arXiv:2611.32385v1 [physics.plasm-ph] 24 Nov 2026

环向曲率效应对霍尔推力器等离子体三维粒子模拟中高频方位角涨落的影响

Yingjie Chen[1] 和 Yinjian Zhao[1], *[1] *School of Energy Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, People's Republic of China*

方位角不稳定性及其相关的等离子体涨落在霍尔推力器的反常跨场电子输运中发挥着重要作用。动理学研究通常使用局部笛卡尔区域近似环形放电，但被忽略的曲率对三维涨落动力学的影响仍缺乏充分量化。在本研究中，通过改变最小计算域半径 $r_{\min}$，在通道宽度和施加的磁场分布固定的条件下，采用三维圆柱静电粒子模拟，在简化的通道–羽流模型中评估这一几何效应。以中心线参考尺度表示的主导通道波数仍然相近，而较小半径构型中出现了明显的径向振幅不对称性。在 $r_{\min} = 10$ 厘米和 2 厘米处，主导波数带内外通道的电场振幅分别比内侧通道值高 26% 和 53%。在羽流中，低波数涨落偏向内侧区域，而高波数分量偏向外侧区域。密度–电场协方差主要集中于外通道和内侧羽流，在 $r_{\min} = 2$ 厘米处，外侧与内侧的幅值比分别为 2.71 和 0.58。这些持续存在的空间偏向将涨落的几何重新分布与相关的轴向 $E \times B$ 漂移贡献联系起来。对于所研究的 1.28 厘米通道宽度，即使施加的磁场分布不变，结果也支持在 $r_{\min} = 10$ 厘米和 2 厘米处保留圆柱几何结构，以解析局部涨落和输运相关性。

I. 引言

反常跨场电子输运仍是霍尔推力器预测建模中的一大难题，因为有效输运往往超过经典碰撞估计 [1–4]。湍流增强电子迁移率 [5, 6]和波–粒子动量交换 [7] 的理论描述均指出，等离子体涨落是一个重要的贡献因素。在以径向磁场为主的情况下，方位角电场涨落会产生轴向 $E \times B$ 漂移。因此，这种漂移与电子密度涨落之间的相关性可能会对净轴向电子通量 [8, 9]有所贡献。这一贡献取决于涨落幅值及其相对相位，而其在放电区内的分布则取决于这些相关性出现的位置。环向曲率可能改变背景等离子体分布和涨落的空间演化，因此其影响与电子输运建模密切相关。

评估这种几何影响需要解析涨落的非线性演化和空间结构。电子漂移不稳定性（EDI），也通常称为电子回旋漂移不稳定性（ECDI），在这一背景下尤其值得关注 [10–12]。近期实验测量了其增长和非线性能量传递，识别出了三波相互作用以及向低频方向的逆级联 [13]。多维波矢结构的测量还表明，高频涨落并不局限于纯方位角传播 [14]。三维粒子-网格（PIC）模拟能够通过演化粒子动理学和电场来保留这些耦合动力学自洽地 [15, 16]。我们此前开展的三维PIC研究考察了羽流区域布置和磁场构型对方位角不稳定性的影响 [17, 18]。相关研究发现了持续存在的近壁输运路径，并利用密度–电场相关性刻画了空间输运变化 [19, 20]。

在通道宽度固定时，环形半径减小会增大通道内周长的相对变化。圆柱径向研究发现，几何膨胀、磁镜力以及电子方位角运动相关的离心效应 [21]会导致显著的径向不对称性。相应平面构型中这些不对称性大幅减弱，表明圆柱构型的重要性[22]。环形径向–方位角模拟进一步表明，方位角计算域尺寸会影响非线性模态转变和反常输运，而弯曲电子轨迹相关的离心效应会改变径向等离子体结构 [23]。近期，轴对称径向–轴向模拟改变了腔室直

在通道宽度固定的条件下改变直径，并发现直径较小时径向不对称性更强，同时等离子体密度和壁面通量也发生变化 [24]。该模型采用与 $1/r$ 成正比的径向磁场，并加入补充散射来表征反常输运。这些研究揭示了环形几何、等离子体非均匀性与输运之间的联系，同时解析了底层动力学的不同方面。

Taccogna 和 Minelli 通过比较圆柱坐标与笛卡尔表述，明确考察了几何缩放的三维放电通道模型中的圆柱曲率 [25]。他们在加速

* 通讯作者：zhaoyinjian@hit.edu.cn

区选取一个轴向位置，利用方位角平均径向势和密度剖面评估曲率；两种表述形式得出的结果相近。尽管该研究也解析了方位角涨落的轴向发展，但并未系统地改变半径与通道宽度比，且其计算区域止于通道出口。该缩放在保持半径与通道宽度比不变的同时改变了磁场强度和中性粒子密度，因此不同于独立改变环向曲率的做法。

在统一施加的磁场分布下进行受控的半径扫描，可以将这种比较扩展到对通道和羽流中涨落以及密度–场相关性空间再分布的研究，尤其适用于半径相对于通道宽度并不大的紧凑型环形构型。通道壁限制了径向发展，而等离子体则可以在出口之外向更宽的径向区域膨胀。因此，曲率诱导变化可能随轴向位置而变化。在进行详细的定量实验比较之前，解析这种依赖关系十分重要。

基于我们此前的三维研究，我们开发了柱坐标静电粒子云模拟代码 `Algoplasma-pic-3d-raz` 并引入 AlgoPlasma 中选定的数值组件 [26]。首先，在近笛卡尔极限下将该柱坐标实现与 WarpX 进行比较 [27]，以便在解释曲率相关变化之前评估两种实现之间的一致性。随后，在保持通道宽度和统一施加的磁场分布不变的情况下改变环形半径，使径向、方位角和轴向动力学能够自洽地演化。通过比较空间分辨的涨落谱和密度–场相关性，评估在预设条件下曲率会对这些量产生实质影响的半径与通道宽度比范围，从而为后续实验比较中的几何结构选择提供依据。第二节介绍模型和设置，第三节给出跨代码比较和曲率比较，第四节讨论研究结果与结论。

II. 数值模型与模拟设置

A. 物理模型与通用设置

笛卡尔坐标和圆柱坐标计算均采用相同的静电粒子网格（PIC）模型。圆柱坐标计算使用 Algoplasma-pic -3d-raz。电势 ϕ 由泊松方程求得：

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{1}$$

其中，ρ是局部电荷密度，ϵ_0 是真空介电常数。然后计算电场：

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi. \tag{2}$$

每个宏粒子 p 均按照以下公式推进：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_p}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_p, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_p}{\mathrm{d}t} = \frac{q_p}{m_p}\left(\boldsymbol{E}_p + \boldsymbol{v}_p \times \boldsymbol{B}_p\right), \tag{4}$$

其中，q_p、m_p、$\boldsymbol{x}_p$和 $\boldsymbol{v}_p$ 分别表示粒子 p的电荷、质量、位置和速度，$\boldsymbol{E}_p$ 和 $\boldsymbol{B}_p$分别表示插值到粒子位置处的电场和磁场。电荷沉积采用线性粒子形状函数。

等离子体由电子和单电荷氙离子组成。初始等离子体密度为 n_0，初始电子温度和离子温度分别为 T_{e0} 和 T_{i0}。电子–离子对在预设的成对粒子源区域内产生，以代替自洽电离。在笛卡尔参考配置中，体积成对产生率在方位角坐标 y 上均匀分布，其表达式为

$$S(x,z) = \begin{cases} S_0 C_x(x) C_z(z), & (x,z) \in \Omega_s, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5}$$

其中，S_0 由规定的总源电流确定，而不作为独立控制参数；$\Omega_s = [x_1, x_2] \times [z_1, z_2]$ 表示源区域的径向–轴向横截面。形状函数为 $C_x(x) = \cos[\pi(x - x_m)/(x_2 - x_1)]$ 和 $C_z(z) = \cos[\pi(z - z_m)/(z_2 - z_1)]$。这里，$x_m$ 和 z_m 分别表示源区域的径向中心和轴向中心。源矩形覆盖 x =7.296–18.304 mm和 z = 2.5–10 mm。在圆柱形情况中，源在 θ方向上同样均匀分布，在相同的局部源矩形内满足 $S(r,z) = S_0 C_x(x^*) C_z(z)$，矩形外为零，其中 $x^* = r - r_{\min}$。因此，源相对于通道壁的位置以及其轴向和径向范围均保持不变。电离由式（5）中规定的电子–离子对源表示。

规定的总源电流为

$$I_{\mathrm{tot}} = J_m L_{xc} L_y, \tag{6}$$

其中，J_m 为源电流密度，L_{xc} 为径向通道宽度，L_y 为笛卡尔方位角周期长度。在圆柱扇区中，$r_c = (r_{\mathrm{ch,\ in}} + r_{\mathrm{ch,\ out}})/2$为通道中心线半径，其中$r_{\mathrm{ch,\ in}}$ 和$r_{\mathrm{ch,\ out}}$表示通道壁半径。于是 $L_y = r_c \Delta\theta_{\mathrm{dom}}$，径向–方位角通道面积为

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{\mathrm{dom}} \int_{r_{\mathrm{ch,in}}}^{r_{\mathrm{ch,out}}} r\,\mathrm{d}r &= r_c \Delta\theta_{\mathrm{dom}} (r_{\mathrm{ch,out}} - r_{\mathrm{ch,in}}) \\ &= L_y L_{xc}. \end{aligned} \tag{7}$$

公式（6）因此通过以下关系，在两种坐标表示中规定了相同的预期连续源强

$$\int_{\Omega_{s,3D}} S\,\mathrm{d}V = \frac{I_{\mathrm{tot}}}{e}. \tag{8}$$

此处 $\Omega_{s,\ 3D}$ 表示覆盖整个周期性方位角区间的相应三维源区域；

在笛卡尔坐标中，物理体积元为 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，在柱坐标中为 $\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$。对于本次计算中的边界，这给出 S_0 =9.55 × 10^{23} $\mathrm{m}^{-3}\mathrm{s}^{-1}$。因此，每个时间步长内生成的电子–离子对平均数为

$$N_{\mathrm{pair}} = \frac{I_{\mathrm{tot}}\Delta t}{e\,w_0}. \tag{9}$$

其中，Δt 为时间步长，e 为元电荷，w_0 为宏粒子权重。在圆柱坐标实现中，源单元选择概率与 $S(r,\ z)$ ΔV成正比，其中 $\Delta V = \frac{1}{2}(r_+^2 - r^2)\Delta\theta\Delta z$；所选单元内的位置按物理体积均匀采样。初始粒子和新生成的粒子对均采用温度为 $T_e = 10$ eV 和 $T_i = 0.5$ eV 的零漂移麦克斯韦分布；每个生成粒子对中的电子和离子位于同一位置，而其速度独立采样。初始粒子的加载也按物理体积均匀进行，并包含柱坐标雅可比因子。因此，表 I 中报告的数值是均匀近笛卡尔网格上每个有效单元 36 个粒子的参考平均值；在宏粒子权重固定的情况下，非均匀网格或明显弯曲网格上的预期单元粒子数与该单元的物理体积成正比。

阳极平面 $z = 0$处的静电势固定为 200 V，而出口平面、开放的径向边界和固体通道壁均接地。方位向采用周期性边界条件。撞击阳极或固体壁的电子和离子，以及从开放径向边界或下游边界离开的电子和离子，都会被移除。下游边界处的一个独立源以 $T_e = 10$ eV 的能量注入半麦克斯韦分布电子，漂移速度为零，并采用基于计数的全局反馈条件。在每个时间步中，所有 MPI进程上的单个出口邻近单元层内的电子和离子宏粒子数量 $N_{e,\ c}$ 和$N_{i,\ c}$ 会被汇总，且

$$N_{e,\mathrm{inj}} = \max(0, N_{i,c} - N_{e,c}) \tag{10}$$

电子按物理表面积的比例分布到出口上。这些场和粒子条件在两种坐标表示中均适用。模拟采用无碰撞静电模型，设置了规定的成对产生和吸收性非周期边界。模拟忽略了中性粒子碰撞、库仑碰撞、二次电子发射和介电壁充电。

外加磁场沿径向，且与半径和方位角无关，$\boldsymbol{B} = B_r(z)\boldsymbol{e}_r$，其中 $B_z = 0$。该磁场由分段高斯函数表示

$$B_r(z) = a_s \exp\left[-\frac{(z - z_B)^2}{2\sigma_B^2}\right] + b_s, \tag{11}$$

其中分支索引为

$$s = \begin{cases} 1, & z \le z_B, \\ 2, & z > z_B. \end{cases} \tag{12}$$

其中 $z_B = 0.75$ 厘米，且 $\sigma_B = 0.625$ 厘米。系数由 $B_r(0) = 60$ G、$B_r(z_B) = 100$ G 确定，并且 B_r(2.56 厘米) = 10 G。位于 $z = 2.56$ 厘米处的拟合点超出了 $L_z = 2.00$ 厘米处的模拟出口，此处$B_r \simeq 21$ G。因此，在整个曲率扫描中均采用相同的解析剖面，其最大值位于 $z = 7.5$ 毫米处，且 B_r(10 毫米) $\simeq$ 92.97 G。

纯径向且与半径无关的设定还给出 $\nabla \cdot \mathbf{B} = B_r/r$（以柱坐标表示）。曲率扫描采用这一理想化的径向外加场模型。表 I 列出了 W0、A0 和 A 共用的物理输入和均匀网格设置0′。所列时间步长为电子步长；A0′ 每经过十个电子步推进一次离子。A1–A4 保留这些物理输入。表II总结了它们的几何结构和网格变化，详见第 II B 节。

表 I. W0、A0 和 A 共用的物理输入和均匀网格设置0′。长度和单元数依次按径向、方位向和轴向列出；电子时间步长相同，离子步长比见表 II。

参考参数	符号	W0、A0、A0′ 值
计算域尺寸	$L_x \times L_y \times L_z$	2.56 × 0.64 × 2.00 厘米^3
Grid	$N_x \times N_y \times N_z$	256 × 64 × 200
均匀网格间距	Δl	0.1 毫米
通道尺寸	$L_{xc} \times L_{zc}$	1.28 × 1.00 厘米^2
初始密度	n_0	5.0 × 10^{16} 米$^{-3}$
温度	T_{e0}, T_{i0}	10，0。5 eV
施加电压	$V_a - V_c$	200 V
电子时间步长	Δt	5.0 × 10^{-12} 秒
粒子权重	w_0	1.389 × 10^3
每个活动单元的初始平均数量	$N_{\mathrm{ppc,ref}}$	36/种类
活动单元格		
源电流密度 J_m		400 A m^{-2}
磁场	$B_r(z)$	分段高斯函数，公式（11）

B. 坐标表示和算例

在 WarpX 笛卡尔参考计算中，计算坐标（x，y，z）分别表示霍尔推力器的径向、方位向和轴向。y 方向为周期性。圆柱坐标程序使用相应的物理坐标（r，θ，z），并在 θ方向上具有周期性。两种表示中，通道和羽流的径向及轴向尺寸保持一致。

笛卡尔周期长度 L_y 用作参考物理方位长度。在圆柱形算例中，角向范围选取为通道中心线半径 r_c处的范围，

$$\Delta\theta_{\mathrm{dom}} = \frac{L_y}{r_c}, \tag{13}$$

$$L_{\theta,c} = r_c\Delta\theta_{\mathrm{dom}} = L_y. \tag{14}$$

在场求解、粒子推进、电荷沉积和场插值中均保留柱坐标度规。当绝对半径相对于径向通道宽度变得很大时，

表 II。模拟算例、配置继承和比较作用。所有 A 系列算例均使用 Algoplasma-pic-3d-raz 计算。所有算例均使用 64 个方位单元，其中 $q = \Delta t_i/\Delta t_e$。A1–A4 独立初始化。W0 不包含圆柱曲率参数。

Case	表述形式	$r_{\min}$	χ	相对于参考配置	比较作用
W0	笛卡尔坐标（WarpX）	–	–	表 I 基准；$q = 1$	笛卡尔坐标跨代码参考
A0	圆柱坐标	100 米	6.4×10^{-5}	W0 的局部尺寸和均匀间距；$q = 1$	W0 的近笛卡尔对应项
A0′	圆柱坐标	100 米	6.4×10^{-5}	A0 几何和网格；$q = 10$；均匀-θ 快速路径	均匀网格时间积分参考
A1	圆柱坐标	100 米	6.4×10^{-5}	A0′ 半径和 q；非均匀 r–z 网格；MPI 负载均衡	近笛卡尔生产基准，0–15 μ秒
A2	圆柱坐标	1 m	6.3×10^{-3}	A1 生产配置；缩小半径，弱曲率，0–15 μ秒	
A3	圆柱坐标	10 厘米	5.7×10^{-2}	A1 生产配置；缩小半径，中等曲率，0–15 μ秒	
A4	圆柱坐标	2 cm	1.95×10^{-1}	A1 生产配置；缩小半径，强曲率，0–15 μ秒	

计算域内的度规变化可以忽略，圆柱几何便趋近于局部笛卡尔极限。

具体而言，圆柱场方程包含依赖于半径的度量项

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{15}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}. \tag{16}$$

对于电荷为 q_p、质量为 m_p 的粒子，径向和方位角速度方程包含

$$\dot{v}_r = \frac{q_p}{m_p}(E_r + v_\theta B_z - v_z B_\theta) + \frac{v_\theta^2}{r}, \tag{17}$$

$$\dot{v}_\theta = \frac{q_p}{m_p}(E_\theta + v_z B_r - v_r B_z) - \frac{v_r v_\theta}{r}. \tag{18}$$

相应的位置方程为 $\dot{r} = v_r$、$\dot{\theta} = v_\theta/r$ 和 $\dot{z} = v_z$。对于给定的径向场，轴向速度方程为 $\dot{v}_z = (q_p/m_p)(E_z - v_\theta B_r)$。

无量纲环形曲率参数为

$$\chi = \frac{r_{\mathrm{ch,out}} - r_{\mathrm{ch,in}}}{2 r_c}, \tag{19}$$

其中 $r_{\mathrm{ch,in}}$ 和 $r_{\mathrm{ch,out}}$ 分别为内侧和外侧通道半径，而 $r_c = (r_{\mathrm{ch,in}} + r_{\mathrm{ch,out}})/2$ 为通道中心线半径。对于当前通道几何结构，

$$r_{\mathrm{ch,in}} = r_{\min} + 6.4\ \mathrm{mm}, \tag{20}$$

$$r_{\mathrm{ch,out}} = r_{\min} + 19.2\ \mathrm{mm}, \tag{21}$$

$$r_c = r_{\min} + 12.8\ \mathrm{mm}. \tag{22}$$

因此

$$\chi = \frac{6.4\ \mathrm{mm}}{r_{\min} + 12.8\ \mathrm{mm}}. \tag{23}$$

其中，$r_{\min}$ 是计算域的最小圆柱半径。因此，$r_{\min}$ 越小，环向曲率越强。

表 II 将数值配置归纳为 A0→ A0′ → A1 → A2–A4。A0 是与 W0 对应的均匀网格圆柱配置，其近笛卡尔半径为 $r_{\min} =$ 100 m；两者均每个电子步推进一次离子。A0′ 保留保留 A0 的几何结构和均匀网格，将离子步与电子步的比值提高至 $q = \Delta t_i/\Delta t_e = 10$，并为均匀-$\theta$操作引入一种代数等价的快速路径。

A1 保留近笛卡尔半径和 $q = 10$，同时采用非均匀的生产离散方案。它保留 $N_r \times N_\theta \times N_z = 256 \times 64 \times 200$，其中 $\Delta r = 0.075$–0.150 毫米，$\Delta z = 0.071$–0.142 毫米；网格加密集中在径向通道中心线和 $z \simeq 0.69$ 厘米附近。生产实现采用 MPI 负载均衡。A2–A4 使用与 A1 相同的生产处理方式和局部网格，但分别将 $r_{\min}$ 减至 1 米、10 厘米和 2 厘米。A0 和 A0′ 使用 384 个 MPI进程，每个进程配备两个 OpenMP线程；A1–A4 使用 128 个进程，每个进程配备两个线程。

这一序列描述的是配置继承，而非从一个算例的粒子状态继续到另一个算例。每个 A1–A4 几何结构都使用共同的密度、温度和初始化种子独立初始化，并在柱坐标物理体积中对位置进行采样。每条轨迹的时间范围为 $t = 0$ 至 15 μ秒（3 000 000 个电子步）。实际续算使用同一算例的粒子快照，并保留全局步和时间。场由保存的粒子重构；快照格式不包含完整的随机数状态和积分器状态。组装续算历史记录时，已接受的续算部分会替换其前序记录中已被取代的尾部。时间变化在共同的观测窗口内进行评估。

离散实现 A 系列将节点沉积电荷转移到单元中心，以进行有限体积泊松求解。其电场分量位于垂直于各自方向的面上，并在横向上位于单元中心，所有方向均采用线性收集。W0 在节点嵌入边界泊松方程求解之前对节点电荷进行滤波。其电场分量位于沿各自方向的中点处，并在横向上位于节点处；沿分量方向采用零阶收集，横向采用线性收集。圆柱坐标实现采用七点有限体积泊松算子，并使用 HYPRE StructPFMG 求解器，相对容差设定为 10^{-6}。粒子推进先在局部笛卡尔标架中进行 Boris旋转，再进行位置变换和速度基变换，以转换到柱坐标

中。W0 在粒子推进之前注入阴极电子，而 A 系列在推进和边界处理之后注入阴极电子。在 A 系列中，电子-离子对产生、电荷沉积、泊松方程求解和场计算共同完成一个时间步。在离子更新之间，保留存储的离子电荷，并叠加新产生离子的电荷。

C. 诊断

比较采用三级诊断。首先，总离子宏粒子数及相应的区域平均离子密度用于监测全局源项–损失平衡和瞬态演化，

$$\langle n_i \rangle = \frac{N_{i,\mathrm{macro}}\, w_i}{V_{\mathrm{act}}}, \tag{24}$$

其中 $N_{i,\mathrm{macro}}$, w_i, 和 V_{act} 分别表示总离子宏粒子数、离子宏粒子权重和有效等离子体体积。其次，在 W0、A0 和 A1 中的 $8\ \mu$s 时刻，对匹配的物理截面上的瞬时离子密度、电势和方位角电场进行比较。第三，全局谱历史保留全部七个算例，而定量径向谱和密度–电场协方差仅采用受控的 A1–A4 曲率扫描。

对于圆柱形情况，考虑在物理时间 t 保存的一帧场快照。径向和轴向单元中心分别记为 r_i 和 z_ℓ，其中 i 和 ℓ 分别是对应的单元索引。在每个固定的 (r_i, z_ℓ) 处，方位角电场 E_θ 在角宽为$\Delta\theta_{\mathrm{dom}}$的周期扇区内提供 $N_\theta = 64$ 个均匀间隔的采样点。采样索引为 $j = 0, \ldots, N_\theta - 1$，而 $E_{\mathrm{azi},j}(r_i, z_\ell, t) = E_\theta(r_i, \theta_j, z_\ell, t)$ 表示方位角单元中心 $\theta_j = (j + 1/2)\Delta\theta_{\mathrm{dom}}/N_\theta$ 处的场；下标“azi”表示方位分量。

对于 A 系列，用于诊断的单元中心场是相邻两个方位角面场的算术平均值。频谱和密度–场协方差均使用这一保存的场。在均匀方位角网格上，此操作会将模态的面场振幅乘以 $\cos(\pi n/N_\theta)$；对于 $n = 14$ 和 15，该值分别为 0.773 和 0.741。

在这一固定位置和时间，$\langle\cdot\rangle_\theta$ 表示对这 64 个样本求算术平均值，$E'_{\mathrm{azi},j}$ 中的撇号表示相对于瞬时方位角平均值的偏差。局部复数傅里叶系数为 $E_n(r_i, z_\ell, t)$。在以下方程中省略共同自变量 (r_i, z_ℓ, t) 后，均值、涨落和傅里叶系数的计算方式如下：

$$\langle E_{\mathrm{azi}} \rangle_\theta = \frac{1}{N_\theta} \sum_{j=0}^{N_\theta - 1} E_{\mathrm{azi},j}, \tag{25}$$

$$E'_{\mathrm{azi},j} = E_{\mathrm{azi},j} - \langle E_{\mathrm{azi}} \rangle_\theta, \tag{26}$$

$$\widehat{E}_n = \frac{1}{N_\theta} \sum_{j=0}^{N_\theta - 1} E'_{\mathrm{azi},j} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{2\pi n j}{N_\theta}\right). \tag{27}$$

对于 $n = 1, \ldots, 31$，局部单边振幅为 $a_n = 2|\widehat{E}_n|$，单位为 V m^{-1}。零模通过均值减除去除，奈奎斯特模 $n = 32$ 不包含在报告的频谱中。

为每个保留模态指定一个中心线参考波数 k_n。使用通道中心线半径 r_c以及式（13）中定义的扇区角宽度，

$$L_{\theta,c} = r_c \Delta\theta_{\mathrm{dom}} = 6.4\ \mathrm{mm}, \tag{28}$$

$$k_n = \frac{2\pi n}{L_{\theta,c}}, \tag{29}$$

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L_{\theta,c}}. \tag{30}$$

间距 $\Delta k = k_{n+1} - k_n$ 约为 0.982 rad mm^{-1}。图中标记为 $k_{\theta,\ c}$的水平坐标取以下离散值 k_n。在半径 r 处，同一扇区模态的局部物理波数为

$$k_{\theta,n}(r) = \frac{2\pi n}{r\Delta\theta_{\mathrm{dom}}} = \frac{r_c}{r} k_n. \tag{31}$$

因此，固定的参考波数带比较的是相同的扇区模态指标，而其局部物理波长则随半径变化。对于 W0，方位分量为 E_y；沿其长度为 $L_y = 6.4$ mm 的周期性 y 方向，采用相同的均值减除和傅里叶变换。

为比较 A1–A4 中的空间分布，将活跃区域划分为四个区域。通道的范围为$r_{\mathrm{ch,\ in}} \le r \le r_{\mathrm{ch,\ out}}$ 和 $z < 10$ mm；羽流在 $z \ge 10$ mm 处覆盖整个活跃径向范围。将每个区域在 r_c处分开，得到通道内侧、通道外侧、羽流内侧和羽流外侧区域，其中内侧单元和外侧单元分别依据 $r_i \le r_c$ 和 $r_i > r_c$选取。排除实体单元和非活跃单元。令 R 表示上述任一区域中的径向—轴向单元集合。对于每个保留模态n，其区域平均振幅为

$$A_{R,n}(t) = \frac{\sum_{(i,\ell)\in R} V_{i\ell}\, a_n(r_i, z_\ell, t)}{\sum_{(i,\ell)\in R} V_{i\ell}}, \tag{32}$$

$$V_{i\ell} = \frac{1}{2}(r_{i,+}^2 - r_{i,-}^2)\Delta\theta_{\mathrm{dom}}\, \Delta z_\ell. \tag{33}$$

其中，$V_{i\ell}$ 是单元（i，ℓ）所代表的扇区体积，$r_{i,\ -}$ 和$r_{i,\ +}$ 是其径向面，Δz_ℓ 是其轴向宽度。各点（k_n，$A_{R,\ n}$（t））构成区域谱，等价地表示为 A_R（k_n，t）$\equiv A_{R,\ n}$（t）。将 R 作为完整活跃区域，定义$A_{\mathrm{global},\ n}$（t），在图中记为A_{global}。

图 3中的所有全局谱均采用活跃等离子体单元上局部振幅的物理体积加权平均值。对于 W0，均匀单元体积使其简化为对活跃径向—轴向单元求算术平均值。圆柱形情况采用式（32）中的扇区体积权重。所有图中均排除固体单元和非活跃单元。

时间窗口和频带指标 对于 A1–A4，每隔 1000 个电子步保存一次场快照，对应 0.005 μs。定量区域谱采用共同 13–15 μs 时间窗口内的全部 401 个快照。时间

索引为 $m = 0, \ldots, 400$，其中 $t_m = (13 + 0.005m)$ μs。首先，根据式 ($A_{R,\,n}(t_m)$32)，计算每个快照的瞬时区域振幅；然后通过梯形求积对这些振幅进行时间平均：

$$\overline{A}_{R,n} = \frac{\sum_{m=0}^{400} \omega_m A_{R,n}(t_m)}{\sum_{m=0}^{400} \omega_m}. \tag{34}$$

端点权重为 $\omega_0 = \omega_{400} = 1/2$，对于 $m = 1, \ldots, 399$，$\omega_m = 1$给出 $\sum_{m=0}^{400} \omega_m = 400$。因此，$A_{R,\,n}$是区域 R中模态 n 的时间平均振幅。时间变化按连续的四个 0.5 μ块进行评估，每块包含 101 个快照，并采用相同的端点加权规则。

对于参考波数带 $\mathcal{B}$，条件n: $k_n \in \mathcal{B}$ 会选出峰值波数 k_n 位于该波段内的保留模态。波段振幅 S_R、振幅加权的平均波数 k_R、峰值模态索引 $n_{\mathrm{peak},\,R}$以及峰值波数 $k_{\mathrm{peak},\,R}$ 定义如下：

$$S_R(\mathcal{B}) = \sum_{n:\,k_n \in \mathcal{B}} \overline{A}_{R,n}\,\Delta k, \tag{35}$$

$$\bar{k}_R = \frac{\sum_{n:\,k_n \in \mathcal{B}} k_n \overline{A}_{R,n}\,\Delta k}{S_R(\mathcal{B})}, \tag{36}$$

$$n_{\mathrm{peak},R} = \arg\max_{n:\,k_n \in \mathcal{B}} \overline{A}_{R,n}, \tag{37}$$

$$k_{\mathrm{peak},R} = k_{n_{\mathrm{peak},R}}. \tag{38}$$

最大值自变量 arg max 返回所选波段内时间平均振幅最大的模态索引。$\bar{k}_R$ 和$k_{\mathrm{peak},\,R}$ 的单位均为 rad mm^{-1}；S_R 的单位为 (V m^{-1})(rad mm^{-1})。采用两个固定波段 10–15 rad mm^{-1} （$n = 11$–15）和 3–8 rad mm^{-1} （$n = 4$–8），比较不同方位尺度下的径向振幅分布。此外还保留完整的 31模态频谱。通道峰值和平均波数指标使用 $8 \le k_n \le 18$ rad mm^{-1} 以及频谱 $A_{\mathrm{ch},\,n} = (A_{\mathrm{ch},\,\mathrm{in},\,n} + \overline{A}_{\mathrm{ch},\,\mathrm{out},\,n})/2$，该频谱对体积归一化的通道内、外侧频谱赋予相同权重。下标“ch”和“pl”分别表示通道和羽流，“in”和“out”分别表示其内侧和外侧部分。径向不对称性通过以下方式测量：

$$R_{\mathrm{out/in,ch}} = \frac{S_{\mathrm{ch,out}}(10 \le k_n \le 15)}{S_{\mathrm{ch,in}}(10 \le k_n \le 15)}, \tag{39}$$

$$R^{\mathrm{low}}_{\mathrm{out/in,pl}} = \frac{S_{\mathrm{pl,out}}(3 \le k_n \le 8)}{S_{\mathrm{pl,in}}(3 \le k_n \le 8)}, \tag{40}$$

$$R^{\mathrm{high}}_{\mathrm{out/in,pl}} = \frac{S_{\mathrm{pl,out}}(10 \le k_n \le 15)}{S_{\mathrm{pl,in}}(10 \le k_n \le 15)}. \tag{41}$$

两个羽流波段分别报告；比值接近 1 表示体积平均区域振幅相似。

密度–场协方差 密度–场协方差将电场涨落与其相关的轴向漂移通量贡献联系起来。对于给定的径向磁场，

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \tag{42}$$

$$v_{E,z} = -\frac{E_\theta}{B_r}. \tag{43}$$

对于施加的、时间无关的 B_r（其在 θ 中均匀），与该漂移相关的波动电子粒子通量为

$$\Gamma^{E\times B,\mathrm{fluct}}_{e,z} = \langle \delta n_e\, \delta v_{E,z} \rangle_{\theta,t} = -\frac{C_{nE}}{B_r}, \tag{44}$$

$$C_{nE} = \langle \delta n_e\, \delta E_\theta \rangle_{\theta,t}, \tag{45}$$

其中，$\langle\cdot\rangle_{\theta,\,t}$ 是共同时间窗上的方位角–时间联合平均值，$\delta f = f - \langle f \rangle_{\theta,\,t}$。该联合平均将方位角算术平均与用于频谱的梯形时间权重相结合。匹配的密度与电场快照给出 $C_{nE} = \langle n_e E_\theta \rangle_{\theta,\,t} - \langle n_e \rangle_{\theta,\,t} \langle E_\theta \rangle_{\theta,\,t}$，单位为 V m^{-4}。协方差衡量密度变化与轴向 $E\times B$ 漂移的关联方式：较高密度与阳极方向漂移之间的偏向性关联会产生阳极方向的平均通量贡献。对于 $B_r > 0$，该贡献对应于 $C_{nE} > 0$。为比较这种密度–电场耦合的径向分布，将区域平均协方差幅值及其外侧/内侧比值定义为

$$Q_R = \frac{\int_R |C_{nE}|\, dV}{\int_R dV}, \tag{46}$$

$$R_{C,\mathrm{ch}} = \frac{Q_{\mathrm{ch,out}}}{Q_{\mathrm{ch,in}}}, \tag{47}$$

$$R_{C,\mathrm{pl}} = \frac{Q_{\mathrm{pl,out}}}{Q_{\mathrm{pl,in}}}. \tag{48}$$

与频谱分析使用相同的四个区域。Q_R衡量密度–场耦合的平均幅值；利用局部磁场，通过有符号的 $-C_{nE}/B_r$得到其通量贡献。因此，区域比值表征了协方差分布。还计算了有符号积分 $\int_R C_{nE}\, dV$，以量化符号抵消。

数值分辨率 所有圆柱形情况均使用 $N_\theta = 64$个方位单元，因此通道中心线处的单元宽度为 $\Delta s_{\theta,\,c} = L_{\theta,\,c}/N_\theta = 0.1$ 毫米。$n = 14$–15处的公共窗口通道峰值对应的中心线波长为0.427–0.457毫米，即每个波长约包含 4.3–4.6个方位单元。这些固定分辨率比较刻画了该采样尺度下的谱与径向模式。更精细的方位网格比较将量化谱振幅和外侧/内侧比值的分辨率依赖性。

III. 模拟结果

比较首先考察整体演化和匹配时刻场，随后分析谱与径向结构以及密度–场协方差。A1–A4的晚期诊断使用13–15 μ秒。

A. 整体演化与瞬时空间结构

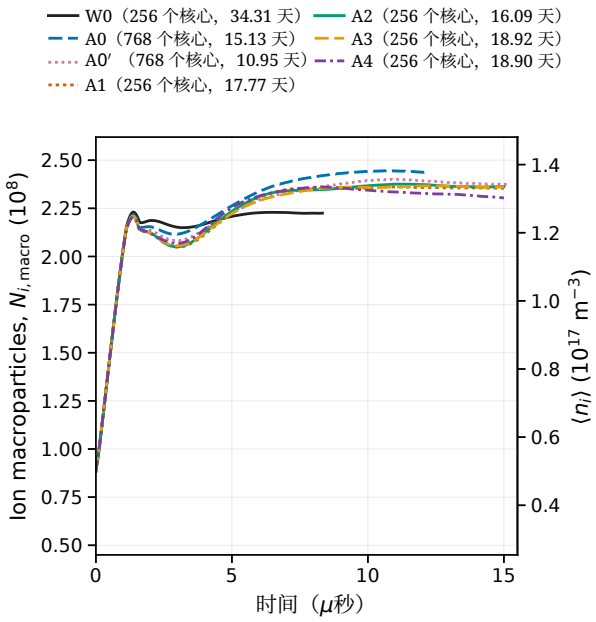


图 1。W0、A0、A0′以及 A1–A4 的离子宏粒子总数（左轴）和相应区域平均离子密度（右轴）的演化。图例给出了表 IV所列已接受的轨迹对应的算例、物理 CPU 核心数以及以天为单位的累计循环时间。计时定义见第 IIID节。W0 从其首次加载后诊断采样开始绘制。

图 1显示了共同的初始上升、过冲和弛豫过程，随后是较慢的粒子群演化。

在共同的 7–8 μs 时间区间内，W0、A0、A0′ 和 A1 中的平均离子宏粒子数分别为 2.22551×10^8、2.39970×10^8、2.34318×10^8 和 2.35302×10^8 。A0、A0′ 和 A1 分别比 W0 高 7。83%、5。29% 和 5。73%。因此，近笛卡尔坐标情形遵循相同的总体瞬态序列，但仍保持有限的粒子数差异。

PIC 实现和实施方式之间的相关差异也已在霍尔推力器基准测试中有所报道。Charoy 等人使用相同的输入参数，将一个轴向–方位向情形重复进行三次，发现时间平均的离子密度和轴向电场剖面存在约 5% 的差异；固定随机种子后，电流历程恢复重叠[11]。在 Villafana 等人的径向–方位向基准测试中，平均离子密度和总电子温度剖面与多代码平均值的偏差保持在 $\pm 2.5\%$ 以内，而使用共同的初始粒子位置则显著减少了瞬态差异[12]。共同初始化和重复随机种子测试共同表明，PIC 结果对粒子采样（包括初始化）较为敏感，即使物理输入名义上相同，也可能表现出统计变异性。这种变异性是模拟结果之间产生差异的一个可能来源。

此处观察到的粒子数差异也可能反映了数值设置的影响。W0 与 A 系列在粒子–场耦合和阴极注入时序方面有所不同，详见第 II B 节。A0′ 相较于 A0 引入了十步离子超循环。A1 保留了这一离子更新方案，同时引入了非均匀径向–轴向网格和 MPI 负载均衡。这些差异可能通过改变自洽场和粒子轨迹，影响粒子驻留和边界损失。

在 13–15 μs 内，A2、A3 和 A4 的平均粒子数分别与 A1 相差 $+0.29\%$、$+0.24\%$ 和 -1.74%。因此，这些曲率情形的总体粒子数相近。

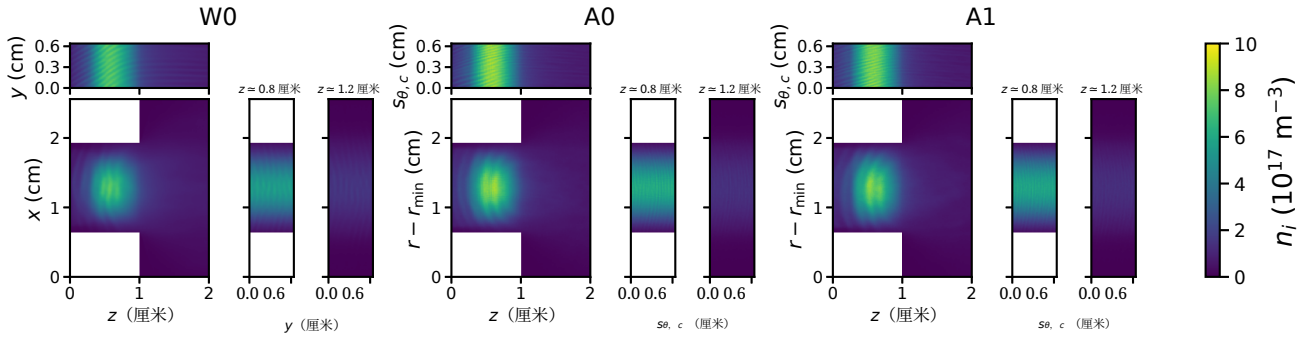
图 2 比较了 W0、A0 和 A1 在 8 μs 时的情况。三者均具有通道中心离子密度最大值、密度较低的羽流，以及朝出口方向降低的电势。W0 的方位向电场波长长于 A0 和 A1。为检查同一位置处 W0 与 A0 的差异，分别在通道中心线附近的 8 μs 时，对它们在 $x = 12.75$ mm（W0）和 $r - r_{\min} = 12.75$ mm（A0）处的场进行采样。在通道内的每个轴向位置（$z < 10$ mm），对沿 6.4 mm 范围内的 64 个方位向采样点进行变换，然后沿z对其幅值取平均。这些通道截面频谱的峰值分别位于 $n = 8$（W0）和$n = 13$（A0），对应的波长分别为 0.800 mm 和 0.492 mm。

B. 谱演化与径向划分

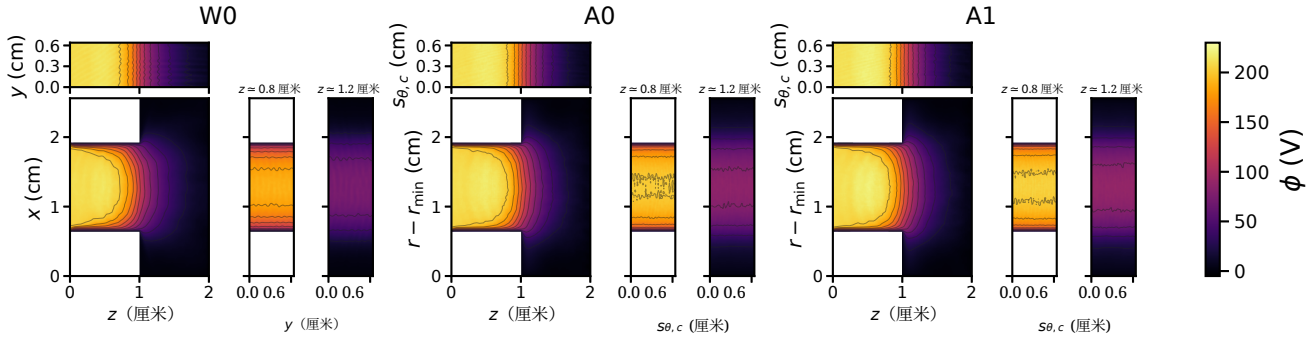
图 3展示了 W0–A0 谱分离的演化。两个全局谱均在 $n = 7$ 处达到峰值，时间为 2 μ秒。在8 μ秒时，W0 在 $n = 8$ 处达到峰值，而 A0 在 $n = 12$处达到峰值，对应于 7。854 和 11。781 radmm^{-1}，或波长 0。800 和 0。533 mm。对 7–8 μ 秒进行平均后，这些峰仍然保留；A0′ 也在 $n = 12$处达到峰值，而 A1 在 $n = 11$处达到峰值。因此，在匹配的空间截面和时间平均谱中都观察到了尺度分离。由此，代码间比较表明，粒子群演化总体相似，但主导谱尺度存在持续差异。下文的曲率相关的径向比较采用通用的 A1–A4 实现。

W0 与 A 系列在电荷表示和滤波、泊松离散化、场错位排列以及场收集方面的差异，可能会改变有限网格对不同波数下电荷扰动的响应，以及模态之间的竞争，从而影响主导波长 [28]。

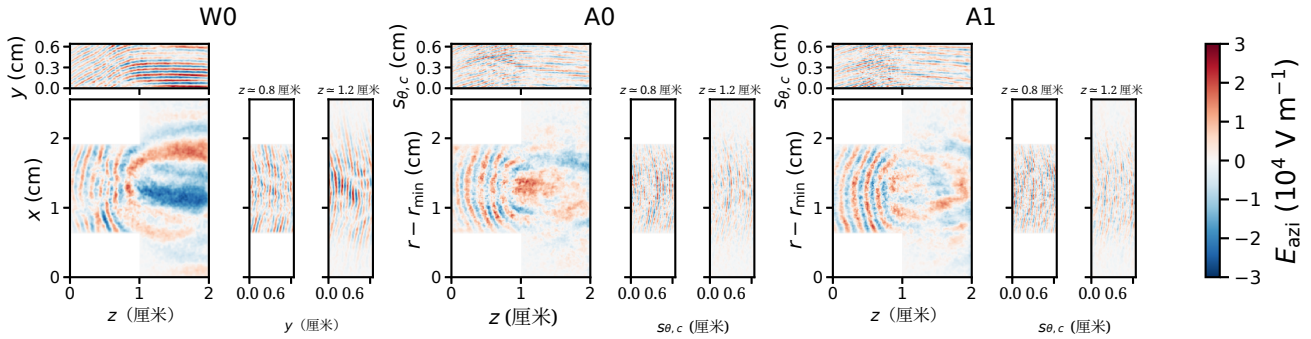
在受控的 A1–A4 曲率扫描中，四个独立初始化的算例均在早期粒子数增长阶段产生了明显的方位角涨落。



(a) 离子密度



(b) 静电势



(c) 方位角电场

图 2. W0、A0 和 A1 在 8 μs 时的瞬时场。各行依次显示离子密度、电势和方位角电场（W0 对应 E_y，圆柱形算例对应 E_θ）。电势等值线间隔为 20 V。每行中各算例共用同一颜色标度。截面取自径向和方位角中点附近的 $z = 0.8$ 和 1.2 cm 位置。圆柱坐标位置使用 $r - r_{\min}$，中心线弧长为 $s_{\theta,\,c}$；W0 使用 x，y。

随后，它们的谱权重向更高的中心线参考波数移动。共同窗口的通道谱在 A1 和 A2 中的扇区索引为 $n = 14$，在 A3 和 A4 中为 $n = 15$。这些分别对应于 13.744 和 14.726 rad mm^{-1}，分辨间距为$\Delta k_{\theta,\,c} = 2\pi/L_{\theta,\,c} = 0.982$ rad mm^{-1}。因此，峰值差为一个分辨后的傅里叶频点。

8–18 radmm 通道的通道质心$^{-1}$ 频带范围为 12。904–13。310 radmm^{-1} （表 III）。这些带限质心不同于全谱质心，后者在 A1–A4 中分别为 12。227、11。916、12。164 和 12。107 radmm^{-1} 。较低的数值反映了低波数成分的权重。两种测量结果都表明，在曲率扫描范围内，谱尺度总体相近。

表III. 13–15 μs 期间的诊断结果。通道峰值和质心采用等权内外谱；质心采用 8–18 radmm^{-1}。谱比采用所示频带，而 R_C 采用区域平均协方差幅值。

指标	A1	A2	A3	A4
$k_{\mathrm{peak,\ ch}}$ （径向 mm^{-1}）	13.744	13.744	14.726	14.726
$\bar{k}_{\mathrm{ch}}$，8–18（径向 mm^{-1}）	13.271	12.904	13.147	13.310
通道 10–15：$R_{\mathrm{out/in,\ ch}}$	1.049	1.018	1.260	1.532
羽流 3–8：$R^{\mathrm{low}}_{\text{外/内, 羽}}$	1.011	0.955	0.835	0.630
羽流 10–15：$R^{\mathrm{high}}_{\text{外/内, 羽}}$	1.016	1.015	1.283	1.358
通道协方差：$R_{C,\ \mathrm{ch}}$	1.098	1.030	1.251	2.714
羽流协方差：$R_{C,\ \mathrm{pl}}$	1.068	0.942	0.787	0.578

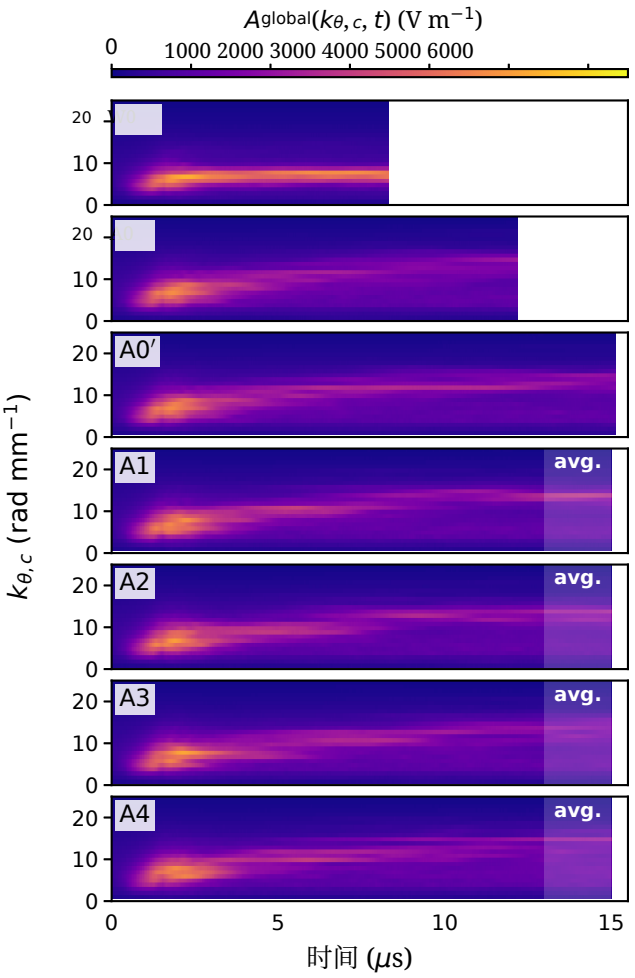


图3. 七个算例中单边方位角电场振幅谱的演化。中心线参考方位角长度为 6。4 mm。对于 A1–A4，在 $t < 13$ μs 时显示的频谱采用每十个保存的场快照中的一个，因此显示间隔为 0.05 μs；在 13–15 μs 范围内使用所有快照，间隔为 0.005 μs。W0、A0 和 A0′ 面板使用其可用频谱，间隔为 0.005 μs。阴影表示用于定量统计的共同时间窗；空白区间表示没有可用输出。所有面板均采用活跃等离子体单元上的物理体积平均振幅，定义见第 IIC节。

区域谱（图 4）显示出比峰值更强的对比。A1–A2 中的通道频带振幅几乎达到平衡，而 A3–A4 中则偏向外侧加权（比值为 1.260 和 1.532）。A2 最接近径向平衡。在羽流中，A3 和 A4 的低波数比分别降至 0.835 和 0.630，而高波数比分别达到 1.283 和 1.358。宽频带平均会掩盖这些相互对立的径向偏好。

图 5显示，曲率相关径向分配在每个半微秒时间块中都持续存在。A1–A2 始终接近于 1，而 A3–A4 在通道和高波数羽流频带中的比值始终高于 1，在低波数羽流频带中则低于 1。在每个时间块的三项诊断中，A4 偏离 1 的程度都比 A3 更大。A3 的通道比值从 1.277 降至 1.235，A4 则从 1.570 降至 1.505，但其对外侧的偏好并未反转。因此，更强的曲率与持续存在且依赖频带的径向不对称性相关，时间范围为 13–15 μs。

通道比还取决于所积分的频谱内容。将原始 $n = 11$–15 频带扩展为 $n = 10$–16 后，A1–A4 的比值分别为 1.015、1.013、1.182 和 1.563。对于 A3，将频带收窄至 $n = 12$–14 后，比值为 1.416；而对更宽的 8–18 rad mm^{-1} 区间进行积分时，比值为 1.104。在这些替代设置下，A4 仍明显偏向外侧加权，但 A3 不对称性的数值大小表现出显著的频带依赖性。这些检验表明了径向再分布的频带依赖性。

C. 密度–场协方差

图中的协方差6 总体为正，这对应于电子 $E \times B$ 在给定的正 B_r条件下朝向阳极的漂移贡献。通道协方差幅值比在 A1–A4 中分别为 1.098、1.030、1.251 和 2.714，而羽流比则分别为 1.068、0.942、0.787 和 0.578（表 III）。因此，最强曲率情形同时表现出强烈的外侧加权通道协方差和内侧加权羽流协方差。在这一通道诊断中，A1 和 A2 仍比 A4 更接近径向平衡。

对四个区域分别计算有符号积分和绝对值积分，可得$|\int_R C_{nE}\,dV| / \int_R |C_{nE}|\,dV \geq 0.9974$ 适用于所有算例。因此，区域符号抵消较小。

协方差揭示了密度涨落与电场涨落在何处结合并对轴向漂移输运作出贡献。在 A4 中，这种耦合集中于外通道和内侧羽流。

图 7显示出持续存在的晚期径向偏好。在 A1–A2 中，通道比值保持在接近 1 的水平，但在 A3 中处于 1.222–1.266 范围内，在 A4 中处于 2.595–2.853 范围内。相应的羽流比始终低于 1，分别处于 0.682–0.878 和 0.544–0.625 范围内。因此，较强曲率情形在每个区块中都保持外通道和内侧羽流的协方差偏好，其中 A4 偏离 1 的程度大于 A3。结合图 5，这表明在 13–15 μs 的时间范围内，场幅值和密度–场耦合均存在持续的与曲率相关的径向分区。

D. 计算效率与已接受轨迹成本

我们比较匹配物理时间区间内的循环耗时和核时成本。对于持续时间为T_{loop} 小时且使用 P 个物理 CPU 核心的循环，每模拟微秒的成本为

$$C_{\mathrm{phys}} = \frac{P T_{\mathrm{loop}}}{\Delta t_{\mathrm{phys}}}, \tag{49}$$

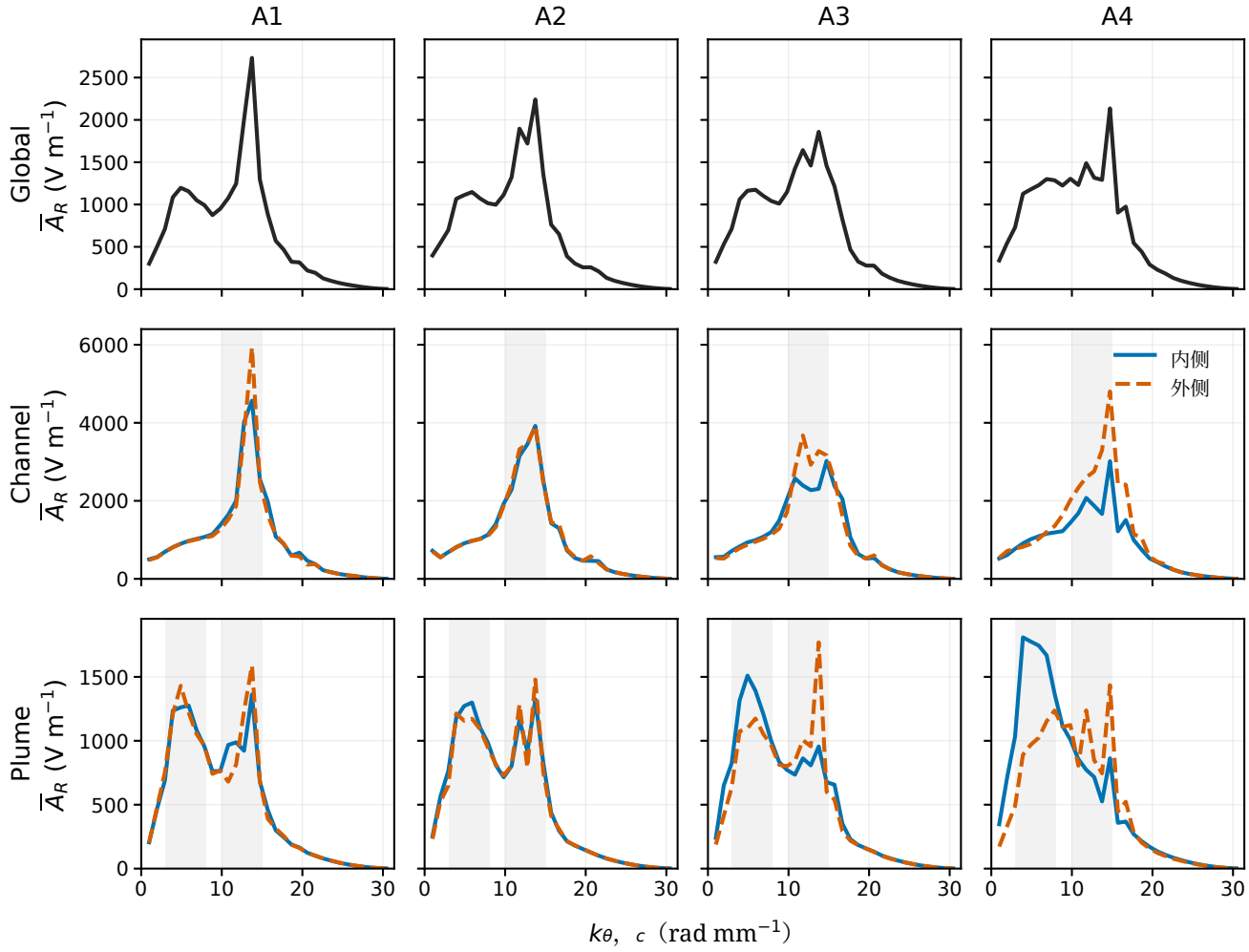


图 4. 13–15 μs 内的方位角电场幅值平均值。上：活性体积全局频谱。中、下：内侧和外侧通道及羽流频谱。阴影表示通道频带 10–15 rad mm^{-1} 以及羽流波段 3–8 和 10–15 rad mm^{-1}。

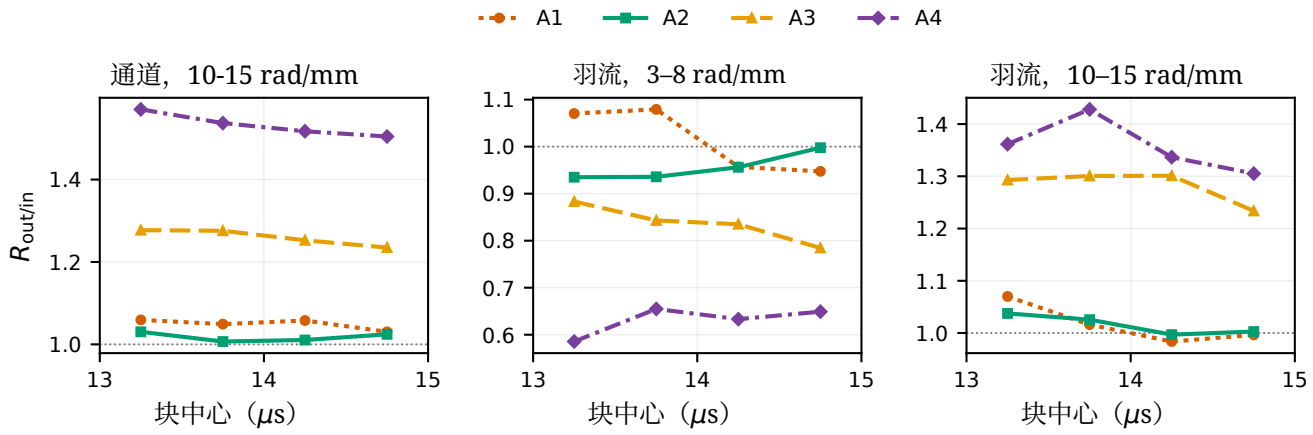


图 5. 13–15 μs 内连续四个 0.5 μs 时间块的频谱外侧/内侧幅值比。比值为 1 表示区域平均幅值相等。

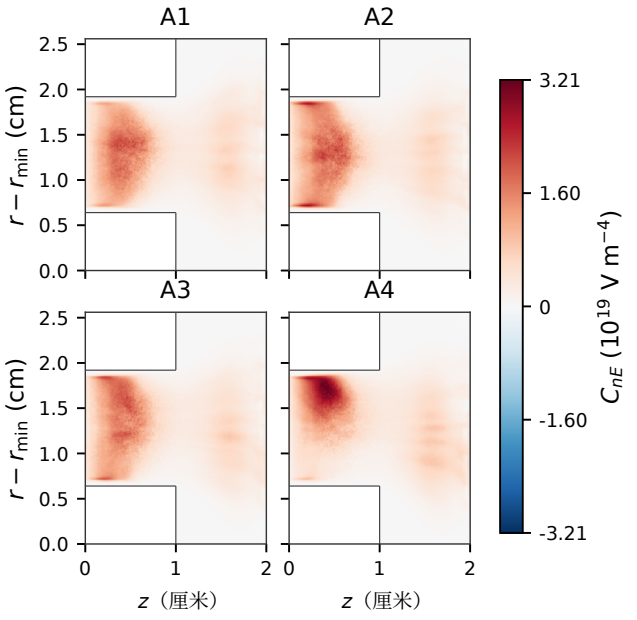


图6。密度–场协方差 $C_{nE} = \langle \delta n_e \, \delta E_\theta \rangle_{\theta,\, t}$ 在 13–15 μ秒时间段内取平均。所有面板共用对称颜色标度；白色区域表示实体区域或非活动区域。

其中， Δt_{phys} 以微秒为单位。成本按每个保留的轨迹区间计数一次，并包括循环内输出，但不包括设置、重启加载、排队、迁移和停机时间。

W0 在 EPYC 9754 上使用 64 个 MPI进程和 4 个 OpenMP线程（256 个核心）。A0 和 A0′ 在两台 EPYC 9965 节点上使用 384 个进程和 2 个线程（768 个核心）。A1–A4 使用 128 个进程和 2 个线程（256 个核心）。A1、A3 和 A4 使用 EPYC 9754；A1 在 5.5 μs 时在节点间迁移。A2 在 7 μs 时从 EPYC 9754 切换到 EPYC 9965。

表 IV. 各算例截至其最终物理时间的已接受轨迹成本。 P 为绑定的物理核心数。A1、A3 和 A4 包含时间戳恢复片段。不同的最终时间均予以明确保留。

Case	P	最终 t （μs）	循环（小时）	每核心小时/10^3
W0	256	8.3285	823.4	210.80
A0	768	12.1925	363.2	278.94
A0′	768	15.1455	262.8	201.83
A1	256	15	426.5	109.19
A2	256	15	386.1	98.84
A3	256	15	454.0	116.23
A4	256	15	453.7	116.14

表IV 列出了累计成本，而表V 则将耗时收益与核心小时节省分开列出。在 0–8 μs 期间，在核心数量相同的情况下，W0 的耗时和核心小时数是 A1–A4 的 3.33–3.59 倍。A0 和 A0′ 耗时收益较大，部分原因是其核心数量是其他方法的三倍。在 13–15 μs 期间，A1–A4 的核心小时数比 A0′ 少 43–58%，但耗时更长。

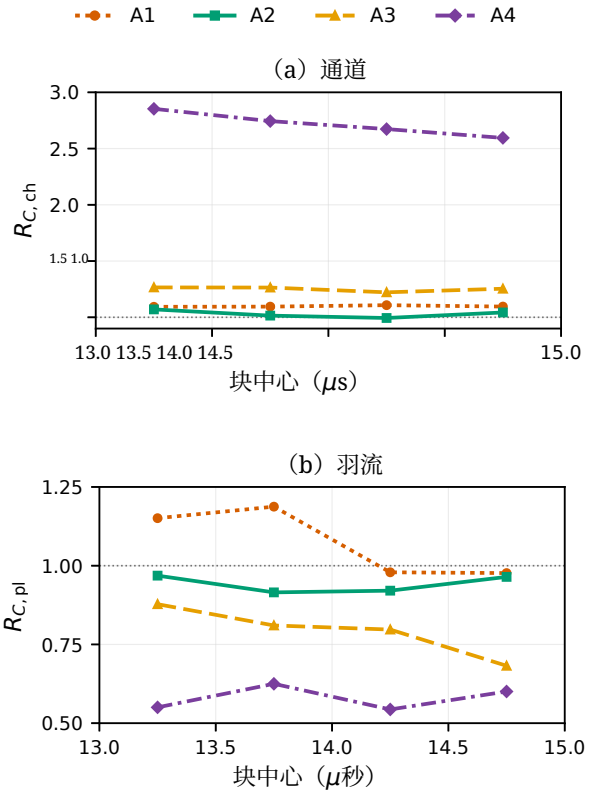


图 7. A1–A4 在 (a) 通道和 (b) 羽流中的协方差幅值外侧/内侧比值，按连续四个 0.5 μs 时间块计算，覆盖 13–15 μs。每个时间块均采用各自的联合方位角–时间均值，以及 $|C_{nE}|$ 的物理体积区域平均值。标记表示区块中心；连接线仅用于引导视线。比值为 1 表示区域平均幅值相等。各面板的纵轴范围不同。

表 V。匹配窗口粒子计数和生成成本。上部区块在 0–8 μs 范围内使用 W0 作为参考；下部区块在 13–15 μs 范围内使用 A0′ 。平均总粒子数采用均匀 100 步采样。比率等于参考成本除以案例成本。

Case	$\overline{N_e + N_i}$ /10^8	循环时间 (h)	h/μs	核心 h/μs /10^3	Time 比率	核心 h 比率
0–8 μ秒；参考：W0；直接记录所有计数器						
W0	4.187	789.0 98.63		25.249	1.00	1.00
A0	4.272	225.0 28.12		21.596	3.51	1.17
A0′	4.208	130.9 16.36		12.562	6.03	2.01
A1	4.197	219.7 27.46		7.031	3.59	3.59
A2	4.201	221.6 27.71		7.093	3.56	3.56
A3	4.189	232.4 29.05		7.437	3.39	3.39
A4	4.217	236.7 29.59		7.576	3.33	3.33
13–15 μs；参考：A0′						
A0′	4.729	36.8 18.41		14.136	1.00	1.00
A1	4.683	59.2 29.61		7.580	0.62	1.86
A2	4.697	46.5 23.24		5.950	0.79	2.38
A3	4.694	62.4 31.20		7.988	0.59	1.77
A4	4.602	60.9 30.46		7.799	0.60	1.81

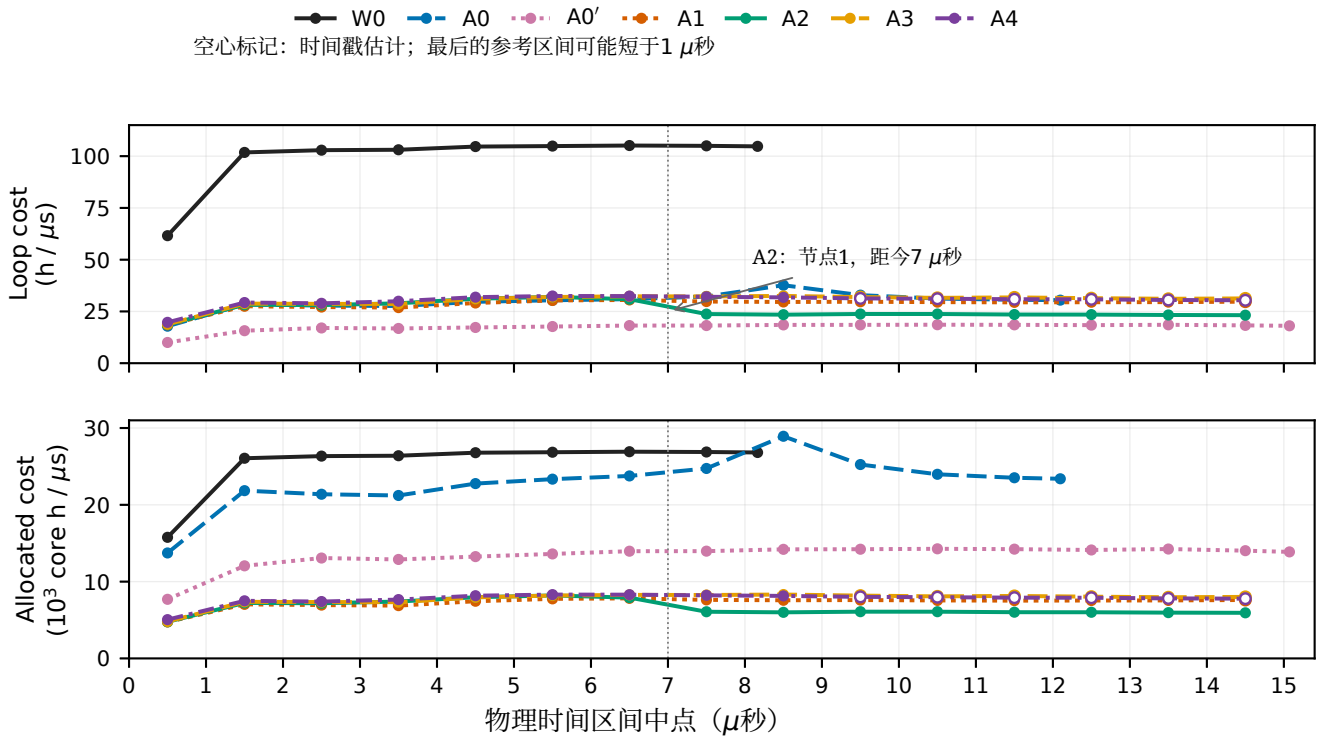


图8. 连续区间内每物理微秒的已接受轨迹成本。上图：循环小时数；下图：分配的核时。每个数值均按其区间长度归一化。空心标记表示时间戳恢复区间。点线标示了A2迁移至EPYC 9965的时间，即 7 μ秒。

图 8 μs 附近的 A0 成本峰值（图 8 ）是由7.9 μs 时多节点重启粒子分配中的缺陷导致的。代码检查和针对性选择器测试复现了这一负载失衡：不同节点上的两个MPI进程代表同一物理区域，但其中一个进程接收了大部分粒子，另一个接收的粒子很少，从而减慢了同步推进速度。该缺陷改变了执行所有权，但保留了恢复后的粒子位置、速度和全局计数。因此，这是并行负载分配错误，而不是恢复粒子物理状态时出错。负载失衡最终会逐渐缓解；额外的运行时间已计入报告成本。

IV. 讨论与结论

在本次半径扫描中，主体等离子体组分以及基于共同中心线参考尺度的主导通道波数仍然相近。主体组分的微小变化与 Taccogna 和 Minelli[25] 在三维圆柱坐标–笛卡尔坐标比较中于选定轴向位置获得的相近方位角平均径向密度分布在定性上是一致的。本研究将曲率比较扩展至整个通道–羽流区域内涨落的空间组织，且随着半径在通道宽度和施加的磁场分布固定时变化，径向、方位角和轴向动力学以自洽方式演化。

主要的新增发现是涨落的径向重新分布。在 $r_{\min} = 10$ 厘米和 2 厘米处，10–15 rad mm^{-1}参考波数带内外侧通道的电场振幅分别比内侧通道值高 26% 和 53%。在羽流中，低波数带（3–8 rad mm^{-1}）偏向内侧区域，而高波数带（10–15 rad mm^{-1}）偏向外侧区域；在$r_{\min} = 2$ 厘米处，它们的外侧与内侧之比分别为 0.63 和 1.36。因此，曲率依赖性会随轴向区域和频谱带而变化，而宽带或空间平均测量指标可能掩盖相互对立的径向偏好。

密度–电场协方差进一步确定了涨落对相关轴向 $E \times B$ 漂移产生贡献的位置。在 $r_{\min} = 2$ 厘米处，其外侧与内侧的幅值比在通道中为2.71，在羽流中为0.58。局部电子粒子通量贡献为 $-C_{nE}/B_r$；因此，对于预设的正径向场，以正协方差为主对应于阳极方向贡献。在13–15 μ秒期间，这些径向偏好始终存在，此时整体等离子体粒子群近似处于稳态。该协方差通过确定密度涨落与电场涨落共同对轴向漂移产生贡献的位置，补充了电场频谱，并将波振幅的几何重新分布与输运相关耦合的空间组织联系起来。

因此，仅仅在整体粒子数或主要参考波长上达成一致，并不能证明局部涨落和输运相关结构也一致——

还需进一步比较。与空间分辨实验进行详细对比时，应考虑场涨落和密度–场耦合的径向与轴向分布。对于所研究的 1.28 厘米通道宽度，在$r_{\min} = 10$ 厘米和 2 厘米处的变化（分别对应 $\chi \approx 0.057$和 0.195）表明，即使施加的磁场分布保持不变，在评估这些局部量时仍应保留圆柱几何结构。这些经过测试的配置为几何结构的选择提供了定量参考点；要确定一般性的过渡半径，还需进一步扫描半径和通道宽度。

当前的预设源无碰撞模型采用吸收边界和半径无关、散度非零的径向磁场。未来的工作将把比较扩展至无散场、自洽电离、碰撞、二次电子发射和介电壁充电，以评估这些空间趋势在实验推进器中是否同样适用。

致谢

作者感谢国家自然科学基金委员会通过项目（编号：52472403）提供的资助。

数据可用性

本研究的支持数据可在合理请求后向通讯作者索取。

参考文献

[1] Kentaro Hara。《霍尔效应推力器放电等离子体建模综述》。 *Plasma Sources Science andTechnology*，28(4)：044001，2019。[2] Igor D. Kaganovich、Andrei Smolyakov、Yevgeny Raitses、Eduardo Ahedo、Ioannis G. Mikellides、Benjamin Jorns、Francesco Taccogna、Renaud Gueroult、Sedina Tsikata、Anne Bourdon、Jean-Pierre Boeuf、Michael Keidar、Andrew Tasman Powis、Mario Merino、Mark Cappelli、Kentaro Hara、Johan A. Carlsson、Nathaniel J. Fisch、Pascal Chabert、Irina Schweigert、Trevor Lafleur、Konstantin Matyash、Alexander V. Khrabrov、Rod W. Boswell 和 A mnon Fruchtman。《与等离子体推进及类似技术相关的 E×B 放电物理》。*Physics of Plasmas* 27 12 120601, 2020 , ( ): 。[3] Eduardo Ahedo。《使用电子流体模型分析等离子体推力器放电》。 *Journal of Electric Propulsion*，2：2，2023。[4] F. Taccogna、F. Cichocki、D. Eremin、G. Fubiani 和 L. Garrigues。《使用基于粒子的算法进行等离子体推进建模》。 *Journal of Applied Physics*，134 15 150901，2023 ( )：。

[5] T. Lafleur、S. D. Baalrud 和 P. Chabert. 霍尔效应推力器中反常电子输运理论。I. 粒子模拟带来的见解。*Physics of Plasmas* 23 5 053502, 2016 , ( ): . [6] T. Lafleur、S. D. Baalrud 和 P. Chabert. 霍尔效应推力器中反常电子输运理论。II. 动理学模型。 *Physics of Plasmas*, 23(5):053503, 2016. [7] I. G. Mikellides、A. Lopez Ortega 和 V. H. Chap- lin. 霍尔效应离子加速器中波–粒相互作用导致的反常动量交换理论及其与测量结果的比较。 *Physics of Fluids*, 36 7 074121, 2024 ( ): . [8] T. Lafleur、S. D. Baalrud 和 P. Chabert. 霍尔效应推力器中电子漂移不稳定性的特征及其输运效应。 *Plasma Sources Science and Tech-nology*, 26(2):024008, 2017. [9] V. Croes、T. Lafleur、Z. Bonaventura、A. Bourdon 和 P. Chabert. 霍尔效应推力器中电子漂移不稳定性及相关反常电子输运的二维粒子模拟。 *Plasma Sources Science and Technology* 26 3 034001, 2017 , ( ): . [10] J. P. Boeuf 和 L. Garrigues. 霍尔推力器中的 E×B 电子漂移不稳定性：粒子模拟与理论的比较。 *Physics of Plasmas*, 25(6):061204, 2018. [11] T. Charoy、J. P. Boeuf、A. Bourdon、J. A. Carls- son、P. Chabert、B. Cuenot、D. Eremin、L. Garrigues、K. Hara、I. D. Kaganovich、A. T. Powis、A. Smolyakov、D. Sydorenko、A. Tavant、O. Vermorel 和 W. Vil- lafana. 低温部分磁化等离子体的二维轴向–方位角粒子模拟基准。*Plasma Sources Science and Technology* 28 10 105010, 2019 , ( ): . [12] W. Villafana 、 F. Petronio 、 A. C. Denig 、 M. J. Jimenez、D. Eremin、L. Garrigues、F. Taccogna、A. Alvarez- Laguna、J. P. Boeuf、A. Bourdon、P. Chabert、T. Charoy、B. Cuenot、K. Hara、F. Pechereau、A. Smolyakov、D. Sydorenko、A. Tavant 和 O. Vermorel. E×B 放电的二维径向–方位角粒子模拟基准。 *Plasma Sources Science and Technology* 30 7 075002, , ( ): . 2021 [13] Zachariah A. Brown 和 Benjamin A. Jorns. 交叉场等离子体中电子漂移不稳定性的增长与饱和。 *Physical Review Letters* 130 11 115101, , ( ): . 2023 [14] S. Tsikata、C. Honor´e、N. Lemoine 和 D. M. Gr´esillon. 霍尔推力器等离子体中电子密度涨落的三维结构：E × B 模态。 *Physics of Plasmas* 17 11 112110, 2010 , ( ): . [15] Zhongping Zhao 和 Yinjian Zhao. 霍尔推力器中电子漂移不稳定性的三维粒子模拟综述。 *Plasma Science and Technology*, 28 9( ):094002, 2026. [16] W. Villafana、B. Cuenot 和 O. Vermorel. 使用非结构网格对霍尔推力器中电子漂移不稳定性进行三维粒子模拟研究。 *Physics of Plasmas*, 30 3 033503, 2023 ( ): . [17] Xi Chen、Lihuan Xie、Kunpeng Zhong、Xin Luo、Zhi- jun Zhou、Baisheng Wang、Zhe Liu 和 Yinjian Zhao. 羽流区域布局对霍尔推力器方位角不稳定性的影响：采用新开发代码 PMSL-PIC-HET-3D 进行三维粒子模拟。 *Physics of Plasmas*, 32 5 052103, 2025 ( ): .

[18] Kunpeng Zhong、Demai Zeng、Yinjian Zhao 和 Daren Yu. 通过三维粒子模拟研究 RZ磁场分量对霍尔推力器中电子漂移不稳定性的影响。*Physics Letters A*, 590:131809, 2026. [19] Zhe Liu、Zhongping Zhao 和 Yinjian Zhao. 通过三维粒子模拟揭示的霍尔推力器壁面附近反常电子输运路径。 *Physical Review E*, 114(3):035211, 2026. [20] Yinjian Zhao、Kunpeng Zhong 和 Daren Yu. 霍尔推力器电子漂移不稳定性的三维粒子模拟：磁场对电子输运的影响。

Journal of Plasma Physics 92 4 110, , ( ):E . 2026

[21] A. Dom´ınguez-V´azquez、F. Taccogna 和 E. Ahedo. 受控放电霍尔推力器中径向电子动力学的粒子建模。

Plasma Sources Science and Technology 27 6 064006, 2018 , ( ): .

[22] A. Dom´ınguez-V´azquez、F. Taccogna、P. Fajardo 和 E. Ahedo. 霍尔推力器中径向等离子体-壁面相互作用的参数化研究。

Journal of Physics D: Applied Physics 52 47 474003, 2019 , ( ): .

[23] M. Sengupta 和 A. Smolyakov. 二维环形 E × B 系统中电子漂移不稳定性非线性演化的模态转变。

Physics of Plasmas 27 2 022309, 2020 , ( ): .

[24] Federico Petronio、Pascal Chabert 和 Anne Bourdon。霍尔型 $E \times B$ 等离子体放电模拟中的腔室曲率效应。

Plasma Sources Science and Technology 2026 , 。待刊。

[25] Francesco Taccogna 和 Pierpaolo Minelli。霍尔推力器的三维粒子模拟模型：放电通道。

Physics of Plasmas 25 6 061208, , （）：。 2018

[26] Yinjian Zhao、Zhongping Zhao、Zhe Liu、Baisheng Wang、Zilong Peng、Xin Luo、Lihuan Xie、Xi Chen、Zhijun Zhou、Kunpeng Zhong、Yingjie Chen 和 Changzheng Hu。AlgoPlasma：用于等离子体建模的开放算法。

SoftwareX 2026 , 。已被接受发表。[27] J.-L. Vay、A. Almgren、J. Bell、L. Ge、D. P. Grote、M. Hogan、O. Kononenko、R. Lehe、A. Myers、C. Ng、J. Park、R. Ryne、O. Shapoval、M. Th´evenet 和 W. Zhang。Warp-X：用于束流-等离子体模拟的新型百亿亿次计算平台。 *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 909 476 479, 2018：–。[28] C.-K. Huang、Y. Zeng、Y. Wang、M. D. Meyers、S. Yi 和 B. J. Albright。静电粒子模拟算法的有限网格不稳定性与谱保真度。*Physics Communications* 207 123 135, 2016 *Computer* , ：–。