arXiv:2611.32398v1 [math.NT] 24 Nov 2026

余有限 Fuchsian 群上的直接上界与改进的胡贝尔常数

MUHAREM AVDISPAHIĆ

摘要。为获得余有限 Fuchsian 群上 Huber 常数的有效上界，我们引入一种算法，通过直接使用重新优化的高斯核来估计谱计数增长，从而绕过定量的卡拉马塔陶伯定理。后续步骤包括选择不同的紧支集测试函数，在谱估计中保留线性项和常数项，优化精确的尖点几何，并在随后的切比雪夫估计中保留完整的显式本原测地线主上界。我们建立了更直接的途径，以控制 Selberg迹公式中双曲项的大小与第二切比雪夫函数之间的差异。最后，自改进方法结合对低位谱数据的了解，带来了如下改进：在 PSL(2, ℤ) 的情形下，其形式为 $C_{\mathrm{Hub},\,\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})} < 199$。与初始算法所声称的结果相比，改进因子大于 $8.3 \cdot 10^{10}$；与目前已知的上界相比，改进因子大于 $1.1 \cdot 10^{6}$。

1. 引言

Huber 常数 $C_{\mathrm{Hub},\Gamma}$ 定义为（见 [5]）轨形 $X = \Gamma \backslash \mathcal{H}$ 上的素测地线定理中的最小常数，使得

$$\left| \pi_\Gamma(x) - \sum_{\lambda_k \le \frac{1}{4}} \mathrm{Li}\left(x^{s_k}\right) \right| \le C_{\mathrm{Hub},\Gamma} \frac{x^{3/4}}{\log x} \text{ for all } x > 1.$$

这里，$\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 是第一类余有限 Fuchsian 群，它作用于配备双曲度量 $\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$ 和体积元 $\frac{dxdy}{y^2}$ 的上半平面 $\mathcal{H} = \{z = x + iy : y > 0\}$；$\pi_\Gamma(x)$ 表示在 X 上长度为 $\ell_{\gamma_0} \le \log x$、彼此不共轭的本原闭测地线 Γ-γ_0 的数量；$0 \le \lambda_k \le \frac{1}{4}$ 是 X 上拉普拉斯-贝尔特拉米算子 $\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ 的小特征值，且 $s_k = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_k}$；$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$。

Huber 常数是一个**绝对**常数，而非渐近常数。它在代数曲线的阿拉克洛夫理论中有重要应用 [1]。

借鉴 Randol 的素测地线定理证明 [8], ，Friedman、Jorgenson 和 Kramer [5] 设计了一种算法，用于计算$C_{\mathrm{Hub},\,\Gamma}$。为了获得一个有效界，他们使用了 Karamata Tauberian 定理的定量版本 [5, 引理 1.1。]对于模群，所得数值为 16,607,349,020,658。修正并改进后的算法 [2]得到 224,615,135，即约小 74000 倍。关于他们所得数值与计算结果之间存在巨大差异的首要原因

通过 PARI/GP 程序 [7], 提供的结果，Friedman、Jorgenson 和 Kramer指出，他们对谱计数函数给出的界可能大了约一百万倍（与渐近结果 Weyl定律相比）。

我们在下文第3节中对谱计数函数的处理不涉及Karamata定理，而是使用高斯核，结合群特定的优化

2020 数学主题分类。主要分类11F72、11Y60；次要分类58J50。关键词和短语。Selberg迹公式、素测地线定理、Huber常数、余有限Fuchsian群。

参数 η，以便在定理 3.1中提供直接主函数。命题 3.3给出了一个局部谱界。

第 4 节致力于大幅降低 Huber 常数的界。在引入一个新的辅助测试函数后，计算出本质上最优的常数 $A_8^\sharp$ 和 $A_9^\sharp$ 以及所得的 $A_{10}^\sharp$。直接主函数（分别为局部谱界）的传播，体现在 $A_{12}^\sharp$ 中联合上确界的单个部分（分别为两个部分）形式上，其中 κ 是另一个优化参数。一个重要的新颖之处在于，我们处理 Selberg迹公式中双曲项的大小与第二切比雪夫函数 $\theta_\Gamma(x)$ 之间差异的方式，省略了以往涉及 $\psi_\Gamma(x)$ 的中间步骤。定理 4.15 反映了相对于当前已知的定理 2.1（在预备知识中回顾）的改进程度。第 4 节的最后两个命题展示了如何通过自举以及了解谱中足够大的一部分，进一步改进 Huber 常数的估计。

该方法的强大之处在其应用于第 5 节的 PSL(2，$\mathbb{Z}$) 时得到了充分体现：在联合上确界中采用单个部分形式的论证思路得到$C_{\text{Hub，PSL}(2,\mathbb{Z})} < 1144$，两段形式将界降至 686，自举技术进一步将其降至 337，而关于 PSL(2，$\mathbb{Z}$) 本原长度谱相应部分的知识则给出了结论 $C_{\text{Hub，PSL}(2,\mathbb{Z})} < 199$，见定理 5.13。

2. 预备知识

余 有限 Fuchsian 群上我们论述中所需的基本常数如下所列出 见表 1。

表 1. 基本常数

常数	描述
Γ	余有限 Fuchsian 群
$\mathcal{F}$	Γ 的基本域，面积为 $\lvert\mathcal{F}\rvert$
τ	Γ中的抛物共轭类数量
$\mathcal{F}_i^Y$	分解中的尖点扇区 $F = F_Y \cup \bigcup_{i=1}^{\tau} F_i^Y$，其中 $\mathcal{F}_Y$ 是紧的
d_i	的双曲直径 $K_i = \left\{ z \in T_i^{-1}\mathcal{F} : \varepsilon \le \operatorname{Im} z \le Y+1 \right\}$，$\mathcal{F}_i^Y = T_i((0,1)\times[Y,\infty))$
θ_R，m_R	$\operatorname{tr}(R) = 2\cos\theta_R$, $\theta_R \in (0,\pi)$; $m_R = \lvert C(R)\rvert$, $C(R)$ R的中心化子
A, A'	小特征值的个数 $0 = \lambda_0 < \cdots < \lambda_{\mathcal{A}-1} \le \frac{1}{4}$，分别为 $-\lambda_{\mathcal{A}'-1} < \frac{1}{4}$， –
s_k	拉普拉斯算子 Δ 的重数 $s_k = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_k}$，使得 $s_0 = 1$ 当 $\lambda_0 = 0$
$\Phi(s)$ $\phi(s)$	散射矩阵和散射行列式 $\phi(s) = \det\Phi(s)$; $\frac{1}{4}\operatorname{tr}(I - \Phi(\frac{1}{2}))$ 进入 C({v5，L) –
$\mathcal{N}$	散射行列式 $\phi(s)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right]$ 中的极点数 $\sigma_1 > \cdots > \sigma_{\mathcal{N}}$ –
ℓ	$\Gamma\backslash\mathcal{H}$ 上最短闭测地线的长度
c	e^ℓ，Γ 中双曲共轭类 P 的范数 NP 的下确界
c_1	非抛物元素左下方矩阵项的最小值
γ	欧拉常数，$\gamma = 0.57721\ldots$

当前用于确定 Γ 上 Huber 常数有效上界的算法输出如下定理所示（参见 [3,定理 4.1。]）。

定理 2.1. 设 Γ 为一个余有限 *Fuchsian* 群。则

$$C_{\mathrm{Hub},\Gamma} \le R_\Gamma,$$

其中

$$\text{(i)}\quad R_\Gamma = \frac{4}{3e}A'_{22} + A'_{21}\left(1 + \frac{4}{3\log c} + \frac{4c^{3/4}}{3e\log c}\right) \qquad \text{if } \ell \le \frac{4}{3};$$

$$\text{(ii)}\quad R_\Gamma = \frac{4}{3e}A_{22} + A_{21}\left(2 + \frac{4}{3\log c}\right) \qquad \text{if } \frac{4}{3} < \ell \le \frac{2(1+\sqrt{5})}{3};$$

$$\text{(iii)}\quad R_\Gamma = \frac{4}{3e}A_{22} + A_{21}\frac{3\log c}{3\log c - 4} \qquad \text{if } \frac{2(1+\sqrt{5})}{3} \le \ell \le \frac{8}{3};$$

$$\text{(iv)}\quad R_\Gamma = \frac{4}{3e}A_{22} + 2A_{21} \qquad \text{if } \ell > \frac{8}{3}.$$

常数 $A_{22} = \mathcal{A}(c-2)\log 2$，分别为 $A'_{22} = \mathcal{A}\max\{2(2-c^{1/2})\log c, (c-2)\log 2\}$，而 A_{21}、A'_{21} 分别通过以下过程得到（见 [3, 表2 及其后页面]）：求出 Selberg迹公式（见 [6]）中所有项的有效估计

$$\sum_{\lambda_n \le \frac{1}{4}} h(r_n) + \sum_{\lambda_n > \frac{1}{4}} h(r_n) + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} h(r)\frac{-\phi'}{\phi}\left(\frac{1}{2}+ir\right)dr = \frac{|\mathcal{F}|}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} rh(r)\tanh(\pi r)\,dr$$
$$+\sum_P \frac{\log NP_0}{(NP)^{1/2}-(NP)^{-1/2}}g(\log NP) + \sum_R \frac{1}{2m_R\sin\theta_R}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2r\theta_R}}{1+e^{-2\pi r}}h(r)\,dr$$
$$+\frac{h(0)}{4}\operatorname{tr}\left(I-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \tau g(0)\log 2 - \frac{\tau}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} h(r)\psi(1+ir)\,dr,$$

其中 $h(z)$ 是条带 $|\mathrm{Im} z| \le \frac{1}{2}+\varepsilon$ 内满足增长条件 $h(z) = O\left((1+|z|)^{-2-\varepsilon}\right)$ 的偶全纯函数，而 $g(x)$ 是它的逆傅里叶变换。符号 Φ 表示散射矩阵，ϕ 是散射行列式，ψ 是双伽马函数（伽马函数的对数导数）。

这里有必要简要说明一下傅里叶变换约定。对于 $f \in L^1(\mathbb{R})$，我们令

$$\mathsf{F}f(r) = \widehat{f}(r) = \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{iru}\,du, \qquad \mathsf{F}^{-1}F(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} F(r)e^{-iru}\,dr.$$

因此 $\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f$，并且由 $(f_1 * f_2)(u) = \int_{\mathbb{R}} f_1(u-v)f_2(v)\,dv$ 可得

$$\widehat{f_1 * f_2} = \widehat{f_1}\,\widehat{f_2}, \qquad \int_{\mathbb{R}} |f|^2\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|^2\,dr.$$

进入 Selberg迹公式的对 $(g,\ h)$ 为 $h = \mathsf{F}g$，等价地为 $g = \mathsf{F}^{-1}h$。所有光滑化函数均归一化为

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi = \widehat{\varphi}(0) = 1.$$

Let

$$\phi_{\mathcal{N}}(s) = c_1^{2s-1}\phi(s)\prod_{j=1}^{\mathcal{N}}\frac{s-\sigma_j}{s-1+\sigma_j}$$

设其为修正散射行列式。则（见 [10,定理 3.5.5。] ）

$$-\frac{\phi_{\mathcal{N}}'}{\phi_{\mathcal{N}}}\left(\frac{1}{2}+ir\right)\geq 0.$$

有

$$\begin{aligned}U(r) &:= -\frac{\phi'}{\phi}\left(\frac{1}{2}+ir\right)-\left(-\frac{(\phi_{\mathcal{N}})'}{\phi_{\mathcal{N}}}\left(\frac{1}{2}+ir\right)\right)\\ &= 2\log c_1-\sum_{j=1}^{\mathcal{N}}\frac{2\alpha_j}{\alpha_j^2+r^2},\end{aligned}$$

其中 $\alpha_j := \sigma_j - \frac{1}{2}$。

因此，对于每个测试函数 H，当 $0\leq H\leq 1$ 时，

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} H(r)|U_\Gamma(r)|\,dr \leq \frac{|\log c_1|}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} H(r)\,dr+\frac{\mathcal{N}}{2}. \tag{1}$$

最后，回顾以下本原测地线主控函数 [4,第 47-49] 页

$$\pi_\Gamma(x)\leq \sum_{j=1}^{\min\{2,\tau\}}\frac{4\pi}{|K_j|}\left(\cosh(\log x+2d_j)-1\right) \tag{2}$$

对于 $x\geq c$.

3. 从重新优化的高斯核导出的直接正主函数 N

如前所述，我们的目标是用直接正主函数替代当前算法中的 Tauberian 步骤。为此，我们将使用重新优化的高斯核作为测试函数。

令 $R\geq 0$ 为谱截断，并设

$$L := \sqrt{R^2+\frac{1}{4}}.$$

对于 $\eta>0$，定义

$$G_{\eta,L}(r) := \exp\left(-\eta\frac{r^2}{L^2}\right).$$

则 $G_{\eta,\ L}$ 是偶函数、整函数，并且在每个水平条带内都快速递减。按照傅里叶约定

$$g(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} G(r)e^{-iru}\,dr,$$

其傅里叶变换为

$$g_{\eta,L}(u)=\frac{L}{2\sqrt{\pi\eta}}\exp\left(-\frac{L^2u^2}{4\eta}\right).$$

特别是,

$$G_{\eta,L}(r)\geq 0,\qquad g_{\eta,L}(u)\geq 0.$$

对于 $0\leq r\leq R$,

$$\frac{r^2}{L^2}\leq 1,$$

因此

$$G_{\eta,L}(r)\geq e^{-\eta}.$$

任意小特征值 $r=i\beta$, $0\leq\beta\leq 1/2$, 都有贡献

$$G_{\eta,L}(i\beta)=\exp\left(\eta\frac{\beta^2}{L^2}\right)\geq 1.$$

注意，常数特征函数具有 $\lambda_0 = 0$，因此 $r_0 = i/2$，并且

$$G_{\eta,L}(i/2) = \exp\left(\frac{\eta}{4L^2}\right).$$

现在，定义

$$S_{\mathcal{N}}(G_{\eta,L}) := \sum_{n=0}^{\infty} G_{\eta,L}(r_n) + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} G_{\eta,L}(r)\left(-\frac{\phi'_{\mathcal{N}}}{\phi_{\mathcal{N}}}\left(\frac{1}{2}+ir\right)\right)dr.$$

引入

$$\mathcal{M}(R) := \#\left\{r_n \in \mathbb{R} : 0 \le r_n \le R\right\} + \frac{1}{4\pi}\int_{-R}^{R}\left(-\frac{\phi'_{\mathcal{N}}}{\phi_{\mathcal{N}}}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right)dt$$

以便对原始谱计数函数获得更精确的估计

$$\mu(R) = \#\left\{r_n : 0 \le r_n \le R,\ \lambda_n = \frac{1}{4}+r_n^2\right\} + \frac{1}{4\pi}\int_{-R}^{R}\left|\frac{\phi'}{\phi}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|dt.$$

底　　层思想是在.....之前去除常数特征函数已知的贡献
将　　迹公式估计转化为谱计数估计。

显然，

$$\sum_{\lambda_n \le \frac{1}{4}} G_{\eta,L}(r_n) + \sum_{\lambda_n > \frac{1}{4}} G_{\eta,L}(r_n) \ge G_{\eta,L}(r_0) + \mathcal{A}' - 1 + \sum_{0 \le r_n \le R} G_{\eta,L}(r_n) \tag{3}$$

由于 $G_{\eta,L}(r) \ge e^{-\eta}$ 对于 $0 \le r \le R$ 成立，且修正后的连续谱密度非负，因此得到

$$e^{-\eta}\mathcal{M}(R) \le S_{\mathcal{N}}(G_{\eta,L}) - \exp\left(\frac{\eta}{4L^2}\right) - \mathcal{A}' + 1.$$

我们将直接利用塞尔伯格迹公式的几何侧来给 $S_{\mathcal{N}}(G_{\eta,L})$ 作界　　a.

恒等项。由于 $G_{\eta,L}(r) \ge 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上，且 $|\tanh(\pi r)| \le 1$，恒等项满足　　es

$$\begin{aligned} I(G_{\eta,L}) &= \frac{|\mathcal{F}|}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} rG_{\eta,L}(r)\tanh(\pi r)\,dr \\ &\le \frac{|\mathcal{F}|}{2\pi}\int_0^{\infty} rG_{\eta,L}(r)\,dr = \frac{|\mathcal{F}|L^2}{4\pi\eta}. \end{aligned}$$

椭圆项。对于 $0 < \theta < \pi$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\theta r}}{1+e^{-2\pi r}}\,dr = \frac{1}{2\sin\theta}.$$

由于 $0 \le G_{\eta,\ L}(r) \le 1$，因此椭圆类的贡献至多为 $1/(4m\sin^2\theta)$。为便于今后引用，记

$$E = \sum_R \frac{1}{4m_R \sin^2\theta_R} \tag{4}$$

抛物项与散射项。有

$$0 \le \frac{1}{4}\operatorname{tr}\left(I - \Phi_\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) \le \frac{\tau}{2}.$$

抛物对数项为

$$-\tau g_{\eta,L}(0)\log 2 = -\frac{\tau L\log 2}{2\sqrt{\pi\eta}}.$$

由于 $G_{\eta,\ L}$ 为实偶函数，并且

$$\psi(1-ir) = \overline{\psi(1+ir)},$$

我们有

$$\int_{\mathbb{R}} G_{\eta,L}(r)\,\psi(1+ir)\,dr = \int_{\mathbb{R}} G_{\eta,L}(r)\,\Re\psi(1+ir)\,dr.$$

我们使用经典展开式

$$\psi(1+z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(n+z)}.$$

对于 $z = ir$，取实部得

$$\Re\psi(1+ir) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^2}{n\,(n^2+r^2)}.$$

和式中的所有项均非负。仅保留 $n = 1$ 这一项，得到

$$\begin{aligned} \Re\psi(1+ir) \;&\geq\; -\gamma + \frac{r^2}{1+r^2} \\ &=\; 1-\gamma-\frac{1}{1+r^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

将 (5) 乘以 $G_{\eta,\,L}(r) \geq 0$ 并积分，得到

$$\int_{\mathbb{R}} G_{\eta,L}(r)\,\Re\psi(1+ir)\,dr \;\geq\; (1-\gamma)\int_{\mathbb{R}} G_{\eta,L}(r)\,dr \;-\; \int_{\mathbb{R}} \frac{G_{\eta,L}(r)}{1+r^2}\,dr.$$

Put

$$t := \frac{\eta}{L^2}.$$

Then

$$\int_{\mathbb{R}} G_{\eta,L}(r)\,dr = \sqrt{\frac{\pi}{t}},$$

而经典高斯积分给出

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-tr^2}}{1+r^2}\,dr = \pi e^{t}\,\operatorname{erfc}(\sqrt{t}).$$

其中

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

因此

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{G_{\eta,L}(r)}{1+r^2}\,dr}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} G_{\eta,L}(r)\,dr} = \rho(t),$$

$$\rho(t) := \sqrt{\pi t}\,e^{t}\,\operatorname{erfc}(\sqrt{t}).$$

等价地，经过代换 $x = \sqrt{t}\,r$，

$$\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\frac{t}{t+x^2}\,dx. \tag{6}$$

式（6）中的被积函数关于 t 单调递增，因此 $\rho(t)$ 在 $(0,\ \infty)$ 上单调递增。

由于 $L \geq 1/2$,

$$t = \frac{\eta}{L^2} \leq 4\eta.$$

利用 ρ 的单调性，我们将双伽马函数贡献估计为

$$-\frac{\tau}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} G_{\eta,L}(r)\psi(1+ir)\,dr \leq \frac{\tau L}{2\sqrt{\pi\eta}}\left[\rho(4\eta) - (1-\gamma)\right].$$

双曲项。双曲项可写为

$$\mathcal{H}(G_{\eta,L}) = \sum_{\{P_0\}} \sum_{k\ge 1} \frac{\log NP_0}{(NP_0)^{k/2} - (NP_0)^{-k/2}} g_{\eta,L}(k \log NP_0)\,. \tag{7}$$

对于 $x \ge 1$，$\log x \le x^{1/2} - x^{-1/2}$，因为 $t - t^{-1} - 2\log t$ 的导数为 $(t-1)^2/t^2 \ge 0$。因此，(7) 中的系数至多为 1。更精确地，设 $x = e^{2s}$，不等式 $\log x \le x^{1/2} - x^{-1/2}$ 等价于命题 $s/\sinh s \le 1$，而函数 $s \mapsto s/\sinh s$ 在 $(0,\ \infty)$ 上严格递减。将此应用于 $x = (NP_0)^k$，即 $s = \frac{k}{2}\log NP_0 \ge \frac{k\ell}{2}$，

$$\frac{\log NP_0}{(NP_0)^{k/2} - (NP_0)^{-k/2}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{s}{\sinh s} \;\le\; \frac{1}{k} \cdot \frac{k\ell/2}{\sinh(k\ell/2)} \;=\; \frac{\ell}{c^{k/2} - c^{-k/2}} \;=:\; b_k.$$

注意 $b_1 = \ell/(c^{1/2} - c^{-1/2}) < 1$ 和 $b_k \le \ell\, c^{-k/2}(1 - c^{-1})^{-1}$，因此系数随 k 几何衰减。于是，(7) 可加强为

$$\mathcal{H}(G_{\eta,L}) \;\le\; \sum_{k\ge 1} b_k \int_{[c,\infty)} g_{\eta,L}(k \log x)\, d\pi_\Gamma(x),$$

对于固定的 $k \ge 1$ put

$$h_{k,L}(x) := g_{\eta,L}(k \log x).$$

由于 $h_{k,\ L}$ 在 $[c, \infty)$ 上为正且递减，运用 Stieltjes分部积分，并将下端点理解为 c^-，可得

$$\int_{[c,\infty)} h_{k,L}(x)\, d\pi_\Gamma(x) = \int_c^\infty \pi_\Gamma(x)\big(-h'_{k,L}(x)\big)\, dx. \tag{8}$$

这里 $\pi_\Gamma(c^-) = 0$，因此首个双曲范数处可能存在的原子得到了正确计入。

修正算法中使用的一般估计具有如下形式（参见 [2, 第 4 节，尤其是 (4.2)]）

$$\pi_\Gamma(x) \le B_1 x - B_2, \qquad x \ge c, \tag{9}$$

其中 $B_2 \ge 0$。随后在 [2] only fo 中舍弃所得的负贡献

进一步简化

现在我们将细化（9），并始终保留负项。由关系式（2）可得

$$\pi_\Gamma(x) \le x \sum_{j=1}^{\min\{2,\tau\}} \frac{2\pi}{|K_j|} e^{2d_j} + \frac{1}{x} \sum_{j=1}^{\min\{2,\tau\}} \frac{2\pi}{|K_j|} e^{-2d_j} - \sum_{j=1}^{\min\{2,\tau\}} \frac{4\pi}{|K_j|}$$

对于 $x \ge c$.

Put temporarily $B_+ := \sum_{j=1}^{\min\{2,\tau\}} \frac{2\pi}{|K_j|} e^{2d_j}$, $B_- := \sum_{j=1}^{\min\{2,\tau\}} \frac{2\pi}{|K_j|} e^{-2d_j}$, $B_0 := \sum_{j=1}^{\min\{2,\tau\}} \frac{4\pi}{|K_j|}$

下面将反复使用两个初等事实，现记录如下

$$B_- \le B_+$$

and

$$B_+ x + \frac{B_-}{x} \;\ge\; 2\sqrt{B_+ B_-} \;\ge\; 2 \sum_{j=1}^{\min\{2,\tau\}} \frac{2\pi}{|K_j|} \;=\; B_0.$$

定义

$$I_{k,+}(\eta, L) := \frac{1}{2k} \exp\left(\frac{\eta}{L^2 k^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{Lk\ell}{2\sqrt{\eta}} - \frac{\sqrt{\eta}}{Lk}\right),$$

$$I_{k,-}(\eta, L) := \frac{1}{2k} \exp\left(\frac{\eta}{L^2 k^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{Lk\ell}{2\sqrt{\eta}} + \frac{\sqrt{\eta}}{Lk}\right).$$

由于 $-h'_{k,\,L}(x) \ge 0$，直接计算可得，(8) 右端的积分有界于

$$\mathcal{G}_k^\sharp(\eta, L) := \left(B_+ c - B_0 + \frac{B_-}{c}\right) \frac{L}{2\sqrt{\pi\eta}} \exp\left(-\frac{L^2 k^2 \ell^2}{4\eta}\right) + B_+ I_{k,+}(\eta, L) - B_- I_{k,-}(\eta, L).$$

因此

$$\mathcal{H}(G_{\eta,L}) \le \sum_{k\ge 1} b_k \mathcal{G}_k^\sharp(\eta, L).$$

对于固定的 η, $g_{\eta,L}(u)$ 随 L 递减，条件是 $u \ge \ell$

$$\eta \le \frac{\ell^2}{8}.$$

因此，在下文所用的整个范围内，

$$\mathcal{H}(G_{\eta,L}) \le \mathcal{H}^{\mathrm{G}}_{\max}(\eta) := \sum_{k\ge 1} b_k \mathcal{G}_k^\sharp\left(\eta, \frac{1}{2}\right). \tag{10}$$

该级数关于 k 高斯式收敛。其尾项可通过舍去 $-B_- I_{k,-}$ 并使用 $\operatorname{erfc}(x) \le e^{-x^2}/(\sqrt{\pi}x)$ 来估计；这要求 erfc 在 $I_{k,+}(\eta, 1\,2)$ 中的自变量为正，即 $\eta < k^2\ell/8$。这是对应用尾项估计处的指标的条件，而不是对 η 本身的条件：对于任意 $k_0 \ge 1$，有限多个项 $k < k_0$ 均可直接计算，并从 k_0 起应用该估计。

留意一下，供后文使用，精细化后的 (9) 可写为

$$\pi_\Gamma(x) \le B_1^\sharp x - B_2^\sharp =: \Pi(x), \qquad x \ge c,$$

其中 $B_1^\sharp = B_+$ 和 $B_2^\sharp = B_0 - \frac{B_-}{c}$

关于 U 修正项，回顾公式 (1)。

结合恒等项、椭圆项、散射项、$-g_{\eta,\,L}(0)\log 2$、双伽马函数贡献、修正散射行列式所产生的修正项以及双曲估计，我们得到

$$e^{-\eta}\mathcal{M}(R) \le \frac{|\mathcal{F}|}{4\pi\eta} L^2 + b(\eta) L + C(\eta) - \exp\left(\frac{\eta}{4L^2}\right) - \mathcal{A} + 1, \qquad L = \sqrt{R^2 + \frac{1}{4}}, \tag{11}$$

其中

$$C(\eta) := \sum_R \frac{1}{4 m_R \sin^2\theta_R} + \frac{1}{4}\operatorname{tr}\left(I - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{\mathcal{N}}{2} + \mathcal{H}^{\mathrm{G}}_{\max}(\eta)$$

and

$$b(\eta) := \frac{|\log c_1| + \tau\big(\rho(4\eta) - (1-\gamma) - \log 2\big)}{2\sqrt{\pi\eta}}. \tag{12}$$

由 (1) 式,

$$\mu(R) \le \mathcal{M}(R) + \frac{|\log c_1|}{\pi} R + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \arctan\left(\frac{R}{\sigma_j - \frac{1}{2}}\right).$$

因此,

$$\mu(R) < \mathcal{M}(R) + \frac{|\log c_1|}{\pi} R + \frac{\mathcal{N}}{2}. \tag{13}$$

由关系式 (11) 和 (13) 可得

$$\mu(r) \le e^{\eta}\left[\frac{|\mathcal{F}|}{4\pi\eta}\left(r^2 + \frac{1}{4}\right) + b(\eta)\sqrt{r^2 + \frac{1}{4}} + C(\eta) - \exp\left(\frac{\eta}{4(r^2 + \frac{1}{4})}\right) - \mathcal{A}' + 1\right] + \frac{|\log c_1|}{\pi} r + \frac{\mathcal{N}}{2}. \tag{14}$$

我们将 $\exp\left(\frac{\eta}{4}(r^2+\frac{1}{4})\right)\geq 1$ 纳入考量。接下来需要将 $\sqrt{R^2+\frac{1}{4}}$ 线性化。此处 $b(\eta)$ 的符号至关重要。由于 $\rho<1$ 处处成立，因此有 $\rho(4\eta)-(1-\gamma)-\log 2<-0.1159$，故当 $|\log c_1|<\tau(1-\gamma+\log 2-\rho(4\eta))$ 时，$b(\eta)<0$ 成立——尤其是当 $c_1=1$ 时总是成立。

因此，如果 $b(\eta)\geq 0$ 我们使用 $\sqrt{R^2+\frac{1}{4}}\leq R+\frac{1}{2}$。如果 $b(\eta)<0$ 我们需要 $\sqrt{R^2+\frac{1}{4}}$ 的下界。令 $R_0\in[0,\infty]$，$L_0:=\sqrt{R_0^2+\frac{1}{4}}$。由于 $R\mapsto\sqrt{R^2+\frac{1}{4}}$ 是凸函数，它的每条切线都位于其下方，而在 $R=R_0$ 处的切线为 $\frac{R_0}{L_0}R\pm\frac{1}{4L_0}$. 置

$$(\lambda,\xi):=\begin{cases}(1,\frac{1}{2}), & b(\eta)\geq 0,\\ \left(\dfrac{R_0}{L_0},\ \dfrac{1}{4L_0}\right), & b(\eta)<0\end{cases}\qquad(\text{read }(1,0)\text{ for }R_0=\infty). \tag{15}$$

于是 $b(\eta)\sqrt{R^2+\frac{1}{4}}\leq b(\eta)(\lambda R+\xi)$ 对所有 $R\geq 0$ 都成立。

因此，我们证明了以下定理。

定理 3.1（直接高斯谱计数界）。设 Γ 是一个余有限 *Fuchsian* 群，满足 $\tau\geq 1$，令 $0<\eta\leq\frac{\ell^2}{8}$，并令 (λ,ξ) 如 (15) 中所述。置

$$\begin{aligned}K_0(\eta)&:=\frac{|\mathcal{F}|}{4\pi}\cdot\frac{e^{\eta}}{\eta},\\ K_1(\eta)&:=\lambda\,b(\eta)e^{\eta}+\frac{|\log c_1|}{\pi},\\ K_2(\eta)&:=\frac{K_0(\eta)}{4}+e^{\eta}\big[\xi\,b(\eta)+C(\eta)-\mathcal{A}'\big]+\frac{\mathcal{N}}{2}.\end{aligned}$$

那么，对于每个 $R\geq 0$，

$$\mu(R)\leq K_0(\eta)R^2+K_1(\eta)R+K_2(\eta). \tag{16}$$

特别地，对于 $\mu(R)\leq$ 下确界$_{\eta,\ R_0}\big[K_0(\eta)R^2+K_1(\eta)R+K_2(\eta)\big]$，下确界取遍所有可容许的对。

注 3.2。$R_0=\infty$ 给出 $(\lambda,\ \xi)=(1,\ 0)$，即 $\sqrt{R^2+\frac{1}{4}}\geq R$；$R_0=0$ 给出 $(\lambda,\ \xi)=(0,\ \frac{1}{2})$，即 $\sqrt{R^2+\frac{1}{4}}\geq\frac{1}{2}$，因此当 $c_1=1$ 时，$K_1=\max\{K_1,\ 0\}$。这是该族的两个自然端点；如果要在 R 的某个确定范围内应用该界，则中间的 R_0 更为可取，因为切线在 $R=R_0$ 处是精确的。

命题 3.3（局部谱界）。设 Γ 是一个余有限 *Fuchsian* 群，满足 $\tau\geq 1$，设 $R_0\geq 0$、$L_0=\sqrt{R_0^2+\frac{1}{4}}$，并设 $\eta\leq\frac{1}{2}L_0^2\ell^2$。令

$$\begin{aligned}K_0^{\infty}(\eta)&:=\frac{|\mathcal{F}|}{4\pi}\cdot\frac{e^{\eta}}{\eta},\\ K_1^{\infty}(\eta)&:=\frac{R_0}{L_0}\,b(\eta)e^{\eta}+\frac{|\log c_1|}{\pi},\\ K_2^{\infty}(\eta)&:=\frac{K_0^{\infty}}{4}+e^{\eta}\Big[\frac{b(\eta)}{4L_0}+C(\eta,L_0)-\mathcal{A}'\Big]+\frac{\mathcal{N}}{2},\end{aligned}$$

其中 $C(\eta,L_0):=E+\frac{1}{4}\mathrm{tr}\big(I-\Phi(\frac{1}{2})\big)+\mathcal{N}_2+H^G(\eta,L_0)$，$H^G(\eta,L):=\sum_{k\geq 1}b_k\boldsymbol{G}_k^{\sharp}(\eta,L)$ 以及 $b(\eta)<0$ 均如(12)中所述。于是

$$\mu(R)\ \leq\ Q_B(R):=K_0^{\infty}(\eta)R^2+K_1^{\infty}(\eta)R+K_2^{\infty}(\eta)\qquad(R\geq R_0). \tag{17}$$

证明。将定理 3.1 的证明逐字照搬，只需将 $H^G_{\max}(\eta)$ 替换为 $H^G(\eta,\ L_0)$（这对 $L\geq L_0$ 是合法的），并将 $(\lambda,\ \xi)$ 作为 R_0 处的相切数据 (15)。□

注 3.4（Weyl 基准）。这些常数由表2中的算法得出。该方法所能得到的 K_0 与 Weyl 常数 $|\mathcal{F}|/4\pi$ 之间的差距至少为 $e = 2.718\ldots$ 倍。事实上，由于 $e^{\eta}/\eta \geq e$，总有 $K_0(\eta) \geq e \cdot {}^{|}_{\mathcal{F}_{4\pi}}{}^{|}$，损失来自对 $[0, R]$ 应用下取整函数 $G_{\eta,\ L} \geq e^{-\eta}$。可容许范围 $\eta \leq \ell^2/8$ 可能会妨碍这一倍数的实现。

回顾我们的论证，可以看到，未线性化谱界实际上以下述形式成立。

命题 3.5（未线性化谱界）。设 Γ 是一个余有限 *Fuchsian* 群，且满足 $\tau \geq 1$。对于每个 $\eta > 0$ 以及每个 $R \geq 0$，其中 $L = \sqrt{R^2 + \frac{1}{4}}$，

$$\mu(R) \ \leq \ \mathcal{P}(R,\eta) := e^{\eta}\Big[\frac{|\mathcal{F}|}{4\pi\eta}L^2 + b(\eta)L + C(\eta, L) - e^{\eta/(4L^2)} - \mathcal{A}' + 1\Big] + \frac{|\log c_1|}{\pi}R + \frac{\mathcal{N}}{2},$$

其中 $C(\eta,\ L) = E + \frac{1}{4}\mathrm{tr}(I - \Phi(1/2)) + \mathcal{N}_{1/2} + H^G(\eta,\ L)$ 以及 $H^G(\eta,\ L) = \sum_{k\geq 1} b_k \mathcal{G}_k^{\sharp}(\eta,\ L)$。

定理 3.1 随后可由对 $H^G(\eta,\ L) \leq H^G(\eta,\ 1/2)$ 取界而得到，这需要假设 $\eta \leq \ell^2/8$，并对 L 进行线性化；命题 3.3 中，取 $\eta \leq \frac{1}{2}\ell^2 L_0^2$，则可由对 $H^G(\eta,\ L) \leq H^G(\eta,\ L_0)$ 在 $L \geq L_0$ 下取界并在 R_0 处进行线性化而得到。

表2。含 $\tau \geq 1$ 的余有限Fuchsian群算法：谱上界。第1部分。对于 $\tau = 0$，只有两行 $B_1^{\sharp}$，$B_2^{\sharp}$ 需要单独处理（求和为空），而 $b(\eta)$ 丢失其 τ 项；其他部分均可直接适用。数值列记录了 $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\ \mathbb{Z})$ 在 $\eta = 0.035, R_0 = 0$ 处的值（定理 5.6）；属于两段式路径的最后一组则在 $\eta = \ell^2/8,\ R_0 = 3$ 处进行计算，如 §5.2 所述。

常数/函数描述			PSL(2, ℤ) 源
输入参数			
η	优化参数，$\eta > 0$；当 $\eta \leq \frac{\ell^2}{8}$ 时可容许（冻结形式），分别为 $\eta \leq \frac{1}{2}L_0^2\ell^2$（局部形式）	—	0.035 定理 3.1
R_0, L_0	线性化半径和 $L_0 = \sqrt{R_0^2 + \frac{1}{4}}$；$R_0 = 0$ 且 $R_0 = \infty$ 被允许		$0,\ \frac{1}{2}$ 命题 3.3
几何计数常数			
$B_1^{\sharp}$	$\sum_{j=1}^{\min\{2,\tau\}} \frac{2\pi}{\lvert K_j\rvert} e^{2d_j} = B_+$		92.5719081 (9)
B_-	$\sum_{j=1}^{\min\{2,\tau\}} \frac{2\pi}{\lvert K_j\rvert} e^{-2d_j}$		1.1428631 (9)
$B_2^{\sharp}$	$\sum_{j=1}^{\min\{2,\tau\}} \frac{4\pi}{\lvert K_j\rvert}\Big(1 - \frac{1}{2ce^{2d_j}}\Big) = B_0 - \frac{B_-}{c}$		20.4047937 (9)
$\Pi(x)$	$B_1^{\sharp}x - B_2^{\sharp} \geq \pi_\Gamma(x),\ x \geq c$		— (9)
b_k	$\frac{\ell}{c^{k/2} - c^{-k/2}}$；$b_1 < 1$ 且 $b_k \leq \ell c^{-k/2}(1 - c^{-1})^{-1}$		$b_1 = 0.8608179$ (7)
高斯核量			
$G_{\eta,\ L}(r)$	$\exp\big(-\eta r^2/L^2\big),\ L = \sqrt{R^2 + \frac{1}{4}},\ R \geq 0$		— §3
$I_{k,\pm}(\eta, L)$	$\frac{2k}{\text{函数}}\Big(\overset{\exp\left(\frac{\eta}{L^2k^2}\right)}{\text{互补误差}}\ \frac{Lk\ell}{2\sqrt{\eta}} \mp \frac{\sqrt{\eta}}{Lk}\Big),\ \underset{\text{函数}(x)}{\text{互补误差}}$	$=$	— (8)
$\mathcal{G}_k^{\sharp}(\eta,\ L)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2}dt$ $\Pi(c)\frac{L}{2\sqrt{\pi\eta}}\exp\Big(-\frac{L^2k^2\ell^2}{4\eta}\Big) + B_1^{\sharp}I_{k,+}(\eta, L) - B_-I_{k,-}(\eta, L)$		— (8)

表2。（续）

常数/函数	描述	PSL(2，ℤ) 来源
高斯核量（续）		
$H^{G}(\eta,\ L)$	$\sum_{k\geq 1} b_k \mathcal{G}_k^{\sharp}(\eta,\ L)$	— 命题 3.5
$\mathcal{H}_{\max}^{\mathrm{G}}(\eta)$	$H^{G}\left(\eta,\frac{1}{2}\right)=\sum_{k\geq 1} b_k \mathcal{G}_k^{\sharp}\left(\eta,\frac{1}{2}\right)$，当且仅当 $\eta\leq$ 时可容许 $\frac{\ell^2}{8}$	0.6196596（10）
$\rho(t)$	$\sqrt{\pi t}\,e^{t}$ 互补误差函数$(\sqrt{t})$	$\rho(4\eta)=0.4551946$ (6)
$b(\eta)$	$\dfrac{\lvert\log\ c_1\rvert+\tau\left(\rho(4\eta)\ -(1-\gamma)\ -\log\ 2\right)}{2\sqrt{\pi\eta}}$	-0.9962988 (12)
E	$\sum_{R}\dfrac{1}{4m_R\sin^2\theta_R}$	$\frac{25}{72}=0.3472222$ (18)
$E^{\sharp}$	$\sum_{R}\dfrac{2}{m_R\ 正弦\,\theta_R}\sqrt{\dfrac{\pi-2\theta_R}{\pi\ 正弦(2\theta_R)}}$ (进入 $A_{14}^{\sharp}$)	0.3798407 命题4.9
$C(\eta,\ L)$	$E+\frac{1}{4}\mathrm{tr}\left(I-\Phi(\frac{1}{2})\right)+\mathcal{N}_2+H^{G}(\eta,L)$	— 命题 3.5
$C(\eta)$	$E+\frac{1}{4}\mathrm{tr}\left(I-\Phi(\frac{1}{2})\right)+\mathcal{N}_2+\mathcal{H}_{\max}^{\mathrm{G}}(\eta)$	1.9668819 定理 3.1
$(\lambda,\ \xi)$	$(1,\ \_^{1}2)$ 若 $b(\eta)\geq 0$；$\left(R_0/L_0,\ 1/(4L_0)\right)$ 若 $b(\eta)<0$	(0, ⌣2) (15)
输出：冻结二次上界 $\mu(R)\leq K_0R^2+K_1R+K_2$		
$K_0(\eta)$	$\dfrac{\lvert\mathcal{F}\rvert}{4\pi}\dfrac{e^{\eta}}{\eta}$	2.4657613 (16)
$K_1(\eta)$	$\lambda b(\eta)e^{\eta}+\dfrac{\lvert\text{对数 }c_1\rvert}{\pi}$	0 (16)
K_1^{+}	$\max\{K_1,0\}$；在 (25) 中用 K_1^{+} 替换 K_1 是合理的，因为 $f\geq 0$ 那里	0 (25)
$K_2(\eta)$	$\dfrac{K_0(\eta)}{4}+e^{\eta}\left[\xi b(\eta)+C(\eta)-\mathcal{A}'\right]+\dfrac{\mathcal{N}}{2}$	1.6018689 (16)
输出：包络和局部上界（两段式路径）		
$\mathcal{P}(R,\eta)$	$e^{\eta}\left[\frac{\lvert\mathcal{F}_{4\pi}\rvert}{4\pi\eta}L^2+b(\eta)L+C(\eta,\ L)\ -e^{\eta/(4L^2)}-\mathcal{A}'+1\right]+\frac{\lvert\text{对数 }c_1\rvert}{\pi}R+\frac{\mathcal{N}}{2}$	— 命题 3.5
$Q_A(R)$	$[0,\infty$上的 μ 的任意逐点上界；我们取 $\inf_{\eta>0}\mathcal{P}(R,\eta)$	— 命题 4.7
$K_i^{\infty}(\eta)$	将 $K_i(\eta)$ 中的 $C(\eta)$ 替换为 $C(\eta,\ L_0)$，并将 $(\lambda,\ \xi)=\left(\frac{R_0}{L_0},\frac{1}{4L_0}\right)$	0.2859241 命题 3.3 -0.1829078 1.1079988
$Q_B(R)$	$K_0^{\infty}R^2+K_1^{\infty}R+K_2^{\infty}$，对 $R\geq R_0$ 有效	—(17)

4. Huber 常数的界

本节将把估计式 (16) 直接代入修正/广义 Huber 常数算法中出现的 Stieltjes 积分。当前算法的这一部分也将在若干步骤中进行实质性修改，从而对公式中的所有项得到更精确的显式估计

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\lambda_n\leq\frac{1}{4}} h_T^{\varepsilon}(r_n)+\sum_{\lambda_n>\frac{1}{4}} h_T^{\varepsilon}(r_n)+\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} h_T^{\varepsilon}(r)\,\frac{-\phi'}{\phi}\left(\frac{1}{2}+ir\right)dr\\
&=\frac{|\mathcal{F}|}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} r h_T^{\varepsilon}(r)\tanh(\pi r)\,dr+H_T^{\varepsilon}+\sum_{R}\frac{1}{2m_R\sin\theta_R}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2r\theta_R}}{1+e^{-2\pi r}}h_T^{\varepsilon}(r)\,dr\\
&\quad+\frac{h_T^{\varepsilon}(0)}{4}\operatorname{tr}\left(I-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right)-\tau g_T^{\varepsilon}(0)\log 2-\frac{\tau}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} h_T^{\varepsilon}(r)\,\psi(1+ir)\,dr,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

其中 $H_T^\varepsilon = \sum_P \underbrace{\text{对数 } NP_0(NP)^{1/2} - (NP)^{-1/2}}\, g_T^\varepsilon$(对数 NP) 是附属于 (g_T^ε, h_T^ε)的 Randol平滑切比雪夫函数。 η的适当取值将在推导过程中确定。

我们先从辅助测试函数开始。我们将之前的选择替换为

$$\varphi(y) = \frac{3}{4}\left(1-y^2\right)\mathbf{1}_{(-1,1)}(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}\left(1-y^2\right), & |y|<1, \\ 0, & |y|\geq 1. \end{cases} \tag{19}$$

这是一个属于 $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ 且支集为 $\varphi \subset [-1,1]$ 的非负偶函数。于是 $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$以及

$$\widehat{\varphi}(z) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{izy}\, dy = \frac{3\left(\sin z - z\cos z\right)}{z^3} = \frac{3}{z^2}\left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right) \tag{20}$$

是一个整函数，且 $\widehat{\varphi}(0) = 1$。如通常所记， $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$， $\varepsilon > 0$， 测试函数 $h_T^\varepsilon(x)$ 是 $g_T^\varepsilon(x) = (2\text{双曲余弦 } \frac{x}{2})\,(I_T * \varphi_\varepsilon)\,(x)$ 的傅里叶变换，并且 $h_T^\varepsilon(r) = S\left(r+\frac{i}{2}\right) + S\left(r-\frac{i}{2}\right)$，其中 $S(w) = \left(\frac{2}{w}\text{正弦 } Tw\right)\widehat{\varphi}_\varepsilon(w)$。

命题 4.1。 令 φ 如 (19) 中所示。则

(a) $\widehat{\varphi}(\varepsilon z) - 1 = \mathcal{O}_8(\varepsilon^2)$ *for* $\varepsilon \in (0,1]$ *and* $z \in i[-\frac{1}{2}, 1]$, *with*

$$A_8^\sharp = 3e^{-1} - 1 = 0.1036383\ldots$$

(b) $\widehat{\varphi}(z) = \mathcal{O}_9\left((1+|r|)^{-2}\right)\ \left(z = r+it,\ r\in\mathbb{R},\ |t|\leq \frac{1}{2}\right)$, *with* $A_9^\sharp = 6.4214$.

证明。 (a) 对于满足 $t \in [-\frac{1}{2}, 1]$ 的 $z = it$，令 $u = \varepsilon t$，从而 $|u| \leq 1$。由于 $\sin(iu) = i$双曲正弦 u 且 $\cos(iu) =$ 双曲余弦 u，关系式 (20) 给出

$$\widehat{\varphi}(iu) = \frac{3\left(u\cosh u - \sinh u\right)}{u^3}.$$

由 u双曲余弦 $u -$ 双曲正弦 $u = \underbrace{\sum_{k\geq 1}}\ \frac{2k}{2k+1()!u^{2k+1}}$，我们得到展开式

$$\widehat{\varphi}(iu) = 1 + \sum_{k\geq 2} \frac{6k}{(2k+1)!}\, u^{2k-2}$$

其所有系数均为正。因此 $\widehat{\varphi}(iu) \geq 1$，且对于 $|u| \leq 1$

$$0 \leq \widehat{\varphi}(iu) - 1 = u^2 \sum_{k\geq 2} \frac{6k}{(2k+1)!} u^{2k-4} \leq u^2 \sum_{k\geq 2} \frac{6k}{(2k+1)!} = (3e^{-1} - 1)\, u^2.$$

事实上，

$$\sum_{k\geq 2} \frac{6k}{(2k+1)!} = 3\sum_{k\geq 2}\left(\frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k+1)!}\right) = 3(e^{-1} - \frac{1}{3}).$$

由于 $u = \varepsilon t$ 和 $|t| \leq 1$，可得 $|\widehat{\varphi}(\varepsilon z) - 1| \leq (3e^{-1} - 1)\ \varepsilon^2 = A_8^\sharp \varepsilon^2$，其中 $A_8^\sharp = 3e^{-1} - 1$。

(b) 对于 $z = r + it$，有 $|\text{正弦 } z|^2 = \text{正弦}^2\, r + \text{双曲正弦}^2\, t \leq \text{双曲余弦}^2\, t$，同样地， $|\text{余弦 } z| \leq$双曲余弦 t。因此，由 (20) 中的第二个表达式可得，

$$|\widehat{\varphi}(z)| \leq \frac{3}{|z|^2}\left(\frac{|\sin z|}{|z|} + |\cos z|\right) \leq 3\cosh\tfrac{1}{2}\,\frac{1+|z|}{|z|^3} \qquad \left(|t| \leq \tfrac{1}{2}\right). \tag{21}$$

由于 $|z| \geq |r|$ 且 $|z| \leq \sqrt{r^2 + \frac{1}{4}}$，关系式 (21) 给出

$$(1+|r|)^2\,|\widehat{\varphi}(z)| \leq V(|r|) := 3\cosh\tfrac{1}{2}\,\frac{(1+|r|)^2\left(1+\sqrt{r^2+\frac{1}{4}}\right)}{|r|^3},$$

且 V在 $\left[\frac{9}{2}, \infty\right)$上递减，其中 $V\left(\frac{9}{2}\right) = 6.2075\ldots$且 $\lim_{r\to\infty} V(r) = 3$双曲余弦 $\frac{1}{2} = 3.3829\ldots$。因此，对于 $|r| \geq \frac{9}{2}$，$(1+|r|)^2\,|\widehat{\varphi}(z)| \leq 6.21$。

在剩余范围 $|r| \le \frac{9}{2}$ 上，我们直接计算 (20)。令 $z = r + it$，并分离实部和虚部，

$$|\widehat{\varphi}(r+it)| = \frac{3\sqrt{\mathfrak{R}^2 + \mathfrak{I}^2}}{(r^2+t^2)^{3/2}},$$

$\mathfrak{R} =$（正弦 $r - r$ 双曲余弦 r）双曲余弦 $t - t$ 正弦 r 双曲正弦 t, $\mathfrak{I} =$（双曲余弦 $r + r$ 正弦 r）双曲正弦 $t - t$ 双曲余弦 r 双曲余弦 t. 函数 $(1+r)^2\,|\widehat{\varphi}(r+it)|$ 在 $|t|$ 上单调递增，并在 $\left[0, \frac{9}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 处取得其最大值 6。42139 . . . 在 $r = 2.4558\ldots$, $t = \frac{1}{2}$ 处。因此 $A_9^\sharp = 6.4214$ 可以取为。□

注 4.2。两个常数基本上都是最优的。在 (a) 中，$\widehat{\varphi}(iu) = 1 + \frac{u^2}{10} + O(u^4)$，因此不可能存在低于 $\frac{1}{10}$ 的常数，这与 $A_8^\sharp = 0.10364$ 相矛盾。在 (b) 中，精确上确界为

$$\sup_{r\in\mathbb{R},\,|t|\le 1/2} (1+|r|)^2 \big|\widehat{\varphi}(r+it)\big| = 6.421388930\ldots,$$

在 $r = 2.4558386\ldots$, $t = \frac{1}{2}$ 处取到。值得指出的是，在族 $\varphi_p(y) \propto (1-y^2)^p$ 中，对于 $\widehat{\varphi_p}(z) = \Gamma(p+\frac{3}{2})(2/z)^{p+1/2} J_{p+1/2}(z)$，衰减的提升远不足以抵消常数的增长：$(1+|r|)^{p+1}|\widehat{\varphi_p}(r+\frac{i}{2})|$ 的精确上确界分别为 6.4214 ($p=1$)、35.4357 ($p=2$)、265.680，而相应的 Λ_0 仅按 $1/p$ 的速度提升。因此，选择 $p = 1$ 在这一族中是最优的。

命题4.3. 对于 $r \ge 0$ 和 $0 < \varepsilon \le 1$，有

$$|h_T^\varepsilon(r)| \le \frac{A_{10}^\sharp \cosh\frac{T}{2}}{(1+r)\,(1+\varepsilon r)^2}, \qquad A_{10}^\sharp = 4\sqrt{5}A_9^\sharp \le 57.43475.$$

证明。我们有 $h_T^\varepsilon(r) = S\big(r+\frac{i}{2}\big) + S\big(r-\frac{i}{2}\big)$，其中 $S(w) = \big(\frac{2}{w}\sin Tw\big)\,\widehat{\varphi}(\varepsilon w)$。由命题 4.1(b)，对于 $w = r \pm \frac{i}{2}$，有 $|\widehat{\varphi}(\varepsilon w)| \le A_9^\sharp (1+\varepsilon r)^{-2}$，因为 $|\mathrm{Im}(\varepsilon w)| = \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{1}{2}$。此外 $|\sin Tw| \le \cosh\frac{T}{2}$，并且

$$\frac{1}{\left|r \pm \frac{i}{2}\right|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+\frac{1}{4}}} \le \frac{\sqrt{5}}{1+r},$$

常数 $\sqrt{5}$ 是最优的，并在 $r = \frac{1}{4}$ 处取到。将这两项相加，即得结论，其中 $A_{10}^\sharp = 4\sqrt{5}A_9^\sharp$。□

命题 4.4. 设 $\kappa > 1$, $x \ge c$, $T = \log x \ge \log\kappa$ 且 $\varepsilon = e^{-T/4}$。则

$$\Big|\sum_{\lambda_n \le \frac{1}{4}} h_T^\varepsilon(r_n) - \sum_{\lambda_n \le \frac{1}{4}} \frac{x^{s_n}}{s_n}\Big| \;\le\; A_{11}^\sharp[\kappa]\, x^{3/4},$$

$$A_{11}^\sharp[\kappa] = (\mathcal{A}-1)\left(2 + \frac{2A_8^\sharp}{\kappa^{1/4}} + \frac{1}{(1-s_1)\kappa^{1/4}} + \frac{A_8^\sharp}{(1-s_1)\kappa^{3/4}}\right) + 1 + \frac{A_8^\sharp}{\kappa^{1/4}}.$$

证明。以下始终有 $T \ge \log\kappa$，这给出 $\varepsilon = e^{-T/4} \le \kappa^{-1/4}$；对于 $\lambda_n \le \frac{1}{4}$，记 $s_n = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_n}$, $r_n = i(s_n - \frac{1}{2})$，于是 $\frac{1}{2} \le s_n \le s_1 < 1$ 对于 $n \ge 1$ 和 $s_0 = 1$ 成立。我们反复使用 $S(w) = \frac{2}{w}\sin Tw\,\widehat{\varphi}(\varepsilon w)$，以及

$$S(is) = \frac{\widehat{\varphi}(i\varepsilon s)}{s}\big(e^{sT} - e^{-sT}\big) \quad (s \ne 0), \qquad S(0) = 2T.$$

对于所有 $T \ge 0$，$2T < e^{3T/4}$。事实上，$u(T) = e^{3T/4} - 2T$ 具有 $u'(T) = \frac{3}{4}e^{3T/4} - 2$，因此 u 在 $T_0 = \frac{4}{3}\log\frac{8}{3}$ 处取最小值，其中 $u(T_0) = \frac{8}{3} - \frac{8}{3}\log\frac{8}{3} = 0.0512\ldots > 0$。

术语 $n = 0$。这里 $s_0 = 1$，$r_0 = \frac{i}{2}$，以及

$$h_T^\varepsilon(r_0) = S(i) + S(0) = \widehat{\varphi}(i\varepsilon)\big(e^T - e^{-T}\big) + 2T.$$

根据命题 4.1(a)，$|\widehat{\varphi}(i\varepsilon) - 1| \le A_8^\sharp \varepsilon^2$，因此

$$(1 - A_8^\sharp \varepsilon^2)(e^T - e^{-T}) + 2T \;\le\; h_T^\varepsilon(r_0) \;\le\; (1 + A_8^\sharp \varepsilon^2)(e^T - e^{-T}) + 2T.$$

由于 $\varepsilon^2 e^T = e^{T/2} = e^{-T/4} e^{3T/4} \le \kappa^{-1/4} e^{3T/4}$ 和 $2T < e^{3T/4}$，右端给出$h_T^\varepsilon(r_0)$ $\le e^T + (A_8^\sharp \kappa^{-1/4} + 1) e^{3T/4}$。左端利用 $2T - e^{-T} > 0$ 对$T \ge \log \kappa > 0$，得到 $h_T^\varepsilon(r_0)$ $\ge e^T - A_8^\sharp \kappa^{-1/4} e^{3T/4}$。因此

$$\left| h_T^\varepsilon(r_0) - \frac{x^{s_0}}{s_0} \right| \le \Big(1 + \frac{A_8^\sharp}{\kappa^{1/4}}\Big) e^{3T/4}. \tag{22}$$

这是 $A_{11}^\sharp[\kappa]$的 $1 + A_8^\sharp \kappa^{-1/4}$ 项。在 [2] 中它是 $1 + A_8$，因此此处的改进因子为$\varepsilon \le \kappa^{-1/4}$，并且将 $e - 1 \rightsquigarrow 3e^{-1} - 1$替换掉。

项 $1 \le n \le A - 1$。写出 $s = s_n$。则

$$h_T^\varepsilon(r_n) = S(is) + S(i(s-1)) = \frac{\widehat{\varphi}(i\varepsilon s)}{s}\big(e^{sT} - e^{-sT}\big) + \frac{\widehat{\varphi}(i\varepsilon(s-1))}{s-1}\big(e^{(s-1)T} - e^{-(s-1)T}\big).$$

这两个论证都满足命题 4.1(a) 中的可容许条件：is属于 $i[\frac{1}{2}, 1]$，且 $i(s-1)$ 属于 $i[-\frac{1}{2}, 0]$。对于第二项，$0 < 1 - s \le \frac{1}{2}$和 $e^{(s-1)T} < 1 < e^{(1-s)T}$给出

$$\left| \frac{\widehat{\varphi}(i\varepsilon(s-1))}{s-1}\big(e^{(s-1)T} - e^{-(s-1)T}\big) \right| \le \frac{1 + A_8^\sharp \varepsilon^2}{1 - s_1}\, e^{(1-s)T} \le \frac{e^{T/2}}{1 - s_1} + \frac{A_8^\sharp \varepsilon^2 e^{T/2}}{1 - s_1},$$

因为 $e^{(1-s)T} \le e^{T/2}$。现在 $e^{T/2} = e^{-T/4} e^{3T/4} \le \kappa^{-1/4} e^{3T/4}$ 且 $\varepsilon^2 e^{T/2} = e^{-T/2} e^{T/2} = 1 \le \kappa^{-3/4} e^{3T/4}$，因此这一项至多为

$$\left(\frac{1}{(1 - s_1)\kappa^{1/4}} + \frac{A_8^\sharp}{(1 - s_1)\kappa^{3/4}} \right) e^{3T/4}. \tag{23}$$

κ 的两个指数都比 [2], 中的指数小四分之一；其中相应的界为$1 \;{}_{(1-s_1)c^{1/4}} + \;{}^{A_8}_{1-s_1}\;()c^{1/2}$。

对于第一项，利用 $\frac{1}{2} \le s \le 1$ 和 $|\widehat{\varphi}(i\varepsilon s) - 1| \le A_8^\sharp \varepsilon^2$，

$$\left| \frac{\widehat{\varphi}(i\varepsilon s)}{s}\big(e^{sT} - e^{-sT}\big) - \frac{e^{sT}}{s} \right| \le \frac{A_8^\sharp \varepsilon^2 e^{sT}}{s} + \frac{e^{-sT}}{s} \le 2A_8^\sharp \varepsilon^2 e^T + 2.$$

这里 $\varepsilon^2 e^T = e^{T/2} \le \kappa^{-1/4} e^{3T/4}$ 和 $2 \le 2e^{3T/4}$，因此该项至多贡献

$$\left(\frac{2A_8^\sharp}{\kappa^{1/4}} + 2 \right) e^{3T/4}, \tag{24}$$

与 $2A_8 + 2$ 中的 [2]相对。对 $\mathcal{A}$ 个小特征值将 (22)、(23) 和 (24) 求和，即得所述结论。□

现在，我们将注意力转向 A_{12}。

Put

$$p(u) := e^{-3T/4} \cosh \tfrac{T}{2} = \tfrac{1}{2}(e^{-u} + e^{-5u}),$$
$$F(u) := (1 + e^{-4u})\, \frac{1 - (1+u)e^{-u}}{(1 - e^{-u})^2},$$
$$f(u) := p(u)\, \frac{u - 1 + e^{-u}}{(1 - e^{-u})^2},$$

其中 $u := T/4$。

命题 4.5 (联合上确界)。 令 $x, T, \varepsilon, \kappa, u, p, F, f$ 如上所述，并假设 $\mu(R) \le K_0 R^2 + K_1 R + K_2$ 对所有 $R \ge 0$均成立。那么

$$\Big| \sum_{\lambda_n > \frac{1}{4}} h_T^{\varepsilon}(r_n) + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} h_T^{\varepsilon}(r) \frac{-\phi'}{\phi}\Big(\tfrac{1}{2} + ir\Big)\, dr \Big| \le A_{12}^{\sharp}[\kappa]\, x^{3/4},$$

with

$$A_{12}^{\sharp}[\kappa] \;=\; A_{10}^{\sharp} \sup_{u \ge \frac{1}{4}\log\kappa} \Big[K_0 F(u) + K_1 f(u) + K_2\, p(u) \Big]. \tag{25}$$

由 (26) 可知，由于 $f(u) = p(u) J_1(e^{-u}) \ge 0$，对于 $u > 0$，当 K_1 替换为以下内容时，(25) 中的上确界不会增大:

$$K_1^{+} := \max\{K_1, 0\},$$

这就是表3中记录 $A_{12}^{\sharp}[\kappa]$ 的闭式界所采用的形式。对于满足 $K_1 \le 0$ 的群——其中包括 PSL(2，$\mathbb{Z}$)——中间项因此完全消失，这正是推论 4.6 适用的原因。

证明。有

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{\lambda_n > \frac{1}{4}} h_T^{\varepsilon}(r_n) + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} h_T^{\varepsilon}(r) \frac{-\phi'}{\phi}\Big(\frac{1}{2} + ir\Big)\, dr \Big| &\le \sum_{\lambda_n > \frac{1}{4}} \big| h_T^{\varepsilon}(r_n) \big| + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \big| h_T^{\varepsilon}(r) \big| \Big| \frac{\phi'}{\phi}\Big(\frac{1}{2} + ir\Big) \Big|\, dr \\ &= \int_0^{\infty} \big| h_T^{\varepsilon}(r) \big|\, d\mu(r). \end{aligned}$$

Now,

$$\int_0^{\infty} \left| h_T^{\varepsilon}\left(r\right) \right| d\mu\left(r\right) \le A_{10}^{\sharp} \cosh\frac{T}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\mu\left(r\right)}{\left(1+r\right)\left(1+\varepsilon r\right)^2}.$$

分部积分和定理 3.1 得到

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \mu\left(r\right) \left(\frac{1}{\left(1+r\right)^2 \left(1+\varepsilon r\right)^2} + \frac{2\varepsilon}{\left(1+r\right)\left(1+\varepsilon r\right)^3} \right) dr \\ \le &\int_0^{\infty} \Big(K_0 r^2 + K_1 r + K_2 \Big) \left(\frac{1}{\left(1+r\right)^2 \left(1+\varepsilon r\right)^2} + \frac{2\varepsilon}{\left(1+r\right)\left(1+\varepsilon r\right)^3} \right) dr \\ &= K_0(I_0 + 2\varepsilon I_3) + K_1(I_1 + 2\varepsilon I_4) + K_2(I_2 + 2\varepsilon I_5), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} I_0 &:= \int_0^{\infty} \frac{r^2}{(1+r)^2(1+\varepsilon r)^2}\, dr = \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon(1-\varepsilon)^2} + \frac{2\ln\varepsilon}{(1-\varepsilon)^3}, \\ I_1 &:= \int_0^{\infty} \frac{r}{(1+r)^2(1+\varepsilon r)^2}\, dr = \frac{-2(1-\varepsilon) - (\varepsilon+1)\ln\varepsilon}{(1-\varepsilon)^3}, \\ I_2 &:= \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+r)^2(1+\varepsilon r)^2}\, dr = \frac{\varepsilon+1}{(1-\varepsilon)^2} + \frac{2\varepsilon\ln\varepsilon}{(1-\varepsilon)^3}, \\ I_3 &:= \int_0^{\infty} \frac{r^2}{(1+r)(1+\varepsilon r)^3}\, dr = \frac{3\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 1 - 2\varepsilon^2\ln\varepsilon}{2\varepsilon^2(1-\varepsilon)^3}, \\ I_4 &:= \int_0^{\infty} \frac{r}{(1+r)(1+\varepsilon r)^3}\, dr = \frac{1-\varepsilon^2+2\varepsilon\ln\varepsilon}{2\varepsilon(1-\varepsilon)^3}, \\ I_5 &:= \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+r)(1+\varepsilon r)^3}\, dr = \frac{-\varepsilon^2+4\varepsilon-3-2\ln\varepsilon}{2(1-\varepsilon)^3}. \end{aligned}$$

显然,

$$I_0 + 2\varepsilon I_3 = \frac{2(1-\varepsilon+\varepsilon\log\varepsilon)}{\varepsilon(1-\varepsilon)^2}, \qquad I_1 + 2\varepsilon I_4 = \frac{-\log\varepsilon-(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2}, \qquad I_2 + 2\varepsilon I_5 = 1. \tag{26}$$

注意到 K_0 和 K_2 为正数。乘以

$$K_0(I_0 + 2\varepsilon I_3) + K_1^{+}(I_1 + 2\varepsilon I_4) + K_2$$

$e^{-3T/4}$双曲余弦 $\frac{T}{2}$，并回忆 $\varepsilon = e^{-u}$。得到

$$K_0 F(u) + K_1 f(u) + K_2\, p(u)$$

由于 $e^{-3T/4}$双曲余弦 $\frac{T}{2} = p(u)$, $F(u) = p(u)\,(I_0 + 2\varepsilon I_3)$ 且 $f(u) = p(u)\,(I_1 + 2\varepsilon I_4)$。

最后，对 $T \geq \log\kappa$ 取上确界。 □

推论 4.6。如果 $K_1 \leq 0$ 和 $K_2 \leq K_0\, {}^{1-F\left(\frac{1}{4}\log \quad \kappa\right)\log}$，那么 $A_{12}^{\sharp}[\kappa] = A_{10}^{\sharp} K_0$。

~~$p\left(\frac{1}{4}\quad \kappa\right)$~~

证明。对于 $u > 0$ 置 $s = e^{-u}$ 并且

$$\Lambda(u) := \frac{1-F(u)}{p(u)} = \frac{2\big[(u-1) + s - s^3 + (1+u)s^4\big]}{(1-s)^2(1+s^4)}.$$

则 Λ 在 $(0,\infty)$ 上严格递增，当 $u \to 0^{+}$ 时， $\Lambda(u) = \frac{5}{3}u + O(u^2)$；并且当 $u \to \infty$时， $\Lambda(u) = 2(u-1) + O(ue^{-u})$。事实上，所显示的恒等式由 $(1-s)^2 - (1+s^4)(1-(1+u)s) = (u-1)$ $s + s^2 - s^4 + (1+u)s^5$ 以及 $p = \frac{1}{2}(s + s^5)$ 得出；其中不存在抵消，并且可同时得到两个渐近式。单调性可通过直接计算得到。该假设给出在整个可容许范围内 $K_2 p(u) \leq K_0(1 - F(u))$，即在那里 $K_0 F(u) + K_2 p(u) \leq K_0$；并且当 $u \to \infty$时， $F(u) \to 1$, $p(u) \to 0$。□

命题4.7（两段形式）。令 x、T、ε、κ 如上。假设对于所有 $R \geq 0$，有 $\mu([0,R)) \leq Q_A([0,R))$，并且对于 $R \geq R_0$，有 $\mu([0,R)) \leq Q_B([0,R))$，其中 Q_B 如 (17) 所示。则命题 *4.5* 的结论成立，其中

$$A_{12}^{\sharp}[\kappa] = A_{10}^{\sharp} \sup_{u \geq \frac{1}{4}\log\kappa} p(u)\Big[K_0^{\infty} J_0(\varepsilon) + K_1^{\infty} J_1(\varepsilon) + K_2^{\infty} + \mathcal{E}(\varepsilon, R_0)\Big], \tag{27}$$

其中 $\varepsilon = e^{-u}$、 $J_0 = I_0 + 2\varepsilon I_3$、 $J_1 = I_1 + 2\varepsilon I_4$ 如 (26) 所示，

$$W_\varepsilon(r) := -\frac{d}{dr}\frac{1}{(1+r)(1+\varepsilon r)^2} = \frac{1}{(1+r)^2(1+\varepsilon r)^2} + \frac{2\varepsilon}{(1+r)(1+\varepsilon r)^3} \geq 0.$$

and

$$\mathcal{E}(\varepsilon, R_0) := \int_0^{R_0} \big[Q_A(r) - Q_B(r)\big]^{+} W_\varepsilon(r)\, dr. \tag{28}$$

证明。在 $[R_0,\infty)$ 上有 $\mu \leq Q_B$，而在 $[0,R_0)$ 上有 $\mu \leq Q_A \leq Q_B + [Q_A - Q_B]^{+}$；因此在 $[0,\infty)$ 上逐点有 $\mu \leq Q_B + [Q_A - Q_B]^{+}\mathbf{1}_{[0,R_0]}$。将其代入 $\int_0^{\infty} d\mu(r)(1+r)^{-1}(1+\varepsilon r)^{-2} = \int_0^{\infty} \mu(r) W_\varepsilon(r)\, dr$，并使用（26）。如命题 4.5 中一样，上确界是联合取得的。□

(27) 与 (25) 有两处不同。首先，修正项 (28) 是 $O(R_0)$，而不是$O(\varepsilon^{-1})$，因为它在 R_0 处截断；这正是交换有利可图的原因。其次， K_1^{∞}现在以其本身的符号参与其中：上确界已从 $u = \infty$ 移至左端点 $u = \frac{1}{4}\log\kappa$；在 $u = \infty$ 处，线性项和常数项不可见，因此由抛物线项和双伽马项产生的负线性系数终于有了贡献。

下一步是对命题 5.5] 作直接调整。

命题 4.8。设 x、 T、 ε 和 κ 如上所述。则

$$\frac{|\mathcal{F}|}{4\pi}\Big|\int_{\mathbb{R}} r h_T^{\varepsilon}(r)\tanh(\pi r)\, dr\Big| \leq A_{13}^{\sharp}[\kappa]\, x^{3/4},$$

with

$$A_{13}^{\sharp}[\kappa]=\frac{|\mathcal{F}|}{4\pi}A_{10}^{\sharp}\left(1+\frac{1}{\kappa}\right).$$

椭圆贡献也得到了更精细的处理。

命题 4.9。

$$\sum_{R}\frac{1}{2m_R\sin\theta_R}\Big|\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2r\theta_R}}{1+e^{-2\pi r}}h_T^{\varepsilon}(r)\,dr\Big|\le A_{14}^{\sharp}[\kappa]x^{3/4},$$

with

$$A_{14}^{\sharp}[\kappa]=\frac{A_{10}^{\sharp}}{2}\left(\frac{1}{\kappa^{1/8}}+\frac{1}{\kappa^{9/8}}\right)\frac{1}{(\kappa^{1/4}+4)^{1/2}}\sum_{R}\frac{1}{2m_R\sin\theta_R}\sqrt{\frac{\pi-2\theta_R}{\pi\sin(2\theta_R)}}$$

以及 $\frac{\pi-2\theta_R}{\pi\sin(2\theta_R)}$，其中 $\theta_R=\frac{\pi}{2}$ 由连续性定义为 $\frac{1}{\pi}$。

证明。根据柯西–施瓦茨不等式

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2r\theta_R}}{1+e^{-2\pi r}}h_T^{\varepsilon}(r)\,dr\right|\le\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-4r\theta_R}}{(1+e^{-2\pi r})^2}\,dr\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|h_T^{\varepsilon}(r)|^2\,dr\right)^{1/2}.\tag{29}$$

作代换 $t=e^{-2\pi r}$，积分

$$I(\theta_R)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-4r\theta_R}}{(1+e^{-2\pi r})^2}\,dr.$$

化为

$$I(\theta_R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{2\theta_R}{\pi}-1}}{(1+t)^2}\,dt.$$

代入 $a=\frac{2\theta_R}{\pi}$。由于 $0<a<2$，由贝塔积分公式可得

$$\int_0^{\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^2}\,dt=B(a,2-a)=\Gamma(a)\Gamma(2-a).$$

利用

$$\Gamma(2-a)=(1-a)\Gamma(1-a)$$

以及欧拉反射公式

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin(\pi a)},$$

我们得到

$$\Gamma(a)\Gamma(2-a)=(1-a)\frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

因此

$$I(\theta_R)=\frac{1}{2\pi}(1-a)\frac{\pi}{\sin(\pi a)}=\frac{1-a}{2\sin(\pi a)}.$$

代入 $a=2\theta_R/\pi$，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-4r\theta_R}}{(1+e^{-2\pi r})^2}\,dr=\frac{\pi-2\theta_R}{2\pi\sin(2\theta_R)}.\tag{30}$$

Now,

$$\int_0^{\infty}|h_T^{\varepsilon}(r)|^2\,dr\le(A_{10}^{\sharp})^2\cosh^2\frac{T}{2}\int_0^{\infty}\frac{dr}{(1+r)^2(1+\varepsilon r)^4}\le(A_{10}^{\sharp})^2\cosh^2\frac{T}{2}\frac{1}{1+4\varepsilon}.\tag{31}$$

这里我们使用了变量代换 $t = \frac{1}{1+r}$，然后应用加权算术–几何平均不等式，得到

$$\int_0^\infty \frac{dr}{(1+r)^2(1+\varepsilon r)^4} \le \frac{1}{1+4\varepsilon} \qquad \text{for } 0<\varepsilon<1.$$

结合 (29)、(30) 和 (31)，得到

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2r\theta_R}}{1+e^{-2\pi r}} h_T^\varepsilon(r)\, dr \right| \le A_{10}^\sharp \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon}} \cosh\frac{T}{2} \sqrt{\frac{\pi - 2\theta_R}{\pi \sin(2\theta_R)}}.$$

应用 (29) 时，注意到 $\sqrt{2}$ 来自 $\int_{\mathbb{R}} |h|^2 = 2\int_0^\infty |h|^2$ 的项与 $(\pi - 2\theta_R)/(2\pi \sin 2\theta_R)$ 中的 $\frac{1}{2}$ 相消。

现在，取 $s = \varepsilon = e^{-T/4} \in (0, \kappa^{-1/4}]$，

$$e^{-3T/4} \frac{\cosh\frac{T}{2}}{\sqrt{1+4\varepsilon}} = \frac{s+s^5}{2\sqrt{1+4s}} = P(s).$$

函数 $P(s) = \dfrac{s+s^5}{2\sqrt{1+4s}}$ 在 $(0,1]$ 上严格递增。事实上，对于 $0 < s \le 1$，

$$\frac{P'(s)}{P(s)} = \frac{1+5s^4}{s+s^5} - \frac{2}{1+4s} = \frac{(1+5s^4)(1+4s) - 2s(1+s^4)}{s(1+s^4)(1+4s)}.$$

分子等于 $1 + 2s + 5s^4 + 18s^5 > 0$，因此 $P' > 0$。

因此，

$$P(s) \le P(\kappa^{-1/4}) = \frac{\kappa^{-1/4} + \kappa^{-5/4}}{2\sqrt{1+4\kappa^{-1/4}}} = \frac{\kappa^{-1/8} + \kappa^{-9/8}}{2(\kappa^{1/4}+4)^{1/2}}$$

□

命题 4.10。设 x、T、ε 和 κ 如前所述。则

$$\Big|\frac{h_T^\varepsilon(0)}{4} \operatorname{tr}\Big(I - \Phi\big(\tfrac{1}{2}\big)\Big) - \tau g_T^\varepsilon(0)\log 2 - \frac{\tau}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} h_T^\varepsilon(r)\psi(1+ir)\, dr\Big| \le A_{15}^\sharp[\kappa] x^{3/4},$$

with

$$A_{15}^\sharp[\kappa] = \tau\left[\frac{A_{10}^\sharp D_1[\kappa]}{2\pi}\Big(1+\frac{1}{\kappa}\Big) + \frac{2\,\omega\big(\frac{1}{2}\kappa^{-1/4}\big)}{\kappa^{1/4}} + \frac{2\log 2}{\kappa^{3/4}}\right],\ \omega(s) = \frac{3(s\cosh s - \sinh s)}{s^3}.$$

以及下文 (34) 中定义的 $D_1[\kappa]$。

证明。回顾 $h_T^\varepsilon(r) = S(r+\frac{i}{2}) + S(r-\frac{i}{2})$，其中 $S(w) = \frac{2}{\text{正弦}_w^{Tw}}\widehat{\varphi}(\varepsilon w)$。当 $w = \pm\frac{i}{2}$ 时，$\frac{2}{\text{正弦}(\pm iT/2)^{\pm i/2}} = 4$ 双曲正弦 $\frac{T}{2}$，且 $\widehat{\varphi}(\pm i\varepsilon/2) = \omega(\varepsilon/2)$。因此，

$$h_T^\varepsilon(0) = 8\sinh\frac{T}{2}\,\omega\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

特别地，$h_T^\varepsilon(0) > 0$，并且根据 $0 \le \frac{1}{4}\operatorname{tr}(I - \Phi(\frac{1}{2})) \le \frac{\tau}{2}$，

$$0 \le \frac{h_T^\varepsilon(0)}{4}\operatorname{tr}\Big(I - \Phi\big(\tfrac{1}{2}\big)\Big) \le 4\tau\,\omega\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)\sinh\frac{T}{2} \le 2\tau\,\omega\left(\frac{\kappa^{-1/4}}{2}\right)\kappa^{-1/4}e^{3T/4}, \tag{32}$$

对于 (32)，我们使用双曲正弦 $\frac{T}{2} \le \frac{1}{2}e^{T/2}$、$e^{T/2} \le \kappa^{-1/4}e^{3T/4}$ 和 $\varepsilon = e^{-T/4} \le \kappa^{-1/4}$，其中 ω 在 $[0,\infty$ 上递增）。

现在来考虑双伽马项。由于 g_T^ε 为实偶函数，h_T^ε 为实偶函数，且 $\psi(1-ir) = \psi(1+ir)$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}} h_T^\varepsilon(r)\psi(1+ir)\, dr = \int_{\mathbb{R}} h_T^\varepsilon(r)\,\Re\psi(1+ir)\, dr.$$

Now,

$$\Re\psi(1+ir) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^2}{n\,(n^2+r^2)}$$

and

$$\sum_{n\ge 1} \frac{r^2}{n(n^2+r^2)} \le \frac{r^2}{1+r^2} + \int_1^{\infty} \frac{r^2\,du}{u(u^2+r^2)} = \frac{r^2}{1+r^2} + \frac{1}{2}\log(1+r^2)$$

可得

$$-\gamma \;\le\; \Re\psi(1+ir) \;\le\; -\gamma + \frac{r^2}{1+r^2} + \frac{1}{2}\log(1+r^2).$$

因此,

$$\big|\Re\psi(1+ir)\big| \le \gamma + \frac{1}{2}\log(1+r^2).$$

对于所有 $r\in\mathbb{R}$。因此,

$$\frac{\tau}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{R}} h_T^{\varepsilon}(r)\psi(1+ir)dr\right| \le \frac{\tau}{\pi}\int_0^{\infty} |h_T^{\varepsilon}(r)|\Big(\gamma + \tfrac{1}{2}\log(1+r^2)\Big)dr \le \frac{\tau A_{10}^{\sharp}}{\pi}\cosh\frac{T}{2}\,J(\varepsilon), \tag{33}$$

其中

$$J(\varepsilon) := \int_0^{\infty} \frac{\gamma + \frac{1}{2}\log(1+r^2)}{(1+r)(1+\varepsilon r)^2}\,dr.$$

代入 $u=\log(1+r)$，并利用 $\frac{1}{2}\log(1+r^2) \le \log(1+r)$，

$$J(\varepsilon) \le \int_0^{\infty} \frac{\gamma+u}{\big((1-\varepsilon)+\varepsilon e^u\big)^2}\,du.$$

对于所有 $u\ge 0$ 和 $\ge \varepsilon^2 e^{2u}$，分母为 ≥ 1。令 $\Lambda := \log\frac{1}{\varepsilon}$。于是,

$$\int_0^{\Lambda} \frac{\gamma+u}{\big((1-\varepsilon)+\varepsilon e^u\big)^2}\,du \le \int_0^{\Lambda} (\gamma+u)\,du = \frac{\Lambda^2}{2} + \gamma\Lambda$$

and

$$\int_{\Lambda}^{\infty} \frac{\gamma+u}{\big((1-\varepsilon)+\varepsilon e^u\big)^2}\,du \le \int_{\Lambda}^{\infty} \frac{\gamma+u}{\varepsilon^2 e^{2u}}\,du = \frac{\gamma+\Lambda}{2} + \frac{1}{4},$$

由于 $e^{-2\Lambda} = \varepsilon^2$。因此,

$$J(\varepsilon) \;\le\; \frac{\Lambda^2}{2} + \Big(\gamma + \tfrac{1}{2}\Big)\Lambda + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4}.$$

Let

$$G(\varepsilon) := \varepsilon\Big(\tfrac{\Lambda^2}{2} + (\gamma+\tfrac{1}{2})\Lambda + \tfrac{\gamma}{2} + \tfrac{1}{4}\Big) \;\ge\; \varepsilon J(\varepsilon).$$

由 $\Lambda = \log\frac{1}{\varepsilon}$，可得 $\frac{d\Lambda}{d\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon}$，因此

$$G'(\varepsilon) = \tfrac{\Lambda^2}{2} + (\gamma+\tfrac{1}{2})\Lambda + \tfrac{\gamma}{2} + \tfrac{1}{4} - \Lambda - (\gamma+\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\Lambda^2 + (\gamma - \tfrac{1}{2})\Lambda - (\tfrac{\gamma}{2} + \tfrac{1}{4}).$$

二次式 $\Lambda^2 + 2(\gamma - \frac{1}{2})\Lambda - (\gamma + \frac{1}{2})$ 有唯一的正根 $\Lambda_* = \frac{1}{2} - \gamma + \sqrt{\gamma^2 + \frac{3}{4}} = 0.9635426758\ldots$。

令 $\varepsilon_* := e^{-\Lambda_*} = 0.3815388\overline{2}\ldots$, $\kappa_* := e^{4\Lambda_*} = 47.189467\ldots$。导数$G'$ 在 $0 \le \Lambda < \Lambda_*$ 时为负。由于当 ε 增大时，Λ 递减，恰好当 $\Lambda > \Lambda_*$ 时 $G' > 0$，即当 $\varepsilon < \varepsilon_*$ 时。于是，G 在 $(0,\ \varepsilon_*]$ 上严格递增，并在 $[\varepsilon_*, 1]$ 上递减，且

$$\sup_{0<\varepsilon\le\kappa^{-1/4}} G(\varepsilon) = \begin{cases} G(\kappa^{-1/4}) = \kappa^{-1/4}\Big(\dfrac{\log^2\kappa}{32} + (\gamma+\tfrac{1}{2})\dfrac{\log\kappa}{4} + \dfrac{\gamma}{2} + \dfrac{1}{4}\Big), & \kappa \ge \kappa_*, \\ G(\varepsilon_*) = 0.7786285303\ldots, & 1 < \kappa \le \kappa_*. \end{cases}$$

$G(\kappa^{-1/4})$ 的显示值由 $\Lambda = \frac{1}{4}\log\kappa$ 得出。因此我们定义

$$D_1[\kappa] := \sup_{0<\varepsilon\le\kappa^{-1/4}} G(\varepsilon) = \begin{cases} \kappa^{-1/4}\Big(\frac{\log^2\kappa}{32} + (\gamma+\frac{1}{2})\frac{\log\kappa}{4} + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4}\Big), & \kappa \ge \kappa_*, \\ 0.77862854, & 1 < \kappa \le \kappa_*. \end{cases} \tag{34}$$

现在，双曲余弦 $\frac{T}{2} \le \frac{1}{2}(1+\frac{1}{\kappa})e^{T/2}$ and $e^{T/2}J(e^{-T/4}) = e^{3T/4}\cdot e^{-T/4}J(e^{-T/4}) \le D_1[\kappa]e^{3T/4}$。由此以及（33）可得

$$\frac{\tau}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{R}} h_T^\varepsilon(r)\psi(1+ir)dr\right| \le \frac{\tau A_{10}^\sharp}{2\pi}(1+\frac{1}{\kappa})D_1[\kappa]e^{3T/4}.$$

最后，$g_T^\varepsilon(0) = 2$，因为（$I_T * \varphi_\varepsilon$）$(0) = \int\varphi_\varepsilon = 1$ □

命题 4.11.

$$|H_T^\varepsilon - \sum_{\lambda_k\le\frac{1}{4}} \frac{x^{s_k}}{s_k}| \le A_{16}^\sharp[\kappa]x^{3/4},$$

with

$$A_{16}^\sharp[\kappa] = A_{11}^\sharp[\kappa] + A_{12}^\sharp[\kappa] + A_{13}^\sharp[\kappa] + A_{14}^\sharp[\kappa] + A_{15}^\sharp[\kappa].$$

*Pr*证明。 由命题 4.4–4.10 和 Selberg迹公式 (18) 可立即得出 . □

令 $H(x) = \sum_{NP\le x}\log NP_0{}^{1+}(\quad NP^{-1})()$。我们与当前算法的进一步差异在于，直接由 $H_{T-\varepsilon}^\varepsilon \le H(x) \le H_{T+\varepsilon}^\varepsilon$（见 [8, 第 298] 页）界定表达式 $H(x) - \sum_{\lambda_k\le\frac{1}{4}} \frac{x^{s_k}}{s_k}$，而不采用涉及 A_{17} 的中间步骤；该步骤会导致在 [2] 中对 A_{18}^- 中的 A_{16} 进行双重求和。因此，我们以下列形式使用命题 4.11。

对于每个 $T\prime \ge \log\kappa$，其中 $\varepsilon' = e^{-T'/4}$，

$$|H_{T'}^{\varepsilon'} - \sum_{\lambda_k\le 1/4} \frac{e^{T's_k}}{s_k}| \le A_{16}^\sharp[\kappa]\, e^{3T'/4}. \tag{35}$$

令 $c_+ > c$ 为下式的唯一解

$$\log c_+ - c_+^{-1/4} = \log c.$$

这样的 c_+ 存在，因为 $c > 1$，且 $y = \log t - t^{-1/4}$ 在区间 $[1,\infty)$. 上从 -1 增加到 ∞。令

$$\delta_+ := c_+^{-1/4}, \qquad T_\star := \log c + c^{-1/4}, \qquad \beta := e^{T_\star/4} = c^{1/4}e^{c^{-1/4}/4}.$$

命题 4.12。 设 c_+、 δ_+ 和 β 如上。则对于所有 $x \ge c$，当 $T = \log x$ 时，

$$|H(x) - \sum_{\lambda_k\le\frac{1}{4}} \frac{x^{s_k}}{s_k}| \le A_{18}^\sharp\, x^{3/4},$$

其中

$$A_{18}^\sharp := \max\Big\{\, A_{16}^\sharp[c_+]\, e^{3\delta_+/4} + \mathcal{A}\,\frac{e^{\delta_+}-1}{\delta_+}\,,\ \ A_{16}^\sharp[c] + \mathcal{A}\, e^{c^{-1/4}/4}\,,\ \ 2\mathcal{A}\beta\,\Big\}.$$

证明。 注意，在等式两侧没有必要使用同一个 ε

$$H_{T-\varepsilon}^\varepsilon \ \le\ H(x)\ \le\ H_{T+\varepsilon}^\varepsilon \qquad (0<\varepsilon\le 1).$$

这些结论对每个可容许的 ε 都分别成立。

上界。 令 $\varepsilon_0 := e^{-T/4}$。方程 $\varepsilon = e^{-(T+\varepsilon)/4}$ 有唯一解 ε_+，且 $\varepsilon_+ \in (0,\varepsilon_0)$。事实上，函数 $f(\varepsilon) = \varepsilon_0 e^{-\varepsilon/4}$ 将 $[0,\varepsilon_0]$ 映射到自身，并且在 $|f\prime| \le \varepsilon_0/4 < 1$ 处满足该条件，因此它在 $[0,\varepsilon_0]$ 中有唯一不动点。由于 $f(0) = \varepsilon_0 > 0$ 且 $f(\varepsilon_0) < \varepsilon_0$，该不动点位于开区间内。（实际上，在整个 $(0,\infty)$ 上唯一性仍成立，因为 f 是递减的，而恒等映射是递增的。）令 $T'_+ := T + \varepsilon_+ = T + e^{-(T+\varepsilon_+)/4} = T + e^{-T'_+/4}$。令 $w(t) = t - e^{-t/4}$，它是严格递增的。于是

$w(T\prime+) = T\prime_+ - \varepsilon_+ = T \geq \log\, c = w(\log\, c_+)$ 根据 c_+的定义，从而 $T'_+ \geq \log\, c_+$ 且 $\varepsilon_+ = e^{-T'_+/4} \leq c_+^{-1/4} = \delta_+$。关系式（35）在 $T\prime+$ 处、阈值为 c_+时适用：

$$H(x) \leq H^{\varepsilon_+}_{T'_+} \leq \sum_{\lambda_k \leq 1/4} \frac{e^{T'_+ s_k}}{s_k} + A^{\sharp}_{16}[c_+]\, e^{3T'_+/4}.$$

由于 $v \mapsto (e^v - 1)/v$ 递增且 $\varepsilon_+ s_k \leq \varepsilon_+ \leq \delta_+$，而 $\varepsilon_+ e^{Ts_k} \leq \varepsilon_+ e^T \leq e^{3T/4}$，

$$\sum_{\lambda_k \leq 1/4} \frac{e^{T'_+ s_k}}{s_k} - \sum_{\lambda_k \leq 1/4} \frac{e^{Ts_k}}{s_k} = \sum_{\lambda_k \leq 1/4} \varepsilon_+ e^{Ts_k} \frac{e^{\varepsilon_+ s_k} - 1}{\varepsilon_+ s_k} \leq \mathcal{A}\, \frac{e^{\delta_+} - 1}{\delta_+}\, e^{3T/4}.$$

这与 $e^{3T'_+/4} \leq e^{3\delta_+/4} e^{3T/4}$ 共同证明了上界。

下界。设 $T \geq T_\star$。令 $u(t) : = \varepsilon_0 e^{t/4} - t$，其中 $\varepsilon_0 = e^{-T/4}$ 如上。则有 $u(0) = \varepsilon_0$ 以及 $u(4) = \varepsilon_0 e - 4 < 0$ 对于 $T > 0$。因此，存在 ε_- 使得$\varepsilon_- = \varepsilon_0 e^{\varepsilon_-/4}$。由于 u在 $[0, 4]$上递减，因此 $\varepsilon_0 < \varepsilon_-$。令 $T\prime_- = T - \varepsilon_-$。注意 $\varepsilon_- = e^{-T'_-/4}$。令 $v(t) : = t + e^{-t/4}$。于是， $v(T'_-) = T$且 $v(\log\, c) = T_\star$。由于 v在所考虑的区间上递增，我们看到 $T \geq T_\star$等价于 $T'_- \geq \log\, c$。因此，关系式（35）在 T'_-处、阈值为 c时适用：

$$H(x) \geq H^{\varepsilon_-}_{T'_-} \geq \sum_{\lambda_k \leq 1/4} \frac{e^{T'_- s_k}}{s_k} - A^{\sharp}_{16}[c]\, e^{3T'_-/4}.$$

利用 $(1 - e^{-v})\ /v \leq 1$ 和 $\varepsilon_- \leq e^{-T/4} e^{c^{-1/4}/4}$，

$$\sum_{\lambda_k \leq 1/4} \frac{e^{Ts_k}}{s_k} - \sum_{\lambda_k \leq 1/4} \frac{e^{T'_- s_k}}{s_k} = \sum_{\lambda_k \leq 1/4} \varepsilon_- e^{Ts_k} \frac{1 - e^{-\varepsilon_- s_k}}{\varepsilon_- s_k} \leq \mathcal{A}\, \varepsilon_- e^T \leq \mathcal{A}\, e^{c^{-1/4}/4} e^{3T/4},$$

而 $e^{3T'_-/4} \leq e^{3T/4}$。

最后，如果 $\log c \leq T < T_\star$，那么 $H(x) \geq 0$ 和 $s_k \geq \frac{1}{2}$ 给出 $\sum_{\lambda_k \leq 1/4} \frac{e^{Ts_k}}{s_k} \leq 2\mathcal{A}e^T = 2\mathcal{A}e^{T/4}e^{3T/4} \leq 2\mathcal{A}\beta\, e^{3T/4}$。这里我们使用了 $T < T_\star$ 来界定因子 $e^{T/4}$。□

下一个关键步骤基于以下观察：使用如下链

$$H(x) \longrightarrow \psi_\Gamma(x) \longrightarrow \theta_\Gamma(x)$$

将 $|H(x) - \sum_{\lambda_k \leq 1/4} x^{s_k}/s_k| \leq A_{18} x^{3/4}$ 转换为关于 θ_Γ 的相应估计是多余的。我们用关于 $H(x) - \theta_\Gamma(x)$的一个精确恒等式替换上述链，其中只出现θ_Γ，并计算所得的上确界。回顾以下事实。

$$\theta_\Gamma(x) = \sum_{NP_0 \leq x} \log NP_0 = \int_{c^-}^{x} \log t\, d\pi_\Gamma(t) \leq \pi_\Gamma(x) \log x \qquad (x \geq c)$$

and

$$H(x) = \sum_{NP \leq x} \log NP_0\, \frac{1 + (NP)^{-1}}{1 - (NP)^{-1}}.$$

每个双曲共轭类都对应唯一的本原 P_0 和唯一的 $k \geq 1$，因此 $NP = (NP_0)^{\ k}$，而权重为 $\log\ NP_0$。由于 $d\theta_\Gamma$在每个本原范数处承载质量 $\log\ NP_0$，

$$H(x) = \sum_{k \geq 1} \int_{c^-}^{x^{1/k}} \frac{t^k + 1}{t^k - 1}\, d\theta_\Gamma(t).$$

减去 $\theta_\Gamma(x) = \int_{c^-}^{x} d\theta_\Gamma(t)$ 后，被积函数中的 1 消失，并且 $\frac{t+1}{t-1} - 1 = \frac{2}{t-1}$得到 —— ——

$$0 \ \leq\ H(x) - \theta_\Gamma(x) \ =\ 2\int_{c^-}^{x} \frac{d\theta_\Gamma(t)}{t-1} \ +\ \sum_{k \geq 2} \int_{c^-}^{x^{1/k}} \frac{t^k + 1}{t^k - 1}\, d\theta_\Gamma(t), \tag{36}$$

两项均为非负数，且总和有限（只有 $k \le \log x/\log c$ 有贡献）。

为方便起见，以下使用下列缩写：

$$\ell = \log c,\ T = \log x,\ \varkappa = \frac{B_2^\sharp}{B_1^\sharp} \in [0,1),\ \beta_k = \frac{3}{4} - \frac{1}{k}\ (k \ge 2),\ \nu_k = \frac{c^k+1}{c^k-1}.$$

关于（36）式右端项中的第一项，注意到在 $[c,\infty)$ 上有 $\frac{1}{t-1} \le \frac{1}{(1-c^{-1})t}$，因此，通过分部积分可得

$$2\int_{c^-}^{x} \frac{d\theta_\Gamma(t)}{t-1} \le \frac{2}{1-c^{-1}} \int_{c^-}^{x} \frac{d\theta_\Gamma(t)}{t} = \frac{2}{1-c^{-1}} \Big[\frac{\theta_\Gamma(x)}{x} + \int_c^x \frac{\theta_\Gamma(t)}{t^2} dt \Big].$$

利用 $\theta_\Gamma(x) \le (B_1^\sharp x - B_2^\sharp)\log x$ 以及初等积分 $\int \frac{\log t}{t} dt = \frac{\log^2 t}{2}$ 和 $\int \frac{\log t}{t^2} dt = -\frac{\log t + 1}{t}$，我们得到

$$2\int_{c^-}^{x} \frac{d\theta_\Gamma(t)}{t-1} \le \frac{2}{1-c^{-1}} \Big[B_1^\sharp \Big(\frac{T^2}{2} + T - \frac{\ell^2}{2} \Big) + B_2^\sharp \Big(\frac{1}{x} - \frac{\ell+1}{c} \Big) \Big].$$

至于（36）式右端项中的第二项：$u \mapsto \frac{u+1}{u-1}$ 是递减的，并且对于 $t \ge c$ 有 $t^k \ge c^k$，因此第 k 个积分至多为 $\nu_k \theta_\Gamma(x^{1/k}) \le \nu_k (B_1^\sharp x^{1/k} - B_2^\sharp)^T_k$，并且当 $k > T/\ell$ 时为零。

令 $x \ge c$ 和 $M(x) = \lfloor T/\ell \rfloor$，

$$\begin{aligned} V(x) := {} & \frac{2}{1-c^{-1}} \Big[B_1^\sharp \Big(\frac{T^2}{2} + T - \frac{\ell^2}{2} \Big) + B_2^\sharp \Big(\frac{1}{x} - \frac{\ell+1}{c} \Big) \Big] \\ & + T \sum_{k=2}^{M(x)} \frac{\nu_k}{k} (B_1^\sharp x^{1/k} - B_2^\sharp). \end{aligned} \tag{37}$$

设 $f(T) := e^{-3T/4} V(e^T)$。在区间 $m\ell \le T < (m+1)\ell\ (m \ge 1)$ 上，项的数量为常数，且 $f(T) = f_m(T)$，其中

$$f_m(T) := \frac{2}{1-c^{-1}} \Big[e^{-3T/4} \Big(B_1^\sharp (\tfrac{1}{2}T^2 + T) + a_1 \Big) + B_2^\sharp e^{-7T/4} \Big] + T \sum_{k=2}^{m} \frac{\nu_k}{k} \Big(B_1^\sharp e^{-\beta_k T} - B_2^\sharp e^{-3T/4} \Big), \tag{38}$$

with

$$\frac{a_1}{B_1^\sharp} = -\frac{\ell^2}{2} - \frac{\varkappa(\ell+1)}{c}.$$

现在可以证明以下命题了。

命题 4.13。

$$0 \le H(x) - \theta_\Gamma(x) \le D_2 x^{3/4},$$

with

$$D_2 = \max\Big\{ f_1(T_1),\ \sup_{m \ge 2} \max\big(\{f_m(m\ell)\} \cup \{ f_m(T) : T \in W_m \} \big) \Big\},$$

W_m 是 $(m\ell$ 中的根集，$(m+1)\ell)$ 属于

$$\begin{aligned} & T^2 - \frac{2}{3}T - \frac{8}{3} - \ell^2 - \frac{2B_2^\sharp(\ell+1)}{B_1^\sharp c} + \frac{14 B_2^\sharp}{3 B_1^\sharp} e^{-T} \\ & = \frac{4(1-c^{-1})}{3} \sum_{k=2}^{m} \frac{\nu_k}{k} \Big[(1 - \frac{3T}{4} + \frac{T}{k}) e^{T/k} - \frac{B_2^\sharp}{B_1^\sharp} \Big(1 - \frac{3}{4}T \Big) \Big]. \end{aligned}$$

证明。在（38）中舍去负项 $-\frac{\ell^2}{2}$、$-\frac{\ell+1}{c}$、$-B_2^\sharp e^{-3T/4}$，并结合 $\nu_k \le \nu_2$ 以及关于 $k \ge 3$ 的 $\beta_2 = \frac{1}{4}$ 和 $\beta_k \ge \frac{5}{12}$，可得

$$f(T) \le \Psi(T) := \frac{2B_1^\sharp}{1-c^{-1}} e^{-3T/4} \Big(\frac{T^2}{2} + T \Big) + B_1^\sharp \nu_2 T \Big(\frac{e^{-T/4}}{2} + \frac{T}{3\ell} e^{-5T/12} \Big).$$

为便于今后引用，注意到当 T 足够大时， Ψ 是递减的。

Now, 在每个 $[m\ell,(m+1)\ell]$ 上，函数 f_m 在无穷远处光滑且 $f \to 0$ ，因此上确界要么在端点处取得，要么在驻点处取得。

在 $T = m\ell$ 处，函数 f 向上跳跃了

$$f_m(m\ell) - f_{m-1}(m\ell) = \nu_m\, \ell\, (B_1^\sharp c - B_2^\sharp)\, c^{-3m/4} > 0,$$

因此每个区间的左端点都是上确界的候选点。

让我们考察 (38) 中的二次部分。对于 $a \in \mathbb{R}$ 和 $Q(T) = e^{-3T/4}\big[B_1^\sharp(\tfrac{1}{2}T^2 + T) + a\big]$ ，

$$Q'(T) = -\frac{3B_1^\sharp}{8} e^{-3T/4}\Big(T^2 - \frac{2}{3}T - \frac{8}{3} + \frac{2a}{B_1^\sharp}\Big),$$

因此， $T_\pm = \tfrac{1}{3} \pm \sqrt{25/9 - 2a/B_1^\sharp}$ 函数 Q 在 (T_-, T_+) 上递增，在 (T_+, ∞) 上递减，且最大值为 $Q = \tfrac{4}{3} B_1^\sharp (T_+ + 1) e^{-3T_+/4}$。

现在，对于每个 $c > 1$ 和 $\varkappa \in [0, 1)$，方程

$$T^2 - \frac{2}{3}T - \frac{8}{3} + \frac{2a_1}{B_1^\sharp} = -\frac{14\varkappa}{3} e^{-T}$$

恰有一个根 $T_1 \in (0, \infty)$，且 f_1 在 $[\ell, 2\ell]$ 上是单峰的，其极大值点为 $T_1 = \operatorname{med}(\ell, \widetilde{T}_1, 2\ell)$。事实上，最后一个方程的左端项在 $T > \tfrac{1}{3}$ 时严格递增，趋于 $+\infty$，并且在 $T = 0$ 处等于 $-\tfrac{8}{3} - \ell^2 - \tfrac{2\varkappa}{(\ell+1)c} < -\tfrac{14\varkappa}{3}$，而右端项为负且递增。最后，$\tfrac{25}{9} - \tfrac{2a_1}{B_1^\sharp} \ge \tfrac{25}{9}$ 得到 $T_- \le -\tfrac{4}{3} < \ell$，因此 ℓ 位于递增部分。

对（38）求导，利用 $\frac{d}{dT}\big[B_2^\sharp e^{-7T/4}\big] = -\tfrac{7}{4} B_2^\sharp e^{-7T/4}$（它给出了项 $\tfrac{14\varkappa}{3} e^{-T}$）以及 $\frac{d}{dT}\big[e^{-\beta_k T}\big] = (1 - \beta_k T)\, e^{-\beta_k T}$，可得

$$f_m'(T) = -\frac{3B_1^\sharp}{4(1-c^{-1})}\, e^{-3T/4}\Big\{T^2 - \frac{2}{3}T - \frac{8}{3} - \ell^2 - \frac{2B_2^\sharp(\ell+1)}{B_1^\sharp c} + \frac{14B_2^\sharp}{3B_1^\sharp} e^{-T} - \frac{4(1-c^{-1})}{3} \sum_{k=2}^{m} \frac{\nu_k}{k}\Big[(1 - \frac{3T}{4} + \frac{T}{k}) e^{T/k} - \frac{B_2^\sharp}{B_1^\sharp}\Big(1 - \frac{3}{4}T\Big)\Big]\Big\},$$

在括号内乘以 $e^{3T/4}$ 后，并利用 $e^{3T/4} e^{-\beta_k T} = e^{T/k}$。当 $m = 1$ 时，求和为空，且

$$f_1'(T) = -\frac{3B_1^\sharp}{4(1-c^{-1})}\, e^{-3T/4}\Big[T^2 - \frac{2}{3}T - \frac{8}{3} - \ell^2 - \frac{2B_2^\sharp(\ell+1)}{B_1^\sharp c} + \frac{14B_2^\sharp}{3B_1^\sharp} e^{-T}\Big].$$

最后，回忆一下，当 T 足够大时， Ψ 是递减的。因此，若 $m_0 \ge 2$ 满足 $\Psi(m_0\ell) \le \max\{f_1(T_1),\ \max_{2 \le m < m_0} \sup_{[m\ell,(m+1)\ell)} f_m\}$ 且 Ψ 在 $[m_0\ell, \infty)$ 上递减），那么 f 的上确界在 $m < m_0$ 处取得。□

命题 4.12 和 4.13 立即得到

命题 4.14。

$$\big|\theta_\Gamma(x) - \sum_{\lambda_k \le \frac{1}{4}} \frac{x^{s_k}}{s_k}\big| \le M\, x^{3/4},$$

其中 $M = A_{18}^\sharp + D_2$.

现在，定理 2.1 具有如下强化形式。

定理 4.15。 设 Γ 是一个余有限 *Fuchsian* 群。则

$$C_{\mathrm{Hub},\Gamma} \le R_\Gamma^\sharp,$$

其中

$$\text{(i)}\quad R_\Gamma^\sharp = \frac{4\mathcal{A}}{3e}\max\Big\{\tfrac{2(2-c^{1/2})}{\log c},\tfrac{c-2}{\log 2}\Big\} + M\Big(1+\tfrac{4}{3\log c}+\tfrac{4c^{3/4}}{3e\log c}\Big) \qquad \text{if } \ell \le \frac{4}{3};$$

$$\text{(ii)}\quad R_\Gamma^\sharp = \frac{4}{3e}\frac{\mathcal{A}(c-2)}{\log 2} + M\left(2+\frac{4}{3\log c}\right) \qquad \text{if } \frac{4}{3} < \ell \le \frac{2(1+\sqrt{5})}{3};$$

$$\text{(iii)}\quad R_\Gamma^\sharp = \frac{4}{3e}\frac{\mathcal{A}(c-2)}{\log 2} + M\frac{3\log c}{3\log c - 4} \qquad \text{if } \frac{2(1+\sqrt{5})}{3} \le \ell \le \frac{8}{3};$$

$$\text{(iv)}\quad R_\Gamma^\sharp = \frac{4}{3e}\frac{\mathcal{A}(c-2)}{\log 2} + 2M \qquad \text{if } \ell > \frac{8}{3}.$$

采用表*3*中最终得到的 M ，或者——在命题 *4.16* 和 *4.17* 自改进之后——用表 *4* 中较小的常数 M^* 替换 M 。

证明。在由命题 4.14 推导 $R_\Gamma^\sharp$ 时， M 承担了与定理 2.1（即 [3, 定理 4.1.]）的证明中 A_{21} （分别为 A'_{21} ）所起的相应作用。前述算法中需要 A_{17}、 A_{19}、 A_{20}、 $32B_1/$（$e^2\log c$）的步骤已不再需要。由于 A_{17} 不再参与其中，我们必须检查 $R_\Gamma^\sharp$ 是否仍涵盖情形 $x \in (1, c)$，尤其是 $x \in (1,2)$。我们知道

$$\left|\sum_{\lambda_k \le \frac{1}{4}} \operatorname{Li}(x^{s_k})\right| \le 2\mathcal{A}\frac{x^{3/4}}{\log x}$$

在该情形下。然而， $A_{18}^\sharp \ge 2\mathcal{A}\beta \ge 2\mathcal{A}$ ，而 $A_{18}^\sharp$ 是 $R_\Gamma^\sharp$ 中的一个加项。 □

现在正确的做法是采用一种自改进工具。

命题 4.16 (自举)。设 Γ 为余有限，且 M_{old} 是任意一个满足$\theta_\Gamma(x) \le \sum_{\lambda_k \le \frac{1}{4}} \frac{x^{s_k}}{s_k} + M_{old}x^{3/4}$($x \ge c$)的常数。令 $\Theta(t) := \min\{(B_1^\sharp t - B_2^\sharp)\log t,\ \sum_{\lambda_k \le \frac{1}{4}} \frac{t^{s_k}}{s_k} + M_{old}t^{3/4}\}$并且

$$V^\flat(x) := 2\Big[\frac{\Theta(x)}{x-1} + \int_c^x \frac{\Theta(t)}{(t-1)^2}\,dt\Big] + \sum_{k=2}^{\lfloor \log x/\ell \rfloor} \nu_k\,\Theta(x^{1/k}), \qquad \nu_k = \frac{c^k+1}{c^k-1}. \tag{39}$$

则 $0 \le H(x) - \theta_\Gamma(x) \le D_2^\flat x^{3/4}$，其中 $D_2^\flat = \sup_{x\ge c} V^\flat(x)x^{-3/4}$。

证明。(36) 的两项都只涉及 $d\theta_\Gamma$。对于第一项，利用 $\theta_\Gamma(c^-) = 0$ 作 Stieltjes分部积分，得到 $2\int_{c^-}^x \frac{d\theta_\Gamma(t)}{t-1} = 2\big[\frac{\theta_\Gamma(x)}{x-1} + \int_c^x \frac{\theta_\Gamma(t)}{(t-1)^2}\,dt\big]$。对于第二项， $u \mapsto \frac{u+1}{u-1}$ 递减，且 $t^k \ge c^k$ 在 $[c,\infty)$ 上，因此第 k 项至多为 $\nu_k\theta_\Gamma(x^{1/k})$，并且当 $k > \log x/\ell$ 时它为零。现在处处用 Θ 界定 θ_Γ ； Θ 中的第一个备选项为 $\theta_\Gamma(y) \le \pi_\Gamma(y)\log y \le (B_1^\sharp y - B_2^\sharp)\log y$。□

由于 $D_2^\flat$ 关于 M_{old} 递增，且斜率为 < 1，从命题 4.14 给出的值开始的迭代 $M_{n+1} = A_{18}^\sharp + D_2^\flat(M_n)$ 是递减的，并收敛到唯一的不动点。每次迭代所得的值都是一个有效的常数，因此其极限也是如此。注意， $D_2^\flat$ 不再以任何实质方式依赖于 $B_1^\sharp$ ， $B_2^\sharp$ ：自举之后，第 5.1 节的几何核 $K^\star$ 对最终常数的影响仅通过 H^G，也就是说，仅通过 K_2；正如下文注 5.8 对 K_0 和 K_1的观察。

此外，我们还可以利用低位数据的已知信息。

表3。带有 $\tau \geq 1$ 的余有限 Fuchsian 群算法：向 Huber 常数的传播。第 2 部分。数值列记录了 $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ 在 $\kappa = c$ 处的值； $A_{12}^{\sharp}$ 的两种形式均已列出，其中双片形式是 §5.2 中采用的形式。最后两行已由表 4 的 M^{*} 取代。

常数/函数	描述	PSL(2, ℤ) 来源
辅助测试函数		
$\varphi(y)$	$\frac{3}{4}\big(1-y^{2}\big)\,\mathbf{1}_{(-1,1)}(y)$	— (19)
$\omega(s)$	$\frac{\text{弦 } s)}{s^{3}} = \widehat{\varphi}(is)$	— (20)
阈值		
κ	阈值参数， $\kappa > 1$；用于 $\kappa = c$ 和 $\kappa = c_{+}$	$c = 6.8541020$ (25)
c_{+}	$> c$， $\log c_{+} - c_{+}^{-1/4} = \log c$ 的唯一解	11.761542277 命题 4.12
$T_{\star}$	$\log c + c^{-1/4}$	2.5428812890 命题 4.12
β	$e^{T_{\star}/4} = c^{1/4} e^{c^{-1/4}/4}$	1.8883818950 命题 4.12
δ_{+}	$c_{+}^{-1/4}$	0.5399877796 命题 4.12
κ_{*}	两个分支的唯一 $\kappa > 1$， 在此处 $D_1[\kappa]$	47.189467… (34)
$f_m(T)$	相等 $e^{-3T/4}\Big\{\frac{2}{1-e^{-T}}\Big[B_1^{\sharp}\Big(\frac{T^2}{2}+T-\frac{\ell^2}{2}\Big)+T\sum_{k=2}^{m}\frac{c^{k+1}}{k\,c^{k-1}()}\big(B_1^{\sharp}e^{T/k}-B_2^{\sharp}\big)\Big\}+B_2^{\sharp}\Big(e^{-T}-\frac{\ell+1}{c}\Big)\Big]$	$f_1(T_1) = 127.3350259$ 命题 4.13
T_1	f_1 在 $[\ell, 2\ell]$上的极大值点	2.9052259382 命题 4.13
W_m	$\big(m\ell$中的根集, $(m+1)\ell\big)$ $T^2 - \frac{2}{3}T - \frac{8}{3} - \ell^2$ –的 $\frac{2B_2^{\sharp}(\ell+1)}{B_1^{\sharp}c} + \frac{14B_2^{\sharp}}{3B_1^{\sharp}}e^{-T} = \frac{4(1-c^{-1})}{3}\sum_{k=2}^{m}\frac{c^{k+1}}{k\,c^{k-1}()}\Big[\big(1-\frac{3T}{4}+\frac{T}{k}\big)e^{T/k} - \frac{B_2^{\sharp}}{B_1^{\sharp}}\Big(1-\frac{3}{4}T\Big)\Big]$	$\emptyset$ 命题 4.13
常数 $A^{\sharp}{}_{i}$		
$A_8^{\sharp}$	$3e^{-1} - 1$	0.1036383 命题 4.1
$A_9^{\sharp}$	命题 4.1(b) 中的最小可容许常数； 上确界等于 6.42139…， 在 r 处取得 $= 2.4558\ldots$, $t = \pm 2$, 因此该值基本上是最优的— mal	6.4214 注 4.2
$A_{10}^{\sharp}$	$4\sqrt{5}A_9^{\sharp}$	57.4347476 命题 4.3
$A_{11}^{\sharp}[\kappa]$	$(\lambda-1)\Big(2+\frac{2A_8^{\sharp}}{\kappa^{1/4}}+\frac{1}{1-s_1()\kappa^{1/4}}+\frac{A_8^{\sharp}}{(1-s_1)\kappa^{3/4}}\Big)+1+\frac{A_8^{\sharp}}{\kappa^{1/4}}$	1.0640520 命题 4.4
$J_0,\ J_1$	$I_0 + 2\varepsilon I_3$, $I_1 + 2\varepsilon I_4$， 其中 $\varepsilon = e^{-u}$； $J_1 \geq 0$, 由此 K_1^{+} 中的正部	—（26）
$A_{12}^{\sharp}[\kappa]$（一部分）	$A_{10}^{\sharp}\big[K_0 + K_1^{+}\cdot\frac{\kappa^{-1/4}+\kappa^{-5/4}}{2}\cdot 14\text{ 对数}\,\kappa - 1 + \kappa^{-1/4}(1-\kappa^{-1/4})^{2} + \frac{K_2}{2}(\kappa^{-1/4}+\kappa^{-5/4})\big]$	141.620378 命题 4.5
$W_{\varepsilon}(r)$	$\frac{1}{(1+r)^{2}(1+\varepsilon r)^{2}} + \frac{2\varepsilon}{(1+r)(1+\varepsilon r)^{3}} \geq 0$	— 命题 4.7
$\mathcal{E}(\varepsilon, R_0)$	$\int_0^{R_0}\big[Q_A(r) - Q_B(r)\big]^{+} W_{\varepsilon}(r)\,dr$	0.0693634 (28)
$A_{12}^{\sharp}[\kappa]$ (两个部分)	$A_{10}^{\sharp}\sup_{u \geq \frac{1}{4}\log\kappa} p(u)\big[K_0^{\infty}J_0(\varepsilon) + K_1^{\infty}J_1(\varepsilon) + K_2^{\infty} + \mathcal{E}(\varepsilon, R_0)\big]$	32.3211 (27)
$A_{13}^{\sharp}[\kappa]$	$\frac{\lvert F\rvert}{4\pi}A_{10}^{\sharp}\big(1+\frac{1}{\kappa}\big)$	5。4845304 命题4.8
$A_{14}^{\sharp}[\kappa]$	$\frac{A_{10}^{\sharp}}{2}\Big(\frac{1}{\kappa^{1/8}}+\frac{1}{\kappa^{9/8}}\Big)\frac{E^{\sharp}}{(\kappa^{1/4}+4)^{1/2}}$	4.1457796 命题4.9
$D_1[\kappa]$	$\sup_{0<\varepsilon\leq\kappa^{-1/4}} G(\varepsilon)$, 等于 $\kappa^{-1/4}\big(\frac{\log^{2}\kappa}{32}+(\gamma+\frac{1}{2})\frac{\log 4\pi}{\kappa}+\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{4}\big)$ 当 $\kappa \geq \kappa_{*}$ 时, 以及 0.77862854 当 $1 < \kappa \leq \kappa_{*}$ 时	0。7786285 (34)

表3。（续。）

常数/函数说明		PSL(2，$\mathbb{Z}$) 来源
常数 $A_i^\sharp$ （续）		
$A_{15}^\sharp[\kappa]$	$\tau\Big[\frac{A_{10}^\sharp D_1[\kappa]}{2\pi}(1+\frac{1}{\kappa})+\frac{2\,\omega(\frac{1}{2}\kappa^{-1/4})}{\kappa^{1/4}}+\frac{2\log}{\kappa^{3/4}}\Big]$	9.7310572 命题4.10
$A_{16}^\sharp[\kappa]$	$A_{11}^\sharp[\kappa]+A_{12}^\sharp[\kappa]+A_{13}^\sharp[\kappa]+A_{14}^\sharp[\kappa]+A_{15}^\sharp[\kappa]$	52.74651 命题4.11
$A_{18}^\sharp$	$\max\Big\{A_{16}^\sharp[c_+]\,e^{3\delta_+/4}+\frac{-个\,e^{\delta_+}-1}{\delta_+},\ A_{16}^\sharp[c]+-个\,e^{c^{-1/4}/4},\ 2\mathcal{A}\beta\Big\}$；此处第一支为激活的一支	72.03096 命题 4.12
输出 D_2	$\max\Big\{f_1(T_1),\ \sup_{m\geq 2}\max\big(\{f_m(m\ell)\}\cup\{f_m(T):T\in W_m\}\big)\Big\}$	181。2996177 命题 4.13
M	$A_{18}^\sharp+D_2$	253。3306 命题 4.14

命题 4.17 （枚举截断）。设 $X_0\geq c$，并假设 θ_Γ（t）对 $c\leq t\leq X_0$已知。令

$$\Theta_{X_0}(t):=\begin{cases}\min\{\theta_\Gamma(t),\ (B_1^\sharp t-B_2^\sharp)\log t,\ \sum\limits_{\lambda_k\leq\frac{1}{4}}\frac{t^{s_k}}{s_k}+M_{\mathrm{old}}t^{3/4}\}, & t\leq X_0,\\ \min\{(B_1^\sharp t-B_2^\sharp)\log t,\ \sum\limits_{\lambda_k\leq\frac{1}{4}}\frac{t^{s_k}}{s_k}+M_{\mathrm{old}}t^{3/4}\}, & t>X_0.\end{cases}$$

那么，将 Θ 替换为 Θ_{X_0}后，命题 *4.16* 逐字成立，而 $X_0=c$ 恢复了先前的陈述。

命题 4.16 和 4.17 替换表3的输出行；由此得到的算法第三部分汇总于表 4。

5. 应用于 $PSL(2,\ \mathbb{Z})$

5.1. 模群上的谱计数。 对于 $\Gamma=\mathrm{PSL}(2,\ \mathbb{Z})$，取 $\mathcal{F}=\Big\{z=x+iy:\ |x|\leq\frac{1}{2},\ \ |z|\geq 1\Big\}$。基本常数为

$$|\mathcal{F}|=\frac{\pi}{3},\qquad \tau=1,\qquad \mathcal{A}=1,\qquad \mathcal{N}=1,\quad \sigma_1=1,\qquad c_1=1,$$
$$c=\frac{7+3\sqrt{5}}{2},\qquad \ell=\log c=1.9248473002\ldots, \tag{40}$$

因此 $|\log c_1|=0$ 且 $\ell^2/8=0.4631308\ldots$。有三个非恒等椭圆共轭类，其 $(\theta,\ m)=(\frac{\pi}{2},\ 2)$，$(\frac{\pi}{3},\ 3)$，$(\frac{2\pi}{3},\ 3)$，故

$$E=\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{25}{72}=0.3472222\ldots,\qquad \frac{1}{4}\operatorname{tr}\Big(I-\Phi(\tfrac{1}{2})\Big)=\frac{1}{2}, \tag{41}$$

后者是因为 $\phi(\frac{1}{2})=-1$。

我们来计算 $B_1^\sharp$ 和 $B_2^\sharp$ 在 $\Gamma=\mathrm{PSL}(2,\ \mathbb{Z})$ 上的值。令

$$y_*:=\frac{\sqrt{3}}{2}=\min_{z\in\mathcal{F}}\operatorname{Im}z,\qquad p_\pm:=\pm\tfrac{1}{2}+iy_*,$$

并令 dist 表示双曲距离，

$$\cosh\operatorname{dist}(z,w)=1+\frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w},\qquad z,w\in\mathbb{H}. \tag{42}$$

表 4. 对于 $\tau \geq 1$ 的余有限Fuchsian群的算法：自改进。第3部分。这些行取代表3中的行 D_2 和 M：定理 4.15 中应代入的常数为 M^*。数值列记录了在 $X_0 = 10^4$ 处的 $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$。

常数/函数描述		PSL(2, ℤ) 来源
输入		
M_{old}	任意满足 $\theta_\Gamma(x) \leq \sum$ 的常数 $\lambda_{k \leq \frac{1}{4}} \frac{x^{s_k}}{s_k} + M_{\mathrm{old}} x^{3/4}$, $x \geq c$；从表3的 M 开始	253.3306 命题 4.14
X_0	枚举截断值： $\theta_\Gamma(t)$ 已知，适用于 $c \leq t \leq X_0$；$X_0 = c$ 恢复纯自举	10^4 命题 4.17
θ_Γ的上界函数		
$\Theta(t)$	$\min\left\{(B_1^\sharp t - B_2^\sharp) \log t, \quad \sum_{\lambda_{k \leq \frac{1}{4}}} \frac{t^{s_k}}{s_k} + M_{\mathrm{old}} t^{3/4}\right\}$	— 命题 4.16
$\Theta_{X_0}(t)$	$\min\{\theta_\Gamma(t)\ \Theta(t)\}$ </style}对 $t \leq X_0$，以及 $t > X_0$的 $\Theta(t)$	— 命题 4.17
ν_k	$\frac{c^k + 1}{2}$	$\nu_2 = 1.0434984$ (39)
$V^\flat(x)$	$\left[\int_{x-1}^{x} \frac{\Theta_{X_0}(t)}{t} dt\right] + \sum_{k=2}^{\lfloor \log x/c \rfloor} \nu_k \Theta_{X_0}\left(x^{1/k}\right)$	— (39)
迭代和输出		
$D_2^\flat(M_{\mathrm{old}})$	$\sup_{x \geq c} V^\flat(x) x^{-3/4}$；随 M_{old} 递增，斜率为 < 1	0.2802273422 命题 4.16
M_{n+1}	$A_{18}^\sharp + D_2^\flat(M_n)$，从 $M_0 = A_{18}^\sharp + D_2$开始；递减，每次迭代均可容许	— 命题 4.16
M^*	$\lim_n M_n$， $M \mapsto A_{18}^\sharp +$的唯一不动点 $D_2^\flat(M)$	72.3111906 命题 4.16
$R_\Gamma^\sharp$	定理 4.15 的四种情形（i）–（iv），在 $M = M^*$；对于 PSL(2, ℤ)，适用情形（ii），得到 $3.4350075 + 2.6926956\, M^*$	198.14704 定理 4.15

对于 $Y \geq 1$，我们记 $\mathcal{F}_Y := \{z \in \mathcal{F} \colon \mathrm{Im}\, z \leq Y\}$。回顾一下，根据 [5]，平凡计数引理适用于任意可测的 K，且满足

$$\mathcal{F}_Y \subseteq K \subseteq \mathcal{F} \qquad \text{for some admissible } Y \geq 1, \tag{43}$$

并得到，其中 $|K|$ 为双曲面积， $d(K)$为 K的双曲直径，

$$\pi_\Gamma(x) \leq \frac{4\pi}{|K|}\big(\cosh(\log x + 2d(K)) - 1\big) \qquad (x > 1). \tag{44}$$

由于需要最小化的量是 $e^{2d(K)}/|K|$（忽略低阶项），因此我们希望面积大、直径小，而这两个要求彼此矛盾。我们将确定精确的最优值。

首先注意到 $\varepsilon = \mathrm{dist}_{\mathrm{Eucl}}(\mathcal{F}\ \mathbb{R}) = y_*$，因此，在集合 K_j in [5] 的定义中出现的下截断 $\varepsilon \leq \mathrm{Im}\ z$对于 $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ 是多余的：$\mathcal{F}$ 中的每个点都满足该条件。

水平截断。 我们首先记录由水平截断构成的一参数族 $K(Y) = \{z \in \mathcal{F} \colon \mathrm{Im}\, z \leq Y + 1\}$中的最优值；这是 [5] and [2]中隐含使用的族。

引理 5.1 （最优尖点高度）。 设 $b := Y + 1 \geq 2$ 且 $K(Y) = \{z \in \mathcal{F} \colon \mathrm{Im}\, z \leq b\}$。则

$$|K(Y)| = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{b}, \tag{45}$$

并且，令

$$b_* := \frac{7\sqrt{3}}{6} = \frac{7}{2\sqrt{3}}, \qquad Y_* := b_* - 1,$$

双曲直径等于

$$d(Y) = \begin{cases} \log 3, & 2 \le b \le b_*, \\ \operatorname{arcosh}\left(\dfrac{b^2+\frac{7}{4}}{\sqrt{3}\,b}\right), & b \ge b_*. \end{cases} \tag{46}$$

对于每个 $x > 1$ 上界函数 $\Pi_Y(x) := \frac{4\pi}{|K\,Y()|}$(双曲余弦(log $x + 2d(Y)) - 1$) 在所有可容许的 $Y \ge 1$ 中，于以下位置取最小值

$$Y = Y_* = \frac{7\sqrt{3}}{6} - 1 = 1.0207259421\ldots$$

证明。 可容许性和 (45) 显然成立，因为 $\mathcal{F}$ 中高于高度 b 的部分是一个宽度为 1、面积为 $1/b$的条带。

对于直径，令 $z = x+iy, w = u+iv \in K(Y)$。由于 $|x|,\ |u| \le \frac{1}{2}$我们有 $(x-u)^2 \le 1$, 且等号在$\mathcal{F}$的两条竖直边上取到；这两条边在$[y_*, b]$的每个高度处均存在。因此，由 (42) 得

$$\max_{z,w\in K(Y)} \cosh \operatorname{dist}(z,w) = \max_{(y,v)\in[y_*,b]^2} G(y,v), \qquad G(y,v) := \frac{1+y^2+v^2}{2yv}. \tag{47}$$

固定 v时，有 $\partial_y G = (y^2 - 1 - v^2)/(2y^2v)$，因此 $y \mapsto G(y,\ v)$在 $[y_*, \sqrt{1+v^2}\,]$上递减，之后递增；唯一的内部临界点是极小值点。在v中也同样如此。因此，(47) 中的最大值在 $[y_*, b]^2$的某个顶点处取到。三个顶点值为

$$G(y_*, y_*) = \frac{5}{3}, \qquad G(y_*, b) = G(b, y_*) = \frac{b^2+\frac{7}{4}}{\sqrt{3}\,b}, \qquad G(b,b) = 1 + \frac{1}{2b^2} < \frac{5}{3},$$

前者是因为 $b \ge 2$。此外， $G(y_*,\ b) \le G(y_*,\ y_*)$ 当且仅当 $3b^2 - 5\sqrt{3}\,b + \frac{21}{4} \le 0$,即对于 $b \in [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{6}]$。这证明了 (46)；注意，这两个值分别在点对 $(p_+,\ p_-)$ 和 $(p_+,\ -\frac{1}{2} + ib)$ 处取到，因此 (46) 是等式，而不仅仅是一个上界。

剩下的任务是优化。在 $2 \le b \le b_*$ 上，直径为常数，而 $A(b) := \pi/3 - 1/b$ 严格递增，因此 $\Pi_Y(x)$ 在那里严格递减。对于 $b \ge b_*$，令 $Z := \log x + 2d(b)$。于是

$$\frac{\partial}{\partial b}\Pi_Y(x) = \frac{4\pi}{A(b)}\left[2d'(b)\sinh Z - \frac{A'(b)}{A(b)}(\cosh Z - 1)\right],$$

with

$$d'(b) = \frac{4b^2-7}{b\sqrt{16b^4+8b^2+49}}, \qquad \frac{A'(b)}{A(b)} = \frac{3}{b(\pi b - 3)}.$$

函数 $L(b) := 2b\,d'(b) = 2(4b^2-7)/\sqrt{16b^4+8b^2+49}$ 严格递增，因为$L'(b) = 128b(4b^2+7)(16b^4+8b^2+49)^{-3/2} > 0$，且 $L(b_*) = 1$；而 $3/(\pi b - 3)$ 严格递减，且 $3/(\pi b_* - 3) = 0.8960\ldots < 1$。因此，对于 $b \ge b_*$，有 $2d'(b) > A'(b)/A(b)$；又由于双曲正弦 Z/(双曲余弦 $Z - 1$) = 双曲余切$(Z/2) > 1$，我们得到 $\partial_b \Pi_Y(x) > 0$ 在那里成立。因此，对于所有 $x > 1$， b_* 同时是唯一最小值点。□

在 $Y = Y_*$ 处有

$$|K(Y_*)| = \frac{\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{7} = \frac{7\pi - 6\sqrt{3}}{21} = 0.5523258919\ldots, \qquad d = \log 3,$$

由此 $\pi_\Gamma(x) \le B_+ x + B_- x^{-1} - B_0$，其中

$$B_+ = \frac{378\pi}{7\pi - 6\sqrt{3}} = 102.3827935551\ldots, \quad B_- = \frac{14\pi}{3(7\pi - 6\sqrt{3})} = 1.2639851056\ldots,$$

$$B_0 = \frac{84\pi}{7\pi - 6\sqrt{3}} = 22.7517319011\ldots$$

特别地，$\pi_\Gamma(x) < 102.383\,x - 22.567$ 对于 $x \ge c_\circ$

最优核。水平截断族并非最优：可以将 $K(Y_*)$ 的顶部角部换成 $\mathcal{F}$ 中部上方的额外高度，而不增加直径。令

$$K^\star := \{z \in \mathcal{F} :\ \operatorname{dist}(z, p_+) \le \log 3 \ \text{ and } \ \operatorname{dist}(z, p_-) \le \log 3\}.$$

根据（42），$\operatorname{dist}(x+iy,\ p_\mp) \le \log 3$ 等价于 $\big(|x| + \frac{1}{2}\big)^2 + (y - y_*)^2 \le \frac{4y_*}{3}\, y$，因此

$$K^\star = \Big\{x + iy \in \mathcal{F} :\ |x| \le W(y)\Big\}, \qquad W(y) := \min\Big\{\tfrac{1}{2},\ R(y) - \tfrac{1}{2}\Big\}, \tag{48}$$

其中

$$R(y) := \sqrt{-y^2 + \tfrac{5}{\sqrt{3}}\, y - \tfrac{3}{4}} = \sqrt{\tfrac{4}{3} - \big(y - \tfrac{5}{2\sqrt{3}}\big)^2}\,. \tag{49}$$

方程 $R(y) = 1$ 有两个根 $y = y_*$ 和 $y = b_*$，而 $R(y) = \frac{1}{2}$ 的根为$y = (5 \pm \sqrt{13})/(2\sqrt{3})$。记

$$h_0 := \frac{5 + \sqrt{13}}{2\sqrt{3}} = 2.4842086727\ldots,$$

因此，我们有 $W \equiv \frac{1}{2}$ 在 $[y_*, b_*]$上，$W = R - \frac{1}{2}$ 在 $[b_*, h_0]$上递减，并且 $W(h_0) = 0$：区域 $K^\star$ 是由圆弧 $\big(|x| + \frac{1}{2}\big)^2 + (y - y_*)^2 = \frac{4y_*}{3}\, y$ 截断的基本域，该圆弧从 $|x| = \frac{1}{2}$ 处的高度 b_* 上升至 $x = 0$处的高度 h_0。

引理 5.2（直径为 log 3 的极大核）。集合 $K^\star$ 满足 $\mathcal{F}_2 \subset K^\star \subset \mathcal{F}$,

$$d(K^\star) = \log 3,$$

and

$$|K^\star| = \frac{2\pi}{3} + \frac{10}{3}\left(\arcsin\frac{5 + 3\sqrt{13}}{16} - \arcsin\frac{13}{14}\right) - 2\arcsin\frac{\sqrt{13}}{4} = 0.6108620738\ldots \tag{50}$$

此外，如果 K 满足 （43）且 $d\,（K）\ = \log 3$，那么 $K \subseteq K^\star$。特别地，$K^\star$ 是直径为 $\log 3$ 的唯一的极大可容许核。

证明。包含关系。 $K^\star \subset \mathcal{F}$ 根据定义，且 $W(y) = \frac{1}{2}$ 对 $y \le b_*$ 给出 $\mathcal{F}_{b_*} \subset K^\star$；由于$b_* > 2$ 我们得到 $\mathcal{F}_2 \subset K^\star$，因此 (43) 在 $Y = 2$ 下成立（事实上 $K^\star \supset K(1)$）。

直径。设 $z = x + iy$、$w = u + iv \in K^\star$。由 (48)，$|x| \le W(y)$ 与 $|u| \le W(v)$，故 $(x - u)^2 \le \big(W(y) + W(v)\big)^2$，并且由 (42)，双曲余弦 $\operatorname{dist}(z, w) \le \frac{5}{3}$将由下述推出

$$\big(W(y) + W(v)\big)^2 + (y - v)^2 \le \tfrac{4}{3}\, yv, \qquad y, v \in [y_*, h_0]. \tag{51}$$

我们分三种情形验证 (51)。

(i) $y,\ v \le b_*$。此处 (51) 为 $1 + y^2 + v^2 \le \frac{10}{3} yv$，即 $G(y,\ v) \le \frac{5}{3}$，这已在引理 5.1 中证明。

(ii) $y \le b_* \le v$。现在 $W(y) + W(v) = R(v)$，由 (49) 可得，

$$R(v)^2 + (y - v)^2 - \tfrac{4}{3} yv = \tfrac{10}{3} y_* v - y_*^2 + y^2 - \tfrac{10}{3} yv = -(y - y_*)\Big(\tfrac{10}{3} v - y_* - y\Big).$$

由于 $y \ge y_*$ 和 $\frac{10}{3} v \ge \frac{10}{3} b_* > y_* + b_* \ge y_* + y$，右端为 ≤ 0，即为（51）。当且仅当 $y = y_*$时等号成立：$\partial K^\star$ 的整个上弧到对角 $p_\mp$的距离恰好为 log 3。

(iii) $y,\ v \ge b_*$。由（49）可知，函数 R 在 $y = \frac{5}{2\sqrt{3}} < b_*$ 处取得最大值，并且在 $[b_*, h_0]$上递减，因此 $R \le R(b_*) = 1$ 在那里，而 $W(y) + W(v) = R(y) + R(v) - 1 \le 1$。结合 $(y-v)^2 \le (h_0 - b_*)^2 < 0.22$ 可得 $\big(W(y) + W(v)\big)^2 + (y-v)^2 < 1.22 < \frac{4}{3} b_*^2 \le \frac{4}{3} yv$。

因此 $d(K^\star) \le \log 3$；由于 $p_\pm \in K^\star$ 且 $\operatorname{dist}(p_+, p_-) = \operatorname{arcosh} \frac{5}{3} = \log 3$，等号成立。

面积。在高度 $y \in [b_*, h_0]$ 处，$\mathcal{F} \setminus K^\star$ 的水平截面具有欧几里得宽度 $2(1 - R(y))$，且 $\mathcal{F} \setminus K^\star$ 包含 $\mathcal{F}$ 中位于 h_0以上的整个部分；因此

$$|K^\star| = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{h_0} - 2\int_{b_*}^{h_0} \frac{1 - R(y)}{y^2}\, dy.$$

利用

$$\int \frac{R(y)}{y^2}\, dy = -\frac{R(y)}{y} + \frac{5}{3} \arcsin \frac{10y - 3\sqrt{3}}{8y} - \arcsin \frac{2\sqrt{3}\, y - 5}{4},$$

结合 $R(b_*) = 1$、$R(h_0) = \frac{1}{2}$ 和 $h_0^{-1} = 2\sqrt{3}/(5 + \sqrt{13})$，直接计算可得 (50)。

极大性。若 K 是可容许的，则 $p_\pm \in \mathcal{F}_Y \subseteq K$，因此每个 $z \in K$ 都满足 $\operatorname{dist}(z, p_\pm) \le d(K) = \log 3$，即 $z \in K^\star$。□

命题 5.3. 对于 $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ 以及所有 $x > 1$,

$$\pi_\Gamma(x) \le \Pi^*(x) := \frac{4\pi}{|K^\star|}\big(\cosh(\log x + 2\log 3) - 1\big) = B_+^* x + B_-^* x^{-1} - B_0^*,$$

with

$$\begin{aligned} B_1^\sharp = B_+^* = \frac{18\pi}{|K^\star|} = 92.5719081051\ldots, \quad B_-^* = \frac{2\pi}{9|K^\star|} = 1.1428630630\ldots, \\ B_0^* = \frac{4\pi}{|K^\star|} = 20.5715351345\ldots, \textit{hence} \quad B_2^\sharp = 20.4047936607\ldots \end{aligned} \tag{52}$$

特别地,

$$\pi_\Gamma(x) \le B_1^\sharp x - B_2^\sharp < 92.572\, x - 20.404 \qquad (x \ge c).$$

证明。将 (44) 与引理 5.2 以及双曲余弦$(\log\ x + 2\log 3) = \frac{1}{2}(9x + \frac{1}{9x})$结合即可。 □

备注 5.4（最优性）。每个可容许的 K 都包含 $p_\pm$，因此 $d(K) \ge \log 3$；由引理 5.2 可知，只要 $d(K) = \log 3$，常数 $e^{2d(K)}/|K|$ 就无法改进。增大直径也无济于事：若 $d(K) = \vartheta > \log 3$，则 $K \subseteq \check{K}_\vartheta := \{z \in \mathcal{F} : \operatorname{dist}(z, p_\pm) \le \vartheta\}$，且 $\vartheta \mapsto e^{2\vartheta}/|\check{K}_\vartheta|$ 会增大,

ϑ	$\log 3$	1.1588	1.2257	1.3170	1.4254
$\lvert\check{K}_\vartheta\rvert$	0.6109	0.6448	0.6775	0.7158	0.7546
$e^{2\vartheta}/\lvert\check{K}_\vartheta\rvert$	14.733	15.743	17.129	19.457	22.930

对于 $\vartheta \ge \frac{1}{2}\log(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{9}{|K^\star|}) = 1.3681\ldots$，由平凡界 $|K| \le |\mathcal{F}| = \pi/3$可立即得到这一点。因此，$K^\star$ 是最优的，而 (52) 是从 (44) 所能得到的最佳常数。

注 5.5（与文献比较）。在 [5, 第3节。2] 和 [2, 定理 4.3。], 中，核取为 $K_1 = \{z \in \mathcal{F} : \frac{3}{2} \le \operatorname{Im} z \le 3\}$，其中 $|K_1| = \frac{1}{3}$ 和 $e^{2d_1} < 9.761757$，得到$B_1 = \frac{2\pi}{|K_1|} e^{2d_1} = 184.0048$。由于 $\min_{\mathcal{F}} \operatorname{Im} z = \frac{\sqrt{3}}{2}$，下截断应为 $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$；对于该取值，同一尖点高度 $Y = 2$ 给出 — $|K_1| = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} = 0.713864$、$d_1 =$ 反双曲余弦 $\frac{43}{12\sqrt{3}} = 1.355820$和 $B_1 = 132.4996$。算法的所有常数仍然有效，因为它们随 B_1递增。优化尖点高度可将其降至 $B_1 = B_+ = 102.3828$（引理 5.1），将水平截断替换为 $K^\star$ 则可降至 $B_1 = B_+^* = 92.5719$（命题 5.3），比已发表的数值低 1.988 倍。

定理 5.6。 设 $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$。那么，对所有 $R \geq 0$,

$$\mu(R) \leq 2.4657613\,R^2 - 1.0317867\,R + 2.1177623 \tag{53}$$

以及

$$\mu(R) \leq 2.4657613\,R^2 + 1.6018689,\ \textit{equivalently}\ \mu(R) \leq 2.4657613\Big(R^2 + \frac{1}{4}\Big) + 0.9854286. \tag{54}$$

证明。 取 $\eta = 0.035$，由于 $0.035 < \ell^2/8$，其为可容许的，并注意到 $I_{1,\ +}(\eta,\ \ {}_{1\,2})$ 中互补误差函数 erfc 的自变量等于 2.198。利用 (40)、(41) 和 (52) 可计算得到

$$\rho(0.14) = 0.4551946,\ b(\eta) = -0.9962988,\ \mathcal{H}^{\mathrm{G}}_{\max}(\eta) = 0.6196596,\ C(\eta) = 1.9668819,$$

级数 (10) 由其首项 ($b_1\mathcal{G}_1^\sharp = 0.6196596$, $b_2\mathcal{G}_2^\sharp < 5\cdot\ 10^{-10}$) 控制。因此$K_0 = 2.4657613$。由于 $b(\eta) < 0$ 且 $c_1 = 1$，选择 $R_0 = \infty$，即 (λ，ξ) $=$(1，0)，得到$K_1 = -1.0317867$、 $K_2 = 2.1177623$ 和 (53)；而选择 $R_0 = 0$，即 (λ，ξ) $=$(0，${}_{1\,2}$)，得到 $K_1 = 0$、$K_2 = 1.6018689$ 和 (54)。□–

注记 5.7（ η 和 R_0的选择）。这两个参数都可以进行真正的优化。对 η 的依赖是一种权衡： $K_0(\eta)$随 η增大而减小，而$\mathcal{H}^{\mathrm{G}}_{\max}(\eta)$则迅速增大，因此 $K_2(\eta)$也会迅速增大。取 $K^\star$ 且（λ，ξ） $=$(1，0)时：

η	0.02	0.03	0.035	0.04	0.05	0.10
$\mathcal{H}^{\mathrm{G}}_{\max}(\eta)$	0.00538	0.21750	0.61966	1.35392	4.02255	35.6738
$K_0(\eta)$	4.250839	2.862374	2.465761	2.168356	1.752118	0.920976
$K_1(\eta)$	−1.509293	−1.147617	−1.031787	−0.940065	−0.803206	−0.488346
$K_2(\eta)$	1.922436	1.797516	2.117762	2.812657	5.531841	40.539619

例如，选择 $\eta = \ell/8 = 0.2406059$ （此时 erfc 的自变量在$I_{1,\ +}(\eta,\ \ {}_{1\,2})$中已经为正）得到 $K_0 = 0.4405612$, $K_1 = -0.2657859$, $K_2 = 209.3631$，对于所有 $R \lesssim 10^2$ 而言，这都劣于式（53），且只有当 R较大时才更可取。类似地，在$\eta = 0.035$ 处选择 R_0，可在式（54）与式（53）之间进行插值：

R_0	0	1	2	3	∞
λ	0	0.894427	0.970143	0.986394	1
ξ	0.5	0.223607	0.121268	0.082199	0
K_1	0	−0.922858	−1.000980	−1.017748	−1.031787
K_2	1.601869	1.887048	1.992640	2.032950	2.117762

备注 5.8（比较）。 定理 5.6 中的首项常数为 $K_0 = 2.4657613$ =29。589$\cdot\ {}^{|}\mathcal{F}_{4\pi}{}^{|}$，即比 Weyl 常数$-{}_{1\,12}$ 大 29。59 倍。它比 [2, 定理 4.3],—中的常数 40 313。68 小 1。63 $\cdot\ 10^4$ 倍，比 [5, 定理 3.4] 中的常数 1 682 997 小 6。83 $\cdot\ 10^5$ 倍。造成这种差异的机制有两个，且彼此独立：

- 用直接正主函数替代 Tauberian 步骤，从而消除了首项常数的膨胀；
- 对几何核进行优化，在当前框架中，这只影响$\mathcal{H}_{\mathrm{Gmax}}$，因此只影响 K_2。例如，在 $\eta = \ell/8$ 处，连续核给出

核	$B_1^\sharp$	K_2
$\lvert K_1\rvert = \frac{1}{3}$， $e^{2d_1} = 9.761757$ （已发表）	184.0048	415.499
$\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $Y = 2$	132。4996	300。651
$\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $Y = Y_*$	102.3828	231.440
$K^\star$	92.5719	209.363

当 K_0 和 K_1 保持不变时。（相比之下，在陶伯算法中， B_1会传播到首项常数中。）

5.2. **模群上的Huber常数**。 相应Selberg迹公式中的椭圆贡献，即表2中的常数 $E^\sharp$ ，在此处为

$$E^\sharp = \sum_R \frac{1}{2m_R \sin\theta_R}\sqrt{\frac{\pi - 2\theta_R}{\pi\sin(2\theta_R)}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{\pi}} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}} = 0.3798407141\ldots$$

我们回顾一下

$$B_1^\sharp = 92.5719081051\ldots, \qquad B_2^\sharp = 20.4047936607\ldots, \qquad \varkappa = B_2^\sharp/B_1^\sharp = 0.2204\ldots$$

由于 $\mathcal{A} = 1$， $A_{11}^\sharp[\kappa] = 1 + A_8^\sharp \kappa^{-1/4}$ 且未出现 s_1。

阈值为

$$c_+ = 11.761542277\ldots,\ \delta_+ = c_+^{-1/4} = 0.5399877796\ldots,\ T_\star = 2.5428812890\ldots,$$
$$\beta = 1.8883818950\ldots$$

c 和 c_+ 均低于 $\kappa_* = 47.1895$，因此由（34）可得

$$D_1[c] = D_1[c_+] = 0.7786285303\ldots$$

就常数 $A_i^\sharp$ 而言， $A_8^\sharp = 0.1036383$、 $A_9^\sharp = 6.4214$、 $A_{10}^\sharp = 57.4347476$。对于 $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$，有 $\Lambda(\frac{1}{4}\log c) = 0.9484592\ldots$ 和 $\Lambda(\frac{1}{4}\log c_+) = 1.1860291\ldots$，而（54）中的常数给出 $K_2/K_0 = 0.6496\ldots$。因此，我们可以应用推论 4.6

$$A_{12}^\sharp[c] = A_{12}^\sharp[c_+] = A_{10}^\sharp K_0 = 141.620378\ldots$$

由此可得

	$\kappa = c$	$\kappa = c_+$
$A_{11}^\sharp[\kappa]$	1.0640520	1.0559634
$A_{13}^\sharp[\kappa]$	5.4845304	5.1931679
$A_{14}^\sharp[\kappa]$	4.1457796	3.5952482
$A_{15}^\sharp[\kappa]$	9.7310572	9.0287545

得到

$$A_{16}^\sharp[c] = 162.0458, \quad A_{16}^\sharp[c_+] = 160.4935, \quad A_{18}^\sharp = 241.9520.$$

D_2 仅取决于 c、 $B_1^\sharp$、 $B_2^\sharp$，且完全确定。可得 $\widetilde{T}_1 \in (\ell,\ 2\ell)$，并且

$$T_1 = 2.9052259382\ldots, \qquad f_1(T_1) = 127.3350259\ldots,$$

而在满足 $m \geq 2$ 的每个区间上，函数 f_m 递减，因此 $W_m = \emptyset$，只需考虑左端点：

m	$m\ell$	$f_m(m\ell)$	$\Psi(m\ell)$
2	3.84969	181.2996177	256.894
3	5.77454	139.1439195	180.153
4	7.69939	91.0051540	119.491
5	9.62424	58.4333947	78.899
6	11.54908	38.2185682	52.163

由于 Ψ 在 $[3\ell, \infty)$ 上递减，且 $\Psi(3\ell) = 180.153 < 181.2996$，因此没有 $m \geq 3$ 能够产生贡献。因此

$$D_2 = f_2(2\ell) = 181.2996177\ldots$$

在 $x = c^2 = 46.97871\ldots$ 处取到

$$M = A_{18}^\sharp + D_2 = 241.9520 + 181.2996177\ldots = 423.2516177\ldots$$

关于 $R_{\Gamma}^{\sharp}$，这里 $\tfrac{4}{3}<\ell=1.9248473\le \tfrac{2}{(1+\sqrt{5})/3}=2.1573790$，因此适用最终定理的情形（ii）：

$$R_{\Gamma}^{\sharp}=\frac{4}{3e}\,\frac{\mathcal{A}(c-2)}{\log 2}+M\Big(2+\frac{4}{3\log c}\Big)=3.4350070+2.6926956\,M.$$

因此 $C_{\mathrm{Hub},\ \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})}<1144$。

联合上确界方法目前已经使我们取得了这些进展。

两段形式。让我们看看命题4.7带来了什么。令 Q_A 为命题 3.5 的逐点包络

$$Q_A(r):=\inf_{\eta>0}\mathcal{P}(r,\eta),$$

由于该命题只要求 $\mu\le Q_A$ 逐点成立，它因此满足命题4.7中的可容许性条件。使其最小化的 η 从 $r=0$ 处的 0.0246 增加到 $r=3$处的 0.719；允许η 随 L增长，从而使 $H^{G}(\eta,\ L)$ 保持较小，正是 Q_A 在此处有用的原因，而这正是定理 3.1 的冻结值 $\mathcal{H}^{\mathrm{G}}_{\max}(\eta)=H^{G}(\eta,\ 1/2)$ 所不允许的。

现在，取命题 3.3 中的 Q_B，其中

$$\eta=\frac{\ell^2}{8}=0.4631296\ldots,\qquad R_0=3,\qquad L_0=\sqrt{9.25}=3.0413813\ldots$$

那么 $b(\eta)=-0.1166936\ldots$, $H^{G}(\eta,\ L_0)=6.50\cdot 10^{-6}$ 并且

$$K_0^{\infty}=0.2859241,\qquad K_1^{\infty}=-0.1829078,\qquad K_2^{\infty}=1.1079988.$$

在 $[0,0.10502]$ 上以及在 $[2.18305,R_0]$上，$Q_A\le Q_B$ 成立，因此 (28) 的被积函数支撑在中间区间上，并且

$$\mathcal{E}(\varepsilon,R_0)=0.0693634,\qquad A_{12}^{\sharp}[c]=32.3211,\qquad A_{12}^{\sharp}[c_+]=28.2859,$$

在这两种情况下，(27) 中的上确界均在左端点 $u=\tfrac14\log\kappa$ 处取得。

由此，表3给出

$$A_{16}^{\sharp}[c]=52.74651,\quad A_{16}^{\sharp}[c_+]=47.15905,\quad A_{18}^{\sharp}=72.03096,\quad M=253.3306,$$

由此可得 $C_{\mathrm{Hub},\ \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})}<686$。

选择 $\eta=\ell^2/8$ 基本上是最优的。对 (η,R_0) 进行二维搜索，在 (η,R_0) 处得到$R_{\Gamma}^{\sharp}=685.13\approx(0.60,3.2)$，因此方便的选择 $\eta=\ell^2/8$ 会损失 0.3%。不再提高的原因在于，e^{η}会乘上 K_2^{∞} 中的结构常数 $E+\tfrac14\mathrm{tr}(I-\Phi(\tfrac12))+\mathrm{N}_{2}\,\overline{\mathrm{A}'}=0.347$。在 $\eta=1$ 处（它在命题 3.3 中可容许，但在定理 3.1 中不可容许），$K_0^{\infty}(0.2859\to0.2265)$ 上的增益在 $A_{12}^{\sharp}$中相当于 2.3，而 K_2^{∞}上的损失则要付出 7.7。还要注意，曲面极其平坦：任意满足$\eta\in[0.3,0.8]$ 且 $R_0\ge 2.5$ 的 (η,R_0) 都给出 $R_{\Gamma}^{\sharp}\in[685,697]$。将 R_0 取到 3 以上毫无收益，因为在该处 $H^{G}(\eta,L_0)$ 已低于 10^{-5}。

常数 M受 $D_2=181.2996$支配，而后者对界 686 的贡献为 $2.6927\cdot D_2=488.2$。膨胀的来源在于公式 (37) 中使用了 $\pi_{\Gamma}(x)\le B_1^{\sharp}x-B_2^{\sharp}$：在 $x=c^2$处，有 $\Pi(c^2)\log c^2=16663$，而 $\theta_{\Gamma}(c^2)=31.7$

自举。关于自改进，命题 4.14 与 $\mathcal{A}=1$、$s_0=1$ 给出$\theta_{\Gamma}(x)\le x+Mx^{3/4}$（对 $x\ge c$ 而言），而且正如已经指出的，这可以反馈到 (36) 中，其中只出现 θ_{Γ}。

对于 $\Gamma=\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$，其中 $A_{18}^{\sharp}=72.03096$:

n	0	1	2	3	4	5	$\to\infty$
M_n	253.331	177.148	145.765	132.837	127.511	125.317	123.7805

$D_2^{\flat}$ 中的上确界在整个过程中均于 $x=c^2$ 处取得。因此

$$D_2^{\flat}=51.7495,\qquad M=123.7805,\qquad R_{\Gamma}^{\sharp}=3.4350+2.6927\,M=336.74,$$

因此

$$C_{\mathrm{Hub},\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})} < 337. \tag{55}$$

注记 5.9（剩余权重所在之处）。 三个独立块构成 $M = A_{18}^{\sharp} + D_2$。

（*i*）谱块。 根据命题 4.5 和推论 4.6 的证明，$A_{12}^{\sharp}[\kappa] \geq A_{10}^{\sharp} \lim_{u\to\infty} K_0 F(u) = A_{10}^{\sharp} K_0$ 对于 μ 的任意上界函数，只要其精确阶为 $K_0 R^2$，无论阈值 κ取何值。根据注记 3.4，现有方法无法将 K_0 降至 $e\,|\mathcal{F}|/(4\pi) = e/12 = 0.2265\ldots$以下，因此

$$A_{12}^{\sharp}[\kappa] \;\geq\; A_{10}^{\sharp} \cdot \frac{e}{12} \;=\; 13.0103\ldots$$

在这一框架内，这是 PSL(2, $\mathbb{Z}$) 的绝对下限。两段估计实现了$A_{12}^{\sharp}[c] = 32.3211$，比下限 $A_{10}^{\sharp} e/12 = 13.0103$ 高出 2.48 倍（正如已经观察到的，这在定理 3.1 内确实无法达到）。损失来自常数 $K_2^{\infty} = 1.108$，而该常数几乎完全是 $e^{\eta}(E + \tfrac{1}{4}\mathrm{tr}(I - \Phi(\tfrac{1}{2})) + \mathcal{N}_2 - \mathcal{A}')$，因此具有结构性。将 $\mathcal{E}$降至零——任何 Q_A 的选择所能达到的最佳结果——将得到 $A_{12}^{\sharp}[c] = 30.9104$。

（*ii*） κ相关的块。 $A_{11}^{\sharp} + A_{13}^{\sharp} + A_{14}^{\sharp} + A_{15}^{\sharp} = 20.4254$ 在 $\kappa = c$处。这里构造的常数 $A_9^{\sharp}$根据注记 4.2 是最优的。

（*iii*）切比雪夫块。在命题 4.16 之前，它是 $D_2 = 181.3$ 并且支配一切；自举之后，它为 51.75，如今再次成为最大的单项贡献。它在 $x = c^2$ 处取到，其驱动因素是 $\Theta(c) = 531.2$ 和 $\Theta(c^2) = 2268.1$，也就是说，正是被界定的常数 M。

总体上界 (55) 大约比 [5] 的值低 $4.9 \cdot 10^{10}$ 倍。

枚举的优势。最后一步需要使用命题 4.17。

[5] 的表 4 列出了 $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ 的本原长度谱，范围截至 623。为了进一步推进，我们通过两条相互独立的路径自行枚举了该谱，并在每个范数处对其进行了比较。

(a) 二次型。 这是 [5]所采用的 [9] 方法。对于迹 $t > 2$，具有特征值 $\varepsilon_t = \frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$ 的本原双曲类由判别式 $d = (t^2-4)/f^2$, $d \equiv 0, 1 \pmod 4$ 非平方数标记；其基本自同构相同，即 $x^2 - dy^2 = 4$的最小解具有 $x = t$；每个判别式贡献 $h(d)$，即判别式为 d的本原型的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 类的数量。我们通过计算约化型的循环来求得 $h(d)$，这不依赖任何类数库。

(b) 切割序列。 Γ 的每个双曲共轭类都有唯一代表元 $R^{a_1}L^{b_1}\cdots R^{a_n}L^{b_n}$, $a_i, b_i \geq 1$，其中 $L = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$、 $R = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$，在序列对的循环旋转意义下唯一；当且仅当该循环词不是一个真幂时，这个类才是本原的。由于正词的迹在追加字母时不会减小，因此可通过带剪枝的深度优先搜索生成迹为 $\leq T$ 的所有类。范数为 $N = \varepsilon_t^2$。

这两个枚举在不超过 $N \leq 10^6$ 的范围内对每个重数都一致。作为进一步的检验，将 $\pi_\Gamma(10^4) = 1214$ 与 $\mathrm{li}(10^4) = 1246$ 进行比较，并将 $\pi_\Gamma(10^6) = 78441$ 与 $\mathrm{li}(10^6) = 78628$进行比较。

注 5.10。（与 [5, 表 4], 的比较及一项修正）。带有 $\varepsilon_d^2 \leq 623$ 的三十三组（判别式，重数）中，有三十二组与 [5, 表 4],所列完全一致，包括非基本的 32、45、96、117、192、252、320、396、480、525。缺失的一组是（d，h）=（621，6），位于最后一行。事实上，$621 = 3^2 \cdot 69$ 且 $\varepsilon_{621} = \frac{25+\sqrt{621}}{2} = \frac{25+3\sqrt{69}}{2} = \varepsilon_{69}$，因此范数 622.99839 对应的是 $h(69) + h(621)$ 个 $= 2 + 6 = 8$ 类，而非 2 个；切割序列的方法明确列出了八个词，其中包括 RL^{23}、 $R^{23}L$ 和 $RLRL^7$。这一遗漏与 [5, 第 31], 页所重现的 PARI/GP 列表相符，其循环运行至 $\texttt{MaxD} = 10^4$：印出的表格是较长运行结果中截取的三十二行，而截断恰好落在 $n = 623$的并列处。因此

$$\pi_\Gamma(623) = 104, \qquad \theta_\Gamma(623) = 560.2999089\ldots$$

而不是 98 和 521。6926452。

截断数据。我们取

$$X_0 = 10^4, \qquad \pi_\Gamma(X_0) = 1214, \qquad \theta_\Gamma(X_0) = 9836.3556490\ldots,$$

由 98 个不同范数 ε_t^2, $3 \le t \le 100$ 承载，这些范数来自 170 个（判别式，重数）对。谱列于附录中的表 8；范数由 t 精确给出，至$N = \left(\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^2$。如表 5 所示，改用 $X_0 = 10^5$ 或 10^6 不会改变以下内容。

迭代收敛了。由于 $D_2^\flat$ 取决于 M_{old}，且输出 $M = A_{18}^\sharp + D_2^\flat$ 可以重新代入，因此从 $M_0 = A_{18}^\sharp + D_2 = 253.331$ 开始迭代 $M_{n+1} = A_{18}^\sharp + D_2^\flat(M_n)$。到 $X_0 = 10^4$ 时，跳跃已下移得很远，以至于 M_{old} 根本无法再达到上确界：

$$D_2^\flat(M) = 0.2802273422 \quad \text{for every } M \in [60, 254],$$

常数精确到小数点后十二位。因此，迭代只需进行一轮便会终止，不动点就是 $M^* = A_{18}^\sharp + 0.2802273422$。表 5 记录了这一过程。

表 5. 随着枚举范围的扩展，自举过程的变化。从 $X_0^* = 2002.94$ 起，各常数保持不变。

X_0	$\pi_\Gamma(X_0)$	$D_2^\flat$	M^*	$R_\Gamma^\sharp$	上确界位于
623	104	0.6669686	72.6979319	199.18841	$x = X_0^2+$
1000	155	0.4688471	72.4998104	198.65493	$x = X_0^2+$
1500	225	0.3469469	72.3779102	198.32669	$x = X_0^2+$
2000	285	0.2805316	72.3114949	198.14785	$x = X_0^2+$
2500	363	0.2802273	72.3111906	198.14704	$x = c^2+$
5000	654	0.2802273	72.3111906	198.14704	$x = c^2+$
10^4	**1214**	**0.2802273**	**72.3111906**	**198.14704**	$x = c^2+$
10^5	9558	0.2802273	72.3111906	198.14704	$x = c^2+$
10^6	78441	0.2802273	72.3111906	198.14704	$x = c^2+$

关于 $D_2^\flat(M)$ 的计算：在 $[c, 10^{14}]$ 上，$V^\flat(x)x^{-3/4}$ 在含有 2×10^5 个点的对数网格上求值，同时也取 Θ_{X_0} 每个跳跃点处的右极限，即 98 个范数 N 对应的点 N^k，以及点 X_0^k、c^k。在 $[c, X_0]$ 上，(39) 中的积分可用闭式求出（被积函数为分段常值）；超过 X_0 后，被积函数为 $(t + Mt^{3/4})(t-1)^{-2}$，其原函数是初等函数，

$$\log(t-1) - \frac{1}{t-1} + M\Big[-\frac{t^{3/4}}{t-1} + \frac{3}{4}\log\frac{t^{1/4}-1}{t^{1/4}+1} + \frac{3}{2}\arctan t^{1/4}\Big].$$

上确界取得之处。现在，上确界在 $x \downarrow c^2 = 46.97871$ 处取得；$x \downarrow c^2 = 46.97871$ 是所列范围内的平台点，此处 $k = 2$ 项随$\Theta(x^{1/2}) = \theta_\Gamma(c) = \ell$切换为启用。由于那里有 $\lfloor \log x/\ell \rfloor = 2$，只有 $k = 2$ 作出贡献，而 $D_2^\flat$ 具有闭式

$$D_2^\flat = c^{-3/2}\Big[\frac{2\theta_\Gamma(c^2)}{c^2-1} + 2\int_c^{c^2} \frac{\theta_\Gamma(t)}{(t-1)^2}\,dt + \nu_2\ell\Big], \tag{56}$$

仅涉及前五个范数 c、$7+4\sqrt{3}$、$\frac{23+5\sqrt{21}}{2}$、$17+12\sqrt{2}$、c^{2-}，其重数分别为 1、2、2、3、2。此处 $\theta_\Gamma(c^2) = 31.7357481$，积分为 0。8197233，$\nu_2 = 1.0434984$以及 $c^{3/2} = 17.9442719$：

表6。 $V^{\flat}(x)x^{-3/4}$ 在 $x = c^2+$、 $X_0 = 10^4$处的分解。

term	值	$\div\, x^{3/4}$
$2\Theta(x)/(x-1)$	1.3804539	0.0769305
$2\int_c^x \Theta(t)(t-1)^{-2}\,dt$	1.6394466	0.0913630
$\nu_2\,\Theta(x^{1/2})$	2.0085751	0.1119338
$\sum_{k\ge 3}\nu_k\Theta(x^{1/k})$	0	0
总计	5.0284756	0.2802273

前两个极大值已被压低到远低于该值的位置。在 $X_0 = 10^4$ 处，$x = X_0^2 = 10^8$ 的截断跳跃仅给出 0。0870892——其 $k = 2$ 项已从 0。65499 降至 0。0864958——而 $x = X_0$ 正上方的次级隆起给出 0。1247787。因此

$$0.0870892\ (x = X_0^2+), \qquad 0.1247787\ (x = X_0+), \qquad \mathbf{0.2802273}\ (x = c^2+),$$

前两项分别按 $\nu_2 M X_0^{-3/4}$ 和 $\nu_2 X_0^{-1/4}$ 衰减，因此这一排序是永久性的。

备注 5.11（计数分支不起作用）。 在 M^* 处，对于所有 $t \ge c$,

$$\frac{(B_1^\sharp t - B_2^\sharp)\log t}{t + M^* t^{3/4}} \;\ge\; 3.7451,$$

该比值在 $t = c$ 处最小，并且逐渐增加（在 $t = c$处为3.75，在 $t = 20$处为7.73，在 $t = 623$处为38.2，在 $t = 10^4$处为102.9）。因此， $\Theta_{X_0}(t) = \min\{\theta_\Gamma(t)\,(t \le X_0)\ \ t + M^* t^{3/4}\}$ ，最终的常数完全不依赖于 $B_1^\sharp$ ， $B_2^\sharp$ 。现在，上确界在 $x = c^2$处取得，此时 Θ 仅由枚举数据给出，因此它们也不依赖于 M_{old} ：计数引理和自举输入都已不起作用，而（56）是无条件成立的。

注记 5.12。 扩展后，下取整函数保持不变：在枚举范围内的最大值仍为 0.2802273422，在 $x = c^2$ 处取得；对于 $X_0 = 623$，10^3，10^4，10^5 以及 10^6 ，结果也相同。交叉点为

$$X_0^* = 2002.94\ldots,$$

且极限 $D_2^\flat \to 0.2802273$, $M \to 72.3111906$, $R_\Gamma^\sharp \to 198.14704$ 对每个 $X_0 \ge X_0^*$ 都能取到，而不仅仅是趋近于它们。在 $X_0 = 10^4$ 处，跳跃裕度为 3.2 倍，因此这一选择并不微妙。其余所有可利用之处都在 $A_{18}^\sharp$， $R_\Gamma^\sharp$ 现在通过$R_\Gamma^\sharp = 3.4350075 + 2.6926956(A_{18}^\sharp + 0.2802273)$依赖于它。

Huber 常数。 如前所述，定理 4.15 的情形（ii）适用：

$$R_\Gamma^\sharp = \frac{4}{3e}\,\frac{\mathcal{A}(c-2)}{\log 2} + M\Big(2 + \frac{4}{3\log c}\Big) = 3.4350075 + 2.6926956\,M.$$

由此得到 $M = M^* = 72.3111906422$

$$C_{\mathrm{Hub},\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})} \le R_\Gamma^\sharp = 198.147 \tag{57}$$

相比之下， [2] 中的数值为 224 615 135（相差 1.1×10^6 倍），而[5] 中的数值为 16 607 349 020 658（相差 8.3×10^{10} 倍）。这一结果值得以结论定理的形式陈述。

从联合上确界的单块形式所给出的第一个界，到 (57)，整个细化过程总结于表 7。每一步都恰好修改 M 的一个块，因此各项贡献具有可加性，可以直接读出。

表 7。PSL(2，ℤ) 上每次细化的贡献。其中，D 表示切比雪夫块（第 0–1 行为 D_2，第 2–3 行为 $D_2^{\flat}$），$M = A_{18}^{\sharp} + D$ 和$R_{\Gamma}^{\sharp} = 3.4350075 + 2.6926956\,M$，因此一个单位的 M需要 2。6927 个单位的界。最后两列给出了该步骤实现的减少量及其占总减少量 $1143.12 \to 198.15$ 的份额。

细化	$A_{12}^{\sharp}[c]$	$A_{18}^{\sharp}$	D	M	$R_{\Gamma}^{\sharp}$	界	$\Delta R_{\Gamma}^{\sharp}$	份额
0 单个部分（定理 3.1）	141.6204	241.9520	181.2996	423.2516	1143.12	1144	—	—
1 两个部分（命题 4.7）	32.3211	72.0310	181.2996	253.3306	685.58	686	457。55	48。4%
2 自举（命题 4.16）	32.3211	72.0310	51.7495	123.7805	336.74	337	348。84	36。9%
3 截断值 $X_0 = 10^4$ (命题 4.17)	32.3211	72.0310	0.2802	72.3112	198.15	199	138。59	14。7%
总计							944.98	100%

步骤 1 仅作用于谱块：将冻结高斯上界函数替换为命题 3.3 的局部界，使 $A_{12}^{\sharp}[c]$ 除以 4.38，进而使 $A_{18}^{\sharp}$ 除以 3.36；而 D_2 仅取决于 c，$B_1^{\sharp}$，$B_2^{\sharp}$，不受影响。步骤 2 和 3 仅作用于切比雪夫块：自举将 $\pi_{\Gamma}(x)\log x$ 替换为 $x + M_{\mathrm{old}} x^{3/4}$（位于 Θ 内），使 D 除以 3.50；枚举则将其替换为 X_0 以下的真实 θ_{Γ}，使 D 进一步除以 184.7。步骤 3 完成后，切比雪夫块已变得可忽略（仅为 M 的 0.4%），剩余的全部效力都集中在 $A_{18}^{\sharp}$，也就是谱计数函数中。

定理 5.13。 对于模群，以下关于 *Huber* 常数的有效上界成立

$$C_{\mathrm{Hub},\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})} < 199.$$

注 5.14。 Friedman、Jorgenson 和 Kramer [5] 报告称，PARI/GP 计算显示$C_{\mathrm{Hub},\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})} < 2$ 其预期真实值为 $\log 2$。我们大幅改进后的界仍是后者的 287 倍。

附录 A. 截至 10^4 的长度谱

表 8. PSL(2, $\mathbb{Z}$) 截至 10^4 的本原长度谱：98 个范数上的 1214 个类，按迹 t 编号，且具有 $N = \left(\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^2$。通过切割序列和二元三次型的类数独立重新计算；带有 $t \le 25$ 的行与 [5, 表 4] 一致，但省略了位于 $t = 25$ 的数对 $(d, h) = (621, 6)$。

t	$N = \varepsilon_t^2$	重数	π_Γ	θ_Γ	t	$N = \varepsilon_t^2$	重数	π_Γ	θ_Γ
3	6.8541	1	1	1.9248	52	2701.9996	18	388	2648.5504
4	13.9282	2	3	7.1927	53	2806.9996	8	396	2712.0694
5	22.9564	2	5	13.4599	54	2913.9997	12	408	2807.7968
6	33.9706	3	8	24.0364	55	3022.9997	12	420	2903.9648
7	46.9787	2	10	31.7357	56	3133.9997	16	436	3032.7659
8	61.9839	4	14	48.2432	57	3246.9997	8	444	3097.4498
9	78.9873	2	16	56.9818	58	3361.9997	24	468	3292.3368
10	97.9898	6	22	84.4910	59	3478.9997	8	476	3357.5728
11	118.9916	3	25	98.8282	60	3597.9997	12	488	3455.8304
12	141.9930	4	29	118.6513	61	3718.9997	10	498	3538.0425
13	166.9940	4	33	139.1231	62	3841.9997	28	526	3769.1474
14	193.9948	6	39	170.7301	63	3966.9997	8	534	3835.4335
15	222.9955	4	43	192.3587	64	4093.9998	16	550	3968.5100
16	253.9961	6	49	225.5826	65	4222.9998	18	568	4118.7794
17	286.9965	4	53	248.2205	66	4353.9998	16	584	4252.8410
18	321.9969	7	60	288.6423	67	4486.9998	8	592	4320.1125
19	358.9972	4	64	312.1755	68	4621.9998	16	608	4455.1298
20	397.9975	10	74	372.0400	69	4758.9998	10	618	4539.8078
21	438.9977	2	76	384.2090	70	4897.9998	36	654	4845.6847
22	481.9979	12	88	458.3443	71	5038.9998	8	662	4913.8844
23	526.9981	4	92	483.4131	72	5181.9998	8	670	4982.3080
24	573.9983	4	96	508.8236	73	5326.9998	14	684	5102.4356
25	622.9984	8	104	560.2999	74	5473.9998	30	714	5360.6685
26	673.9985	12	116	638.4586	75	5622.9998	12	726	5464.2840
27	726.9986	5	121	671.4033	76	5773.9998	16	742	5602.8619
28	781.9987	8	129	724.6981	77	5926.9998	14	756	5724.4837
29	838.9988	8	137	778.5558	78	6081.9998	28	784	5968.4502
30	897.9989	14	151	873.7581	79	6238.9998	16	800	6108.2674
31	958.9990	4	155	901.2217	80	6397.9998	24	824	6318.5972
32	1021.9990	8	163	956.6578	81	6558.9998	6	830	6371.3288
33	1086.9991	4	167	984.6225	82	6721.9999	32	862	6653.3493
34	1153.9991	16	183	1097.4383	83	6886.9999	18	880	6812.4223
35	1222.9992	8	191	1154.3108	84	7053.9999	8	888	6883.3131
36	1293.9992	8	199	1211.6348	85	7222.9999	20	908	7061.0136
37	1366.9993	8	207	1269.3978	86	7393.9999	24	932	7274.8158
38	1441.9993	18	225	1400.3259	87	7566.9999	8	940	7346.2682
39	1518.9993	4	229	1429.6291	88	7741.9999	20	960	7525.3565
40	1597.9994	16	245	1547.6533	89	7918.9999	8	968	7597.1727
41	1678.9994	8	253	1607.0609	90	8097.9999	36	1004	7921.1501
42	1761.9994	12	265	1696.7513	91	8278.9999	12	1016	8029.4078
43	1846.9995	12	277	1787.0071	92	8461.9999	36	1052	8354.9681
44	1933.9995	8	285	1847.5459	93	8646.9999	8	1060	8427.4878
45	2022.9995	6	291	1893.2199	94	8833.9999	28	1088	8681.9060
46	2113.9995	16	307	2015.7213	95	9022.9999	16	1104	8827.6265
47	2206.9995	10	317	2092.7152	96	9213.9999	18	1122	8991.9392
48	2301.9996	14	331	2201.0967	97	9406.9999	24	1146	9211.5202
49	2398.9996	4	335	2232.2279	98	9601.9999	32	1178	9504.9514
50	2497.9996	28	363	2451.2788	99	9798.9999	8	1186	9578.4717
51	2598.9996	7	370	2506.3190	100	9997.9999	28	1214	9836.3556

致谢

谨向我的同事 Zenan Šabanac 致以谢意，感谢他富有启发性的交流，以及在准备稿件最终版本过程中给予的慷慨帮助。

参考文献

[1] S. J. Arakelov, 《算术曲面上除子的交叉理论（俄文）》, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **38** （1974）, 1179–1192。[2] M. Avdispahić, 《Huber 常数和 Faltings δ函数的有效界》, Math. Comp. **90** （2021）, 第331期, 2381–2414。[3] M. Avdispahić, 《关于 Huber 常数的有效上界》, Results Math. **79** （2024）, 第5期, 178。[4] J. Fischer, 《通过 Selberg ζ函数研究 Selberg迹公式的一种方法》, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1253, Springer-Verlag, Berlin, 1987。[5] J. S. Friedman, J. Jorgenson 和 J. Kramer, 《余有限 Fuchsian 群的 Huber常数的一个有效界》, Math. Comp. **80** （2011）, 第274期, 1163–1196。[6] D. A. Hejhal, 《关于 PSL(2, ℝ), 第一卷的 *Selberg*迹公式》, *Lecture Notes in Mathematics, vol. 548, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1976*。*PARI*小组, 波尔多, 《*PARI/GP*》, 。*B. Randol*, 《*Selberg*迹公式》, 载于: *I. Chavel*（编）, 《黎曼几何中的特征值》, *Academic Press, 1984,* 第*266–302*页。*P. Sarnak*, 《不定二元二次型的类数》, *J. Number Theory 15* （1982）, 229–247。[10] A. B. Venkov, 《自守函数的谱理论》, Proc. Steklov Inst. Math. **153** （1982）, ix+163。

数学与计算机科学系，理学院，萨拉热窝大学，波斯尼亚和黑塞哥维那萨拉热窝 Zmaja od Bosne 33–35, 71000电子邮件地址： mavdispa@pmf.unsa.ba