) = 2\pi w \alpha_0 \,\mathrm{sech}(\pi w k_x), \tag{80}$$

其在较大 $|k_x|$ 时呈指数衰减。然而，Pearl屏蔽引入了因子 $2\lambda_{\mathrm{eff}}|k_x|/[1 +$

$2\lambda_{\rm eff}|k_x|]$。其在小 $|k_x|$ 下的非解析行为产生了相同的 $j_y(x) \propto -x^{-2}$ 远场依赖关系，在 $|x| \gg w$，$\lambda_{\rm eff}$处亦然。因此，代数长程尾部是非局域Pearl电动力学的结果，而非分段壁的导数不连续性所致。两种壁剖面的详细推导与比较见补充材料。

### C. 磁场

N´eel 畴壁产生的自发电流会形成延伸至周围三维空间的磁场。对于一维畴壁几何，矢势可写为$\mathbf{A}(x,z) = A_y(x,z)\hat{\mathbf{y}}$。因而，超导薄膜处磁感应强度的面外分量为 $h_z(x) = \partial_x A_y(x,0)$，或者等价地，在傅里叶空间中为 $h_z(k_x) = ik_x A_y(k_x,0)$。

在通过平衡相位梯度补偿纵向磁电源之后，矢势完全由横向分量 $\alpha_y(x)$ 决定。将其傅里叶变换从式（69）代入式（64），并进行逆变换，即可得到以无量纲坐标表示的精确磁场分布：

$$h_{{\rm wall},z}(u) = \frac{\pi h_{z,0}}{2\eta}\Big[J_h(u+\eta) + J_h(u-\eta)\Big], \tag{81}$$

其中 $h_{z,0} = \frac{\phi_0}{2\pi^2\lambda_{\rm eff}}\alpha_0$ 以及

$$J_h(\beta) = \mathrm{sgn}(\beta)\,\frac{1}{\left(\frac{\pi}{\eta}\right)^2 - 1}\left[\mathcal{F}\left(\frac{|\beta|}{2}\right) - \frac{\pi}{\eta}\mathcal{F}\left(\frac{\pi|\beta|}{2\eta}\right) + \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{\eta} - 1\right)\cos\left(\frac{\pi|\beta|}{2\eta}\right)\right]. \tag{82}$$

这里，式（82）中出现的辅助函数为

$$\mathcal{F}(t) = \sin(t)\,\mathrm{Ci}(t) - \cos(t)\left[\mathrm{Si}(t) - \frac{\pi}{2}\right]. \tag{83}$$

显式因子 $\mathrm{sgn}(\beta)$ 使得 $J_h(\beta)$ 成为奇函数。因此，

$$h_{{\rm wall},z}(-u) = -h_{{\rm wall},z}(u), \tag{84}$$

因此，磁场在 N´eel 畴壁中心两侧反向。图 3 展示了不同 $\eta = w/\lambda_{\rm eff}$ 值下的磁场分布。Pearl屏蔽使磁场延伸到磁化旋转区域之外很远。对于窄畴壁，$\eta \ll 1$，磁场呈现中间渐近区间，

$$\frac{h_{{\rm wall},z}(u)}{h_{z,0}} \simeq -\frac{2\eta}{\pi}\frac{\mathrm{sgn}(u)}{|u|}, \tag{85}$$

在 $\eta \ll |u| \ll 1$ 处，对应于 $w \ll |x| \ll \lambda_{\rm eff}$。因此，在畴壁尺度与Pearl屏蔽长度之间，磁场按 $1/|x|$ 衰减。

当距离大于两个特征长度时，场交叉趋于代数型远场行为

$$\frac{h_{{\rm wall},z}(u)}{h_{z,0}} \simeq -\frac{16\eta}{\pi}\frac{\mathrm{sgn}(u)}{|u|^3}. \tag{86}$$

对于窄畴壁，该渐近式在 $|u| \gg 1 \gg \eta$ 时适用，对应于 $|x| \gg \lambda_{\rm eff} \gg w$；而对于宽畴壁，则在 $|u| \gg \eta \gg 1$ 时适用，对应于 $|x| \gg w \gg \lambda_{\rm eff}$。因此，在这两个极限下，远场的主导衰减相同，即 $h_{{\rm wall},\,z}(x) \propto -\mathrm{sgn}(x)/|x|^3$，不过达到这一渐近区间的距离取决于 $w$ 与 $\lambda_{\rm eff}$ 的相对大小。

图 3 比较了精确分布及其相应的渐近表达式。对于 $\eta = 0.1$，所示范围解析出了公式（85）的中间 $1/|u|$行为，而最终的 $1/|u|^3$ 衰减只有在 $|u| \gg 1$ 时才会达到。对于 $\eta = 10$，当距离远大于畴壁宽度时，会趋近于公式（86）中的远场行为。$\eta = 0.5$ 和 $\eta = 1$ 两种情况描述了这两个极限区间之间的交叉。

电流和磁场具有不同的空间对称性。Pearl屏蔽电流关于壁中心的反射为偶，而磁场为奇。因此，壁中心处的磁场反转是壁诱导电流分布具有反射对称性的直接结果。

### D. 涡旋-畴壁相互作用势

N´éel畴壁产生的磁场和自发电流也会改变超导薄膜中涡旋的能量。现在，我们在前文所采用的相同Pearl屏蔽伦敦描述下，推导由此产生的涡旋–畴壁相互作用势。将平衡畴壁纹理对规范不变凝聚态动量的贡献写为$\mathbf{C} = (\phi_0/2\pi)(\nabla\varphi + \boldsymbol{\alpha})$，将拓扑荷为 $s = \pm 1$ 的涡旋的奇异贡献写为$\mathbf{\Phi}^{(s)} = (\phi_0/2\pi)\nabla\varphi_{\rm vor}^{(s)}$，这样处理较为方便。其中，$s = +1$ 对应涡旋，$s = -1$ 对应反涡旋。薄膜自由能随后取决于组合$\mathbf{C}+\mathbf{\Phi}^{(s)}-\mathbf{A}$。消去矢势后，自由能中关于畴壁贡献和涡旋贡献的双线性部分定义了它们的相互作用能。

对于一般的傅里叶分量，由壁和涡旋源共同产生的矢势为

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(0) = \frac{\mathbf{C}_{\mathbf{k}} + \mathbf{\Phi}_{\mathbf{k}}^{(s)}}{1 + 2|\mathbf{k}|\lambda_{\rm eff}}. \tag{87}$$

Pearl分母与壁诱导电流和磁场所得的分母相同。薄膜外相应的矢势为

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(z) = \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(0)e^{-|\mathbf{k}||z|}. \tag{88}$$

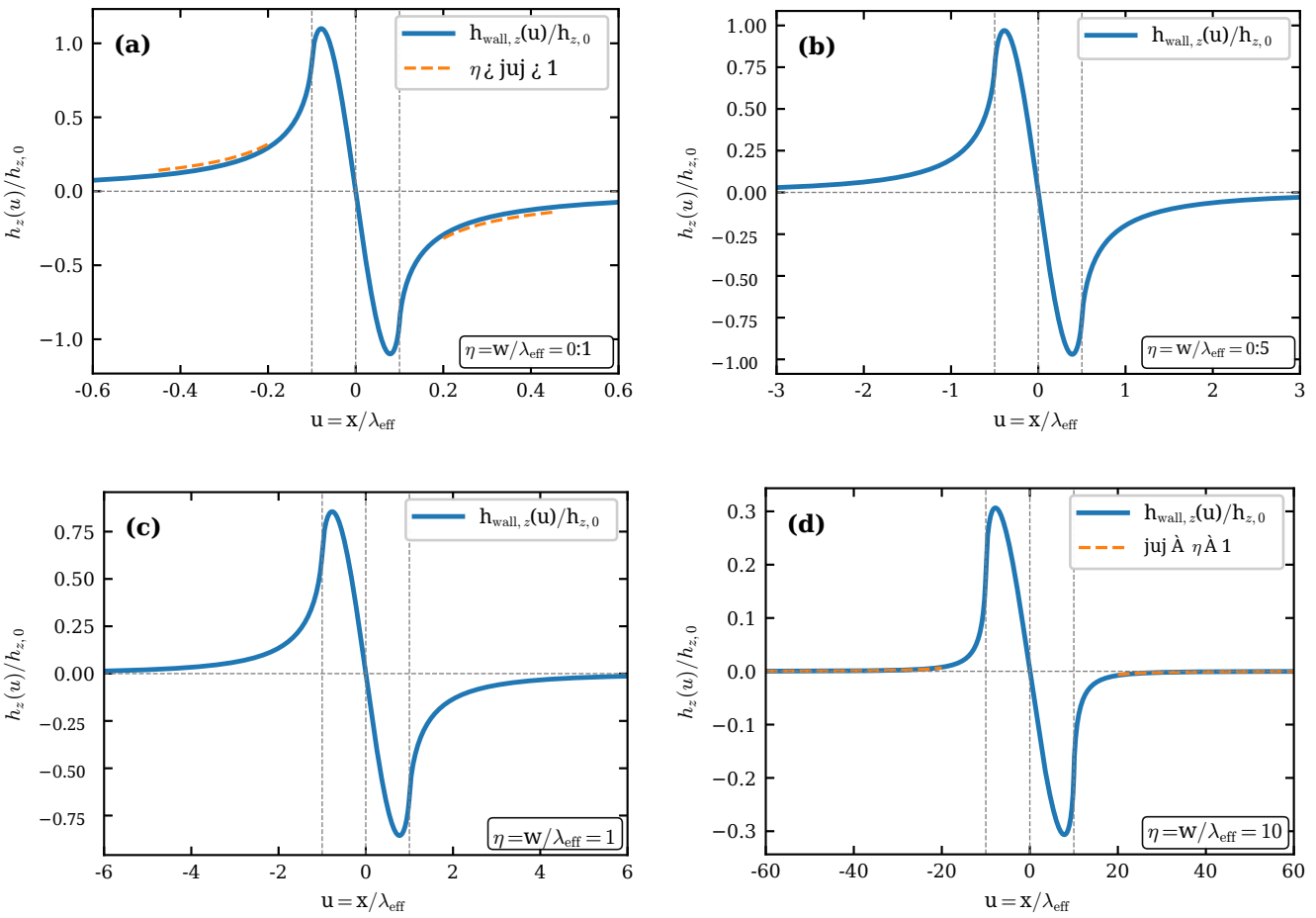


图 3. Néel 畴壁产生的面外磁感应强度。实线表示由方程 (81) 得到的精确场 $h_{\mathrm{wall},\ z}(u)/h_{z,\ 0}$。图 (a)–(d) 分别对应 $\eta = 0.1$、0.5、1.0 和 10.0。位于 $u = \pm\eta$ 的竖直虚线标出磁化旋转区域的边界。每个图中的绘图范围均经过选择，以分辨壁中心处的磁场反转及其在旋转区域之外的空间延伸。若有虚线，它们表示精确场的受控渐近极限，而非拟合曲线：图 (a) 显示由方程 (85) 给出的 $\eta \ll |u| \ll 1$ 的中间窄畴壁行为，图 (d) 则显示由方程 (86) 给出的 $|u| \gg \eta \gg 1$ 的宽畴壁远场渐近式。图 (b) 和 (c) 对应窄畴壁和宽畴壁区域之间的交叉，因此未绘制渐近曲线。

等价地，对 $z$ 进行傅里叶变换后，

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k},k_z} = \frac{2|\mathbf{k}|}{k_z^2 + |\mathbf{k}|^2}\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(0). \tag{89}$$

平衡相位梯度补偿了磁电源的纵向分量，$\partial_x\varphi + \alpha_x = 0$，因此畴壁贡献 $\mathbf{C}$是纯横向的。涡旋贡献同样是横向的，$\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Phi}^{(s)}{}_{\mathbf{k}} = 0$。因此，库仑规范解仅涉及横向傅里叶分量。

将屏蔽矢势代入薄膜能量和磁场能量，得到涡旋与畴壁的相互作用

$$E_{\mathrm{int}}^{(s)} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{|\mathbf{k}|}{1+2|\mathbf{k}|\lambda_{\mathrm{eff}}} \times \left[\mathbf{C}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{\Phi}_{\mathbf{k}}^{(s)*} + \mathbf{C}_{\mathbf{k}}^{*}\cdot\mathbf{\Phi}_{\mathbf{k}}^{(s)}\right]. \tag{90}$$

因子 $|\mathbf{k}|/(1+2|\mathbf{k}|\lambda_{\mathrm{eff}})$ 是经 Pearl 屏蔽的相互作用核函数。它决定了 Néel 畴壁纹理的空间傅里叶分量如何与涡旋的环流超流耦合。

对于单个 N´eel 畴壁，在计及平衡相位后，仅剩下磁电源的横向分量。利用式（65）的傅里叶变换，可得到

$$\mathbf{C}_{\mathbf{k}} = \phi_0\delta(k_y)\alpha_{k_x,y}\hat{\mathbf{y}}, \tag{91}$$

其中 $\alpha_{k_x,\ y}$ 由方程（69）给出。

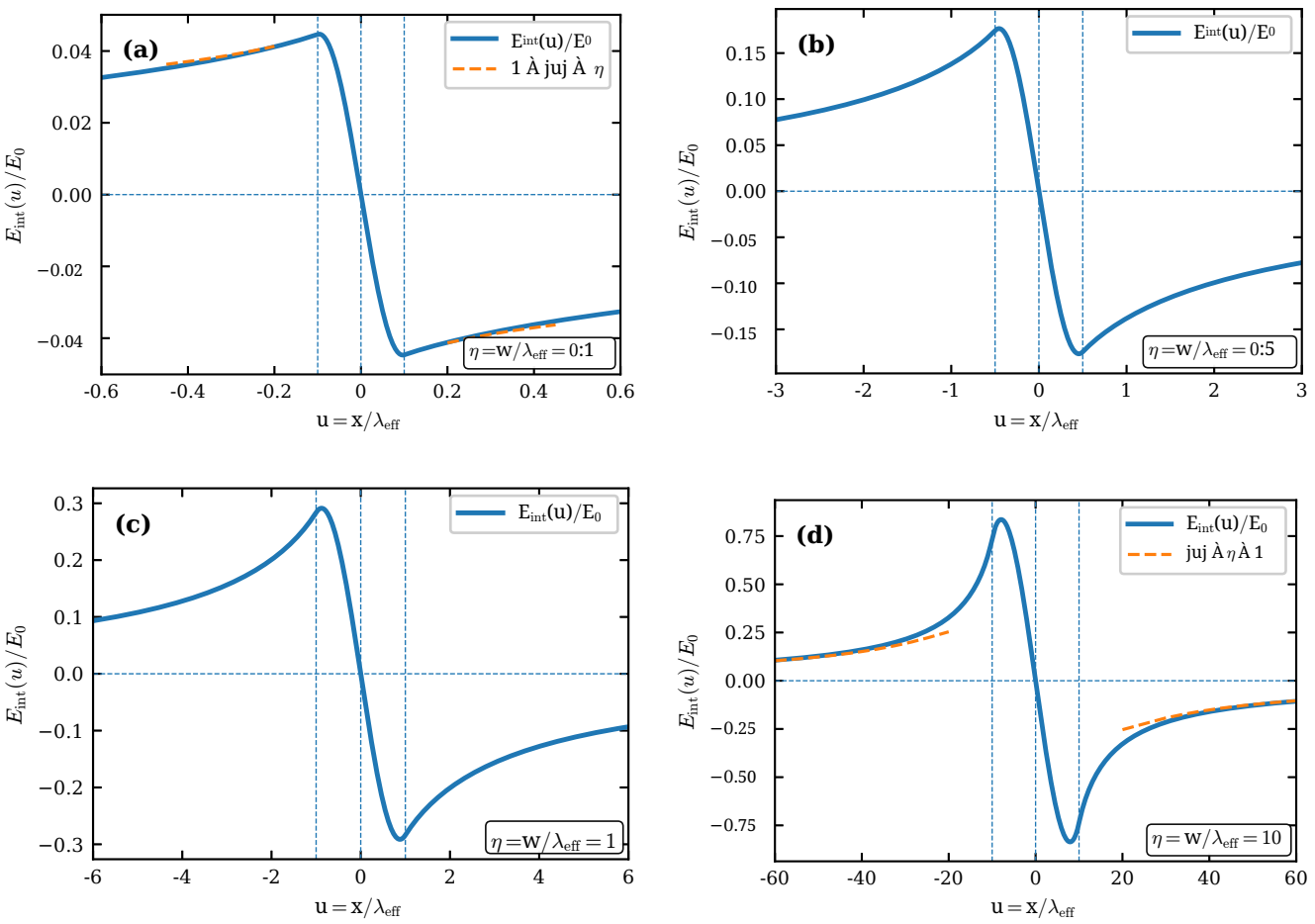


图 4. 固定拓扑荷下的涡旋–畴壁相互作用势。实线表示由公式 (96) 得到的精确 Pearl 屏蔽相互作用 $E_{\rm int}(u)/E_0$。面板 (a)–(d) 分别对应 $\eta = 0.1$、0.5、1.0 和 10.0。$u = \pm\eta$ 处的竖直虚线标示磁化旋转区域的边界，$u = 0$ 处的竖线标示壁中心。对于公式 (96) 所采用的符号约定，涡旋被吸引到畴壁的 $u > 0$ 侧，并从 $u < 0$ 侧受到排斥；对于反涡旋，相互作用方向相反。图中所示的虚线表示受控的渐近表达式，而非拟合：面板 (a) 展示由公式 (98) 给出的 $1 \gg |u| \gg \eta$ 下的中间窄畴壁行为，面板 (d) 展示由公式 (100) 给出的 $|u| \gg \eta \gg 1$ 下的宽畴壁远场渐近式。面板 (b) 和 (c) 对应窄畴壁和宽畴壁区域之间的交叉，因此未绘制渐近曲线。

位于 $\mathbf{R}_0 = (x_0,\ y_0)$ 处的涡旋在傅里叶空间中表示为 [53, 67, 74]

$$\mathbf{\Phi}_{\mathbf{k}}^{(s)} = \frac{\phi_0}{2\pi}\nabla\varphi_{\rm vor}^{(s)}(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_0}, \tag{92}$$

with

$$\nabla\varphi_{\rm vor}^{(s)}(\mathbf{k}) = 2\pi i s\,\frac{k_y\hat{\mathbf{x}} - k_x\hat{\mathbf{y}}}{k_x^2 + k_y^2}. \tag{93}$$

实数条件为 $\mathbf{\Phi}_{-\mathbf{k}}^{(s)} = \mathbf{\Phi}^{(s)*}_{\mathbf{k}}$。

由于畴壁源包含 $\delta(k_y)$，因此式 (90) 中的 $k_y$ 积分给出 $k_y = 0$。因此，相互作用与涡旋坐标 $y_0$ 无关，这正如沿畴壁方向的平移不变性所预期的那样。代入横向畴壁源得到

$$E_{\rm int}^{(s)}(x_0) = -s\frac{2\alpha_0\pi\phi_0^2}{w(2\pi)^3}\int_0^\infty dk_x \times \frac{\sin(k_x x_0)\cos(k_x w)}{\left[\left(\dfrac{\pi}{2w}\right)^2 - k_x^2\right](1 + 2k_x\lambda_{\rm eff})}. \tag{94}$$

$k_x = \pi/(2w)$ 处的表观奇点是可去的，因为 $\cos(k_x w)$ 的零点抵消了分母的零点。

下文中，我们取 $s = +1$，并将涡旋位置简记为 $x_0$。反涡旋的相互作用符号相反，

$$E_{\rm int}^{(-)}(x) = -E_{\rm int}^{(+)}(x). \tag{95}$$

不失一般性，我们也取 $\alpha_0 > 0$ 。反转 $\alpha_0$ 的符号，或等价地反转磁织构的手性，会使畴壁的吸引侧和排斥侧互换。

在相同的无量纲变量下，取正的尺度 $E_0 = \alpha_0\phi_0^2/(2\pi^3)$，可得

$$E_{\rm int}(u) = -\frac{E_0}{2}\Big[J_{\rm int}(u+\eta) + J_{\rm int}(u-\eta)\Big]. \tag{96}$$

函数 $J_{\rm int}$ 定义为

$$J_{\rm int}(\beta) = \mathrm{sgn}(\beta)\,\frac{1}{\left(\frac{\pi}{\eta}\right)^2 - 1}\left[\frac{\pi}{\eta}\,\mathcal{F}\!\left(\frac{|\beta|}{2}\right) - \mathcal{F}\!\left(\frac{\pi|\beta|}{2\eta}\right) - \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{\eta} - 1\right)\cos\!\left(\frac{\pi|\beta|}{2\eta}\right)\right]. \tag{97}$$

函数 $\mathcal{F}$ 在式 (83) 中定义。由于 $J_{\rm int}$ 是奇函数，对于固定的拓扑荷，有 $E_{\rm int}(-u) = -E_{\rm int}(u)$。因此，畴壁诱导相互作用会吸引畴壁一侧具有给定涡旋度的涡旋，并排斥另一侧具有相同涡旋度的涡旋；反转拓扑荷会使势反向。因此，畴壁产生了反对称的钉扎势，在空间上分隔涡旋和反涡旋能量上优选的位置。

图4展示了不同 $\eta = w/\lambda_{\rm eff}$ 值下的相互作用势。对于窄畴壁，即 $\eta \ll 1$，对应于 $w \ll |x| \ll \lambda_{\rm eff}$ 的中间范围 $\eta \ll |u| \ll 1$ 可由下式描述

$$\frac{E_{\rm int}(u)}{E_0} \simeq -\frac{\eta}{2}\,\mathrm{sgn}(u)\left[1 + \frac{|u|}{\pi}\left(\gamma_E + \ln\frac{|u|}{2} - 1\right)\right]. \tag{98}$$

因此，在狭窄壁的两侧，相互作用趋近于一个变号的平台，并带有对数空间修正。

在距离大于壁宽和 Pearl屏蔽长度时，相互作用具有代数$1/|x|$ 尾部。对于 $|u| \gg 1 \gg \eta$，对应于 $|x| \gg \lambda_{\rm eff} \gg w$，可得

$$\frac{E_{\rm int}(u)}{E_0} \simeq -\frac{2\eta}{\pi}\frac{\mathrm{sgn}(u)}{|u|}\left(1 - \frac{8}{|u|^2}\right). \tag{99}$$

对于宽壁，$|u| \gg \eta \gg 1$，对应于 $|x| \gg w \gg \lambda_{\rm eff}$，其渐近形式为

$$\frac{E_{\rm int}(u)}{E_0} \simeq -\frac{2\eta}{\pi}\frac{\mathrm{sgn}(u)}{|u|}\left(1 - \frac{8\eta^2}{\pi^2|u|^2}\right). \tag{100}$$

图 4 对比了精确的相互作用曲线与相应的渐近表达式。对于$\eta = 0.1$，所示范围分辨出了式 (98) 描述的中间变号平台；只有当 $|u| \gg 1$时，才会达到最终的窄畴壁 $1/|u|$ 尾部。对于 $\eta = 10$，远大于畴壁宽度的距离趋近于式 (100) 中的宽畴壁渐近行为。 $\eta = 0.5$ 和 $\eta = 1$ 两种情况描述了这些极限状态之间的交叉。

相互作用强度的一个有用解析度量，是计算磁化旋转区域边界处的势， $x = w$，或等价地$u = \eta$:

$$E_{\rm int}(w) = -\frac{\alpha_0\phi_0^2}{4\pi^3}\left[\frac{\frac{\pi}{\eta}\mathcal{F}(\eta) - \mathcal{F}(\pi)}{\left(\frac{\pi}{\eta}\right)^2 - 1} + \frac{\pi}{2\left(\frac{\pi}{\eta} + 1\right)}\right]. \tag{101}$$

该量为壁诱导的涡旋相互作用提供了一个方便的参考尺度。应将其与精确的钉扎能区分开来，后者由式（96）中的完整相互作用势的最小值决定。

对于窄壁， $\eta \ll 1$ ($w \ll \lambda_{\rm eff}$)，旋转区域边界处的相互作用变为

$$E_{\rm int}(w) \simeq -\frac{w}{\lambda_{\rm eff}}\frac{E_0}{2}. \tag{102}$$

该表达式给出了窄畴壁区间中的主导阶畴壁边缘钉扎尺度，衡量了将一个涡旋放置在畴壁边界附近吸引分支上的能量增益。

该尺度的大小由 $w/\lambda_{\rm eff}$ 控制。对于第 II 节中考虑的代表性比值 $\xi/\lambda_{\rm eff} \sim 10^{-3}$ ，式（102）给出 $E_{\rm int}(w)/E_0 \simeq -5.0\times10^{-4}(w/\xi)$。随后，窄畴壁伦敦区间 $w \ll \lambda_{\rm eff}$ 对应于 $1 \ll w/\xi \ll 10^3$，或等价地 $\xi \ll w \ll \lambda_{\rm eff}$。绝对相互作用能则通过 $E_0 \propto \alpha_0$ 保持与磁电耦合成正比。

在相反的极限 $\eta \gg 1$ ($w \gg \lambda_{\rm eff}$) 下，旋转区域边界处的相互作用趋近于

$$E_{\rm int}(w) \simeq -\frac{E_0}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \mathcal{F}(\pi)\right], \tag{103}$$

因此，畴壁边缘钉扎尺度在主导阶上基本独立于 $w$ 。由于 $\frac{\pi}{2} + \mathcal{F}(\pi)$ =正弦积分$(\pi)$ $\simeq$ 1.85194, 饱和相互作用能为$E_{\rm int}(w) \simeq -0.926\,E_0$。综合这些极限可以看出，N´eel 畴壁提供了一个延展的磁电钉扎源，其特征能量尺度在宽畴壁区间内可达到 $E_0$ 量级。

因此，单个 N´eel 畴壁会产生一种延展的反对称涡旋钉扎势。改变涡旋拓扑荷或磁电耦合的符号，都会使该势反号；而其空间范围则由畴壁轮廓与 Pearl屏蔽的综合作用决定。这种相互作用为第 VI 节所研究的涡旋–反涡旋构型奠定了基础。

图 4展示了固定拓扑荷下得到的反对称相互作用轮廓。精确的

最小值由完整轮廓确定，而畴壁边缘处的数值则提供了一个有用的解析钉扎尺度。式（98）—（100）中的渐近形式表明，钉扎景观仍具有长程特征，这反映了磁电源的延展性。

图 4 中的涡旋–畴壁相互作用剖面提供了涡旋棘轮响应所需的静态不对称性 [19–22]。对于本文采用的畴壁轮廓和符号约定，涡旋被吸引至 $x > 0$ 侧，并被排斥离开 $x < 0$ 侧，因此畴壁产生了定向的势垒–势阱势；对于反涡旋，方向则相反。最初被困在吸引势阱中的涡旋面临不等价的逃逸路径：向 $+x$ 运动需要离开势阱，而向 $-x$运动还需要穿越畴壁另一侧的排斥势垒。

沿畴壁施加的输运电流会对畴壁产生横向的洛伦兹力，并周期性地倾斜这一势垒–势阱势景。适当的零均值交流输运电流可以在一个半周期内驱动涡旋穿过较低的势垒，而在相反的半周期内涡旋保持钉扎。因此，由 N´eel 畴壁组成、且重复相同势垒–势阱取向的阵列，可能形成一种棘轮势景，将交流驱动转化为涡旋的净位移，前提是叠加后的阵列势仍保持非中心对称性。

畴壁诱导相互作用势的吸引势阱也为移动的 N´eel 畴壁拖曳涡旋提供了一种机制。随着畴壁移动，钉扎极小值会随磁织构一同移动。被困在这一极小值中的涡旋可以继续束缚在移动的畴壁上，从而随其一起移动，前提是在畴壁运动过程中始终保持钉扎状态。

我们考虑了自旋轨道相互作用占主导的极限下的涡旋–畴壁相互作用，$|\alpha_0|\,\phi_0/2\pi \gg 2\pi m d_f$。在相反的情形中，即相互作用由 N´eel 畴壁的磁感应强度主导时，也会出现类似情况（参见第 III B 节）。要在相互作用大小的层面描述这种情形，只需在相应公式中将$|\alpha_0|\,\phi_0/2\pi$ 替换为 $2\pi m d_f$。

## VI. N´EEL 畴壁诱导的涡旋–反涡旋对稳定化

第五节推导的反对称涡旋势倾向于使涅尔畴壁两侧具有相反的拓扑荷。现在我们将确定，这种磁电能量增益能否抵消在超导薄膜中生成涡旋–反涡旋对所需的能量代价。

在零外加磁场且不存在外部施加的净涡旋度时，相关构型具有零总拓扑荷。因此，我们考虑一个对称涡旋–反涡旋对，其中涡旋位于 $x > 0$，反涡旋位于 $-x_0$。它们之间的距离为 $2x_0$。相对于无涡旋态的总对能量为 tal 对能量相对于无涡旋态的值为

$$\begin{aligned} E_{\rm pair} &= E_{\rm vor} + E_{\rm av} + E_{\rm int}^{\rm vor}(x) + E_{\rm int}^{\rm av}(-x) + U_{\rm v\bar{v}}(2x) \\ &= E_{\rm v\bar{v}}^{(0)}(2x) + E_{\rm int}^{\rm vor} + E_{\rm int}^{\rm av}. \end{aligned} \tag{104}$$

其中，$E_{\rm vor}$ 和 $E_{\rm av}$ 分别是孤立 Pearl 涡旋和反涡旋的自能，$U_{\rm v\bar{v}}(2x)$是它们之间的相互作用，而最后两项描述了涡旋和反涡旋与涅尔畴壁诱导的磁电势之间的相互作用。

涡旋和反涡旋具有相同的自能，

$$E_{\rm vor} = E_{\rm av} = \frac{\phi_0^2}{16\pi^2\lambda_{\rm eff}} \ln\left(\frac{\lambda_{\rm eff}}{\xi}\right). \tag{105}$$

当间距处于对数区间时，$\xi \ll 2x \ll \lambda_{\rm eff}$，吸引性的涡旋–反涡旋相互作用为

$$U_{\rm v\bar{v}}(2x) = -\frac{\phi_0^2}{8\pi^2\lambda_{\rm eff}} \ln\left(\frac{\lambda_{\rm eff}}{2x}\right). \tag{106}$$

因此，在没有畴壁诱导的磁电势时，该对的能量为

$$\begin{aligned} E_{\rm v\bar{v}}^{(0)}(2x) &= E_{\rm vor} + E_{\rm av} + U_{\rm v\bar{v}}(2x) \\ &= \frac{\phi_0^2}{8\pi^2\lambda_{\rm eff}} \ln\left(\frac{2x}{\xi}\right). \end{aligned} \tag{107}$$

因此，相互吸引将能量代价从两个彼此独立的 Pearl 涡旋的能量代价降低为由它们的间距 $2x$决定的对数型对能量。

对于此处考虑的 N´eel 畴壁纹理，相互作用势关于位置呈反对称，并随拓扑荷改变符号。因此，对称地放置在各自吸引侧的涡旋和反涡旋具有相同的相互作用能：

$$E_{\rm int}^{\rm vor}(x) = E_{\rm int}^{\rm av}(-x) \equiv E_{\rm int}. \tag{108}$$

其中

$$E_{\rm int}(x) = -\alpha_0 \frac{\phi_0^2}{4\pi^3}\left[J_{\rm int}\left(\frac{x+w}{\lambda_{\rm eff}}\right) + J_{\rm int}\left(\frac{x-w}{\lambda_{\rm eff}}\right)\right]. \tag{109}$$

因此，总对能量为

$$E_{\rm pair}(x) = E_{\rm v\bar{v}}^{(0)}(2x) + 2E_{\rm int}(x). \tag{110}$$

第一项倾向于减小涡旋–反涡旋间距，而壁诱导势则倾向于使两个拓扑荷位于畴壁的两侧。这两种贡献之间的竞争决定了平衡间距。

涡旋–反涡旋对的最优位置由 $dE_{\rm pair}/dx = 0$得出。在对数型对间相互作用近似下，$\xi \ll 2x \ll \lambda_{\rm eff}$，该条件变为

$$\frac{\alpha_0\lambda_{\rm eff}}{4\pi^3}\left[J'_{\rm int}(u+\eta) + J'_{\rm int}(u-\eta)\right] = \frac{1}{16\pi^2 u}. \tag{111}$$

右侧来源于涡旋–反涡旋吸引，而左侧描述的是由 N´eel 畴壁诱导的磁电势所施加的力。关于畴壁边缘计算和对能量最小化的详细信息，包括 $J'_{\rm int}(\beta)$的显式表达式，以及固定$\alpha_0\lambda_{\rm eff}$时的补充扫描结果，见补充材料 [68]。

对于数值分析，我们采用无量纲总对能量

$$\widetilde{E}_{\rm pair}(x) \equiv \frac{8\pi^2\lambda_{\rm eff}}{\phi_0^2} E_{\rm pair}(x). \tag{112}$$

所有长度均以 $\lambda_{\rm eff}$ 为单位表示。平衡位置和对能量的计算使用$\xi/\lambda_{\rm eff} = 10^{-3}$，而下文的临界耦合分析则明确展示了对该比值的依赖性。

图5显示了在若干 $\eta = w/\lambda_{\rm eff}$ 取值下，平衡涡旋位置 $u_* = x_*/\lambda_{\rm eff}$ 随无量纲磁电耦合 $\alpha_0\lambda_{\rm eff}$ 的变化关系。平衡位置通过在对数型涡旋–反涡旋相互作用的适用范围内，极小化式（110）中的总对能量得到，

$$\xi \ll 2x_* \ll \lambda_{\rm eff}. \tag{113}$$

壁诱导势倾向于使涡旋与反涡旋位于畴壁的相对两侧，而它们之间的相互吸引则倾向于减小间距 $2x_*$。增大磁电耦合会增强畴壁贡献，平衡位置也会趋近于由孤立涡旋–畴壁势所选定的极小值。

在形式上的强耦合极限 $\alpha_0\lambda_{\rm eff} \to \infty$ 下，涡旋–反涡旋吸引对驻定条件的贡献，相对于畴壁诱导力变得可以忽略。此时，平衡位置趋近于单涡旋相互作用势的极小值。对于 $\eta = 0.1$，可得

$$\frac{x_*}{\lambda_{\rm eff}} \simeq 0.097. \tag{114}$$

在有限耦合下，涡旋–反涡旋之间的相互吸引会使两个缺陷向壁中心移动，并减小它们的平衡间距。

图6展示了无量纲对能量 $\widetilde{E}_{\rm pair}(u_*)$ 在平衡位置处的取值。随着磁电耦合增强，其演化自然分为三个区域。在弱耦合下，在使用对数近似的范围内不存在有限间距极小值。该区域中的虚线曲线是通过在计算适用范围内保留的最小参考位置处计算 $E_{\rm pair}(u)$ 而得到的延续；因此，不应将其解释为平衡对能量。

在中等耦合下，有限间距处会形成一个局部极小值，

$$\left.\frac{dE_{\rm pair}}{du}\right|_{u=u_*} = 0, \qquad \left.\frac{d^2E_{\rm pair}}{du^2}\right|_{u=u_*} > 0. \tag{115}$$

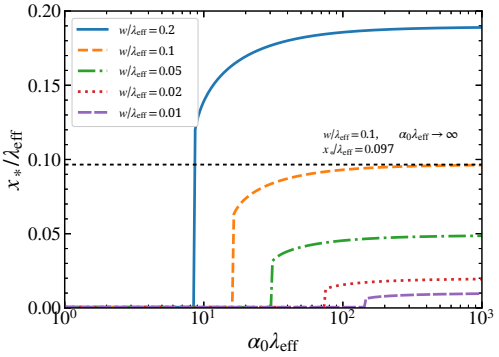


图 5. 对于比值 $w/\lambda_{\rm eff}$ 的若干取值，最优涡旋–反涡旋位置 $x_*/\lambda_{\rm eff}$ 随无量纲磁电耦合强度 $\alpha_0\lambda_{\rm eff}$ 的变化。

此时，N´eel 畴壁可以支撑一个束缚的涡旋–反涡旋构型。只要

$$E_{\rm pair}(u_*) > 0, \tag{116}$$

然而，无涡旋态在能量上仍然更有利。有限间距的涡旋–反涡旋对代表的是一种亚稳构型，而非基态。

随着磁电耦合进一步增强，对能量的最小值达到零。我们将临界耦合 $\alpha_c$ 定义为

$$\min_u E_{\rm pair}(u;\alpha_c) = 0. \tag{117}$$

等价地，

$$E_{\rm pair}(u_*;\alpha_c) = 0, \qquad \left.\frac{\partial E_{\rm pair}}{\partial u}\right|_{u=u_*,\,\alpha_0=\alpha_c} = 0. \tag{118}$$

对于 $\alpha_0 > \alpha_c$，相对于无涡旋态，对能量的最小值为负。在当前的伦敦能量分析中，即使在零外加磁场下，形成涡旋–反涡旋对在能量上也是有利的。

请注意，我们考虑的是薄膜超导体中低于可能的贝列津斯基–科斯特利茨–陶勒斯（BKT）相变温度 $T_{\rm BKT}$的温度。对于薄膜

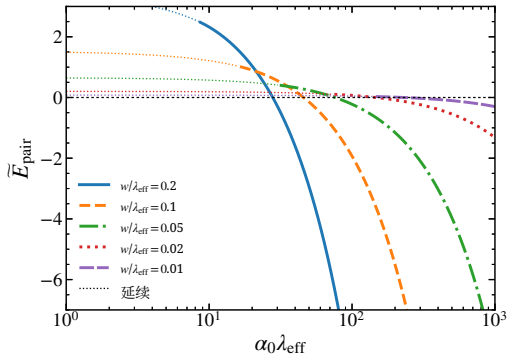


图 6. 对于 $w/\lambda_{\rm eff}$ 的若干取值，无量纲涡旋–反涡旋~对能量 $E_{\rm pair}(x_*)$ 对磁电耦合强度 $\alpha_0\lambda_{\rm eff}$ 的依赖关系。能量取在通过最小化完整对能量确定的平衡涡旋位置 $x_*$ 处。

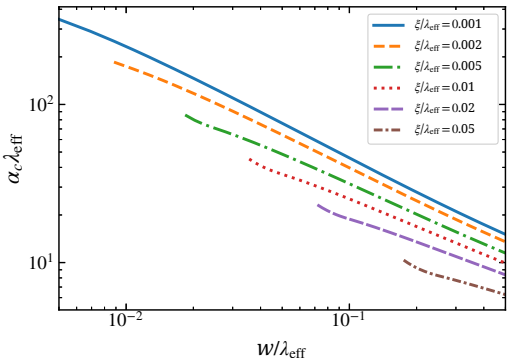


图 7. 对于相干长度比 $\xi/\lambda_{\rm eff}$ 的若干取值，自发涡旋–反涡旋产生所需的临界无量纲磁电耦合 $\alpha_c\lambda_{\rm eff}$ 随比值 $w/\lambda_{\rm eff}$ 的变化关系。

而言，当超流刚度足够大时，$T_{\rm BKT}$ 通常接近平均场转变温度 $T_{c0}$，相对差值 $(T_{c0}-T_{\rm BKT})/T_{c0}$ 可能非常小（纳米厚度范围内的薄膜中小于 1%）[75]。因此，这一条件并不过于苛刻。我们估计，对于远低于 $T_{\rm BKT}$ 的温度，临界磁电耦合的相对偏移量约为

$$\frac{\delta\alpha_c}{\alpha_c}\sim\frac{T_{c0}-T_{\rm BKT}}{T_{c0}-T}\ll 1. \tag{119}$$

因此，$\alpha_c$ 的相应变化预计很小。

增大畴壁宽度会降低临界磁电耦合，因为延展的畴壁纹理在更大的空间区域内产生更强的涡旋相互作用。图 7 展示了 $\alpha_c\lambda_{\rm eff}$ 随 $w/\lambda_{\rm eff}$ 变化的关系，对应 $\xi/\lambda_{\rm eff}$ 的若干取值。在临界线以下，无涡旋态的能量较低。在临界线以上，最低能量的涡旋–反涡旋构型低于无涡旋态。

对 $\xi/\lambda_{\rm eff}$ 的依赖源于公式（107）中该对的对数能量代价。较小的相干长度会增大 $\ln(2x/\xi)$，从而增加所需的磁电耦合，以稳定该对。因此，临界线反映了对数形式的涡旋–反涡旋对能量与延展的´éel 畴壁诱导钉扎势之间的竞争。

### A. 参数估算与实验可行性

现在，我们将通过涡旋–反涡旋计算得到的临界耦合与磁电耦合的微观估算进行比较。

根据公式（8），我们采用 $|\alpha_0|\xi\sim 10^{-2}$。因此，控制涡旋–畴壁相互作用的无量纲耦合为 $|\alpha_0|\lambda_{\rm eff}=|\alpha_0|\xi/(\xi/\lambda_{\rm eff})$。对于具有代表性的薄膜参数值 $\xi/\lambda_{\rm eff}\sim 10^{-3}-10^{-2}$，可得

$$|\alpha_0|\lambda_{\rm eff}\sim 1-10. \tag{120}$$

更具体地说，对于 $\xi/\lambda_{\rm eff}=10^{-3}$，$|\alpha_0|\lambda_{\rm eff}\sim 10$；而对于 $\xi/\lambda_{\rm eff}=10^{-2}$，$|\alpha_0|\lambda_{\rm eff}\sim 1$。

图 5 和图 6 是针对 $\xi/\lambda_{\rm eff}=10^{-3}$ 计算得出的。它们表明，随着磁电耦合增强，涡旋–反涡旋能量曲线首先出现有限间距极小值，随后该极小值降至

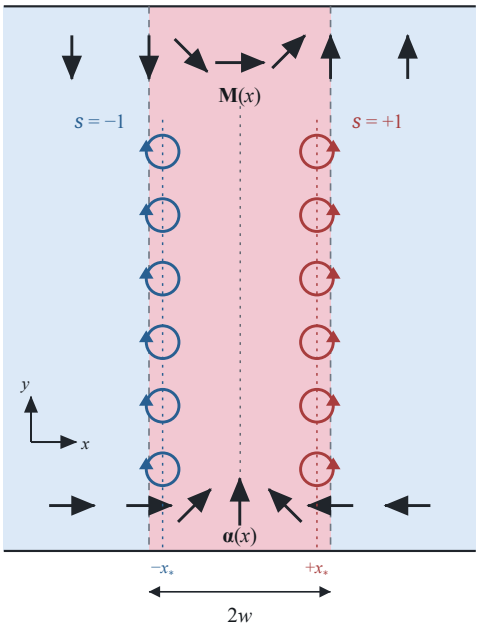


图 8. 在稀对极限下，通过平行的涡旋链和反涡旋链对单个 N´eel 畴壁进行示意性装饰。箭头表示面内分布 $\mathbf{M}(x)$ 和 $\boldsymbol{\alpha}(x)$。对于 $\mathbf{n}=\hat{\mathbf{z}}$和 $\alpha_0>0$，涡旋 $(s=+1)$ 局域在 $x=+x_*$ 附近，而反涡旋 $(s=-1)$ 局域在 $x=-x_*$ 附近。

无涡旋态的能量以下。对于较宽的 N´eel 畴壁，所需的耦合会更小，因为畴壁诱导的钉扎势更强，并且延伸到更大的空间区域。

图 7 展示了相应的临界耦合$\alpha_c\lambda_{\rm eff}$。它随 $w/\lambda_{\rm eff}$ 增大以及 $\xi/\lambda_{\rm eff}$ 增大而降低。后一种效应源于对数形式的涡旋–反涡旋能量：较大的相干长度会降低形成该对的能量代价。对于具有 $w/\lambda_{\rm eff}\sim 0.3-0.5$ 的延展型 N´eel 畴壁，图 7 给出了具有代表性的阈值

$$\alpha_c\lambda_{\rm eff}\sim 5-15, \tag{121}$$

具体取决于 $\xi/\lambda_{\rm eff}$ 的值。

将该临界值与微观估算所预期的耦合进行比较非常重要。对于$\xi/\lambda_{\rm eff}=10^{-3}$，有 $|\alpha_0|\lambda_{\rm eff}\sim 10$，其量级与计算得到的阈值相同。相比之下，当 $\xi/\lambda_{\rm eff}$ 增大到 $10^{-2}$时，$|\alpha_0|\lambda_{\rm eff}$ 的估算值降至约 1。图 7 中 $\alpha_c\lambda_{\rm eff}$ 的相应下降要弱得多。因此，尽管临界阈值本身会随着 $\xi/\lambda_{\rm eff}$ 增大而降低，但磁电耦合的微观估算值下降得更为显著。因此，对于固定的 $|\alpha_0|\xi\sim 10^{-2}$，$\xi/\lambda_{\rm eff}\sim 10^{-3}$ 区域更有利于达到涡旋–反涡旋成核阈值。

所需的畴壁宽度也可以用相干长度的单位表示。由于 $w/\xi=(w/\lambda_{\rm eff})/(\xi/\lambda_{\rm eff})$，区间 $w/\lambda_{\rm eff}\sim 0.3-0.5$ 对应于 $w/\xi$ ~300 − 500 （适用于 $\xi/\lambda_{\rm eff}=10^{-3}$），而对应于 $w/\xi\sim 30-50$ （适用于 $\xi/\lambda_{\rm eff}=10^{-2}$）。因此，在这两种情况下，相关的 N´eel 畴壁都比超导相干长度 $\xi\ll w$宽得多。

畴壁宽度和磁电耦合由不同的微观机制控制。畴壁宽度取决于磁交换刚度、各向异性和磁静能，而 $\alpha_0$ 则由界面自旋轨道耦合和交换耦合决定。在当前模型中，因此将 $w$ 和 $\alpha_0$ 视为独立的输入参数。增大 $\alpha_0$ 并不意味着畴壁宽度会相应增加。因此，必须在同一异质结构中同时实现 $w$、 $\lambda_{\rm eff}/\xi$和 $\alpha_0$所需的取值。

基于钇铁石榴石的混合结构表明，若干所需条件可以通过实验实现。在钇铁石榴石/铂结构中，已有研究报道了微米尺度宽度的奈尔型畴壁 [76]，；此外，超导钇铁石榴石/氮化铌混合结构以及基于铂/钇铁石榴石的结构中的界面交换–Rashba效应也已得到证实 [77]。这些结果使基于钇铁石榴石的混合结构成为有趣的候选平台 [78]。然而，所引用的实验分别验证了这些条件，并未证明所需的$w/\lambda_{\rm eff}$、 $\xi/\lambda_{\rm eff}$和 $|\alpha_0|\lambda_{\rm eff}$取值均可在同一异质结构中实现。

因此，最有利的实验条件是将极薄的超导薄膜与较大的$\lambda_{\rm eff}/\xi$、宽阔的 N´eel 畴壁（ $w/\lambda_{\rm eff}$ 约为几个十分之一）以及强界面磁电耦合结合起来。对于名义估值 $|\alpha_0|\xi\sim 10^{-2}$， $\xi/\lambda_{\rm eff}\sim 10^{-3}$给出 $|\alpha_0|\lambda_{\rm eff}\sim 10$，与计算得到的阈值 $\alpha_c\lambda_{\rm eff}\sim 5-15$相当。这确定了一个目标参数范围，在该范围内，自发涡旋–反涡旋生成可能在实验中实现。更强的拉什巴自旋–轨道耦合、更大的交换场或更大的有效珀尔长度，都会进一步增大$|\alpha_0|\lambda_{\rm eff}$，使成核条件更容易满足。

对于 $\alpha_0>\alpha_c$，由于壁诱导势沿 $y$具有平移不变性，因此可以对单对结果进行定性推广。在稀对极限下，多个间隔较远的涡旋对可以占据不同的纵向位置。由此预计，N´eel 畴壁附近会排列着一条涡旋链（靠近 $x\simeq x^*$）和一条与之平行的反涡旋链（靠近 $x\simeq -x^*$），如图 8 示意所示。

在我们的分析中，我们将磁化强度 $M(x)$ 视为固定，并忽略超导性对磁结构的反馈。尽管超导凝聚能通常显著小于磁能，但在非常薄的磁性薄膜中，反作用效应可能变得不可忽略，并改变基础磁结构（例如参见文献 [79, 80]）。这一机制值得进一步研究。

## VII. 结论

我们建立了对 Rashba耦合超导体–铁磁体双层中 N´éel 畴壁的超导响应的解析描述。我们还考虑了周期性旋 cycloid，将其作为连续旋转平面磁织构的一种独立实现。对于周期性旋 cycloid，线性化的金兹堡–朗道分析表明，在超导性开始出现时，序参量分布在空间上呈调制形式。在低于 $T_c$时，相应的恒模伦敦描述给出了横向磁电流、变号的磁感应强度以及选择涡旋度的涡旋力。

对于单个 N´eel 畴壁，平衡相位梯度会补偿磁电源的纵向分量，而横向分量则无法得到补偿，并会产生平行于畴壁的自发片电流。Pearl屏蔽会重新分布这一电流，并产生面外磁感应，其对称性由畴壁几何决定：屏蔽电流关于畴壁中心呈偶对称，而磁场呈奇对称，并在畴壁两侧改变符号。

屏蔽电流会产生反对称且具有涡旋度选择性的涡旋–畴壁相互作用。对于给定的涡旋度，畴壁一侧具有吸引作用，另一侧则具有排斥作用；对于反涡旋，两侧作用恰好相反。因此，在零外加磁场下，相关的中性激发是一个涡旋–反涡旋对，它们分别被钉扎在畴壁势能的两个相反吸引分支上。核心物理结果是，畴壁并非只是钉扎已有的涡旋：当自旋–轨道诱导的磁电耦合超过临界值时，束缚涡旋–反涡旋对的最低能量会低于无涡旋态的能量。

阈值由 $|\alpha_0|\lambda_{\rm eff}$、 $w/\lambda_{\rm eff}$和$\xi/\lambda_{\rm eff}$控制。对于具有代表性的估算值 $|\alpha_0|\xi \sim 10^{-2}$和 $\xi/\lambda_{\rm eff} \sim 10^{-3}$，可得到 $|\alpha_0|\lambda_{\rm eff} \sim 10$，这与计算得到的阈值 $\alpha_c\lambda_{\rm eff} \sim$ 5–15相当；对于$w/\lambda_{\rm eff} \sim 0.3$–0.5的畴壁也是如此。因此，最有利的区间预计出现在薄超导膜中，其$\lambda_{\rm eff}/\xi$比值较大、界面自旋轨道耦合较强，且畴壁宽度满足$\xi \ll w \lesssim \lambda_{\rm eff}$。

尽管显式分布是在自旋轨道耦合主导区间内得到的，伦敦/珀尔表述同样允许将磁织构的直接磁静力贡献纳入同一个横向源中。因此，自旋–轨道贡献和轨道贡献可能相互增强，也可能部分抵消，具体取决于磁织构取向和界面几何。本文推导的单对阈值采用了对数型涡旋–反涡旋相互作用，并且在 $\xi \ll 2x_* \ll \lambda_{\rm eff}$时具有定量上的适用性。

取向势垒–势阱势提供了涡旋棘轮响应所需的静态不对称性。在一列势取向相同的 N´eel 畴壁中，适当的零均值交流输运电流可以驱动涡旋在一个半周期内越过较低的势垒，而在相反的半周期内使其保持钉扎，从而产生净定向位移。吸引势阱还提供了涡旋拖曳的机制：随着 N´eel 畴壁移动，它会平移钉扎势阱，因此，困在该势阱中的涡旋可以随畴壁一同输运。

结合零场涡旋–反涡旋对在能量上的稳定化，这些效应揭示了在超导薄膜中通过磁织构调控涡旋物质的不同途径。

## 致谢

本工作得到 ANR-22-CE30-00020- 01 “ SUPERFAST”、LIGHT 科学与技术研究生项目（PIA3 未来投资计划，资助编号 ANR-17-EURE-0027）以及 GPR LIGHT 的支持。M.D.C. 衷心感谢波尔多大学提供的资助与接待。他还感谢伯南布哥联邦大学通过 PROPESQ–UFPE项目（PROPESQ公告第05/2018号，巴西累西腓）提供的机构支持。

[1] V. K. Vlasko-Vlasov、F. Colauto、A. I. Buzdin、D. Rosenmann、T. Benseman 和 W.-K. Kwok，《用于超导涡旋的磁性门与导引结构》，《物理评论B》95，144504（2017年）。[2] J.-Y. Ge、V. N. Gladilin、J. Tempere、J. Devreese 和 V. V. Moshchalkov，《在超导凝聚态中可控地产生量子化涡旋-反涡旋对》，《纳米快报》17，5003（2017年）。[3] I. F. Lyuksyutov 和 V. L. Pokrovsky，《铁磁体-超导体杂化结构》，《物理学进展》54，67（2005年）。[4] A. Y. Aladyshkin、A. V. Silhanek、W. Gillijns 和 V. V. Moshchalkov，《超导体–铁磁体杂化结构中的超导成核与涡旋物质》，《超导科学与技术》22，053001（2009年）。[5] L. E. Helseth、P. E. Goa、H. Hauglin、M. Baziljevich 和 T. H. Johansen，《磁畴壁与超导体之间的相互作用》，《物理评论B》65，132514（2002年）。[6] P. E. Goa、H. Hauglin、A. A. F. Olsen、D. Shantsev 和 T. H. Johansen，《利用磁畴壁操控涡旋》，《应用物理快报》82，79（2003年）。[7] S. Mironov、Z. Devizorova、A. Clergerie 和 A. Buzdin，《II型超导体中缺陷的磁成像》，《应用物理快报》108，212602（2016年）。[8] V. Plastovets 和 A. Buzdin，《平面缺陷附近涡旋磁场的离域》，《物理评论B》108，L180502（2023年）。[9] J. I. Vestgarden、D. V. Shantsev、A. A. F. Olsen、Y. M. Galperin、V. V. Yurchenko、P. E. Goa 和 T. H. Johansen，《铁氧体石榴石薄膜中超导涡旋与布洛赫畴壁之间的相互作用》，《物理评论快报》98，117002（2007年）。[10] S. A. D´ıaz、J. Nothhelfer、K. M. D. Hals 和 K. Everschor-Sitte，《在超导体-铁磁体异质结构中利用畴壁操控涡旋》，《物理评论B》109，L201110（2024年）。[11] A. Belkin、V. Novosad、M. Iavarone、J. Pearson 和 G. Karapetrov，《超导体/铁磁体双层膜：磁畴结构对涡旋动力学的影响》，《物理评论B》77，180506(R)（2008年）。[12] J. A. Wilcox、L. Schneider、E. Marchiori、V. Plastovets、A. Buzdin、P. Sahafi、A. Jordan、R. Budakian、T. Ren、I. Veshchunov、T. Tamegai、S. Friedemann、M. Poggio 和 S. J. Bending，《铁磁超导体中的磁控涡旋动力学》，《通讯材料》6，108（2025年）。[13] M. Iavarone、S. A. Moore、J. Fedor、S. T. Ciocys、G. Karapetrov、J. Pearson、V. Novosad 和 S. D. Bader，《畴壁与反向磁畴超导的可视化》，《自然通讯》5，4766（2014年）。[14] T. Fang 和 A. Thiele，《任意角度施加面内磁场时的一维畴壁运动》，《IEEE磁学汇刊》26，1524（1990年）。[15] Y. P. Kabanov、Y. L. Iunin、V. I. Nikitenko、A. J. Shapiro、R. D. Shull、L. Y. Zhu 和 C. L. Chien，《面内磁场对具有垂直各向异性的超薄钴薄膜中畴壁动力学的影响》，《IEEE磁学汇刊》46，2220（2010年）。[16] Z. Yang 和 V. V. Moshchalkov，《Nb/Y3Fe5O12杂化结构中畴壁调制的超导性》，《应用物理杂志》109，083908（2011年）。[17] S. Ishida、D. Kagerbauer、S. Holleis、K. Iida、K. Munakata、A. Nakao、A. Iyo、H. Ogino、K. Kawashima、M. Eisterer 和 H. Eisaki，《$EuRbFe_4As_4$, 中的超导驱动铁磁性及利用涡旋进行自旋操控》，《美国国家科学院院刊》118，e2101101118（2021年）。[18] A. Skog、R. A. Hovhannisyan 和 V. M. Krasnov，《基于涡旋的超导存储单元数值建模：动力学与几何优化》，《纳米材料》14，1634（2024年）。[19] C.-S. Lee、B. Jank´o、I. Der´enyi 和 A.-L. Barab´asi，《减少-

利用棘轮效应增加超导体中的涡旋密度，《自然》400, 337 (1999)。[20] J. E. Villegas, S. Savel'ev, F. Nori, E. M. Gonzalez, J. V. Anguita, R. Garcia, 和 J. L. Vicent，一种控制磁通量子运动的超导可逆整流器，《科学》302, 1188 (2003)。[21] R. Wordenweber, P. Dymashevski, 和 V. R. Misko，通过布置反点引导高温超导薄膜中的涡旋并实现涡旋棘轮效应，《物理评论B》69, 184504 (2004)。$t_c$ C. C. de Souza Silva, J. V. de Vondel, M. Morelle, 和 V. V. Moshchalkov，对棘轮效应进行可控的多次反转，《自然》440, 651 (2006)。[22] J.-Y. Ge, J. Gutierrez, V. N. Gladilin, J. T. Devreese, 和 V. V. Moshchalkov，迈斯纳电流在钉扎中心生成的束缚涡旋偶极子，《自然·通讯》6, 6573 (2015)。[23] A. Rochet, V. Vadimov, W. Magrini, S. Thakur, J.-B. Trebbia, A. Melnikov, A. I. Buzdin, P. Tamarat, 和 B. Lounis，按需光学生成单个磁通量子，《纳米快报》20, 6488 (2020)。[24] M. D. Croitoru, B. Lounis, 和 A. I. Buzdin，非均匀热猝灭和圆偏振辐射对超导环中自发电流生成的影响，《物理评论B》105, L020504 (2022)。[25] M. D. Croitoru, S. V. Mironov, B. Lounis, 和 A. I. Buzdin，迈向光控超导器件：圆偏振辐射操控超导环中的载流态，《先进量子技术》，2200054 (2022)。[26] M. D. Croitoru, B. Lounis, 和 A. I. Buzdin，利用辐射脉冲实现超导态的螺旋度控制切换，《应用物理快报》123, 10.1063/5.0165874 (2023)。[27] V. P. Mineev 和 M. Sigrist，[28] *Basic Theory of Superconduc-*，《物理学讲义》第847卷（施普林格，柏林，2012）第129页。*tivity in Metals Without Inversion Center*M. Smidman, M. B. Salamon, H. Q. Yuan, 和 D. F. Agterberg，非中心对称材料中的超导性与自旋–轨道耦合：综述，《物理学进展报告》80, 036501 2017( )。[29] V. M. Edelstein，极性超导体中的磁电效应，《物理评论快报》75, 2004 (1995)。[30] S. K. Yip，强自旋–轨道相互作用下的二维超导，《物理评论B》65, 144508 (2002)。[31] S. Mironov 和 A. Buzdin，强自旋–轨道耦合超导系统中的自发电流，《物理评论快报》118, 077001 (2017)。[32] N. B. Kopnin，[33] （牛津大学出版社，牛津，2001）。 *Theory of Nonequilibrium Superconductivity* V. P. Mineev 和 K. V. Samokhin，非中心对称超导体中的非均匀态：从微观理论推导 Lifshitz 不变量，《物理评论B》78, 144503 (2008)。[34] L. Fuchs, D. Kochan, J. Schmidt, N. H[35] uttner, C. Bau mgartner, S. Reinhardt, S. Gronin, G. Gardner, T. Lindemann, M. Man- fra, C. Strunk, 和 N. Paradiso，人工拉什巴超导体中的各向异性涡旋挤压：Lifshitz 不变量的一种表现，《物理评论X》12, 041020 (2022)。¨V. M. Edelstein，二维非中心对称电子系统中库珀配对的特征，《苏联物理学-实验与理论物理学杂志》68, 1244 (1989)。[36] K. V. Samokhin，强自旋 – 轨道耦合超导体的磁性，《物理评论B》70, 104521 (2004)。[37] R. P. Kaur, D. F. Agterberg, 和 M. Sigrist，非中心对称 CePt[38] Si 中的螺旋涡旋相，《物理评论快报》94, 137002 (2005)。$_3$D. F. Agterberg 和 R. P. Kaur，拉什巴超导体中磁场诱导的螺旋相和条纹相，《物理评论B》75,

064511 (2007)。[40] O. Dimitrova 和 M. V. Feigelman，反演对称性破缺二维超导体理论，《物理评论B》76, 014522 (2007)。[41] A. I. Larkin 和 Y. N. Ovchinnikov，超导体的非均匀态，《苏联物理学-实验与理论物理学杂志》20, 762 (1965)。[42] P. Fulde 和 R. A. Ferrell，强自旋交换场中的超导性，《物理评论》135, A550 (1964)。[43] M. D. Croitoru 和 A. I. Buzdin，利用共振面内磁场效应揭示层状超导体中的 Fulde–Ferrell–Larkin–Ovchinnikov 态，《物理评论B》86, 064507 (2012)。[44] M. D. Croitoru 和 A. I. Buzdin，FFLO相中的孤子形成，《物理评论B》94, 214512 (2016)。[45] M. D. Croitoru 和 A. I. Buzdin，探寻准低维超导体中 Fulde–Ferrell–Larkin–Ovchinnikov 态的无歧义证据，《凝聚态物质》2, 30 (2017)。[46] V. P. Mineev 和 K. V. Samokhin，超导体中的螺旋相，《实验与理论物理学杂志》105, 747 (1994)。[47] Y. A. Bychkov 和 E. I. Rashba，能谱简并解除的二维电子气的性质，《JETP快报》39, 78 (1984)。[48] L. P. Gor'kov 和 E. I. Rashba，自旋简并解除的二维超导系统：混合单重态-三重态，《物理评论快报》87, 037004 (2001)。[49] S. S. Pershoguba, K. Bj¨ornson, A. M. Black-Schaffer, 和 A. V. Balatsky，自旋–轨道耦合超导体中由磁性杂质诱导的电流，《物理评论快报》115, 116602 2015( )。[50] K. M. D. Hals, M. Schecter, 和 M. S. Rudner，铁磁体-超导体异质结构中的复合拓扑激发，《物理评论快报》117, 017001 (2016)。[51] V. Plastovets 和 A. Buzdin，超导体/铁磁体双层螺旋态中的磁电效应，《物理评论B》110, 144521 (2024)。[52] A. S. Mel'nikov, S. V. Mironov, A. V. Samokhvalov, 和 A. I. Buzdin，超导自旋电子学：现状与前景，《物理学进展》65, 1248 (2022)。[53] L. A. B. O. Olthof, X. Montiel, J. W. A. Robinson, 和 A. I. Buzdin，在超导体/铁磁体界面通过自旋–轨道耦合生成的超导涡旋，《物理评论B》100, 220505 (2019)。[54] J. Baumard, J. Cayssol, F. S. Bergeret, 和 A. Buzdin，通过 N´eel skyrmions 生成超导涡旋，《物理评论B》99, 014511 (2019)。[55] G. Lautenschl¨ager, H. Weitzel, T. Vogt, R. Hock, A. B¨ohm, M. Bonnet, 和 H. Fuess，利用中子衍射研究 $MnWO_4$ 的磁相变，《物理评论B》48, 6087 1993( )。[56] A. H. Arkenbout, T. T. M. Palstra, T. Siegrist, 和 T. Kimura，$MnWO_4$, 旋轮线螺旋磁相中的铁电性，《物理评论B》74, 184431 (2006)。[57] S. Seki, Y. Yamasaki, M. Soda, M. Matsuura, K. Hirota, 和 Y. Tokura，量子自旋链磁体 $LiCu_2O_2$, 中自旋螺旋度与电极化矢量之间的关联，《物理评论快报》100, 127201 (2008)。[58] P. Adler, M. Reehuis, N. St¨ußer, S. A. Medvedev, M. Nick- las, D. C. Peets, J. Bertinshaw, C. K. Christensen, M. Et- ter, A. Hoser, L. Schr¨oder, P. Merz, W. Schnelle, A. Schulz, Q. Mu, D. Bessas, A. Chumakov, M. Jansen, 和 C. Felser，负电荷转移能隙绝缘体 $Sr_2FeO_4$, 中的螺旋磁性、自旋翻转和压力诱导铁磁性，《物理评论B》105, 054417 (2022)。[59] C. D. Dashwood, L. S. I. Veiga, Q. Faure, J. G. Vale, D. G. Porter, S. P. Collins, P. Manuel, D. D. Khalyavin, F. Orlandi, R. S. Perry, R. D. Johnson, 和 D. F. McMorrow，在极性金属中介导自旋重取向转变的自发旋轮线序，《物理评论B》102, 180410(R) (2020)。[60] Q. Faure, C. D. Dashwood, C. V. Colin, R. D. Johnson, E. Ressouche, G. B. G. Stenning, J. Spratt, D. F. McMor- row, 和 R. S. Perry，磁结构及其场依赖性

回旋相介导$Ca_3Ru_2O_7$, 自旋重取向相变。《物理评论研究》5, 013040（2023年）。[61] M. Kenzelmann、A. B. Harris、S. Jonas、C. Broholm、J. Schefer、S. B. Kim、C. L. Zhang、S.-W. Cheong、O. P. Vajk和J. W. Lynn，《$TbMnO_3$, 中的磁反演对称性破缺与铁电性》，《物理评论快报》95, 087206（2005年）。[62] T. Finger、K. Binder、Y. Sidis、A. Maljuk、D. N. Argyriou和M. Braden，《通过中子散射实验研究$DyMnO_3$ 中的磁序与电磁振子激发》，《物理评论B》90, 224418（2014年）。[63] M. Kenzelmann、A. B. Harris、A. Aharony、O. Entin- Wohlman、T. Yildirim、Q. Huang、S. Park、G. Lawes、C. Bro- holm、N. Rogado、R. J. Cava、K. H. Kim、G. Jorge和A. P. Ramirez，《kagom ´ 3 2 8， **74**, e阶014429 2006梯状化合物Ni V O中的磁有序场依赖性》，《物理评论B》（）。[64] I. Cabrera、M. Kenzelmann、G. Lawes、Y. Chen、W. C. Chen、R. Erwin、T. R. Gentile、J. B. Le˜ao、J. W. Lynn、N. Rogado、R. J. Cava和C. Broholm，《多铁性Ni3 103, 087201 2 8, 2009 V O Phys. Rev. Lett.（）。中的磁畴与铁电畴耦合》[65] S. Bord´acs、D. G. Farkas、J. S. White、R. Cubitt、L. DeBeer- Schmitt、T. Ito和I. K´ezsm´arki，《多铁性$BiFeO_3$, 中的回旋畴与电极化的磁场控制》，《物理评论快报》120, 147203（2018年）。[66] P. Meisenheimer、G. Moore、S. Zhou、H. Zhang、X. Huang、S. Husain、X. Chen、L. W. Martin、K. A. Persson、S. Griffin、L. Caretta、P. Stevenson和R. Ramesh，《利用电场切换BiFeO3中的自旋旋轮线》，《自然·通讯》（15, 2903，2024年）。[67] J. Pearl，《承载量子化磁通子的超导薄膜中的电流分布》，《应用物理快报》5, 65（1964年）。[68] 参见补充材料： [出版商将插入网址] 其中包含Pearl核的傅里叶空间推导、畴壁-边缘相互作用和涡旋–反涡旋对能量最小化的详情，包括单个N´eel畴壁对应的最优成对位置。[69] A. Aharoni，《铁磁薄膜中的一维畴壁能量》，《应用物理杂志》37, 3271（1966年）。[70] C. J. Garc´ıa-Cervera，《一维磁畴壁》，《欧洲应用数学杂志》15, 451（2004年）。[71] P. J. F. Cavalcanti、J. Cayssol和A. I. Buzdin，《超导异质结构中螺旋相的约瑟夫森干涉测量》，《凝聚态物质》11, 16（2026年）。[72] M. Houzet和J. S. Meyer，《无序拉什巴超导体的准经典理论》，《物理评论B》92, 10.1103/phys- revb.92.014509（2015年）。[73] G. Csire、A. De´ak、B. Ny´ari、H. Ebert、J. F. Annett和B. ´Ujfalussy，《超导异质结构的相对论自旋极化KKR理论：Nb/Au/Fe三层膜金层中的振荡序参量》，《物理评论B》97, 10 1103 97 024514 2018 . /physrevb. .（）。[74] P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*，《高级经典丛书》（Westview Press，科罗拉多州博尔德，1966年）。[75] M. R. Beasley、J. E. Mooij和T. P. Orlando，《二维超导体中涡旋-反涡旋对解离的可能性》，《物理评论快报》42, 1165–1168（1979年）。[76] J. Mendil、M. Trassin、Q. Bu、J. Schaab、M. Baumgartner、C. Murer、P. T. Dao、J. Vijayakumar、D. Bracher、C. Bouillet、C. A. F. Vaz、M. Fiebig和P. Gambardella，《超薄钇铁石榴石/Pt双层膜的磁性与畴结构》，《物理评论材料》3, 10.1103/physrevmate- rials.3.034403（2019年）。[77] K. Rogdakis、A. Sud、M. Amado、C. M. Lee、L. McKenzie-Sell、K. R. Jeon、M. Cubukcu、M. G. Blamire、J. W. A. Robin- son、L. F. Cohen和H. Kurebayashi，《通过自旋泵浦实验表征的NbN薄膜自旋输运参数》，《物理评论材料》3, 10.1103/physrevmateri- als.3.014406（2019年）。

[78] K.-R. Jeon、J.-K. Kim、J. Yoon、J.-C. Jeon、H. Han、A. Cottet、T. Kontos和S. S. P. Parkin，《由近邻磁化Pt势垒实现的零场极性可逆约瑟夫森超电流二极管》，《自然·材料》**21**, 1008（2022年）。[79] A. I. Buzdin和L. N. Bulayevsky，《超导体表面的铁磁薄膜：可能发生的非均匀磁有序》，《苏联物理学—实验与理论物理学杂志》**67**, 576（1988年），原始

最终发表：《实验与理论物理学杂志》94，256（1988）。[80] S. V. Mironov、A. S. Mel’nikov 和 A. I. Buzdin，《磁性/超导体杂化系统展望：邻近效应和界面自旋–轨道耦合引发的长程电磁现象》，《应用物理学杂志》**140**，10 1063 5 0336356 2026 . / . ( )。

# 《自旋轨道耦合超导薄膜中 N´eel 畴壁的磁电响应：自发电流、涡旋钉扎以及涡旋–反涡旋成核》的补充材料

P. J. F. Cavalcanti,[1], * M. D. Croitoru,[1], [2], † 和 A. I. Buzdin[1], [3], ‡ [1] *University Bordeaux, LOMA UMR-CNRS 5798, F-33405 Talence Cedex, France* [2] *Departamento de Física, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE 50740-560, Brazil* [3] *Institute for Computer Science and Mathematical Modeling, Sechenov First Moscow State Medical University, Moscow, Russia*（日期：2026年11月25日）

本补充材料给出了支持正文中解析结果的技术推导。附录 A 推导了周期性谐波摆线的傅里叶空间珀尔屏蔽核、屏蔽伦敦电流以及涡旋相互作用。附录 B 考察了长程尾部对于畴壁轮廓的稳健性。附录 C 推导了涡旋–反涡旋对能量中的单个畴壁贡献、畴壁边缘估算以及平衡对位置。

## 附录 A：伦敦/珀尔区间中的周期性谐波摆线

在本附录中，我们推导固定振幅区间内周期性谐波摆线产生的伦敦响应。我们得到相应的 Pearl屏蔽核和屏蔽电流分布，并在正文中利用它们描述磁电流与涡旋之间的相互作用。在整个附录中，我们考虑温度足够低于 $T_c$ 的情况，因此除了涡旋核内部以外，凝聚态振幅的空间变化处处都可以忽略。因此，超导序参量可写为

$$\psi(\mathbf{r},T)=\Psi(T)e^{i\varphi(\mathbf{r})}, \tag{A1}$$

其中， $\Psi(T)$为空间均匀的振幅， $\varphi(\mathbf{r})$为超导相位。正文中使用的金兹堡–朗道方程为

$$a\psi+b|\psi|^2\psi+\gamma\mathbf{D}^2\psi+\gamma\left[2\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{D}\psi-i(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha})\psi\right]=0, \tag{A2}$$

其中 $\mathbf{D}=-i\boldsymbol{\nabla}-(2e/\hbar c)\mathbf{A}$。对于周期性谐波摆线， $\alpha_x(x)=-\alpha_0\sin(px)$。在伦敦近似下，凝聚态振幅在空间上均匀，因而只需确定超导相位。相位方程由金兹堡–朗道方程的虚部得到。在当前的一维几何结构中，屏蔽矢势完全沿横向，因此不会对纵向相位方程产生贡献。将方程 (A1) 代入方程 (A2) 并取虚部，可得

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d\varphi}{dx}-\alpha_0\sin(px)\right]=0. \tag{A3}$$

方程 (A3) 可直接积分。在不存在外加纵向输运电流时，由于平衡纵向超电流必须为零，积分常数也为零。利用 $p=\pi/(2w)$，得到

$$\varphi(x)=-\frac{\alpha_0}{p}\cos(px)=-\frac{2\alpha_0 w}{\pi}\cos\!\left(\frac{\pi x}{2w}\right), \tag{A4}$$

相差一个无关紧要的加性常数。

平衡相位完全补偿了纵向磁电贡献。因此，剩余的电流源纯粹是横向的。片电流因此具有如下形式

$$\mathbf{j}_s=\frac{c}{4\pi\lambda_{\rm eff}}\left[\frac{\phi_0}{2\pi}\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi+\boldsymbol{\alpha}\right)-\mathbf{A}(\mathbf{r},0)\right], \tag{A5}$$

其中 $\lambda_{\rm eff}=\lambda_L^2/d_s$。使用相位解 (A4)，纵向贡献恒等于零，留下的只有横向（裸）驱动项

$$S_y(x)=A_0\cos(px),\qquad A_0=\frac{\phi_0\alpha_0}{2\pi}. \tag{A6}$$

为完整起见，我们还纳入了厚度为$d_f$的薄铁磁层所产生的静磁场。在超导体一侧（$z<0$），相应的矢势和磁场为

$$A_y^{\rm M}(x,z)=2\pi m d_f\cos(px)e^{pz},\qquad z<0, \tag{A7}$$

and

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^{\rm M}(x,z)=&-2\pi p m d_f e^{pz}\\&\times\left[\cos(px)\hat{\mathbf{x}}+\sin(px)\hat{\mathbf{z}}\right],\qquad z<0.\end{aligned} \tag{A8}$$

因此，代入伦敦电流的带符号的横向源可通过以下替换得到

$$A_0\longrightarrow A_0-2\pi m d_f. \tag{A9}$$

* paulo-jose.fonseca-cavalcanti@u-bordeaux.fr
† mihail.croitoru@ufpe.br
‡ alexandre.bouzdine@u-bordeaux.fr

因此，自旋–轨道和磁静力贡献可能相互增强，或部分抵消，这取决于 $\alpha_0$ 的符号以及磁织构相对于界面法线的取向。对于涡旋–畴壁相互作用所考虑的自旋–轨道主导区域，有

$$\frac{|\alpha_0|\phi_0}{2\pi} \gg 2\pi m d_f. \tag{A10}$$

在本附录的其余部分，我们聚焦于自旋–轨道耦合占主导的情形，因此仅保留磁电自旋轨道贡献。该近似使屏蔽问题能够得到解析求解，同时保留涡旋–畴壁相互作用的基本物理特征。

现在我们来显式推导Pearl屏蔽核。由于伦敦–麦克斯韦方程是线性的，在傅里叶空间中求解屏蔽问题较为方便，此时每个空间傅里叶分量都可以独立处理。该过程直接导出支配薄超导膜的特征Pearl屏蔽因子。在库仑规范下，横向矢势满足

$$-\left(\partial_x^2+\partial_z^2\right)A_y(x,z)=\frac{1}{\lambda_{\rm eff}}\left[S_y(x)-A_y(x,0)\right]\delta(z). \tag{A11}$$

引入傅里叶表示

$$\begin{aligned} A_y(x,z)&=\int\frac{dq}{2\pi}\int\frac{dk}{2\pi}A(q,k)e^{i(qx+kz)},\\ A_q&=\int\frac{dk}{2\pi}A(q,k),\\ S_q&=\int dx\,e^{-iqx}S_y(x). \end{aligned} \tag{A12}$$

方程（A11）于是变为

$$\left(q^2+k^2\right)A(q,k)=\frac{1}{\lambda_{\rm eff}}\left(S_q-A_q\right). \tag{A13}$$

对 $k$ 进行积分，并利用 $\int dk/[2\pi(q^2+k^2)]=1/(2|q|)$，得到

$$A_q=\frac{S_q}{1+2|q|\lambda_{\rm eff}}. \tag{A14}$$

方程（A14）是薄超导膜的标准Pearl屏蔽核。它表明，驱动源的每个傅里叶分量都会被因子（$1+2|q|\lambda_{\rm eff}$）$^{-1}$削弱，这反映了Pearl电动力学所特有的非局域磁屏蔽。

对于单谐波 $S_y(x)=A_0\cos(px)$（其中 $p>0$），式（A14）给出

$$A_y(x,z)=\frac{A_0}{1+2p\lambda_{\rm eff}}\cos(px)e^{-p|z|}. \tag{A15}$$

因此，屏蔽片电流为

$$j_y(x)=j_0\frac{2p\lambda_{\rm eff}}{1+2p\lambda_{\rm eff}}\cos(px),\qquad j_0=\frac{cA_0}{4\pi\lambda_{\rm eff}}, \tag{A16}$$

磁屏蔽只改变谐波电流分布的振幅，而其空间依赖关系保持不变。在极限 $p\lambda_{\rm eff}\ll 1$ 下，磁屏蔽会大幅抑制电流；而当$p\lambda_{\rm eff}\gg 1$ 时，电流趋近于未屏蔽的伦敦结果。超导片电流产生的屏蔽场为

$$h_z^{\rm sc}(x,0)=-\frac{pA_0}{1+2p\lambda_{\rm eff}}\sin(px). \tag{A17}$$

作为对涡旋相互作用的独立推导，我们将超导相位分为两部分：与旋轮线磁电纹理相关的规则贡献，以及由涡旋产生的奇异贡献。相应地，我们引入规则源场和涡旋源场

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{r})&=\frac{\phi_0}{2\pi}\left[\boldsymbol{\nabla}\varphi_{\rm reg}(\mathbf{r})+\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r})\right],\\ \mathbf{\Phi}(\mathbf{r})&=\frac{\phi_0}{2\pi}\boldsymbol{\nabla}\varphi_{\rm vor}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{A18}$$

在固定振幅的伦敦近似下，自由能可写为

$$\begin{aligned} E_{\rm L}=&\frac{1}{8\pi}\int d^3r\,\mathbf{h}^2\\ &+\frac{1}{8\pi\lambda_{\rm eff}}\int d^2r\,\left[\mathbf{C}+\mathbf{\Phi}-\mathbf{A}(\mathbf{r},0)\right]^2, \end{aligned} \tag{A19}$$

忽略与相位和矢势无关的项。利用Pearl核，可以解析地消去矢势。规则磁电源与涡旋源之间的相互作用能随后变为

$$\begin{aligned} E_{\rm int}=&\frac{1}{4\pi}\int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\frac{|\mathbf{q}|}{1+2\lambda_{\rm eff}|\mathbf{q}|}\\ &\times\left[\mathbf{C}_{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{\Phi}^*_{\mathbf{q}}+\mathbf{C}^*_{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}}\right]. \end{aligned} \tag{A20}$$

对于周期性谐波摆线和一个涡旋度为 $s=\pm1$ 、中心位于 $\mathbf{r}_0=(x_0,y_0)$的单个涡旋，相应的傅里叶分量具有如下形式

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{q}}&=\phi_0\alpha_0\pi\left[\delta(q_x-p)+\delta(q_x+p)\right]\delta(q_y)\hat{\mathbf{y}},\\ \mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}}&=is\phi_0e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_0}\frac{q_y\hat{\mathbf{x}}-q_x\hat{\mathbf{y}}}{|\mathbf{q}|^2}. \end{aligned} \tag{A21}$$

代入式（A20）得到

$$E_{\rm int}^{(s)}(x_0)=-s\frac{\phi_0^2\alpha_0}{4\pi^2}\frac{\sin(px_0)}{1+2p\lambda_{\rm eff}}. \tag{A22}$$

相互作用能沿旋轮线呈正弦变化，并随涡旋度改变符号。磁屏蔽保留了空间依赖关系，同时通过 Pearl 因子 $(1+2p\lambda_{\rm eff})^{-1}$ 降低相互作用幅度。该结果与 $y_0$ 无关，这正是沿 $y$ 方向平移不变性所要求的。

作为一致性检查，对式 (A22) 关于涡旋位置求导可得

$$-\frac{dE_{\rm int}^{(s)}}{dx_0}\hat{\mathbf{x}} = \frac{s\phi_0}{c} j_y(x_0)\hat{\mathbf{x}}, \tag{A23}$$

即屏蔽片电流施加在涡旋上的洛伦兹力。

## 附录 B：远距离 Pearl 尾部对畴壁轮廓的稳健性

正文中的单畴壁计算采用分段 N´eel 畴壁轮廓，因为这种轮廓便于进行解析处理。磁化强度在 $x = \pm w$ 处连续，但其一阶导数不连续。因此，有必要检验正文中得到的代数型远距离电流并非由这些导数不连续性引起。

对于分段轮廓，横向磁电源为

$$\alpha_{{\rm pw},y}(x) = \begin{cases} \alpha_0 \cos\!\left(\dfrac{\pi x}{2w}\right), & |x| \le w, \\ 0, & |x| > w. \end{cases} \tag{B1}$$

其傅里叶变换为

$$\alpha_{{\rm pw},y}(k_x) = \frac{\alpha_0 \pi}{w} \frac{\cos(k_x w)}{\left(\dfrac{\pi}{2w}\right)^2 - k_x^2}. \tag{B2}$$

对于 $|k_x| w \gg 1$,

$$\alpha_{{\rm pw},y}(k_x) \simeq -\frac{\alpha_0 \pi}{w} \frac{\cos(k_x w)}{k_x^2}. \tag{B3}$$

因此，分段轮廓在较大的 $|k_x|$ 处具有代数型 $k_x^{-2}$ 尾部。这种行为源于 $x = \pm w$ 处的 $d\alpha_{{\rm pw},\ y}/dx$ 跳变。

现在，我们对平滑的微磁分布重复这一计算

$$\mathbf{M}_{\rm sm}(x) = m\left[\operatorname{sech}\!\left(\frac{x}{2w}\right), \tanh\!\left(\frac{x}{2w}\right), 0\right]. \tag{B4}$$

采用相同的约定 $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_0 (\mathbf{n} \times \mathbf{M})/m$，横向源项为

$$\alpha_{{\rm sm},y}(x) = \alpha_0 \operatorname{sech}\!\left(\frac{x}{2w}\right). \tag{B5}$$

采用

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds\ \operatorname{sech}(s) e^{-iqs} = \frac{\pi}{\cosh(\pi q/2)}, \tag{B6}$$

我们得到

$$\alpha_{{\rm sm},y}(k_x) = 2\pi w \alpha_0 \operatorname{sech}(\pi w k_x). \tag{B7}$$

对于 $|k_x| w \gg 1$,

$$\alpha_{{\rm sm},y}(k_x) \simeq 4\pi w \alpha_0 e^{-\pi w |k_x|}. \tag{B8}$$

因此，与分段壁不同，平滑壁的高波矢谱呈指数衰减。

对于这两种分布，Pearl 屏蔽片电流可写为

$$j_y(k_x) = j_y^{(0)}(k_x) \frac{2\lambda_{\rm eff}|k_x|}{1 + 2\lambda_{\rm eff}|k_x|}, \tag{B9}$$

其中 $j_y^{(0)}(k_x)$ 是未屏蔽电流的傅里叶变换。实空间中的长距离行为由该表达式的小-$|k_x|$ 部分决定，而非畴壁轮廓的大-$|k_x|$ 行为。对于任意积分有限的局域偶源

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{j_y^{(0)}(x)}{j_0}, \tag{B10}$$

在小 $|k_x|$时，我们有

$$j_y^{(0)}(k_x) = j_0 I_0 + O(k_x^2), \tag{B11}$$

因此

$$j_y(k_x) = 2 j_0 I_0 \lambda_{\rm eff} |k_x| + O(k_x^2). \tag{B12}$$

对于 $x \neq 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{2\pi} |k_x| e^{ik_x x} = -\frac{1}{\pi x^2}, \tag{B13}$$

于是

$$j_y(x) \simeq -\frac{2 j_0 I_0 \lambda_{\rm eff}}{\pi x^2}, \qquad |x| \gg w, \lambda_{\rm eff}. \tag{B14}$$

因此， $x^{-2}$ 远场行为源于 Pearl 因子在小-$|k_x|$ 处的非解析性。

对于分段轮廓，

$$I_0^{\rm pw} = \int_{-w}^{w} dx\ \cos\!\left(\frac{\pi x}{2w}\right) = \frac{4w}{\pi}, \tag{B15}$$

由此得到

$$\frac{j_{{\rm pw},y}(x)}{j_0} \simeq -\frac{8}{\pi^2} \frac{w\lambda_{\rm eff}}{x^2}. \tag{B16}$$

这与正文中所用的主导渐近结果一致。

对于平滑轮廓，

$$I_0^{\rm sm} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \operatorname{sech}\!\left(\frac{x}{2w}\right) = 2\pi w, \tag{B17}$$

因此

$$\frac{j_{{\rm sm},y}(x)}{j_0} \simeq -4 \frac{w\lambda_{\rm eff}}{x^2}. \tag{B18}$$

数值系数不同，是因为两种分布的积分源项不同，但 $x^{-2}$ 依赖关系相同。

这一比较清楚地表明，这两种效应分别源于傅里叶空间的不同区域。分段壁的导数不连续性控制大-$|k_x|$ 行为，因此会影响靠近畴壁的电流。相比之下，远距离电流由小-$|k_x|$Pearl 因子控制。因此，代数远场尾部是 Pearl 电动力学的性质；即使平滑壁的高-$|k_x|$谱呈指数衰减，该尾部仍然存在。相同的论证也适用于由同一屏蔽源得到的远距离磁场和涡旋相互作用核。

## 附录 C：单个 N´éel 畴壁：涡旋–反涡旋对能量学

### 1. 畴壁边缘处的相互作用能

本附录推导单个 N´éel 畴壁与位于畴壁边缘的涡旋之间的相互作用能。随后利用所得表达式确定自发涡旋–反涡旋成核的条件。对于单个 N´éel 畴壁，畴壁诱导的磁电织构与位于畴壁边缘的涡旋之间的相互作用能 $x = w$ 为

$$E_{\rm int}(w) = -\frac{\varepsilon m}{\gamma}\frac{\phi_0^2}{(2\pi)^3}\mathcal{I}(w), \tag{C1}$$

其中 $\mathcal{I}(w) = 2[J(2w) + J(0)]$。由于 $J(s) = \mathrm{sgn}(s) J(|s|)$，并且由积分表示式可直接得到 $J(0) = 0$，因此我们得到 $\mathcal{I}(w) = 2J(2w)$。因此，

$$E_{\rm int}(w) = -\frac{\varepsilon m}{\gamma}\frac{\phi_0^2}{(2\pi)^3}\,2J(2w). \tag{C2}$$

利用

$$J(s) = \frac{\frac{\pi\lambda_{\rm eff}}{w}F\left(\frac{w}{\pi\lambda_{\rm eff}}\frac{\pi s}{2w}\right) - F\left(\frac{\pi s}{2w}\right)}{\left(\frac{\pi\lambda_{\rm eff}}{w}\right)^2 - 1} - \frac{\pi\cos\left(\frac{\pi s}{2w}\right)}{2\left(\frac{\pi\lambda_{\rm eff}}{w}+1\right)}, \tag{C3}$$

我们得到

$$J(2w) = \frac{\frac{\pi\lambda_{\rm eff}}{w}F\left(\frac{w}{\lambda_{\rm eff}}\right) - F(\pi)}{\left(\frac{\pi\lambda_{\rm eff}}{w}\right)^2 - 1} + \frac{\pi}{2\left(\frac{\pi\lambda_{\rm eff}}{w}+1\right)}, \tag{C4}$$

因此，相互作用能为

$$E_{\rm int}(w) = -\frac{\varepsilon m}{\gamma}\frac{\phi_0^2}{4\pi^3}\left[\frac{\frac{\pi\lambda_{\rm eff}}{w}F\left(\frac{w}{\lambda_{\rm eff}}\right) - F(\pi)}{\left(\frac{\pi\lambda_{\rm eff}}{w}\right)^2 - 1} + \frac{\pi}{2\left(\frac{\pi\lambda_{\rm eff}}{w}+1\right)}\right], \tag{C5}$$

Here

$$F(x) = \sin(x)\,\mathrm{Ci}(x) - \cos(x)\,\mathrm{Si}(x) + \frac{\pi}{2}\cos(x), \tag{C6}$$

从而 $F(\pi) =$正弦积分$(\pi) - \frac{\pi}{2}$。

为获得 $\lambda_{\rm eff} \gg w$ 的渐近形式，我们引入

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{w}{\lambda_{\rm eff}}, \qquad \frac{1}{\Lambda} \ll 1. \tag{C7}$$

对于小参数，

$$F\left(\frac{1}{\Lambda}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\Lambda}\left[\gamma_E - \ln\Lambda - 1\right] + O\left(\Lambda^{-2}\right), \tag{C8}$$

其中 $\gamma_E$ 是欧拉常数。将这些展开式代入精确表达式，得到

$$E_{\rm int}(\Lambda) = -\frac{\varepsilon m}{\gamma}\frac{\phi_0^2}{(2\pi)^3}\left\{\begin{array}{c}\frac{2}{\Lambda} + \frac{1}{\Lambda^2}\left[\frac{2}{\pi}(\gamma_E - \ln\Lambda - 1) - \frac{2\,\mathrm{Si}(\pi)}{\pi^2}\right] \\ +O\left[\Lambda^{-3}\ln\frac{1}{\Lambda}\right]\end{array}\right\}. \tag{C9}$$

因此，在 $w/\lambda_{\rm eff}$ 的主导阶下，

$$E_{\rm int}(w) \simeq -\frac{\varepsilon m}{\gamma}\frac{\phi_0^2}{4\pi^3}\frac{w}{\lambda_{\rm eff}}. \tag{C10}$$

相应的涡旋–反涡旋对能量为

$$E_{\rm pair} = \frac{\phi_0^2}{8\pi^2\lambda_{\rm eff}}\ln\left(\frac{2w}{\xi}\right) - \alpha_0\frac{\phi_0^2}{4\pi^3}\frac{w}{\lambda_{\rm eff}}. \tag{C11}$$

当对能量变为负值时，会自发产生涡旋–反涡旋对：

$$E_{\rm pair} < 0. \tag{C12}$$

利用公式 (C10)，可得该条件为

$$\frac{\pi}{2\lambda_{\rm eff}}\ln\left(\frac{2w}{\xi}\right) < \alpha_0\frac{w}{\lambda_{\rm eff}}. \tag{C13}$$

磁电耦合的阈值为

$$\alpha_c^{\rm pair}(w) = \frac{\pi}{2w}\ln\left(\frac{2w}{\xi}\right). \tag{C14}$$

当自发产生一个涡旋–反涡旋对在能量上变得有利时

$$\alpha_0 > \alpha_c^{\rm pair}(w). \tag{C15}$$

**2. 涡旋与反涡旋对的最优位置**

通过极小化完整对能量，可以得到涡旋–反涡旋对的最优位置。我们考虑一种对称构型，其中涡旋与反涡旋位于 N´eel 畴壁的两侧，

$$\mathbf{R}_{\mathrm{vor}} = x\hat{\mathbf{x}}, \qquad \mathbf{R}_{\mathrm{av}} = -x\hat{\mathbf{x}}, \tag{C16}$$

其中 $x > 0$。间距 $R$ 应理解为由畴壁诱导的钉扎势所确定的涡旋与反涡旋位置之间的距离。对于涡旋与反涡旋分别位于畴壁两侧的对称构型，可写为

$$R = |\mathbf{R}_{\mathrm{vor}} - \mathbf{R}_{\mathrm{av}}| = 2x. \tag{C17}$$

更一般地，平衡间距由极小化完整对能量确定

$$E_{\mathrm{pair}}(R) = E_{\mathrm{vor}} + E_{\mathrm{av}} + E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{vor}}(R_{\mathrm{vor}}) + E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{av}}(R_{\mathrm{av}}) + U_{\mathrm{v\bar{v}}}(R) \tag{C18}$$

关于涡旋与反涡旋的位置。这里$R_{\mathrm{vor}} = x$, $R_{\mathrm{av}} = -x$ 和 $R = |\mathbf{R}_{\mathrm{vor}} - \mathbf{R}_{\mathrm{av}}| = 2x$

因此，完整对能量为

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{pair}}(x) = {} & E_{\mathrm{vor}} + E_{\mathrm{av}} \\ & + E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{vor}}(x) + E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{av}}(-x) + U_{\mathrm{v\bar{v}}}(2x). \end{aligned} \tag{C19}$$

自能 $E_{\mathrm{vor}}$ 和 $E_{\mathrm{av}}$ 与位置 $x$无关，因此不会出现在极小化条件中。

涡旋与磁电纹理之间的涡旋相互作用能为

$$E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{vor}}(x) = -\alpha_0 \frac{\phi_0^2}{(2\pi)^3} \mathcal{I}(x), \tag{C20}$$

其中 $\alpha_0 = \varepsilon m/\gamma$，且

$$\mathcal{I}(x) = 2\left[J(x+w) + J(x-w)\right]. \tag{C21}$$

核函数 $J(s)$ 是奇函数， $J(-s) = -J(s)$，因此

$$\mathcal{I}(-x) = -\mathcal{I}(x). \tag{C22}$$

由于反涡旋的涡旋度相反，其相位梯度源相对于涡旋的相位梯度源变号。由于磁电相互作用关于涡旋源呈线性，反涡旋的相互作用能为 $E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{av}}(X) = -E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{vor}}(X)$。对于位于$X = -x$的反涡旋，我们得到 $E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{av}}(-x) = -E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{vor}}(-x)$。利用公式（C20）和（C22）， $E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{vor}}(-x) = -E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{vor}}(x)$。因此

$$E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{av}}(-x) = E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{vor}}(x). \tag{C23}$$

因此，对于对称的涡旋–反涡旋构型，这两个对象获得相同的磁电束缚能。因此

$$E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{vor}}(x) + E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{av}}(-x) = 2E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{vor}}(x). \tag{C24}$$

因此，完整对能量可写为

$$E_{\mathrm{pair}}(x) = E_{\mathrm{vor}} + E_{\mathrm{av}} + 2E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{vor}}(x) + U_{\mathrm{v\bar{v}}}(2x). \tag{C25}$$

代入公式（C20），我们得到

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{pair}}(x) = {} & E_{\mathrm{vor}} + E_{\mathrm{av}} \\ & - 2\alpha_0 \frac{\phi_0^2}{(2\pi)^3} \mathcal{I}(x) + U_{\mathrm{v\bar{v}}}(2x). \end{aligned} \tag{C26}$$

其中

$$E_{\mathrm{vor}} = E_{\mathrm{av}} = \frac{\phi_0^2}{16\pi^2 \lambda_{\mathrm{eff}}} \ln\left(\frac{\lambda_{\mathrm{eff}}}{\xi}\right), \tag{C27}$$

其中， $\lambda_{\mathrm{eff}}$ 为有效二维屏蔽长度， $\xi$ 为相干长度。涡旋–反涡旋相互作用具有吸引性。对于间距 $\xi \ll 2x \ll \lambda_{\mathrm{eff}}$，其对数形式为

$$U_{\mathrm{v\bar{v}}}(2x) = -\frac{\phi_0^2}{8\pi^2 \lambda_{\mathrm{eff}}} \ln\left(\frac{\lambda_{\mathrm{eff}}}{2x}\right). \tag{C28}$$

最优位置由 $dE_{\mathrm{pair}}/dx = 0$确定。由于自能是常数，对公式（C26）求导可得

$$-2\alpha_0 \frac{\phi_0^2}{(2\pi)^3} \frac{d\mathcal{I}(x)}{dx} + \frac{d}{dx} U_{\mathrm{v\bar{v}}}(2x) = 0. \tag{C29}$$

平衡条件变为

$$\alpha_0 \frac{\phi_0^2}{(2\pi)^3} \frac{d\mathcal{I}(x)}{dx} = \left.\frac{dU_{\mathrm{v\bar{v}}}(R)}{dR}\right|_{R=2x}. \tag{C30}$$

对于具有吸引性的涡旋–反涡旋相互作用，右侧为正，因为将这两个对象拉开时，能量会增加。

利用公式（C21），并考虑到对于 $-w < x < w$，有 $x + w > 0$ 和 $x - w < 0$。由于 $J$（$s$）是奇函数， $J'$（$s$）是偶函数。因此， $J'$（$x - w$）$= J'$（$w - x$），且

$$\frac{d\mathcal{I}(x)}{dx} = 2\left[J'(w+x) + J'(w-x)\right]. \tag{C31}$$

因此，最优成对位置的精确隐式方程为

$$2\alpha_0 \frac{\phi_0^2}{(2\pi)^3} \left[J'(w+x) + J'(w-x)\right] = \left.\frac{dU_{\mathrm{v\bar{v}}}(R)}{dR}\right|_{R=2x}. \tag{C32}$$

这是确定涡旋–反涡旋对最佳对称位置的一般方程，$x = x_*$。对于 $s > 0$，核函数的形式为

$$\begin{aligned} J(s) = {} & \frac{\frac{\pi\lambda_{\mathrm{eff}}}{w} F\left(\frac{w}{\pi\lambda_{\mathrm{eff}}} \frac{\pi s}{2w}\right) - F\left(\frac{\pi s}{2w}\right)}{\left(\frac{\pi\lambda_{\mathrm{eff}}}{w}\right)^2 - 1} \\ & - \frac{\pi \cos\left(\frac{\pi s}{2w}\right)}{2\left(\frac{\pi\lambda_{\mathrm{eff}}}{w} + 1\right)} \end{aligned} \tag{C33}$$

其中

$$F(u)=\sin u\,\mathrm{Ci}(u)-\cos u\left[\mathrm{Si}(u)-\frac{\pi}{2}\right]. \tag{C34}$$

那么对于 $s>0$

$$\frac{J'(s)}{\frac{\pi}{2w}}=\frac{G\left(\frac{w}{\pi\lambda_{\mathrm{eff}}}\frac{\pi s}{2w}\right)-G\left(\frac{\pi s}{2w}\right)}{\left(\frac{\pi\lambda_{\mathrm{eff}}}{w}\right)^2-1}+\frac{\pi}{2\left(\frac{\pi\lambda_{\mathrm{eff}}}{w}+1\right)}\sin\left(\frac{\pi s}{2w}\right), \tag{C35}$$

其中

$$G(u)=\cos u\,\mathrm{Ci}(u)+\sin u\left[\mathrm{Si}(u)-\frac{\pi}{2}\right]. \tag{C36}$$

### 3. 对数相互作用区间中的最佳成对位置

对于对数相互作用区间,

$$\xi\ll 2x\ll\lambda_{\mathrm{eff}}, \tag{C37}$$

涡旋–反涡旋相互作用为

$$U_{\mathrm{v\bar{v}}}(R)=-\frac{\phi_0^2}{8\pi^2\lambda_{\mathrm{eff}}}\ln\left(\frac{\lambda_{\mathrm{eff}}}{R}\right). \tag{C38}$$

因此

$$\frac{dU_{\mathrm{v\bar{v}}}(R)}{dR}=\frac{\phi_0^2}{8\pi^2\lambda_{\mathrm{eff}}}\frac{1}{R}. \tag{C39}$$

在 $R=2x$ 处,

$$\left.\frac{dU_{\mathrm{v\bar{v}}}(R)}{dR}\right|_{R=2x}=\frac{\phi_0^2}{16\pi^2\lambda_{\mathrm{eff}}x}. \tag{C40}$$

公式（C32）变为

$$\frac{\alpha_0}{4\pi^3}\left[J'(w+x)+J'(w-x)\right]=\frac{1}{16\pi^2\lambda_{\mathrm{eff}}x}. \tag{C41}$$

等价地,

$$\frac{J'(w+x)+J'(w-x)}{\frac{\pi}{2w}}=\frac{w}{2\alpha_0\lambda_{\mathrm{eff}}x}. \tag{C42}$$

该方程明确展示了涡旋–反涡旋吸引如何使最优位置发生偏移。在不存在涡旋–反涡旋相互作用时，右侧为零。涡旋与反涡旋之间的吸引使右侧为正，因此会使最优位置偏离孤立涡旋–畴壁势的极值点。因此，正确的最优位置由磁电畴壁势施加的力与涡旋–反涡旋吸引力之间的平衡决定。

为了将方程无量纲化，我们引入

$$u_*=\frac{x_*}{w},\qquad \Lambda=\frac{\lambda_{\mathrm{eff}}}{w},\qquad A=\alpha_0 w. \tag{C43}$$

其中 $x_*$ 是涡旋的最优位置。随后，公式（C42）变为

$$\frac{1}{2Au_*}=\frac{\lambda_{\mathrm{eff}}}{w}\frac{\left[J'(w(1+u_*))+J'(w(1-u_*))\right]}{\frac{\pi}{2w}}. \tag{C44}$$

因此， $x_*/w$ 的数值取决于 $\Lambda$ 和 $A$。

图1展示了在若干无量纲磁电耦合$\alpha_0\lambda_{\mathrm{eff}}$取值下，最优涡旋–反涡旋位置 $x_*/\lambda_{\mathrm{eff}}$ 随比值 $w/\lambda_{\mathrm{eff}}$ 的变化关系。该位置由对数相互作用区间$\xi\ll 2x_*\ll\lambda_{\mathrm{eff}}$内完整对能量的极小值确定。增大 $w/\lambda_{\mathrm{eff}}$ 会扩大磁电相互作用的空间作用范围，并使涡旋与反涡旋的平衡位置向 N´eel 畴壁边缘移动。 $\alpha_0\lambda_{\mathrm{eff}}$ 取值越大，涡旋与反涡旋分别局域于畴壁两侧的构型就越稳定。

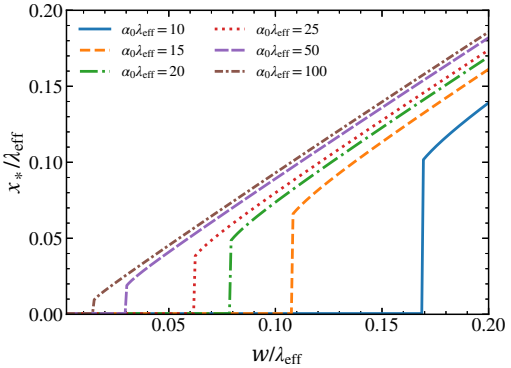


图1. 若干无量纲磁电耦合 $\alpha_0\lambda_{\mathrm{eff}}$取值下，最优涡旋–反涡旋位置 $x_*/\lambda_{\mathrm{eff}}$ 随比值 $w/\lambda_{\mathrm{eff}}$ 的变化关系。

图2显示了无量纲~涡旋–反涡旋对能量 $E_{\mathrm{pair}}(x_*)$ 随比值的变化

$w/\lambda_{\mathrm{eff}}$ 在若干磁电耦合强度 $\alpha_0\lambda_{\mathrm{eff}}$取值下的变化。该能量是在通过最小化完整对能量确定的平衡涡旋位置 $x_*$ 处计算的。

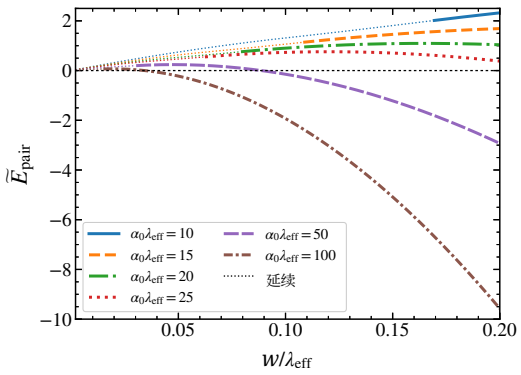


图2. 对于磁电耦合强度 $\alpha_0\lambda_{\mathrm{eff}}$ 的若干取值，量纲为一的涡旋–反涡旋对能量 $\widetilde{E}_{\mathrm{pair}}(x_*)$ 随比值 $w/\lambda_{\mathrm{eff}}$ 的变化关系。能量是在通过最小化完整对能量确定的平衡涡旋位置 $x_*$ 处计算的