arXiv:2611.32404v1 [math.QA] 24 Nov 2026

非交换 $\mathcal{R}(p,q)$–第一类和第二类变形贝塔函数：贝塔-伽马关系、移位恒等式与对称化

KAWÈYIM LANKPETRE、ISIAKA AREMUA 和 JOSEPH DÉSIRÉ BUKWELI KYEMBA

摘要。我们发展了与 Hounkonnou 和 Bukweli Kyemba 的 $\mathcal{R}(p,q)$–变形量子代数相关的贝塔函数理论，研究其变形数由两个变形函数 $\phi_1 > \phi_2 > 0$生成的结构函数。基于变形积分的 Jackson 型级数表示，我们在 $[0,1]$ 上利用变形幂$(1 \ominus \phi_2 t)^{y-1}$定义第一类贝塔函数，并将其扩展到复指数；同时，从$(1 \oplus \phi_1 t)^{-x-y}$半直线上定义第二类贝塔函数。对于所有具有正实部的复参数，第一类函数等于 $\phi_1^{(y-1)(2x+y-2)/2}\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)/\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)$；我们推导出其一般移位恒等式、交换缺陷$\phi_1^{(y-x)(x+y-1)/2}$、在常数因子意义下唯一的交换对称化、其渐近性，以及针对变形高斯超几何函数的变形欧拉积分，由此得到一个变形高斯求和公式。第二类函数通过 Ramanujan 的 ${}_1\psi_1$ 求和公式求得，并涉及第二个变形伽马函数；该函数与第一个变形伽马函数相差一个一周期 θ 商，因此其交换缺陷在单参数情形下仍然存在。我们证明了变形伽马函数的 Bohr-Mollerup型刻画和乘法公式，证明当且仅当 $\phi_1 \geq 1$时该函数在正半轴上对数凸，获得归一化贝塔函数的联合对数凸性及一个变形 Turán 恒等式，并计算相关变形贝塔分布的矩。规范不变性涵盖 Jagannathan Srinivasa Rao、Chakrabarti Jagannathan、广义 q–Quesne 以及 Hounkonnou Ngompe 变形，并且每个恒等式都通过数值计算精确到三十位数字得到验证。

1. 引言

变形微积分与量子型特殊函数是分析数学物理、量子群理论以及复杂系统建模中出现的非局部结构的重要工具 [1, 12, 27, 28, 30, 37]。自 Jackson 关于 q–差分算子和 q–积分 [26], 的开创性研究以来，基本超几何级数 [14, 31] 以及q–欧拉伽马函数与贝塔函数理论的类比 [5, 13, 35], 若干双参数
人们设计了各种变形，以捕捉更丰富的谱行为和动力学行为。Jagannathan 和 Srinivasa Rao 发起的(p,q)–微积分 [28] 能够同时控制缩放效应和离散化效应，并且 (p,q)–指数函数、三角函数、贝塔函数和伽马函数的类似物已得到发展，同时还研究了它们在量子代数和变形振子模型中的应用 [8, 9, 24, 25]。在 [46]中，人们获得了两个适用于 (p,q)–导数的多项式基、两种形式的 (p,q)–泰勒展开，以及根据 (p,q)–微积分基本定理推导出的 (p,q)–分部积分公式。在 [45] 中，通过 (p,q)–移位乘积引入了一个 (p,q)–伽马函数，并在该文中将 (p,q)–贝塔函数定义为商Γ_p、${}_q(x)\Gamma_p$、${}_q(y)/\Gamma_p$、${}_q(x+y)$，同时还给出了 (p,q)–乘法公式的类似物。$\int_0^1 t^{m-1}(1 \ominus qt)_p^{n-1}$、${}_q\, d_p$、${}_q t$ 贝塔积分(p,q)–在 [40], 中针对正整数 m、n 进行了研究，结果表明它等于$p^{(n-1)(2m+n-2)/2}\Gamma_p$、${}_q(m)\Gamma_p$、${}_q(n)/\Gamma_p$、${}_q(m+n)$，具有非交换性，并且在乘以 $p^{m(m-1)/2}$后变为交换的；同一微积分的逼近理论后果在 [40, 41], 中得到发展，而 (p,q)–伽马型函数的完全单调性性质

2020 数学学科分类。主要分类号 33D05；次要分类号 05A30、33D15、39A13、81R50。关键词和短语。$\mathcal{R}(p,q)$–变形量子代数、变形贝塔函数、变形伽马函数、Jackson 积分、Ramanujan ${}_1\psi_1$ 求和、对数凸性。

在 [36]中引入了基于 (p,q)–Jackson 型级数表示的分数阶差分和积分算子，该表示用于 (p,q)–积分，并在 [48]中得到。

当引入由亚纯结构函数驱动的一般变形时，取得了决定性进展$\mathcal{R}(u,v)$，其目的是统一并扩展现有的单参数和双参数形式体系。基于对圆盘的相干态映射的研究 [42], ，在 $\mathcal{R}(p,q)$–中构造了变形海森堡代数，以及与之相伴的相干态和相关特殊函数。该构造导出了 $\mathcal{R}(p,q)$–数、$\mathcal{R}(p,q)$–阶乘、 $\mathcal{R}(p,q)$–二项式系数和 $\mathcal{R}(p,q)$–差分算子 [7, 18, 23]。这一框架将通常的 q–与(p,q)–演算作为特殊情形包含在内 [4, 7, 18, 22]。与 $\mathcal{R}(p,q)$相关的微分与积分演算，以及相容的霍普夫代数结构和相关特殊情形的列表，已在 [18], 中建立；而变形的 Rogers-Szegő 多项式和埃尔米特多项式则在 [6]中得到刻画。同一结构函数机制产生了变形组合恒等式 [19], 、变形离散概率分布 [21], 、变形共形维拉索罗代数 [20], 、变形 Witt 和 Virasoro n–代数与科尔特韦格-德弗里斯方程 [23], 、变形超维拉索罗代数 [38]，以及带有关联矩阵模型的变形海森堡-维拉索罗代数 [39]。在 [19, 21]中，变形数写作 $[n]_{\mathcal{R}(p,q)} = (\phi_1^n - \phi_2^n)/(\phi_1 - \phi_2)$，其中 ϕ_1 和 ϕ_2 是(p,q) 的函数，由结构函数确定；这种双根表示是本文工作的起点。在算术方面，变形伽马函数与贝塔函数被推广到p–进设置中 [16]。关于超越函数、积分变换和超几何工具的经典背景汇集于 [1, 12, 37, 44, 49, 50, 52], ，而变形伽马函数与贝塔函数在分数阶演化方程和变形积分变换中的作用，则在 [15, 29, 32–34, 43, 47]中进行了描述。与此同时，双参数变形出现在量子群的霍普夫代数表述中 [10, 11, 30], ，而 $\mathcal{R}(p,q)$–差分算子可以被视为这类结构在函数空间上的具体实现。

问题与贡献。 在一般结构函数的情形下，变形减法并不对称，因此定义在 $[0,1]$ 上的变形贝塔积分对其两个自变量也不对称。由此产生三个问题。第一个问题涉及将变形贝塔积分与变形伽马函数联系起来的精确赋值因子，适用于复数自变量，而不仅是整数自变量；由于赋值指数是自变量的二次函数，若仅作近似的记账，立即会得到不一致的恒等式，只有完全明确的计算才能解决这一问题。第二个问题涉及第二类贝塔函数：经典理论中有两个欧拉贝塔积分，分别定义在 $[0,1]$ 和$[0,\infty)$上；因此需要确定半直线上的哪种变形积分是第一类函数的自然对应物，以及由哪种变形伽马函数支配。第三个问题涉及凸性：经典伽马函数由对数凸性 [3], 刻画，而其 q–类比由 Askey [5]刻画；因此需要确定变形伽马函数的哪种归一化具有对数凸性，以及在变形贝塔函数不具交换性的情况下，哪种凸性仍然成立。

本文在变形框架内回答了这三组问题，即通过运算变形数、阶乘、幂、指数函数、变形积分和变形差分算子来处理这些问题；相关证明建立在变形积分的 Jackson 型级数表示 [18], 之上，并表明其算子前因子可由双根假设吸收（定理 2.1 和推论1），其思想源自 [48]。在定义 ϕ2.1的既定假设（Hϕ）下，该假设通过两个变形函数$\phi_1 > \phi_2 > 0$表示变形数，主要结果如下。

（a）第一类变形伽马函数 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$由变形指数函数的变形积分定义为 $E_{\mathcal{R}(p,q)}$，等于 $\phi_1^{(z-1)(z-2)/2}\Gamma_{\mathfrak{q}}(z)$ 其中 $\mathfrak{q} = \phi_2/\phi_1$ （定理 3.1）；它由 Bohr–Mollerup 型性质刻画（定理 3.2），当且仅当在 $(0,\infty)$ 上对数凸 $\phi_1 \geq 1$ （定理3.3）；它满足以变形数 $[n]_{\mathcal{R}(p,q)}$ 为底的变形 Gauss 乘法公式（定理 3.5），以及 Wendel 型极限 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y) \sim \phi_1^{y(y-1)/2}[x]^y_{\mathcal{R}(p,q)}\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)$ （定理3.6）。

（b）第二类变形伽马函数 $\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$由变形指数函数的双边变形积分定义为 $e_{\mathcal{R}(p,q)}$，等于 $\Omega_{\mathfrak{q}}\,\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$，其中 $\Omega_{\mathfrak{q}}$ 是一个满足 $\Omega_{\mathfrak{q}}(z)-1 = 4\sin^2(\pi z)e^{-2\pi^2/\log(1/\mathfrak{q})} + O(e^{-4\pi^2/\log(1/\mathfrak{q})})$（定理 3.4 和命题 3.1）的显式一周期 theta 商。

（c）第一类变形贝塔函数满足 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = \dfrac{\phi_1^{(y-1)(2x+y-2)/2}\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)}$ 当 $\Re x$时，$\Re y>0$（定理 4.1），满足定理 4.4 中的一般移位恒等式和推论 4中的移位和，满足交换规则 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = \phi_1^{(y-x)(x+y-1)/2}\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(y,x)$（定理 4.2），具有唯一确定（相差一个常数因子）的交换对称化（定理 4.5），并且其关于第二个自变量的增长或衰减方式类似于高斯函数 $\phi_1^{y^2/2}$（定理4.6）。

(d) 第二类变形贝塔函数定义在半直线上，以变形幂 $(1\oplus\phi_1 t)^{-x-y}$为基础，并通过 Ramanujan 的 ${}_1\psi_1$ 求和公式（定理 5.1）求得；其交换缺陷包含商 $\Omega_{\mathfrak{q}}(x)/\Omega_{\mathfrak{q}}(y)$，因此即使在单参数情形下仍是非交换的（定理 5.2）；由 $(\phi_1 t\ominus 1)^{y-1}$ 构造的有限区间变体沿 $y\in\mathbb{N}$ 呈符号交替（命题 5.1）。

(e) 两类归一化贝塔函数均为联合对数凸函数，且关于第一自变量的对数凸性等价于变形 Turán 恒等式 $[x+1]_{\mathcal{R}(p,q)}[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)} - [x]_{\mathcal{R}(p,q)}[x+y+1]_{\mathcal{R}(p,q)} = (\phi_1\phi_2)^x[y]_{\mathcal{R}(p,q)}$（定理 6.1 和推论 6）。(f) 第一类变形贝塔函数是变形欧拉积分表示的核；该表示给出了用变形 Pochhammer 符号书写的变形高斯超几何函数，由此可推出带赋值因子 ϕ_1^{-ab} 的变形高斯求和、变形 Chu–Vandermonde 恒等式，以及不完全变形贝塔函数的超几何表示（定理 7.1、7.2 和推论7、8）。(g) 两种变形贝塔被积函数定义了两种离散概率分布，它们是贝塔分布和贝塔素分布的变形类比，其矩可用闭式计算；根据变形 Turán 恒等式，第一种分布的方差为正（定理 8.1 和 8.2）。(h) 所有关系在规范变换 $[n]_{\mathcal{R}(p,q)}\mapsto c\,[n]_{\mathcal{R}(p,q)}$下均保持不变，该变换将广义 q–Quesne 和 Hounkonnou Ngompe 变形纳入本理论的适用范围（定理 9.1）。

整数自变量情形的结果与 (p,q)–情形的结果一致 [40]。第10节中通过数值计算确认了所有恒等式，至少达到三十位有效数字。

本文的组织结构。第2 节回顾 Hounkonnou Bukweli Kyemba构造，介绍基本假设，并发展变形导数、变形积分、幂、指数函数和二项式定理。第3 节专门讨论两个变形伽马函数。第4 和5 节分别研究第一类和第二类变形贝塔函数。第6节包含凸性结果。第7 节专门讨论变形欧拉积分、变形高斯求和以及不完全变形贝塔函数，第8 节讨论变形贝塔分布。第9 节确立规范不变性并描述特殊情形。第10 节报告数值验证，第11节总结。指数的详细计算汇总于附录A。

2. 数学预备知识

2.1. Hounkonnou Bukweli Kyemba $\mathcal{R}(p,q)$–变形量子代数。令 p 和 q 为两个正实数。按照 [17],，我们考虑定义在 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$上的亚纯函数 $\mathcal{R}(u,v)$，其形式为

$$\mathcal{R}(u,v) = \sum_{s,t=-l}^{\infty} r_{st}u^s v^t, \tag{1}$$

在原点处可能具有孤立奇点，其中 r_{st} 为复数，$l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$\mathcal{R}(p^n, q^n) > 0$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及 $\mathcal{R}(1,1) = 0$ 按定义。我们将 $\mathbb{D}_R = \{w = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \; ; |w_j| < R_j\}$ 称为级数（1）的收敛双圆盘，并将 $\mathcal{O}(\mathbb{D}_R)$ 称为 $\mathbb{D}_R$上的全纯函数集合。变形数、阶乘和二项式系数定义为

$$[n]_{\mathcal{R}(p,q)} := \mathcal{R}(p^n, q^n), \qquad [n]!_{\mathcal{R}(p,q)} := \prod_{j=1}^{n} [j]_{\mathcal{R}(p,q)}, \qquad [0]!_{\mathcal{R}(p,q)} := 1, \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_{\mathcal{R}(p,q)} := \frac{[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m-n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}, \qquad 0 \le n \le m.$$

关于函数 在以原点为中心的圆盘内 Ψ 全纯，我们考虑膨胀算子

$$Q\Psi(z) := \Psi(qz), \qquad P\Psi(z) := \Psi(pz), \tag{3}$$

以及 $\mathcal{R}(p,q)$–导数

$$\partial_{\mathcal{R}(p,q)} := \partial_{p,q} \frac{p-q}{P-Q} \mathcal{R}(P,Q), \tag{4}$$

其中 $\partial_{p,\,q}$ 是 Jagannathan Srinivasa Rao导数 [27, 28]。算子 P、Q 和 $\mathcal{R}(P,Q)$ 在单项式上对角作用，即 $Pz^n = p^n z^n$、$Qz^n = q^n z^n$、$\mathcal{R}(P,Q)z^n = \mathcal{R}(p^n, q^n)z^n$，从而得到

$$\partial_{\mathcal{R}(p,q)} z^n = [n]_{\mathcal{R}(p,q)}\, z^{n-1}, \qquad n \ge 1, \qquad \partial_{\mathcal{R}(p,q)} 1 = 0. \tag{5}$$

与该变形相关的量子代数 $\mathcal{A}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 由 $\{1, A, A^\dagger, N\}$ 生成，并满足以下关系

$$AA^\dagger = [N+1]_{\mathcal{R}(p,q)}, \qquad A^\dagger A = [N]_{\mathcal{R}(p,q)}, \qquad [N, A] = -A, \qquad [N, A^\dagger] = A^\dagger, \tag{6}$$

在 $\mathcal{O}(\mathbb{D}_R)$ 上通过 $A^\dagger := z$、$A := \partial_{\mathcal{R}(p,q)}$ 和 $N := z\partial_z$ [17, 18]实现。

2.2. **双根假设**。

定义 2.1. 如果存在两个变形函数 $\phi_1 = \phi_1(p,q)$ 和 $\phi_2 = \phi_2(p,q)$，它们关于 (p,q) 与函数 $\mathcal{R}(p,q)$ 本身一样是亚纯的，在所考虑的点对 (p,q) 处的值为实数并满足 $\phi_1 > \phi_2 > 0$，使得

$$\mathcal{R}(p^n, q^n) = \frac{\phi_1^n - \phi_2^n}{\phi_1 - \phi_2}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{7}$$

在这种情况下，我们记

$$\mathfrak{q} := \frac{\phi_2}{\phi_1} \in (0,1), \qquad [x]_{\mathcal{R}(p,q)} := \frac{\phi_1^x - \phi_2^x}{\phi_1 - \phi_2}, \qquad [x]_{\mathfrak{q}} := \frac{1-\mathfrak{q}^x}{1-\mathfrak{q}}, \qquad x \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

其中幂取 ϕ_1、ϕ_2 和 $\mathfrak{q}$的实对数。

由于 $[n]_{\mathcal{R}(p,q)}$ 关于 (ϕ_1, ϕ_2)是对称的，因此排序 $\phi_1 > \phi_2$ 只是标记约定；采用该约定可使下方的变形积分收敛。对于 $[n]_{\mathcal{R}(p,q)} = c\,(\phi_1^n - \phi_2^n)/(\phi_1 - \phi_2)$为常数 $c > 0$ 的情形，可通过第 9 节的规范论证化归为（Hϕ）。表 1 列出了主要示例。在全文中，对于 $(a;\mathfrak{q})_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-a\mathfrak{q}^k)$、$(a;\mathfrak{q})_\infty = \prod_{k\ge 0}(1-a\mathfrak{q}^k)$、$(a_1, \ldots, a_m;\mathfrak{q})_\infty = \prod_i (a_i;\mathfrak{q})_\infty$，以及负整数 n，我们使用 $(a;\mathfrak{q})_n = 1/(a\mathfrak{q}^n;\mathfrak{q})_{-n}$ [14]。Jackson $\mathfrak{q}$–伽马函数和$\mathfrak{q}$–贝塔函数为

$$\Gamma_{\mathfrak{q}}(z) = \frac{(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_\infty}{(\mathfrak{q}^z;\mathfrak{q})_\infty}(1-\mathfrak{q})^{1-z}, \qquad \mathrm{B}_{\mathfrak{q}}(x,y) = \frac{\Gamma_{\mathfrak{q}}(x)\Gamma_{\mathfrak{q}}(y)}{\Gamma_{\mathfrak{q}}(x+y)}, \tag{9}$$

见 [5, 14, 31]。

引理 1。 假设 (Hϕ)。那么，对于所有 x、$y \in \mathbb{C}$ 和 $n \in \mathbb{N}$:

(i) $[x]_{\mathcal{R}(p,q)} = \phi_1^{x-1}[x]_{\mathfrak{q}}$ *and* $[n]!_{\mathcal{R}(p,q)} = \phi_1^{n(n-1)/2}[n]_{\mathfrak{q}}!$, *where* $[n]_{\mathfrak{q}}! = \prod_{j=1}^{n}[j]_{\mathfrak{q}} = (\mathfrak{q};\mathfrak{q})_n/(1-\mathfrak{q})^n$;

表 1. 满足（Hϕ）的结构函数，可能经过第9节的规范变换。

变形	$\mathcal{R}(u,v)$	(ϕ_1,ϕ_2)	规范 c
Jagannathan Srinivasa Rao, $0<q<p$	$\dfrac{u-v}{p-q}$	(p,q)	1
Jackson, $p=1$, $0<q<1$	$\dfrac{1-v}{1-q}$	$(1,q)$	1
Chakrabarti Jagannathan, $pq<1$	$\dfrac{1-uv}{(p^{-1}-q)u}$	(p^{-1},q)	1
广义 q–Quesne, $pq\neq 1$	$\dfrac{uv-1}{(q-p^{-1})v}$	有序 $\{p,q^{-1}\}$	p/q
Hounkonnou Ngompe	$h\,\dfrac{v^{\nu}}{u^{\mu}}\,\dfrac{uv-1}{(q-p^{-1})v}$	有序 $\{p^{1-\mu}q^{\nu},p^{-\mu}q^{\nu-1}\}$	$h\,p^{1-\mu}q^{\nu-1}$

（ii） （加法公式） $[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}=\phi_1^{y}[x]_{\mathcal{R}(p,q)}+\phi_2^{x}[y]_{\mathcal{R}(p,q)}=\phi_1^{x}[y]_{\mathcal{R}(p,q)}+\phi_2^{y}[x]_{\mathcal{R}(p,q)}$;

（iii） $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\mathcal{R}(p,q)}=\phi_1^{k(n-k)}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\mathfrak{q}}$ 当 $0\le k\le n$时，其中 $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_{\mathfrak{q}}=(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_n/((\mathfrak{q};\mathfrak{q})_k(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_{n-k})$;

（iv） $[x]_{\mathcal{R}(p,q)}>0$ 对于实数 $x>0$，且当 $\phi_2\to\phi_1$时 $[x]_{\mathcal{R}(p,q)}\to x\,\phi_1^{x-1}$。

证明。 (i) 由 $\phi_1^x-\phi_2^x=\phi_1^x(1-\mathfrak{q}^x)$ 和 $\phi_1-\phi_2=\phi_1(1-\mathfrak{q})$ 得出，而乘积公式则由 $\sum_{j=1}^{n}(j-1)=n(n-1)/2$ 得出。对于 (ii),

$$(\phi_1-\phi_2)\big(\phi_1^{y}[x]_{\mathcal{R}(p,q)}+\phi_2^{x}[y]_{\mathcal{R}(p,q)}\big)\;=\;\phi_1^{x+y}-\phi_1^{y}\phi_2^{x}+\phi_2^{x}\phi_1^{y}-\phi_2^{x+y}\;=\;(\phi_1-\phi_2)[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)},$$

第二个等式由交换 x 和 y 得出。(iii) 由 (i) 及恒等式 $\binom{n}{2}-\binom{k}{2}-\binom{n-k}{2}=k(n-k)$ 得出。(iv) 由 $\phi_1>\phi_2>0$ 和中值定理立即得到。□

2.3. **变形导数**。

命题 2.1. 假设 (Hϕ)，且 $f(z)=\sum_{n\ge 0}a_nz^n$ 在圆盘 $\{|z|<\varrho\}$ 内全纯。那么对于 $0<|z|<\varrho/\phi_1$,

$$\partial_{\mathcal{R}(p,q)}^{\phi_1,\phi_2}f(z)=\frac{p-q}{P-Q}\,\mathcal{R}(P,Q)\partial_{\phi_1,\phi_2}f(z)\;=\;\frac{p-q}{P-Q}\,\mathcal{R}(P,Q)\frac{f(\phi_1z)-f(\phi_2z)}{(\phi_1-\phi_2)\,z},\tag{10}$$

并且 $\partial_{\mathcal{R}(p,q)}f(0)=f'(0)$。此外，对于 f，g 在 $\{|z|<\varrho\}$ 内全纯且 $0<|z|<\varrho/\phi_1$，变形乘法法则

$$\begin{aligned}\partial_{\mathcal{R}(p,q)}(fg)(z)\;&=\;f(\phi_1z)\,\partial_{\mathcal{R}(p,q)}g(z)+g(\phi_2z)\,\partial_{\mathcal{R}(p,q)}f(z)\\ &=\;g(\phi_1z)\,\partial_{\mathcal{R}(p,q)}f(z)+f(\phi_2z)\,\partial_{\mathcal{R}(p,q)}g(z)\end{aligned}\tag{11}$$

成立。

证明。 (10) 的右端将 z^n 映射到 $(\phi_1^n-\phi_2^n)z^{n-1}/(\phi_1-\phi_2)=[n]_{\mathcal{R}(p,q)}z^{n-1}$，即 (5)。对于 $|z|<\varrho/\phi_1$，ϕ_1z 和 ϕ_2z 都位于收敛圆盘内，因此级数 $\sum_n a_n[n]_{\mathcal{R}(p,q)}z^{n-1}$绝对收敛，并且逐项与 (10) 的右端一致；原点处的值为 $a_1[1]_{\mathcal{R}(p,q)}=a_1=f'(0)$。乘法法则分别通过在 $\partial_{\mathcal{R}(p,q)}(fg)(z)$的分子中加上和减去 $f(\phi_1z)g(\phi_2z)$，即 $f(\phi_2z)g(\phi_1z)$，得到。□

公式（10）是 $\mathcal{R}(p,q)$– 中使用的 Jackson 型表示的版本 [46, 48] 对于(p,q)–导数的表示，并将其作为 $\partial_{\mathcal{R}(p,q)}f(t)$ 的定义，适用于定义在包含 f、ϕ_1t 和 ϕ_2t 的集合上的每个函数。

2.4. **变形积分**。

定义2.2。 假设 (Hϕ)。对于 $a>0$ 和 $f:(0,a]\to\mathbb{C}$， $[0,a]$ 上 f 的 $\mathcal{R}(p,q)$– 积分为

$$\int_0^a f(t)\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t \;:=\; (\phi_1-\phi_2)\,a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi_2^k}{\phi_1^{k+1}}\,f\Big(a\,\frac{\phi_2^k}{\phi_1^{k+1}}\Big), \tag{12}$$

只要级数绝对收敛。对于 $a>0$ 和 $f:(0,\infty)\to\mathbb{C}$，以 a 为基点的双边$\mathcal{R}(p,q)$–积分为

$$\int_0^{\infty;a} f(t)\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t \;:=\; (\phi_1-\phi_2)\,a\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\phi_2^k}{\phi_1^{k+1}}\,f\Big(a\,\frac{\phi_2^k}{\phi_1^{k+1}}\Big), \tag{13}$$

只要双边级数绝对收敛。

(12) 的节点为 $t_k=a\mathfrak{q}^k/\phi_1$，权重为 $(\phi_1-\phi_2)a\phi_2^k/\phi_1^{k+1}=(1-\mathfrak{q})\,a\,\mathfrak{q}^k$，因此 (12) 是一个正线性泛函；对于 $p=1$和 $\phi_1=1$，它化为 Jackson 积分[14, 26]；对于 Jagannathan Srinivasa Rao 变形，它是 (p,q)– 的积分 [46, 48]。(13) 的节点构成完整几何晶格 $\{a\mathfrak{q}^k/\phi_1:k\in\mathbb{Z}\}$。

命题 2.2。假设(Hϕ)。那么：

(i)（约化） $\int_0^a f(t)\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t=\phi_1\int_0^{a/\phi_1} f(s)\,d_{\mathfrak{q}}s$，其中 $\int_0^b g(s)\,d_{\mathfrak{q}}s=(1-\mathfrak{q})\,b\sum_{k\ge0}\mathfrak{q}^k g(b\mathfrak{q}^k)$ 是 *Jackson* 积分；双边积分也类似；(ii)（单项式）对于 $\Re s>0$, $\int_0^a t^{s-1}\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t=\dfrac{a^s}{[s]_{\mathcal{R}(p,q)}}$；(iii)（~~基本定理~~）若 g 定义在 $(0,a]$ 上且 $g(0^+):=\lim_{t\to0^+}g(t)$ 存在，则 $\int_0^a \partial_{\mathcal{R}(p,q)}g(t)\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t=g(a)-g(0^+)$；(iv)（原函数）若 f 在 $[0,b]$ 上连续，且对于 $0<x\le b$ 有 $F(x):=\int_0^x f(t)\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t$，则对于 $0<x\le b/\phi_1$ 有 $\partial_{\mathcal{R}(p,q)}F(x)=f(x)$； F 是具有此性质且在原点处连续并满足 $F(0^+)=0$ 的唯一函数；

（v）（分部积分）如果 f、g 在 $(0,a]$ 上有定义，且乘积 $f(\cdot)g(\cdot)$ 在 0^+ 处有极限，则

$$\int_0^a f(\phi_1 t)\,\partial_{\mathcal{R}(p,q)}g(t)\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t \;=\; f(a)g(a)-(fg)(0^+)-\int_0^a g(\phi_2 t)\,\partial_{\mathcal{R}(p,q)}f(t)\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t, \tag{14}$$

只要这两个积分收敛；

（vi）（*Hölder*不等式）对于非负的 f、g 和 $\theta\in[0,1]$,

$$\int_0^a f^{1-\theta}g^{\theta}\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t \;\le\; \Big(\int_0^a f\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t\Big)^{1-\theta}\Big(\int_0^a g\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t\Big)^{\theta}, \tag{15}$$

双边积分同样成立。

证明。（i）由于 $\phi_1-\phi_2=\phi_1(1-\mathfrak{q})$，式 (12) 的右侧等于 $(1-\mathfrak{q})a\sum_k\mathfrak{q}^k f(\frac{a}{\phi_1}\mathfrak{q}^k)=\phi_1\cdot(1-\mathfrak{q})\frac{a}{\phi_1}\sum_k\mathfrak{q}^k f(\frac{a}{\phi_1}\mathfrak{q}^k)$。（ii）根据（i），由引理 1 可知，该积分等于 $\phi_1(1-\mathfrak{q})(a/\phi_1)^s\sum_k\mathfrak{q}^{ks}=\phi_1^{1-s}a^s/[s]_{\mathfrak{q}}=a^s/[s]_{\mathcal{R}(p,q)}$。（iii）令 $t_k=a\mathfrak{q}^k/\phi_1$，则有 $\phi_1 t_k=a\mathfrak{q}^k$ 和 $\phi_2 t_k=a\mathfrak{q}^{k+1}$；根据 (10)，级数的第 k– 项为 $(\phi_1-\phi_2)a\phi_2^k\phi_1^{-k-1}[g(a\mathfrak{q}^k)-g(a\mathfrak{q}^{k+1})]/((\phi_1-\phi_2)t_k)=g(a\mathfrak{q}^k)-g(a\mathfrak{q}^{k+1})$，并且该级数望远镜求和为 $g(a)-g(0^+)$。（iv）直接计算得到 $F(\phi_1x)-F(\phi_2x)=(1-\mathfrak{q})\phi_1x\sum_{k\ge0}[\mathfrak{q}^k f(x\mathfrak{q}^k)-\mathfrak{q}^{k+1}f(x\mathfrak{q}^{k+1})]=(\phi_1-\phi_2)xf(x)$。若 G 是另一个这样的函数，则 $H=F-G$ 满足 $H(\phi_1x)=H(\phi_2x)$，即 $H(y)=H(\mathfrak{q}y)=\cdots=H(\mathfrak{q}^ny)\to H(0^+)=0$。（v）将（iii）应用于$fg$，并使用第一乘积法则 (11)。（vi）即为正权重 $(1-\mathfrak{q})a\mathfrak{q}^k$ 的 Hölder不等式。□

积分（12）是一般 $\mathcal{R}(p,q)$– 积分的一个特例。该积分由任意结构函数定义为 $\partial_{\mathcal{R}(p,q)}$ 的逆，即 $\int_0^a t^n\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t = a^{n+1}/[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}$，并在其中表示为 Jackson 型级数。我们回顾这一表示，并采用由最后一个恒等式确定的归一化，同时说明假设 (Hϕ) 吸收了其算子前因子。对于 $k \in \mathbb{N}$，令$[k]_{p,\,q} := (p^k - q^k)/(p-q)$，并令 P 和 Q 通过 $Pg(a) = g(pa)$、$Qg(a) = g(qa)$ 作用于上限为 a 的函数。算子

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}(p,q)} := \frac{P-Q}{(p-q)\,\mathcal{R}(P,Q)}, \qquad \mathcal{M}_{\mathcal{R}(p,q)}\, a^k = \frac{[k]_{p,q}}{\mathcal{R}(p^k,q^k)}\, a^k, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

在 a 的幂级数上按对角方式作用。

定理 2.1 (Jackson 型表示，[18])。设 $\mathcal{R}(p,q)$ 如第*2.1*节所述，设 $f(t) = \sum_{n\ge 0} c_n t^n$在 $\{|t| < \varrho\}$ 上全纯，并令 $I_{\mathcal{R}(p,q)}f(a) := \sum_{n\ge 0} c_n a^{n+1}/[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}$ 只要此级数绝对收敛，便有 $\partial_{\mathcal{R}(p,q)} I_{\mathcal{R}(p,q)} f = f$ 且 $\int_0^a f(t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t := I_{\mathcal{R}(p,q)}f(a)$。

(i) （区域 I）若 $0 < q < p$ 且 $|a| < p\varrho$，则

$$\int_0^a f(t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t = \mathcal{M}_{\mathcal{R}(p,q)}\Big[(p-q)\,a \sum_{r\ge 0} \frac{q^r}{p^{r+1}}\, f\Big(\frac{q^r}{p^{r+1}}\,a\Big)\Big]$$

.

(ii) （区域 II）如果 $0 < p < q$ 和 $|a| < q\varrho$，那么

$$\int_0^a f(t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t = \mathcal{M}_{\mathcal{R}(p,q)}\Big[(q-p)\,a \sum_{r\ge 0} \frac{p^r}{q^{r+1}}\, f\Big(\frac{p^r}{q^{r+1}}\,a\Big)\Big]$$

。（*Chasles* 关系）令 $\int_a^b f(t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t := \int_0^b f(t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t - \int_0^a f(t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t$，则有 $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$ 和 $\int_a^b \partial_{\mathcal{R}(p,q)} g(t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t = g(b) - g(a)$。

(iv)（反常积分）在区域 I 中，只要极限存在，$\int_a^\infty f(t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t := \lim_{n\to\infty} \int_a^{p^n/q^n} f(t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t$ 和$\int_{-\infty}^\infty f(t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t := \lim_{n\to\infty} \int_{-p^n/q^n}^{p^n/q^n} f(t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t$均成立；对每个实数上限，均使用(i) 中的级数；在区域 II 中，p^n/q^n 替换为 q^n/p^n。

P顶点。 在区域 I 中，节点满足 $|q^r a/p^{r+1}| \le |a|/p < \varrho$，因此该双重级数

$$\sum_{r,n\ge 0} |c_n|\, \frac{q^r}{p^{r+1}}\, |a| \Big(\frac{q^r|a|}{p^{r+1}}\Big)^n$$

收敛，且可以按任意顺序求和。对于 $f(t) = t^n$ 该括号等于 $(p-q)a^{n+1}p^{-n-1}\sum_r (q/p)^{r(n+1)} = a^{n+1}/[n+1]_{p,\,q}$，而（16）将其化为 $a^{n+1}/[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}$。区域 II 的情形完全相同，其中 $(q-p)a^{n+1}q^{-n-1}\sum_r (p/q)^{r(n+1)} = a^{n+1}/[n+1]_{p,\,q}$。陈述 (iii) 由 $\partial_{\mathcal{R}(p,q)} I_{\mathcal{R}(p,q)} = \mathrm{id}$ 以及命题 2.2(iv) 的唯一性部分推出，而 (iv) 是一个定义。□

推论 1. 假设 (Hϕ)。则 $\mathcal{R}(p^k,q^k) = [k]_{\phi_1,\phi_2}$，定理 *2.1(i)* 的表示式以 (ϕ_1,ϕ_2) 代替 (p,q)书写时，具有平凡乘子 $\mathcal{M} = \mathrm{id}$，并且与(12)一致：当 f 在 $\{|t| < \varrho\}$ 上全纯，且 $0 < a < \phi_1\varrho$时，$\int_0^a f(t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t = I_{\mathcal{R}(p,q)}f(a)$。公式(12) 对每个实数 $a \ne 0$都适用，并且

$$\int_0^{\infty;a} f(t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t = \lim_{n\to\infty} \int_0^{a\phi_1^n/\phi_2^n} f(t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t, \tag{17}$$

$$\int_a^\infty f(t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t = \int_0^{\infty;1} f(t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t - \int_0^a f(t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t,$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t = \int_0^{\infty;1} \big(f(t) + f(-t)\big)\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t, \tag{18}$$

只要双边级数绝对收敛。在第*9*节的规范假设下，$\mathcal{M} = c^{-1}\mathrm{id}$。

证明。第一个断言是（7），而定理 2.1（i）中将 (p,q) 替换为 (ϕ_1,ϕ_2) 所得的括号就是（12）的右端。根据命题 2.2（ii），两边在单项式上相等，并且对于 $\{|t|\le a/\phi_1\}$上的幂级数绝对收敛而言是连续的。当 $A=a\mathfrak{q}^{-n}$ 时，$\int_0^A$ 的节点为 $a\mathfrak{q}^{k-n}/\phi_1$，权重为 $(1-\mathfrak{q})a\mathfrak{q}^{k-n}$、$k\ge 0$，它们穷尽了 $n\to\infty$所表示的双边格点；第二个公式结合 $a=1$ 和 Chasles 关系即可得到，第三个公式则由 $\int_0^{-b} f(t)\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t=-\int_0^{b} f(-t)\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t$得到。□

定理 2.1 中前因子的归一化由 $I_{\mathcal{R}(p,q)}t^n=t^{n+1}/[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}$ 决定；这种归一化使 $\partial_{\mathcal{R}(p,q)}$ 和 $\int_0^{\cdot} d_{\mathcal{R}(p,q)}t$ 互为逆映射，并且在 Jagannathan Srinivasa Rao 情形下 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}(p,q)}=\mathrm{id}$。

2.5. 变形幂。

定义 2.3. 假设 (Hϕ)。对于 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 和 $x,\ a\in\mathbb{C}$ 定义为

$$(x\ominus a)^{n}_{\mathcal{R}(p,q)} := \prod_{k=0}^{n-1}\left(\phi_1^{k}x-\phi_2^{k}a\right),\qquad (x\oplus a)^{n}_{\mathcal{R}(p,q)} := \prod_{k=0}^{n-1}\left(\phi_1^{k}x+\phi_2^{k}a\right). \tag{19}$$

对于分别满足 $b\mathfrak{q}^{\alpha+j}\neq 1$ 和 $-b\mathfrak{q}^{\alpha+j}\neq 1$ 的 $\alpha\in\mathbb{C}$ 与 $b\in\mathbb{C}$，对所有 $j\ge 0$，定义为

$$(1\ominus b)^{\alpha}_{\mathcal{R}(p,q)} := \phi_1^{\alpha(\alpha-1)/2}\,\frac{(b;\mathfrak{q})_\infty}{(b\mathfrak{q}^{\alpha};\mathfrak{q})_\infty},\qquad (1\oplus b)^{\alpha}_{\mathcal{R}(p,q)} := \phi_1^{\alpha(\alpha-1)/2}\,\frac{(-b;\mathfrak{q})_\infty}{(-b\mathfrak{q}^{\alpha};\mathfrak{q})_\infty}. \tag{20}$$

引理 2. 假设(Hϕ)。则：

(i) $(x\ominus a)^{n}_{\mathcal{R}(p,q)}=\phi_1^{n(n-1)/2}\prod_{k=0}^{n-1}(x-\mathfrak{q}^{k}a)$，且对于 $\alpha=n$ 定义 (19) 和 (20) 一致：$(1\ominus b)^{n}_{\mathcal{R}(p,q)}=\phi_1^{n(n-1)/2}(b;\mathfrak{q})_n$；(ii) *(分拆)* $(x\ominus a)^{m+n}_{\mathcal{R}(p,q)}=(x\ominus a)^{m}_{\mathcal{R}(p,q)}(\phi_1^{m}x\ominus\phi_2^{m}a)^{n}_{\mathcal{R}(p,q)}$，且对于 $\alpha\in\mathbb{C}$，$(1\ominus b)^{\alpha+1}_{\mathcal{R}(p,q)}=(1\ominus b)^{\alpha}_{\mathcal{R}(p,q)}(\phi_1^{\alpha}-\phi_2^{\alpha}b)$；(iii) *(变形高斯二项式公式)* $(1\ominus b)^{n}_{\mathcal{R}(p,q)}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{\mathcal{R}(p,q)}\phi_1^{\binom{n-k}{2}}\phi_2^{\binom{k}{2}}b^{k}$；

(iv) 关于 $\alpha\in\mathbb{C}$ 的导数，视为 t 的函数，

$$\partial_{\mathcal{R}(p,q)}(1\ominus t)^{\alpha}_{\mathcal{R}(p,q)} = -[\alpha]_{\mathcal{R}(p,q)}(1\ominus\phi_2 t)^{\alpha-1}_{\mathcal{R}(p,q)},\qquad \partial_{\mathcal{R}(p,q)}(1\oplus t)^{\alpha}_{\mathcal{R}(p,q)} = [\alpha]_{\mathcal{R}(p,q)}(1\oplus\phi_2 t)^{\alpha-1}_{\mathcal{R}(p,q)},$$

以及变量 x 中的 $\partial_{\mathcal{R}(p,q)}(x\ominus a)^{n}_{\mathcal{R}(p,q)}=[n]_{\mathcal{R}(p,q)}(\phi_1 x\ominus a)^{n-1}_{\mathcal{R}(p,q)}$；(v)（消失性与正性）$(1\ominus 1)^{\alpha}_{\mathcal{R}(p,q)}=0$，只要 $\mathfrak{q}^{\alpha+j}\neq 1$ 对于 $j\ge 0$ 成立；对于实数 α 和 $t_k=\mathfrak{q}^{k}/\phi_1$、$k\ge 0$，若 $\alpha>-k-1$，则有 $(1\ominus\phi_2 t_k)^{\alpha}_{\mathcal{R}(p,q)}=\phi_1^{\alpha(\alpha-1)/2}(\mathfrak{q}^{k+1};\mathfrak{q})_\infty/(\mathfrak{q}^{k+1+\alpha};\mathfrak{q})_\infty>0$，且对于每个 $k\in\mathbb{Z}$，都有 $(1\oplus\phi_1 t_k)^{\alpha}_{\mathcal{R}(p,q)}>0$。

证明。（i）$\phi_1^{k}x-\phi_2^{k}a=\phi_1^{k}(x-\mathfrak{q}^{k}a)$，以及 $(b;\mathfrak{q})_\infty/(b\mathfrak{q}^{n};\mathfrak{q})_\infty=(b;\mathfrak{q})_n$。（ii）对于 $k=m+j$，有 $\phi_1^{k}x-\phi_2^{k}a=\phi_1^{j}(\phi_1^{m}x)-\phi_2^{j}(\phi_2^{m}a)$。对于复数 α、$\phi_1^{(\alpha+1)\alpha/2}=\phi_1^{\alpha(\alpha-1)/2}\phi_1^{\alpha}$和 $(b\mathfrak{q}^{\alpha};\mathfrak{q})_\infty=(1-b\mathfrak{q}^{\alpha})(b\mathfrak{q}^{\alpha+1};\mathfrak{q})_\infty$，因此 $(1\ominus b)^{\alpha+1}_{\mathcal{R}(p,q)}=(1\ominus b)^{\alpha}_{\mathcal{R}(p,q)}\phi_1^{\alpha}(1-\mathfrak{q}^{\alpha}b)$，以及 $\phi_1^{\alpha}(1-\mathfrak{q}^{\alpha}b)=\phi_1^{\alpha}-\phi_2^{\alpha}b$。（iii）根据有限 $\mathfrak{q}$–二项式定理 $(b;\mathfrak{q})_n=\sum_k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{\mathfrak{q}}(-1)^{k}\mathfrak{q}^{\binom{k}{2}}b^{k}$ [14]；乘以 $\phi_1^{\binom{n}{2}}$ 并结合引理 1(iii)以及 $\binom{n}{2}-k(n-k)-\binom{k}{2}=\binom{n-k}{2}$ 和 $\mathfrak{q}^{\binom{k}{2}}=\phi_2^{\binom{k}{2}}\phi_1^{-\binom{k}{2}}$，即可得到所述结论。（iv）令 $h(t)=(1\ominus t)^{\alpha}_{\mathcal{R}(p,q)}$、$C=\phi_1^{\alpha(\alpha-1)/2}$ 和 $u=\phi_1 t$。则 $h(\phi_1 t)=C(1-u)(\mathfrak{q}u;\mathfrak{q})_\infty/(\mathfrak{q}^{\alpha}u;\mathfrak{q})_\infty$ 和$h(\phi_2 t)=h(\mathfrak{q}u)=C(1-\mathfrak{q}^{\alpha}u)(\mathfrak{q}u;\mathfrak{q})_\infty/(\mathfrak{q}^{\alpha}u;\mathfrak{q})_\infty$，因此

$$\frac{h(\phi_1 t)-h(\phi_2 t)}{(\phi_1-\phi_2)t} = C\,\frac{(\mathfrak{q}u;\mathfrak{q})_\infty}{(\mathfrak{q}^{\alpha}u;\mathfrak{q})_\infty}\,\frac{(\mathfrak{q}^{\alpha}-1)u}{(1-\mathfrak{q})u} = -[\alpha]_{\mathfrak{q}}\,C\,\frac{(\phi_2 t;\mathfrak{q})_\infty}{(\phi_2\mathfrak{q}^{\alpha-1}t;\mathfrak{q})_\infty}.$$

由于 $C=\phi_1^{\alpha-1}\phi_1^{(\alpha-1)(\alpha-2)/2}$ 和 $\phi_1^{\alpha-1}[\alpha]_{\mathfrak{q}}=[\alpha]_{\mathcal{R}(p,q)}$，右侧为 $-[\alpha]_{\mathcal{R}(p,q)}(1\ominus\phi_2 t)^{\alpha-1}_{\mathcal{R}(p,q)}$。第二个公式可通过将 t 替换为 $-t$得到，第三个公式则由对以下内容进行相同计算得到

乘积 $\phi_1^{n(n-1)/2}\prod_k(x-\mathfrak{q}^k a)$，另见 [46]。（v） $(1;\mathfrak{q})_\infty=0$ 且分母不为零；正性结论由 $0<\mathfrak{q}^j<1$当 $j\geq 1$时得出。□

2.6. 变形指数函数与变形二项式定理。

定义 2.4. 假设(Hϕ)。第一类和第二类变形指数函数为

$$E_{\mathcal{R}(p,q)}(z) \;:=\; \sum_{n\geq 0}\frac{\phi_2^{n(n-1)/2}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}\,z^n, \qquad e_{\mathcal{R}(p,q)}(z) \;:=\; \sum_{n\geq 0}\frac{\phi_1^{n(n-1)/2}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}\,z^n. \tag{22}$$

引理 3 **.** 假设 (Hϕ)。则 $E_{\mathcal{R}(p,q)}$ 是整函数，$e_{\mathcal{R}(p,q)}$ 在 $|z|<1/(1-\mathfrak{q})$中全纯，并且

$$E_{\mathcal{R}(p,q)}(z) \;=\; \big(-(1-\mathfrak{q})z;\mathfrak{q}\big)_\infty, \tag{23}$$

$$e_{\mathcal{R}(p,q)}(z) \;=\; \frac{1}{\big((1-\mathfrak{q})z;\mathfrak{q}\big)_\infty}, \qquad e_{\mathcal{R}(p,q)}(z)\,E_{\mathcal{R}(p,q)}(-z) \;=\; 1. \tag{24}$$

第二个公式给出了$e_{\mathcal{R}(p,q)}$到 $\mathbb{C}$的亚纯延拓，该延拓在 $\mathbb{C}\setminus[1/(1-\mathfrak{q}),\infty)$上全纯。此外，$\partial_{\mathcal{R}(p,q)}E_{\mathcal{R}(p,q)}(z)=E_{\mathcal{R}(p,q)}(\phi_2 z)$ 且 $\partial_{\mathcal{R}(p,q)}e_{\mathcal{R}(p,q)}(z)=e_{\mathcal{R}(p,q)}(\phi_1 z)$。

证明。 根据引理 1(i)， $\phi_2^{\binom{n}{2}}/[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}=\mathfrak{q}^{\binom{n}{2}}/[n]_\mathfrak{q}!$ 和 $\phi_1^{\binom{n}{2}}/[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}=1/[n]_\mathfrak{q}!$，因此 $E_{\mathcal{R}(p,q)}$ 和$e_{\mathcal{R}(p,q)}$ 与两个 Jackson 指数函数一致，它们的乘积公式即为欧拉恒等式 [14,第 1 节。3]。导数公式由（5）和 $\binom{n+1}{2}=\binom{n}{2}+n$得出。□

与（22）相联系的变形三角函数具有相同的权重：令 $\binom{2n}{2}=n(2n-1)$且 $\binom{2n+1}{2}=n(2n+1)$,

$$\begin{aligned}
\cos_{\mathcal{R}(p,q)}(z) \;&:=\; \frac{e_{\mathcal{R}(p,q)}(iz)+e_{\mathcal{R}(p,q)}(-iz)}{2} \;=\; \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\phi_1^{n(2n-1)}}{[2n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}\,z^{2n},\\
\sin_{\mathcal{R}(p,q)}(z) \;&:=\; \frac{e_{\mathcal{R}(p,q)}(iz)-e_{\mathcal{R}(p,q)}(-iz)}{2i} \;=\; \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\phi_1^{n(2n+1)}}{[2n+1]!_{\mathcal{R}(p,q)}}\,z^{2n+1},
\end{aligned} \tag{25}$$

而第二类函数 $\mathrm{Cos}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 和 $\mathrm{Sin}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 则由 $E_{\mathcal{R}(p,q)}$以相同方式定义，其中以 ϕ_2 代替 ϕ_1。根据引理3，$\mathrm{Cos}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 和 $\mathrm{Sin}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 是整函数，而 $\cos_{\mathcal{R}(p,q)}$ 和 $\sin_{\mathcal{R}(p,q)}$ 在 $|z|<1/(1-\mathfrak{q})$ 上全纯，在 $\mathbb{C}$上亚纯。

引理 4 （变形二项式定理）。 假设(Hϕ)。对于 $b\in\mathbb{C}$ 和 $|w|<1$,

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(1\ominus b)^n_{\mathcal{R}(p,q)}}{(1\ominus\mathfrak{q})^n_{\mathcal{R}(p,q)}}\,w^n \;=\; \frac{(bw;\mathfrak{q})_\infty}{(w;\mathfrak{q})_\infty}, \qquad (1\ominus\mathfrak{q})^n_{\mathcal{R}(p,q)} \;=\; \frac{(\phi_1-\phi_2)^n}{\phi_1^n}\,[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}. \tag{26}$$

证明。 由引理 2(i)，变形幂的商等于 $(b;\mathfrak{q})_n/(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_n$，且（26）即为$\mathfrak{q}$–二项式定理 [14, (1.3.2)]。第二个恒等式由 $\phi_1^k-\phi_2^k\mathfrak{q}=\phi_1^{-1}(\phi_1^{k+1}-\phi_2^{k+1})$ 得出。 □

3. 两个变形伽马函数

3.1. 第一类变形伽马函数。

定义 3.1. 假设 (Hϕ) 并令 $a_{\mathcal{R}(p,q)} \;:=\; \phi_1/(\phi_1-\phi_2)$。对于 $\Re z>0$ 第一类$\mathcal{R}(p,q)$–伽马函数为

$$\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z) \;:=\; \phi_1^{\frac{z(z-1)}{2}}\int_0^{a_{\mathcal{R}(p,q)}} t^{z-1}\,E_{\mathcal{R}(p,q)}(-\phi_2 t)\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t. \tag{27}$$

积分 (27) 的节点为 $t_k = \mathfrak{q}^k/(\phi_1 - \phi_2)$, $k \geq 0$, 并且根据引理 3, $E_{\mathcal{R}(p,q)}(-\phi_2 t_k) = (\mathfrak{q}^{k+1};\mathfrak{q})_\infty$。由于 $(\mathfrak{q}^{k+1};\mathfrak{q})_\infty = 0$ 对每个负整数 k, 积分 (27) 与双边积分一致

$$\int_0^{\infty;a_{\mathcal{R}(p,q)}} t^{z-1} E_{\mathcal{R}(p,q)}(-\phi_2 t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)} t;$$

从这个意义上说, (27) 是 $(0,\infty)$ 上欧拉积分的变形类比。

定理 3.1。 假设(Hϕ)。则对于 $\Re z > 0$,

$$\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z) \;=\; \phi_1^{\frac{(z-1)(z-2)}{2}}\,\Gamma_{\mathfrak{q}}(z) \;=\; \phi_1^{\frac{(z-1)(z-2)}{2}}\,\frac{(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_\infty}{(\mathfrak{q}^z;\mathfrak{q})_\infty}\,(1-\mathfrak{q})^{1-z}. \tag{28}$$

因此, $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$ 延拓为 $\mathbb{C}$ 上的无零点亚纯函数, 其极点均为简单极点, 并且位于 $z = -n + 2\pi i m/\log\mathfrak{q}$、$n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$、$m \in \mathbb{Z}$, 且

$$\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z+1) \;=\; [z]_{\mathcal{R}(p,q)}\,\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z), \qquad \Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(1) \;=\; 1, \qquad \Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(n+1) \;=\; [n]!_{\mathcal{R}(p,q)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{29}$$

证明。 (27) 的权重为 $(\phi_1 - \phi_2)a_{\mathcal{R}(p,q)}\phi_2^k/\phi_1^{k+1} = \mathfrak{q}^k$, 因此

$$\int_0^{a_{\mathcal{R}(p,q)}} t^{z-1} E_{\mathcal{R}(p,q)}(-\phi_2 t)\, d_{\mathcal{R}(p,q)} t \;=\; \sum_{k\geq 0} \mathfrak{q}^k \Big(\frac{\mathfrak{q}^k}{\phi_1-\phi_2}\Big)^{z-1} (\mathfrak{q}^{k+1};\mathfrak{q})_\infty \;=\; (\phi_1-\phi_2)^{1-z}(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_\infty \sum_{k\geq 0} \frac{\mathfrak{q}^{kz}}{(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_k}.$$

根据欧拉恒等式 $\sum_{k\geq 0} w^k/(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_k = 1/(w;\mathfrak{q})_\infty$, 取 $w = \mathfrak{q}^z$, $|w| < 1$ [14, (1.3.15)], , 该积分等于 $(\phi_1-\phi_2)^{1-z}(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_\infty/(\mathfrak{q}^z;\mathfrak{q})_\infty = \phi_1^{1-z}\Gamma_{\mathfrak{q}}(z)$。将其乘以 $\phi_1^{z(z-1)/2}$ 并利用 $z(z-1)/2+1-z = (z-1)(z-2)/2$ 可得 (28)。亚纯延拓及极点的位置由 $(\mathfrak{q}^z;\mathfrak{q})_\infty$ 的零点确定, 即 $\mathfrak{q}^{z+j} = 1$。最后, $\Gamma_{\mathfrak{q}}(z+1) = [z]_{\mathfrak{q}}\Gamma_{\mathfrak{q}}(z)$ 且 $\phi_1^{z(z-1)/2-(z-1)(z-2)/2} = \phi_1^{z-1}$, 因此根据引理 1, 有 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z+1) = \phi_1^{z-1}[z]_{\mathfrak{q}}\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z) = [z]_{\mathcal{R}(p,q)}\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z)$; 数值 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(1) = 1$ 可由 (28) 直接读出。 □

注*1.* 对于 *Jagannathan Srinivasa Rao* 变形, *(28)* 写作 $\Gamma_{p,q}(z) = p^{(z-1)(z-2)/2}\Gamma_{q/p}(z)$, 它插值了 (p,q)–阶乘。*[45]* 的 (p,q)–伽马函数写作无限 (p,q)–乘积的商 $(p\ominus q)_p^\infty\,{}_{,q}(p^z\ominus q^z)_p^{-\infty}\,{}_{,q}\,(p-q)^{1-z}$。在层级 N, 部分商 $(\phi_1\ominus\phi_2)_{\mathcal{R}(p,q)}^N(\phi_1-\phi_2)^{1-z}/(\phi_1^z\ominus\phi_2^z)_{\mathcal{R}(p,q)}^N$ 等于 $\phi_1^{(N+1)(1-z)}(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_N(1-\mathfrak{q})^{1-z}/(\mathfrak{q}^z;\mathfrak{q})_N$; 当 $\phi_1 = 1$ 时, 它按所写形式收敛; 对于 $\phi_1 \neq 1$, 必须去掉因子 $\phi_1^{(N+1)(1-z)}$, 而 *(28)* 正是由此得到的归一化, 也是满足 *(29)* 的唯一一个形如 $\phi_1^{\text{quadratic}}\Gamma_{\mathfrak{q}}$ 的归一化。

定理 3.2 (Bohr-Mollerup 型刻画)。 假设 (Hϕ) 且令 $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ 满足 *fy*

(i) $f(1) = 1$ 且 $f(x+1) = [x]_{\mathcal{R}(p,q)}\,f(x)$ 对 $x > 0$成立; (ii) 函数 $x \mapsto \phi_1^{-(x-1)(x-2)/2} f(x)$ 在 $(0,\infty)$上是对数凸的。

则 $f = \Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$ 在 $(0,\infty)$上成立。反之, $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$ 满足 (i) 和 (ii)。

证明。 令 $g(x) := \phi_1^{-(x-1)(x-2)/2} f(x)$。于是 $g(1) = 1$ 并且, 由于 $(x-1)(x-2)/2 - x(x-1)/2 = 1-x$, $g(x+1) = \phi_1^{1-x}[x]_{\mathcal{R}(p,q)}g(x) = [x]_{\mathfrak{q}}\,g(x)$。由于 g 为正且对数凸, 它与 $\Gamma_{\mathfrak{q}}$ 由 Askey 的 $\mathfrak{q}$–Bohr-Mollerup 定理的类比 [5, 定理 3.1], 因此 $f = \phi_1^{(x-1)(x-2)/2}\Gamma_{\mathfrak{q}} = \Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$ 由定理3.1得出。反之, (i) 即 (29), 而且 $\phi_1^{-(x-1)(x-2)/2}\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x) = \Gamma_{\mathfrak{q}}(x)$ 由下文的 (30) 可知是对数凸的。 □

对于 $x > 0$, 对 (9) 进行对数微分可得

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma_{\mathfrak{q}}(x) \;=\; (\log\mathfrak{q})^2 \sum_{k\geq 0} \frac{\mathfrak{q}^{x+k}}{(1-\mathfrak{q}^{x+k})^2} \;>\; 0, \tag{30}$$

而右侧是关于 x 的严格递减函数, 当 $x \to 0^+$ 时趋于 $+\infty$, 当 $x \to +\infty$ 时趋于 0, 因为 $u \mapsto u/(1-u)^2$ 在 $(0,1)$ 上是递增的。

定理 3.3。 假设(Hϕ)。对于 $x>0$,

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x) \;=\; \log\phi_1+(\log\mathfrak{q})^2\sum_{k\geq 0}\frac{\mathfrak{q}^{x+k}}{(1-\mathfrak{q}^{x+k})^2}. \tag{31}$$

因此:

(i) 若 $\phi_1\geq 1$，则 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$ 在 $(0,\infty)$上严格对数凸；(ii) 若 $\phi_1<1$，则存在唯一的 $x_*=x_*(\phi_1,\mathfrak{q})>0$，使得 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$ 在 $(0,x_*]$上严格对数凸，并在 $[x_*,\infty)$上严格对数凹；特别地，$\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$ 在 $(0,\infty)$上不是对数凸的；(iii) 在所有情况下都有 $\frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\geq\log\phi_1$，其中 $\frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\to\log\phi_1$ 为 $x\to+\infty$。 —

证明。 根据定理 3.1， $\log\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{2}\log\phi_1+\log\Gamma_{\mathfrak{q}}(x)$的二阶导数为（31）。断言（i）、（ii）和（iii）由上文回顾的（30）的单调性和极限推出：若$\phi_1<1$，则函数（31）从 $+\infty$ 严格递减至 $\log\phi_1<0$，因此具有唯一的零点x_*。 □

注 2. 定理*3.3* 表明，当主导变形函数满足 $\phi_1<1$时，变形伽马函数的对数凸性并非从未变形理论中继承而来：此时二次赋值因子 $\phi_1^{(x-1)(x-2)/2}$ 是对数凹的，并最终占据主导地位。对于满足 $(p,q)=(0.9,0.5)$ 的 *Jagannathan Srinivasa Rao* 变形，可得 $x_*=3.6722\ldots$（第*10*节）。正确的凸性结论是定理 *3.2*中的归一化结论，它对每个可容许对 (ϕ_1,ϕ_2)都成立。

3.2. **第二类变形伽马函数**。

定义 3.2. 假设 (Hϕ) 且令 $a_{\mathcal{R}(p,q)}=\phi_1/(\phi_1-\phi_2)$。对于 $\Re z>0$，第二类伽马函数为$\mathcal{R}(p,q)$–

$$\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z) \;:=\; \phi_2^{\frac{z(z-1)}{2}}\int_0^{\infty;a_{\mathcal{R}(p,q)}} t^{z-1}\,e_{\mathcal{R}(p,q)}(-\phi_1 t)\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t, \tag{32}$$

其中 $e_{\mathcal{R}(p,q)}$ 通过下式延拓到负半轴 (23)。

在节点 $t_k=\mathfrak{q}^k/(\phi_1-\phi_2)$、$k\in\mathbb{Z}$ 处，有 $e_{\mathcal{R}(p,q)}(-\phi_1 t_k)=1/(-\mathfrak{q}^k;\mathfrak{q})_\infty$。对于 $k=-m\to-\infty$、$(-\mathfrak{q}^{-m};\mathfrak{q})_\infty=(-1;\mathfrak{q})_\infty\prod_{i=1}^m(1+\mathfrak{q}^{-i})\geq 2\mathfrak{q}^{-m(m+1)/2}$，因此双边级数对每个满足 $\Re z>0$ 的 z 都收敛，其中条件 $\Re z>0$ 对于 $k\to+\infty$ 是必需的。

我们引入 θ商

$$\Omega_{\mathfrak{q}}(z) \;:=\; \mathfrak{q}^{\frac{z(z-1)}{2}}K_{\mathfrak{q}}(z),\qquad K_{\mathfrak{q}}(z)\;:=\;\frac{(-\mathfrak{q}^z,-\mathfrak{q}^{1-z};\mathfrak{q})_\infty}{(-1,-\mathfrak{q};\mathfrak{q})_\infty},\qquad z\in\mathbb{C}. \tag{33}$$

命题 3.1。 函数 $K_{\mathfrak{q}}$ 和 $\Omega_{\mathfrak{q}}$ 都是整函数，并且:

(i) $K_{\mathfrak{q}}(z+1)=\mathfrak{q}^{-z}K_{\mathfrak{q}}(z)$, $\Omega_{\mathfrak{q}}(z+1)=\Omega_{\mathfrak{q}}(z)$, $\Omega_{\mathfrak{q}}(1-z)=\Omega_{\mathfrak{q}}(z)$ *and* $\Omega_{\mathfrak{q}}(n)=1$ *for* $n\in\mathbb{Z}$;
(ii) $\Omega_{\mathfrak{q}}(z)=\vartheta_{\mathfrak{q}}(z)/\vartheta_{\mathfrak{q}}(0)$ *with* $\vartheta_{\mathfrak{q}}(z):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathfrak{q}^{(n+z)(n+z-1)/2}$;
(iii) *with* $\lambda:=\log(1/\mathfrak{q})$ *and* $\varepsilon:=e^{-2\pi^2/\lambda}$,

$$\Omega_{\mathfrak{q}}(z) \;=\; \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\varepsilon^{k^2}\cos(2\pi kz)}{\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\varepsilon^{k^2}}, \tag{34}$$

因此，对于实数 z、$\Omega_{\mathfrak{q}}(z)>0$ 和 $\Omega_{\mathfrak{q}}(z)-1=4\sin^2(\pi z)\,\varepsilon+O(\varepsilon^2)$，关于 z 一致成立；特别地，$\Omega_{\mathfrak{q}}$ 不是常数。

证明。 (i) 由 $(-\mathfrak{q}^{z+1};\mathfrak{q})_\infty=(-\mathfrak{q}^z;\mathfrak{q})_\infty/(1+\mathfrak{q}^z)$ 和 $(-\mathfrak{q}^{-z};\mathfrak{q})_\infty=(1+\mathfrak{q}^{-z})(-\mathfrak{q}^{1-z};\mathfrak{q})_\infty$ 可得 $K_{\mathfrak{q}}(z+1)/K_{\mathfrak{q}}(z)=(1+\mathfrak{q}^{-z})/(1+\mathfrak{q}^z)=\mathfrak{q}^{-z}$，而 $\mathfrak{q}^{(z+1)z/2}=\mathfrak{q}^{z(z-1)/2}\mathfrak{q}^z$ 给出了$\Omega_{\mathfrak{q}}$的周期性。对称性源于 $K_{\mathfrak{q}}$ 在 $z\mapsto 1-z$下的对称性，以及 $\Omega_{\mathfrak{q}}(1)=K_{\mathfrak{q}}(1)=1$。(ii) 根据 Jacobi三重积恒等式 [14, (1.6.1)], $(\mathfrak{q},-w,-\mathfrak{q}/w;\mathfrak{q})_\infty=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathfrak{q}^{n(n-1)/2}w^n$。其中

$w = \mathfrak{q}^z$ 这给出 $\mathfrak{q}^{z(z-1)/2}(\mathfrak{q}, -\mathfrak{q}^z, -\mathfrak{q}^{1-z}; \mathfrak{q})_\infty = \sum_n \mathfrak{q}^{(n+z)(n+z-1)/2} = \vartheta_{\mathfrak{q}}(z)$，而归一化由 $\Omega_{\mathfrak{q}}(0) = \Omega_{\mathfrak{q}}(1) = 1$得到。(iii) 令 $(n+z)(n+z-1)/2 = (n+u)^2/2 - 1/8$ 其中 $u = z - 1/2$，可得 $\vartheta_{\mathfrak{q}}(z) = e^{\lambda/8}\sum_n e^{-\lambda(n+u)^2/2}$，泊松求和公式 $\sum_n e^{-\lambda(n+u)^2/2} = \sqrt{2\pi/\lambda}\sum_k e^{-2\pi^2k^2/\lambda}e^{2\pi iku}$ 在将 34) 中的 $\pm k$ 分组并使用 $e^{2\pi ik(z-1/2)} = (-1)^k e^{2\pi ikz}$后，给出结果。将分子和分母按 ε 的幂展开，得到 $\Omega_{\mathfrak{q}}(z) = 1 + 2\varepsilon(1 - \cos 2\pi z) + O(\varepsilon^2)$。由(ii)可知正性，并且 $\Omega_{\mathfrak{q}}(1/2) - 1 = 4\varepsilon + O(\varepsilon^2) \neq 0$ 在 ε 较小时成立，而 $\Omega_{\mathfrak{q}}(1/2) \neq 1$ 对所有 $\mathfrak{q} \in (0,1)$均成立，因为(34)中的分子减去分母等于 $\sum_{k\ \text{odd}} 4\varepsilon^{k^2} > 0$ 在 $z = 1/2$处。□

定理 3.4. 假设(Hϕ)。对于 $\Re z > 0$,

$$\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z) = \Omega_{\mathfrak{q}}(z)\,\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z). \tag{35}$$

因此，$\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$ 亚纯延拓到 $\mathbb{C}$, $\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z+1) = [z]_{\mathcal{R}(p,q)}\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z)$, $\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(n+1) = [n]!_{\mathcal{R}(p,q)}$ 对于 $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$，但 $\gamma_{\mathcal{R}(p,q)} \neq \Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$，且函数 $x \mapsto \phi_1^{-(x-1)(x-2)/2}\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)$ 在 $(0,\infty)$上并非对数凸。

证明。(32) 的权重如 $\mathfrak{q}^k$ 定理 3.1 的证明中所示，因此

$$\int_0^{\infty;a_{\mathcal{R}(p,q)}} t^{z-1}e_{\mathcal{R}(p,q)}(-\phi_1 t)\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t = (\phi_1-\phi_2)^{1-z}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\mathfrak{q}^{kz}}{(-\mathfrak{q}^k;\mathfrak{q})_\infty} = \frac{(\phi_1-\phi_2)^{1-z}}{(-1;\mathfrak{q})_\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1;\mathfrak{q})_k\,\mathfrak{q}^{kz},$$

因为 $(-\mathfrak{q}^k;\mathfrak{q})_\infty = (-1;\mathfrak{q})_\infty/(-1;\mathfrak{q})_k$ 对所有 $k \in \mathbb{Z}$均成立。Ramanujan 的 ${}_1\psi_1$ 求和公式 [14, (5.2.1)], [2],

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(a;\mathfrak{q})_k}{(b;\mathfrak{q})_k}w^k = \frac{(\mathfrak{q}, b/a, aw, \mathfrak{q}/(aw);\mathfrak{q})_\infty}{(b, \mathfrak{q}/a, w, b/(aw);\mathfrak{q})_\infty}, \qquad |b/a| < |w| < 1, \tag{36}$$

其中 $a = -1$、$b = 0$和 $w = \mathfrak{q}^z$，给出 $\sum_k(-1;\mathfrak{q})_k\mathfrak{q}^{kz} = (\mathfrak{q}, -\mathfrak{q}^z, -\mathfrak{q}^{1-z};\mathfrak{q})_\infty/(-\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^z;\mathfrak{q})_\infty$。因此，该积分等于 $(\phi_1-\phi_2)^{1-z}(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_\infty K_{\mathfrak{q}}(z)/(\mathfrak{q}^z;\mathfrak{q})_\infty = \phi_1^{1-z}K_{\mathfrak{q}}(z)\Gamma_{\mathfrak{q}}(z)$，并且

$$\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z) = \phi_2^{\frac{z(z-1)}{2}}\phi_1^{1-z}K_{\mathfrak{q}}(z)\Gamma_{\mathfrak{q}}(z) = \mathfrak{q}^{\frac{z(z-1)}{2}}K_{\mathfrak{q}}(z)\,\phi_1^{\frac{z(z-1)}{2}+1-z}\Gamma_{\mathfrak{q}}(z) = \Omega_{\mathfrak{q}}(z)\,\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z).$$

函数方程和插值性质由定理3.1 和命题3.1(i) 得出。由于 $\Omega_{\mathfrak{q}}$ 不是常数，$\gamma_{\mathcal{R}(p,q)} \neq \Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$，而定理3.2表明 $\phi_1^{-(x-1)(x-2)/2}\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x) = \Omega_{\mathfrak{q}}(x)\Gamma_{\mathfrak{q}}(x)$ 不可能是对数凸的，否则它将与 $\Gamma_{\mathfrak{q}}$ 重合。□

注 3。 两个变形伽马函数在整数上重合，并满足相同的函数方程；它们的商是一个一周期函数 $\Omega_{\mathfrak{q}}$，其非常接近于 1：对于$\mathfrak{q} = 0.5$ 有 $\Omega_{\mathfrak{q}}(1/2) - 1 = 1.7\times10^{-12}$。这是经典事实的变形对应物：*Jackson* 积分和双边 *Ramanujan* 型积分定义了两个 q–相差一个拟常数的伽马函数 *[5, 14]*。变形体现在(32) 中的前置因子 $\phi_2^{z(z-1)/2}$ 以及在 $-\phi_1 t$处取值的变形指数函数 $e_{\mathcal{R}(p,q)}$，它们相对于(27)发生了交换。

3.3. **乘法公式、反射和 Wendel 型估计。** 对于 $n \in \mathbb{N}$，该对 (ϕ_1^n, ϕ_2^n)满足假设（Hϕ），其比值为 $\mathfrak{q}^n$，且其变形数为 $(\phi_1^{nm} - \phi_2^{nm})/(\phi_1^n - \phi_2^n) = [nm]_{\mathcal{R}(p,q)}/[n]_{\mathcal{R}(p,q)}$。我们记

$$\Gamma^{[n]}_{\mathcal{R}(p,q)}(w) := \phi_1^{\frac{n(w-1)(w-2)}{2}}\Gamma_{\mathfrak{q}^n}(w) \tag{37}$$

与 (ϕ_1^n, ϕ_2^n) 相关联的第一类变形伽马函数由定理3.1给出；对于 $n = 1$，它是 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$。

定理 3.5(变形 Gauss 乘法公式)。假设(Hϕ)且令 $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$。那么，作为关于 z 的亚纯函数之间的恒等式，

$$\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(nz)\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma^{[n]}_{\mathcal{R}(p,q)}\left(\frac{k}{n}\right) = [n]^{nz-1}_{\mathcal{R}(p,q)}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma^{[n]}_{\mathcal{R}(p,q)}\left(z+\frac{k}{n}\right). \tag{38}$$

特别地，对于 $n=2$，可得到变形勒让德倍增公式

$$\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(2z)\,\Gamma^{[2]}_{\mathcal{R}(p,q)}\!\left(\tfrac12\right) \;=\; (\phi_1+\phi_2)^{2z-1}\,\Gamma^{[2]}_{\mathcal{R}(p,q)}(z)\,\Gamma^{[2]}_{\mathcal{R}(p,q)}\!\left(z+\tfrac12\right). \tag{39}$$

证明。第 $\mathfrak{q}$–高斯乘法公式的类似结果 [14, 第 1 节10] 为 $\Gamma_{\mathfrak{q}}(nz)\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma_{\mathfrak{q}^n}(k/n)=[n]_{\mathfrak{q}}^{nz-1}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma_{\mathfrak{q}^n}(z+k/n)$。根据定理 3.1、(37) 和 $[n]_{\mathcal{R}(p,q)}=\phi_1^{n-1}[n]_{\mathfrak{q}}$，恒等式 (38) 等价于指数恒等式 $A_n(z)=(n-1)(nz-1)+B_n(z)$，其中

$$A_n(z) \;=\; \frac{(nz-1)(nz-2)}{2}+\frac{n}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{k}{n}-1\Big)\Big(\frac{k}{n}-2\Big), \qquad B_n(z) \;=\; \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(z+\frac{k}{n}-1\Big)\Big(z+\frac{k}{n}-2\Big).$$

令 $C_n=\sum_{k=0}^{n-1}(k/n-1)(k/n-2)$。由于 $\sum_{k=0}^{n-1}k/n=(n-1)/2$，可得 $B_n(z)=\frac{n}{2}\big[nz^2-(2n+1)z+C_n\big]$ 和 $A_n(z)=\frac12(n^2z^2-3nz+2)+\frac{n}{2}(C_n-2)$，因此 $A_n(z)-B_n(z)=\frac12\big[(2n^2-2n)z+2-2n\big]=(n-1)(nz-1)$。对于 $n=2$, $[2]_{\mathcal{R}(p,q)}=\phi_1+\phi_2$。□

倍增公式（39）表明，经典因子 $(\phi_1+\phi_2)$ 的底数 2^{2z-1} 是变形数 $[2]_{\mathcal{R}(p,q)}$，而右端的伽马函数属于平方变形 (ϕ_1^2,ϕ_2^2)；没有出现额外的赋值因子，三个变形伽马函数的二次指数恰好相互补偿。

命题 3.2（变形反射公式）。假设（Hϕ）并令

$$\theta_{\mathfrak{q}}(w) \;:=\; (w,\mathfrak{q}/w,\mathfrak{q};\mathfrak{q})_\infty \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\mathfrak{q}^{n(n-1)/2}w^n. \tag{40}$$

对于 $0<x<1$,

$$\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\,\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(1-x) \;=\; \phi_1^{x^2-x+1}\,\frac{(1-\mathfrak{q})\,(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_\infty^3}{\theta_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{q}^x)}, \qquad \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,1-x) \;=\; \phi_1^{\frac{x^2-x+2}{2}}\,\frac{(1-\mathfrak{q})\,(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_\infty^3}{\theta_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{q}^x)}. \tag{41}$$

当 $\phi_1\to1$ 和 $\mathfrak{q}\to1^-$ 时，等式两边都趋于 $\pi/\sin(\pi x)$。

证明。由（9），$\Gamma_{\mathfrak{q}}(x)\Gamma_{\mathfrak{q}}(1-x)=(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_\infty^2(1-\mathfrak{q})/((\mathfrak{q}^x;\mathfrak{q})_\infty(\mathfrak{q}^{1-x};\mathfrak{q})_\infty)$，而 $\theta_{\mathfrak{q}}$ 的级数表达式就是 Jacobi三重积恒等式，见 [14, 第 1 节6]。伽马乘积的赋值指数为 $\frac{(x-1)(x-2)}{2}+\frac{x(x+1)}{2}=x^2-x+1$，而根据定理 4.1，$1-x+\frac{(-x)(-x-1)}{2}=\frac{x^2-x+2}{2}$ 是贝塔函数的赋值指数，因为 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(1)=1$。极限由 $\Gamma_{\mathfrak{q}}\to\Gamma$ [5] 以及经典反射公式得出。□

下一个结果是 Wendel [51] 双边估计的变形对应物；与经典情形一样，它由归一化变形伽马函数的对数凸性得出。

定理 3.6 (Wendel型估计)。假设 (Hϕ)。对于 $x>0$ 和 $0\le s\le1$,

$$\phi_1^{\frac{s(1-s)}{2}}\,[x]_{\mathcal{R}(p,q)}\,[x+s]_{\mathcal{R}(p,q)}^{s-1} \;\le\; \frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+s)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)} \;\le\; \phi_1^{-\frac{s(1-s)}{2}}\,[x]_{\mathcal{R}(p,q)}^{s}. \tag{42}$$

因此，对于每个实数 $y>0$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)}{\phi_1^{\frac{y(y-1)}{2}}\,[x]^y_{\mathcal{R}(p,q)}\,\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)} \;=\; 1. \tag{43}$$

证明。由（30），$\Gamma_{\mathfrak{q}}$在 $(0,\infty)$上对数凸。由于 $x+s=(1-s)x+s(x+1)$且 $x+1=s(x+s)+(1-s)(x+s+1)$，函数 $\log\Gamma_{\mathfrak{q}}$的凸性以及函数方程 $\Gamma_{\mathfrak{q}}(u+1)=[u]_{\mathfrak{q}}\Gamma_{\mathfrak{q}}(u)$可得

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathfrak{q}}(x+s) \;&\le\; \Gamma_{\mathfrak{q}}(x)^{1-s}\Gamma_{\mathfrak{q}}(x+1)^s \;=\; [x]_{\mathfrak{q}}^s\,\Gamma_{\mathfrak{q}}(x),\\ \Gamma_{\mathfrak{q}}(x+1) \;&\le\; \Gamma_{\mathfrak{q}}(x+s)^s\,\Gamma_{\mathfrak{q}}(x+s+1)^{1-s} \;=\; [x+s]_{\mathfrak{q}}^{1-s}\,\Gamma_{\mathfrak{q}}(x+s).\end{aligned}$$

因此 $[x]_{\mathfrak{q}}[x+s]_{\mathfrak{q}}^{s-1}\le\Gamma_{\mathfrak{q}}(x+s)/\Gamma_{\mathfrak{q}}(x)\le[x]_{\mathfrak{q}}^s$。根据定理 3.1，$\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+s)/\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)=\phi_1^{s(2x+s-3)/2}\Gamma_{\mathfrak{q}}(x+s)/\Gamma_{\mathfrak{q}}(x)$，并根据引理 1 $[x]_{\mathfrak{q}}=\phi_1^{1-x}[x]_{\mathcal{R}(p,q)}$。上指数为 $s(2x+$

$s-3)/2+s(1-x)=-s(1-s)/2$，下指数为 $s(2x+s-3)/2+(1-x)-(1-x-s)(1-s)=s(1-s)/2$，从而得到（42）。由于 $x\to+\infty$，$[x+s]_{\mathcal{R}(p,q)}/[x]_{\mathcal{R}(p,q)}\to\phi_1^s$，因此两个界的比值趋于 $\phi_1^{s(1-s)}\phi_1^{s(s-1)}=1$，这就是 43) 对于 $y=s\in[0,1]$，因为 $\phi_1^{-s(1-s)/2}=\phi_1^{s(s-1)/2}$。对于 $y=n+s$ 当 $n\in\mathbb{N}$ 且 $s\in[0,1)$，$\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)=\big([x+s]_{\mathcal{R}(p,q)}\big)_n\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+s)$，并且$\big([x+s]_{\mathcal{R}(p,q)}\big)_n\sim\phi_1^{ns+n(n-1)/2}[x]^n_{\mathcal{R}(p,q)}$，因为 $[x+a]_{\mathcal{R}(p,q)}/[x]_{\mathcal{R}(p,q)}\to\phi_1^a$；指数之和为$ns+n(n-1)/2+s(s-1)/2=y(y-1)/2$。□

极限（43）取代了经典渐近关系 $\Gamma(x+y)\sim x^y\Gamma(x)$：幂 x^y 变为 $[x]^y_{\mathcal{R}(p,q)}$ 变形数的幂，并由赋值因子 $\phi_1^{y(y-1)/2}$ 修正，该因子是 y 变形阶乘的指数在 $[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}=\phi_1^{n(n-1)/2}[n]_{\mathfrak{q}}!$处的值。

4. 第一类非交换变形贝塔函数

4.1. 定义与闭式。

定义 4.1. 假设(Hϕ)，并令 $\Omega_+:=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2:\Re x>0,\ \Re y>0\}$。第一类$\mathcal{R}(p,q)$–贝塔函数为

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y):=\int_0^1 t^{x-1}\,(1\ominus\phi_2 t)^{y-1}_{\mathcal{R}(p,q)}\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t,\qquad (x,y)\in\Omega_+, \tag{44}$$

其中变形幂由(20)给出，即 $(1\ominus\phi_2 t)^{y-1}_{\mathcal{R}(p,q)}=\phi_1^{(y-1)(y-2)/2}(\phi_2 t;\mathfrak{q})_\infty/(\phi_2\mathfrak{q}^{y-1}t;\mathfrak{q})_\infty$。

对于 $y=n+1$，$n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，被积函数是多项式 $t^{x-1}\prod_{k=0}^{n-1}(\phi_1^k-\phi_2^{k+1}t)$，而对于 Jagannathan Srinivasa Rao 变形和整数自变量（44），它是 (p,q)–的贝塔积分。[40]。

引理 5。假设(Hϕ)。对于 $(x,y)\in\Omega_+$，

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)=(1-\mathfrak{q})\,\phi_1^{1-x+\frac{(y-1)(y-2)}{2}}\sum_{j\ge0}\mathfrak{q}^{jx}\frac{(\mathfrak{q}^{j+1};\mathfrak{q})_\infty}{(\mathfrak{q}^{j+y};\mathfrak{q})_\infty}, \tag{45}$$

该级数在 Ω_+的紧子集上一致绝对收敛，$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 在Ω_+上全纯，并且对于实数 x、$y>0$，$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)>0$。

证明。(44)的节点为 $t_j=\mathfrak{q}^j/\phi_1$，权重为 $(1-\mathfrak{q})\mathfrak{q}^j$，且 $\phi_2 t_j=\mathfrak{q}^{j+1}$，从而得到（45）。对于 $\Re y\ge\delta>0$，有 $|1-\mathfrak{q}^{j+y+k}|\ge1-\mathfrak{q}^{\delta+k}$，因此 $|(\mathfrak{q}^{j+y};\mathfrak{q})_\infty|\ge(\mathfrak{q}^\delta;\mathfrak{q})_\infty>0$，而$0<(\mathfrak{q}^{j+1};\mathfrak{q})_\infty\le1$；因此，第 j–项被 $\mathfrak{q}^{j\Re x}/(\mathfrak{q}^\delta;\mathfrak{q})_\infty$所界定，从而在 $\{\Re x\ge\delta,\Re y\ge\delta\}$上一致收敛。由于每一项都是全纯的，根据魏尔斯特拉斯定理，$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 在 Ω_+ 上是全纯的。由引理2（v）可得正性。□

因此，$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 在 Ω_+ 上的全纯性对每个可容许的参数对 $\phi_1>\phi_2>0$都成立；不需要对形式 $\phi_1\le1$ 进行归一化，因为只有比值 $\mathfrak{q}$ 会影响（45）的收敛性。

定理 4.1。假设 (Hϕ)。对于 $(x,y)\in\Omega_+$，

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)=\phi_1^{\frac{(y-1)(2x+y-2)}{2}}\frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\,\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)}=\phi_1^{1-x+\frac{(y-1)(y-2)}{2}}\,\mathrm{B}_{\mathfrak{q}}(x,y). \tag{46}$$

特别地，$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 延拓为 $\mathbb{C}^2$上的亚纯函数。

证明。由于 $(\mathfrak{q}^{j+1};\mathfrak{q})_\infty=(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_\infty/(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_j$ 且 $(\mathfrak{q}^{j+y};\mathfrak{q})_\infty=(\mathfrak{q}^y;\mathfrak{q})_\infty/(\mathfrak{q}^y;\mathfrak{q})_j$，引理 4 取 $b=\mathfrak{q}^y$和 $w=\mathfrak{q}^x$ 给出

$$\sum_{j\ge0}\mathfrak{q}^{jx}\frac{(\mathfrak{q}^{j+1};\mathfrak{q})_\infty}{(\mathfrak{q}^{j+y};\mathfrak{q})_\infty}=\frac{(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_\infty}{(\mathfrak{q}^y;\mathfrak{q})_\infty}\sum_{j\ge0}\frac{(\mathfrak{q}^y;\mathfrak{q})_j}{(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_j}\mathfrak{q}^{jx}=\frac{(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_\infty\,(\mathfrak{q}^{x+y};\mathfrak{q})_\infty}{(\mathfrak{q}^x;\mathfrak{q})_\infty\,(\mathfrak{q}^y;\mathfrak{q})_\infty}.$$

两边相乘 $1-\mathfrak{q}$ 并与（9）比较，得到（46）中的第二个等式。根据定理 3.1，

$$\frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)}=\phi_1^{\frac{(x-1)(x-2)+(y-1)(y-2)-(x+y-1)(x+y-2)}{2}}\mathrm{B}_{\mathfrak{q}}(x,y)=\phi_1^{1-xy}\mathrm{B}_{\mathfrak{q}}(x,y),$$

第一个等式则由指数恒等式 $1-x+\binom{y-1}{2}-(1-xy)=\frac{(y-1)(2x+y-2)}{2}$ 得出，该恒等式已在附录 A.1中验证。亚纯延拓继承自 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$。 □

推论 2。 假设(Hϕ)。对于具有正实部的 x、 $y\in\mathbb{C}$ 以及 m、 $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,1) = \frac{1}{[x]_{\mathcal{R}(p,q)}},\qquad \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(1,y) = \frac{\phi_1^{\frac{y(y-1)}{2}}}{[y]_{\mathcal{R}(p,q)}},$$

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(m,n) = \phi_1^{\frac{(n-1)(2m+n-2)}{2}}\,\frac{[m-1]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[n-1]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{[m+n-1]!_{\mathcal{R}(p,q)}}, \tag{47}$$

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}\Big(\tfrac12,\tfrac12\Big) = \phi_1^{\frac78}\,\Gamma_{\mathfrak{q}}\Big(\tfrac12\Big)^2. \tag{48}$$

证明。 第一个值也是命题 2.2(ii)。其余结果由 46 式（其中 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(1)=1$, $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y+1)=[y]_{\mathcal{R}(p,q)}\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)$, $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(n)=[n-1]!_{\mathcal{R}(p,q)}$, 而对于 48 式， $(y-1)(2x+y-2)/2=1/8$处的 $x=y=1/2$以及$\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(1/2)=\phi_1^{3/8}\Gamma_{\mathfrak{q}}(1/2)$ 得到。 □

表 2 列出了 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(m,n)$ 在 $1\le m$、 $n\le 3$ 由（47）得到的取值。条目 (m,n) 与 (n,m) 之间的不对称性即为下文定理 4.2 的交换缺陷；例如， $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(1,2)/\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(2,1)=\phi_1$ 以及 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(2,3)/\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(3,2)=\phi_1^2$。

表 2. 第一类变形贝塔函数在整数点处的取值， $[k]_{\mathcal{R}(p,q)}=(\phi_1^k-\phi_2^k)/(\phi_1-\phi_2)$。

$m\backslash n$	1	2	3
1	1	$\dfrac{\phi_1}{[2]_{\mathcal{R}(p,q)}}$	$\dfrac{\phi_1^3}{[3]_{\mathcal{R}(p,q)}}$
2	$\dfrac{1}{[2]_{\mathcal{R}(p,q)}}$	$\dfrac{\phi_1^2}{[2]_{\mathcal{R}(p,q)}[3]_{\mathcal{R}(p,q)}}$	$\dfrac{\phi_1^5}{[3]_{\mathcal{R}(p,q)}[4]_{\mathcal{R}(p,q)}}$
3	$\dfrac{1}{[3]_{\mathcal{R}(p,q)}}$	$\dfrac{\phi_1^3}{[3]_{\mathcal{R}(p,q)}[4]_{\mathcal{R}(p,q)}}$	$\dfrac{\phi_1^7[2]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[3]_{\mathcal{R}(p,q)}[4]_{\mathcal{R}(p,q)}[5]_{\mathcal{R}(p,q)}}$

推论 3 （变形部分分式恒等式）。 假设 (Hϕ)。对于 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 和 $x\in\mathbb{C}\setminus\{-k+2\pi im/\log\mathfrak{q}:\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ \ m\in\mathbb{Z}\}$,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}_{\mathcal{R}(p,q)}\frac{\phi_1^{\binom{n-k}{2}}\phi_2^{\binom{k+1}{2}}}{[x+k]_{\mathcal{R}(p,q)}} = \phi_1^{\frac{n(2x+n-1)}{2}}\,\frac{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{\prod_{j=0}^{n}[x+j]_{\mathcal{R}(p,q)}}. \tag{49}$$

证明。 对于 $\Re x>0$, 将引理 2（iii）中的变形高斯公式与 $b=\phi_2 t$ 逐项对 t^{x-1}进行积分，并使用命题 2.2（ii）和 $\phi_2^{\binom{k}{2}}\phi_2^k=\phi_2^{\binom{k+1}{2}}$：式（49）的左端为 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,n+1)$，根据定理 4.1，其等于右端，因为 $(y-1)(2x+y-2)/2=n(2x+n-1)/2$ 当$y=n+1$ 时，以及 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)/\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+n+1)=1/\prod_{j=0}^{n}[x+j]_{\mathcal{R}(p,q)}$。两端关于 x均为亚纯函数，因此该恒等式延拓至所述集合。 □

4.2. **非交换性与交换规则**。

定理 4.2. 假设 (Hϕ)。对于 $(x,y)\in\Omega_+$,

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = \phi_1^{\frac{(y-x)(x+y-1)}{2}}\,\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(y,x). \tag{50}$$

特别地，对于实数 x、 $y>0$、 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)=\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(y,x)$，当且仅当 $\phi_1=1$，或 $x=y$，或 $x+y=1$。

证明。式（46）中的伽马函数商具有对称性，因此 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)/\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(y,x) = \phi_1^{E(x,y)-E(y,x)}$ 其中 $E(x,y) = (y-1)(2x+y-2)/2$，且 $E(x,y) - E(y,x) = (y-x)(x+y-1)/2$（附录 A.1）。对于实参数，$\phi_1^w = 1$ 其中 w 为实数当且仅当 $\phi_1 = 1$或 $w = 0$。□

$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 的非交换性完全由主导变形函数 ϕ_1承载；在 Jackson 情形 $\phi_1 = 1$中，这种非交换性消失，此时 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)} = \mathrm{B_q}$ 是交换的 Jackson 贝塔函数[14]。

4.3. 分部积分、帕斯卡法则与单位平移。

引理 6. 假设(Hϕ) 成立，且令 $(x,y) \in \Omega_+$。则

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+1,y) = \phi_1^{-x}\frac{[x]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[y]_{\mathcal{R}(p,q)}}\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y+1), \tag{51}$$

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y+1) = \phi_1^{y-1}\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) - \phi_2^{y}\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+1,y). \tag{52}$$

证明。对于 (51)，在 $[0,1]$ 上应用分部积分公式 (14) $f(t) = (t/\phi_1)^x$ 并取 $g(t) = -(1\ominus t)^y_{\mathcal{R}(p,q)}/[y]_{\mathcal{R}(p,q)}$。根据引理 2(iv)，$\partial_{\mathcal{R}(p,q)}g(t) = (1\ominus\phi_2 t)^{y-1}_{\mathcal{R}(p,q)}$，而 $f(\phi_1 t) = t^x$ 和 $\partial_{\mathcal{R}(p,q)}f(t) = \phi_1^{-x}[x]_{\mathcal{R}(p,q)}t^{x-1}$。边界项为零：$g(1) = 0$由引理 2(v) 得出，且 $(fg)(0^+) = 0$ 因为 $\Re x > 0$ 并且 g 在原点附近有界。由于 $g(\phi_2 t) = -(1\ominus\phi_2 t)^y_{\mathcal{R}(p,q)}/[y]_{\mathcal{R}(p,q)}$，公式 (14) 得到

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+1,y) = \int_0^1 f(\phi_1 t)\,\partial_{\mathcal{R}(p,q)}g(t)\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t = \frac{[x]_{\mathcal{R}(p,q)}}{\phi_1^x[y]_{\mathcal{R}(p,q)}}\int_0^1 t^{x-1}(1\ominus\phi_2 t)^y_{\mathcal{R}(p,q)}\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t,$$

即（51）。对于（52），引理 2（ii）结合 $b = \phi_2 t$ 和 $\alpha = y-1$ 给出 $(1\ominus\phi_2 t)^y_{\mathcal{R}(p,q)} = (1\ominus\phi_2 t)^{y-1}_{\mathcal{R}(p,q)}(\phi_1^{y-1} - \phi_2^y t)$，并对 t^{x-1}进行积分。□

定理 4.3（单位移位与双重移位）。假设 (Hϕ)。对于 $(x,y) \in \Omega_+$，

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+1,y) = \phi_1^{y-1}\frac{[x]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}}\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y), \tag{53}$$

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y+1) = \phi_1^{x+y-1}\frac{[y]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}}\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y), \tag{54}$$

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+1,y+1) = \phi_1^{x+2y-1}\frac{[x]_{\mathcal{R}(p,q)}\,[y]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}\,[x+y+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y). \tag{55}$$

证明。我们给出一个在变形微积分内部的证明，不依赖于定理 4.1。将（51）代入（52），

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y+1)\Big(1 + \frac{\phi_2^y[x]_{\mathcal{R}(p,q)}}{\phi_1^x[y]_{\mathcal{R}(p,q)}}\Big) = \phi_1^{y-1}\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y).$$

根据引理 1（ii）的加法公式，$\phi_1^x[y]_{\mathcal{R}(p,q)} + \phi_2^y[x]_{\mathcal{R}(p,q)} = [x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}$，从而括号等于 $[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}/(\phi_1^x[y]_{\mathcal{R}(p,q)})$，即（54）。将（54）与（51）结合得到

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+1,y) = \phi_1^{-x}\tfrac{[x]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[y]_{\mathcal{R}(p,q)}}\phi_1^{x+y-1}\tfrac{[y]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}}\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y),$$

即（53）。最后，通过在 (x,y) 处应用（54），并在 $(x,y+1)$处应用（54），可得（55），指数之和为 $(x+y-1)+y$。□

定理 4.3也可由（46）和函数方程（29）推出；两种推导结果的一致性是对指数 $E(x,y)$ 的一致性检查，因为 $E(x+1,y) - E(x,y) = y-1$ 且$E(x,y+1) - E(x,y) = x+y-1$。

4.4. **有限移位**。 对于 $a \in \mathbb{C}$ 和 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，我们使用变形的 Pochhammer 符号 ol

$$\left([a]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_n := \prod_{j=0}^{n-1} [a+j]_{\mathcal{R}(p,q)} = \frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(a+n)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(a)}. \tag{56}$$

定理 4.4 （一般移位恒等式）。 假设 (Hϕ)。对于 $(x,y) \in \Omega_+$ 和 $m,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+m, y+n) = \phi_1^{m(y-1)+n(x+y)+mn+\frac{n(n-3)}{2}} \frac{\left([x]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_m \left([y]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_n}{\left([x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_{m+n}} \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y). \tag{57}$$

特别地,

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+n, y) = \phi_1^{n(y-1)} \frac{\left([x]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_n}{\left([x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_n} \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y), \tag{58}$$

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x, y+n) = \phi_1^{\frac{n(2x+2y+n-3)}{2}} \frac{\left([y]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_n}{\left([x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_n} \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y), \tag{59}$$

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+n, y) = \phi_1^{-\frac{n(2x+n-1)}{2}} \frac{\left([x]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_n}{\left([y]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_n} \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x, y+n). \tag{60}$$

证明。 由（46）和（56），

$$\frac{\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+m, y+n)}{\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)} = \phi_1^{E(x+m,y+n)-E(x,y)} \frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+m)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y+n)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y+m+n)},$$

并且 $E(x+m,y+n)-E(x,y) = m(y-1)+n(x+y)+mn+n(n-3)/2$ 由附录 A.1。特殊情形对应于将 (m,n) 替换为 $(n,0)$ 和 $(0,n)$，而（60）是（58）除以（59）所得的商，指数为 $n(y-1)-n(2x+2y+n-3)/2 = -n(2x+n-1)/2$。 □

推论 4 （移位和）。 假设 (Hϕ)。对于 $(x,y) \in \Omega_+$ 和 $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+1, y) + \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x, y+1) = \frac{\phi_1^{y-1}[x]_{\mathcal{R}(p,q)} + \phi_1^{x+y-1}[y]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}} \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y), \tag{61}$$

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+n, y) + \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x, y+n) = \frac{\phi_1^{n(y-1)}(\phi_1^x \ominus \phi_2^x)^n_{\mathcal{R}(p,q)} + \phi_1^{\frac{n(2x+2y+n-3)}{2}}(\phi_1^y \ominus \phi_2^y)^n_{\mathcal{R}(p,q)}}{(\phi_1^{x+y} \ominus \phi_2^{x+y})^n_{\mathcal{R}(p,q)}} \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y), \tag{62}$$

并且，更一般地，$(\phi_1^a \ominus \phi_2^a)^n_{\mathcal{R}(p,q)} = (\phi_1-\phi_2)^n \left([a]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_n$ 对于每个 $a \in \mathbb{C}$。

证明。 由（19），$(\phi_1^a \ominus \phi_2^a)^n_{\mathcal{R}(p,q)} = \prod_{k=0}^{n-1}(\phi_1^{a+k} - \phi_2^{a+k}) = (\phi_1-\phi_2)^n \prod_{k=0}^{n-1}[a+k]_{\mathcal{R}(p,q)}$。公式（62）是（58）和（59）之和，其中因子 $(\phi_1-\phi_2)^n$ 相消，而（61）是其情形 $n=1$。 □

注 *4. (59)* 中的指数关于 *n*是二次的，而 *(58)* 中的指数关于 *n*是线性的：对第二个参数进行迭代会累积 *(54)* 中的指数 $x+y-1, x+y, \ldots, x+y+n-2$。移位商中只出现变形减法 $\ominus$，因为 $\left([a]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_n$ 是因子 $\phi_1^{a+k} - \phi_2^{a+k}$ 的乘积。特别是，初步版本的这些恒等式中可以找到的、第二个参数中指数为线性的迭代表达式 $n(x+y-1)$、分母中使用变形加法 $\oplus$ 的表达式，或双重移位中指数为 $x+2y+1$ 的表达式，分别对于 $n \geq 2$和 $\phi_1 \neq 1$都不正确；*(55)*、*(59)*、*(60)* 和 *(62)* 中的指数已在第 *10* 节通过数值计算验证。

4.5. **对称化**。

定义 4.2. 假设(Hϕ)。对称化第一类变形贝塔函数为

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) := \phi_1^{\frac{x(x-1)}{2}}\,\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) \tag{63}$$

$$= \int_0^1 \phi_1^{\frac{x(x-1)}{2}}\, t^{x-1}(1\ominus\phi_2 t)^{y-1}_{\mathcal{R}(p,q)}\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t, \qquad (x,y)\in\Omega_+. \tag{64}$$

定理 4.5. 假设(Hϕ)。对于 $(x,y)\in\Omega_+$,

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = \phi_1^{\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2}}\,\frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\,\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)} = \frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\,\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)}{\Gamma_{\mathfrak{q}}(x+y)} \tag{65}$$

$$= \phi_1^{\frac{(x-1)(x-2)+(y-1)(y-2)}{2}}\,\mathrm{B}_{\mathfrak{q}}(x,y), \tag{66}$$

~ ~使得 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(y,x)$。此外，若 $h:\{\Re x>0\}\to\mathbb{C}$ 使得 $(x,y)\mapsto\phi_1^{h(x)}\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$ 在 Ω_+ 和 $\phi_1\neq 1$上是对称的，则 $h(x)-x(x-1)/2$ 模 $2\pi i/\log\phi_1$ 为常数，也就是说，对称化因子在相差一个常数因子的意义下是唯一的。

证明。由 (46)，$\widetilde{\mathfrak{B}}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = \phi_1^{x(x-1)/2+E(x,y)}\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)/\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)$，且 $x(x-1)/2+E(x,y) = (x+y-1)(x+y-2)/2$ （附录 A.1）。第二个表达式由 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y) = \phi_1^{(x+y-1)(x+y-2)/2}\Gamma_{\mathfrak{q}}(x+y)$推出，第三个则由 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y) = \phi_1^{[(x-1)(x-2)+(y-1)(y-2)]/2}\Gamma_{\mathfrak{q}}(x)\Gamma_{\mathfrak{q}}(y)$推出。关于唯一性，由 (50)，$\phi_1^{h(x)}\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$ 的对称性等价于 $\phi_1^{h(x)-h(y)+(y-x)(x+y-1)/2}=1$，且 $(y-x)(x+y-1)/2 = [y(y-1)-x(x-1)]/2$。因此$\phi_1^{u(x)-u(y)}=1$ 其中 $u(x)=h(x)-x(x-1)/2$，对所有 x，y。□

对于整数自变量和 Jagannathan Srinivasa Rao 变形，(65) 化为交换的 (p,q)–贝塔函数 [40], ，其指数 $(2mn+m^2+n^2-3m-3n+2)/2$ 恰好是$(m+n-1)(m+n-2)/2$。

4.6. **变形贝塔函数的乘积**。在经典理论中，$\mathrm{B}(x,y)\mathrm{B}(x+y,z) = \Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(z)/\Gamma(x+y+z)$ 在 (x,y,z) 的所有排列下均保持不变，这体现了狄利克雷积分的结合律。在变形情形中，这种不变性被显式的赋值因子破坏。

命题 4.1。假设 (Hϕ)，并令 x、y、$z\in\mathbb{C}$ 具有正实部。则

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)\,\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y,z) = \phi_1^{\frac{(y-1)(2x+y-2)+(z-1)(2x+2y+z-2)}{2}}\,\frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\,\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)\,\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y+z)}, \tag{67}$$

从而

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)\,\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y,z) = \phi_1^{z-y}\,\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,z)\,\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+z,y), \tag{68}$$

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)\,\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y,z) = \phi_1^{-\frac{2x+2yz+z^2-3z}{2}}\,\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(y,z)\,\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y+z). \tag{69}$$

对于对称化函数，

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)\,\widetilde{\mathfrak{B}}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y,z) = \phi_1^{\frac{(x+y-1)(x+y-2)+(x+y+z-1)(x+y+z-2)}{2}}\,\frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\,\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)\,\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y+z)}. \tag{70}$$

证明。公式（67）由（46）应用两次得出，其中因子 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)$ 相消。右侧的伽马函数商关于 (x,y,z) 对称，因此（68）和（69）中的乘积仅在指数上有所不同。令 $E(a,b) = (b-1)(2a+b-2)/2$ 直接展开可得$E(x,y)+E(x+y,z)-E(x,z)-E(x+z,y) = z-y$以及 $E(x,y)+E(x+y,z)-E(y,z)-E(x,y+z) = -(2x+2yz+z^2-3z)/2$。最后一个结论由（65）得出。□

对于 $x=y=z=1$ 可得到 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(1,1)\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(2,1) = 1/[2]_{\mathcal{R}(p,q)}$ 以及 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(1,1)\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(1,2) = \phi_1/[2]_{\mathcal{R}(p,q)}$ 根据推论2，这与（69）一致，其指数在此处等于 -1 。

缺陷（68）和（69）在 Jackson 情形下消失，此时 Dirichlet 型乘积的结合律得以恢复。

4.7. **渐近行为**。

定理 4.6。设(Hϕ)。

(i) 对于具有 $\Re y > 0$ 的固定 y，当 $x \to +\infty$ 沿实轴趋于无穷时，

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = \phi_1^{1-x+\frac{(y-1)(y-2)}{2}} (1-\mathfrak{q})^y \Gamma_{\mathfrak{q}}(y) \left(1+O(\mathfrak{q}^x)\right) \tag{71}$$

$$= \phi_1^{(x-1)(y-1)} \frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)}{[x]^y_{\mathcal{R}(p,q)}} \left(1+O(\mathfrak{q}^x)\right). \tag{72}$$

(ii) 对于具有 $\Re x > 0$ 的固定 x，当 $y \to +\infty$ 沿实轴趋于无穷时，

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = \phi_1^{1-x+\frac{(y-1)(y-2)}{2}} (1-\mathfrak{q})^x \Gamma_{\mathfrak{q}}(x) \left(1+O(\mathfrak{q}^y)\right). \tag{73}$$

特别地，对于实数 $x > 0$、$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) \to +\infty$，若 $\phi_1 > 1$，则 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) \to (1-\mathfrak{q})^x \Gamma_{\mathfrak{q}}(x)$；若$\phi_1 = 1$，则 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) \to 0$；若 $\phi_1 < 1$，则 $\log \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) \sim \frac{y^2}{2} \log \phi_1$，其中当 $\phi_1 \neq 1$ 时。

证明。由定理 4.1，$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)} = \phi_1^{1-x+(y-1)(y-2)/2} \mathrm{B}_{\mathfrak{q}}$，并由 (9)，

$$\mathrm{B}_{\mathfrak{q}}(x,y) = \Gamma_{\mathfrak{q}}(y)(1-\mathfrak{q})^y \frac{(\mathfrak{q}^{x+y};\mathfrak{q})_\infty}{(\mathfrak{q}^x;\mathfrak{q})_\infty} = \Gamma_{\mathfrak{q}}(x)(1-\mathfrak{q})^x \frac{(\mathfrak{q}^{x+y};\mathfrak{q})_\infty}{(\mathfrak{q}^y;\mathfrak{q})_\infty}.$$

对于 $u \to +\infty$ 且有界的 $\Re v > 0$，$\log(\mathfrak{q}^{u+v};\mathfrak{q})_\infty - \log(\mathfrak{q}^u;\mathfrak{q})_\infty = O(\mathfrak{q}^u)$，这给出了 (71) 和 (73) 中的第一个表达式。对于 (71) 中的第二个表达式，引理 1 给出 $[x]^{-y}_{\mathcal{R}(p,q)} = \phi_1^{-y(x-1)}(1-\mathfrak{q})^y(1-\mathfrak{q}^x)^{-y}$，以及 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y) = \phi_1^{(y-1)(y-2)/2}\Gamma_{\mathfrak{q}}(y)$；指数满足 $(x-1)(y-1) - y(x-1) + \frac{(y-1)(y-2)}{2} = 1 - x + \frac{(y-1)(y-2)}{2}$。最后的断言由 $\log\phi_1$ 的符号得出。□

其行为（73）与经典情形大相径庭，$\mathrm{B}(x,y) \sim \Gamma(x)y^{-x}$：在变形情形中，第二自变量方向上的衰减被高斯函数增长或衰减所取代，而其变化由赋值因子控制；只有在 Jackson 情形下，$\phi_1 = 1$ 变形贝塔函数才趋于有限的非零极限。相反，第一自变量方向上的行为（71）则是 $\mathrm{B}(x,y) \sim \Gamma(y)x^{-y}$的精确变形类比，其中幂 x^{-y} 被$[x]^{-y}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 所取代，而赋值因子被 $\phi_1^{(x-1)(y-1)}$ 所取代，这与 Wendel 型极限（43）一致。

命题 4.2（第一自变量的单调性）。假设（Hϕ）并令 $y > 0$。对于 $x > 0$，

$$\frac{\partial}{\partial x} \log \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = -\log\phi_1 + \log\mathfrak{q} \sum_{k\geq 0} \left(\frac{\mathfrak{q}^{x+k}}{1-\mathfrak{q}^{x+k}} - \frac{\mathfrak{q}^{x+y+k}}{1-\mathfrak{q}^{x+y+k}} \right), \tag{74}$$

且该和为正。因此：

（i）若 $\phi_1 \geq 1$，函数 $x \mapsto \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$ 在 $(0,\infty)$上严格递减；（ii）若 $\phi_1 < 1$，则存在唯一的 $x_{\min}(y) > 0$，使得 $x \mapsto \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$ 在 $(0, x_{\min}(y)]$ 上严格递减、在 $[x_{\min}(y), \infty)$ 上严格递增，并且当 $x \to +\infty$ 时 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) \to +\infty$。

证明。由定理 4.1，$\log \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = (1-x)\log\phi_1 + \frac{(y-1)(y-2)}{2}\log\phi_1 + \log\Gamma_{\mathfrak{q}}(x) + \log\Gamma_{\mathfrak{q}}(y) - \log\Gamma_{\mathfrak{q}}(x+y)$，对 (9) 作对数微分得到 $\frac{d}{dx}\log\Gamma_{\mathfrak{q}}(x) = -\log(1-\mathfrak{q}) + \log\mathfrak{q}\sum_{k\geq 0}\mathfrak{q}^{x+k}/(1-\mathfrak{q}^{x+k})$，从而得到 (74)。由于 $u \mapsto u/(1-u)$ 在 $(0,1)$ 和$\mathfrak{q}^{x+k} > \mathfrak{q}^{x+y+k}$上递增，求和中的每一项均为正，且 $\log\mathfrak{q} < 0$。因此，(74) 的第二项为负；当 $x \to 0^+$ 时，它趋于 $-\infty$，当 $x \to +\infty$时趋于 0，并由定理 6.1(i) 的对数凸性可知，它关于 x 递增。若 $\phi_1 \geq 1$，则导数为负。若 $\phi_1 < 1$，导数从 $-\infty$ 递增至 $-\log\phi_1 > 0$，且有唯一零点；由 (71) 可得 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) \to +\infty$。□

图 1 展示了三种情况 $\phi_1 < 1$，$\phi_1 = 1$ 和 $\phi_1 > 1$。在第一种情况下，变形贝塔函数在其第一个自变量处取得最小值，而变形伽马函数失去了其对数

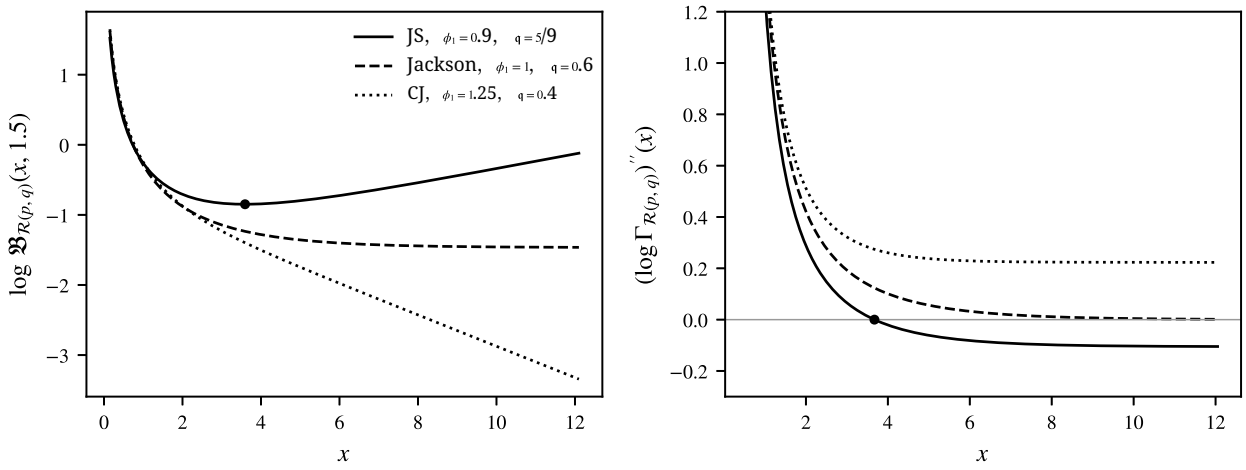

图1 1. 左图： $x \mapsto \log \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x, 1.5)$ Jagannathan Srinivasa Rao 变形 $(p, q) = (0.9, 0.5)$、Jackson 情形 $q = 0.6$ 和 Chakrabarti Jagannathan 变形 $(p, q) = (0.8, 0.5)$；圆点标记了命题 4.2(ii) 的最小值。右图： $x \mapsto \frac{d^2}{dx^2} \log \Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)$ 对于相同的变形；圆点标记了 $x_* = 3.6722\ldots$ 定理 3.3(ii) 的零点。

凸性（当 x_*之后）；在最后一种情况下，这两个函数的表现与经典理论相同，变形贝塔函数递减，而变形伽马函数严格对数凸。

5. 第二类非交换变形贝塔函数

经典贝塔函数除了可表示为 $[0, 1]$, 上的欧拉积分 $\int_0^\infty t^{x-1}(1+t)^{-x-y}\,dt$ 外，还可表示为半直线上的积分。其变形对应物由变形加法 $\oplus$ 和双边变形积分构造而成。

5.1. 定义与闭式。

定义 5.1. 假设 (Hϕ)。对于 $(x, y) \in \Omega_+$，第二类 $\mathcal{R}(p, q)-$ 贝塔函数为

$$\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x, y) \;:=\; \int_0^{\infty;1} \frac{t^{x-1}}{(1 \oplus \phi_1 t)^{x+y}_{\mathcal{R}(p,q)}}\, d_{\mathcal{R}(p,q)}t, \tag{75}$$

其中，根据 (20)， $1/(1\oplus\phi_1 t)^s_{\mathcal{R}(p,q)} = \phi_1^{-s(s-1)/2}(-\phi_1\mathfrak{q}^s t;\mathfrak{q})_\infty/(-\phi_1 t;\mathfrak{q})_\infty$ 是关于 s 对每个 $t > 0$ 都成立的整函数。

引理 7. 假设 (Hϕ) 并令 $s = x + y$。对于 $(x, y) \in \Omega_+$,

$$\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x, y) \;=\; (1-\mathfrak{q})\,\phi_1^{1-x-\frac{s(s-1)}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{q}^{kx}\, \frac{(-\mathfrak{q}^{k+s};\mathfrak{q})_\infty}{(-\mathfrak{q}^k;\mathfrak{q})_\infty}, \tag{76}$$

该双边级数在 Ω_+上绝对且一致收敛，在 Ω_+上是全纯的，并且对于实数 x、 $y > 0$, $\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x, y) > 0$ 。

证明。 节点为 $t_k = \mathfrak{q}^k/\phi_1$， $k \in \mathbb{Z}$, 权重为 $(1-\mathfrak{q})\mathfrak{q}^k$ 和 $\phi_1 t_k = \mathfrak{q}^k$, 由此得到（76）。对于 $k \geq 0$, 乘积之商有界于 $(-\mathfrak{q}^{\Re s};\mathfrak{q})_\infty$, 因此各项为 $O(\mathfrak{q}^{k\Re x})$。对于$k = -m \leq 0$, 恒等式 $(-\mathfrak{q}^{-m}a;\mathfrak{q})_\infty = (-a;\mathfrak{q})_\infty \prod_{i=1}^m (1 + a\mathfrak{q}^{-i})$ 给出

$$\left|\frac{(-\mathfrak{q}^{s-m};\mathfrak{q})_\infty}{(-\mathfrak{q}^{-m};\mathfrak{q})_\infty}\right| \;=\; \frac{|(-\mathfrak{q}^s;\mathfrak{q})_\infty|}{(-1;\mathfrak{q})_\infty} \prod_{i=1}^m \frac{|\mathfrak{q}^i + \mathfrak{q}^s|}{\mathfrak{q}^i + 1} \;\leq\; \frac{(-\mathfrak{q}^{\Re s};\mathfrak{q})_\infty\,(-\mathfrak{q}^{1-\Re s};\mathfrak{q})_\infty}{(-1;\mathfrak{q})_\infty}\, \mathfrak{q}^{m\Re s},$$

由于 $|\mathfrak{q}^i+\mathfrak{q}^s| \le \mathfrak{q}^{\Re s}(1+\mathfrak{q}^{i-\Re s})$。因此，第 $k-$ 项为 $O(\mathfrak{q}^{m\Re y})$，对 $k=-m$，在 Ω_+的紧子集上一致成立，且由魏尔斯特拉斯定理可知全纯性成立。正性由引理2（v）推出。□

定理 5.1。 假设 (Hϕ)。对于 $(x,y)\in\Omega_+$,

$$\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = \phi_1^{1-x-\frac{(x+y)(x+y-1)}{2}} K_{\mathfrak{q}}(x)\,\mathrm{B}_{\mathfrak{q}}(x,y) \tag{77}$$

$$= \phi_1^{-\frac{x^2+x+y^2-y}{2}} K_{\mathfrak{q}}(x)\,\frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\,\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)} \tag{78}$$

$$= \phi_1^{-x-\frac{y(y-1)}{2}} \phi_2^{-\frac{x(x-1)}{2}}\,\frac{\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\,\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)}. \tag{79}$$

特别地， $\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 可延拓为定义在 $\mathbb{C}^2$ 上的亚纯函数，并且

$$\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = \phi_1^{-\frac{(x+y)(x+y-1)}{2}-\frac{(y-1)(y-2)}{2}} K_{\mathfrak{q}}(x)\,\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y). \tag{80}$$

证明。正弦 因为 $(-\mathfrak{q}^{k+s};\mathfrak{q})_\infty = (-\mathfrak{q}^s;\mathfrak{q})_\infty/(-\mathfrak{q}^s;\mathfrak{q})_k$ 和 $(-\mathfrak{q}^k;\mathfrak{q})_\infty = (-1;\mathfrak{q})_\infty/(-1;\mathfrak{q})_k$ 对于 $k\in\mathbb{Z}$ ，

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{q}^{kx}\frac{(-\mathfrak{q}^{k+s};\mathfrak{q})_\infty}{(-\mathfrak{q}^k;\mathfrak{q})_\infty} = \frac{(-\mathfrak{q}^s;\mathfrak{q})_\infty}{(-1;\mathfrak{q})_\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1;\mathfrak{q})_k}{(-\mathfrak{q}^s;\mathfrak{q})_k}\mathfrak{q}^{kx}.$$

拉马努金求和公式（36）结合 $a=-1$， $b=-\mathfrak{q}^s$ 以及 $w=\mathfrak{q}^x$，其条件 $|b/a| = |\mathfrak{q}^{x+y}| \lhd \mathfrak{q}^x| < 1$ 等价于 $(x,y)\in\Omega_+$，得到

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1;\mathfrak{q})_k}{(-\mathfrak{q}^s;\mathfrak{q})_k}\mathfrak{q}^{kx} = \frac{(\mathfrak{q},\mathfrak{q}^{x+y},-\mathfrak{q}^x,-\mathfrak{q}^{1-x};\mathfrak{q})_\infty}{(-\mathfrak{q}^{x+y},-\mathfrak{q},\mathfrak{q}^x,\mathfrak{q}^y;\mathfrak{q})_\infty}.$$

因此，双边和等于 $K_{\mathfrak{q}}(x)(\mathfrak{q},\mathfrak{q}^{x+y};\mathfrak{q})_\infty/(\mathfrak{q}^x,\mathfrak{q}^y;\mathfrak{q})_\infty = K_{\mathfrak{q}}(x)\mathrm{B}_{\mathfrak{q}}(x,y)/(1-\mathfrak{q})$，而（77）由（76）推出。公式（78）由 $\mathrm{B}_{\mathfrak{q}}(x,y)=\phi_1^{xy-1}\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)/\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)$（定理4.1的证明）以及附录 A.1中的指数恒等式推出。由于 $K_{\mathfrak{q}}(x)=\mathfrak{q}^{-x(x-1)/2}\Omega_{\mathfrak{q}}(x)$ 和$\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}=\Omega_{\mathfrak{q}}\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$（定理 3.4），可得 $K_{\mathfrak{q}}(x)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)=\phi_1^{x(x-1)/2}\phi_2^{-x(x-1)/2}\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)$，从而将（78）化为（79）。最后，（80）是（77）除以（46）中的第二个表达式所得的商。□

公式（79）表明，第二类变形贝塔函数在分子中将第一自变量的第二类变形伽马函数与第二自变量的第一类变形伽马函数配对，并在分母中包含相应项；这两种变形函数 ϕ_1 和 ϕ_2 均进入赋值因子。

推论 5。假设(Hϕ)。对于 $y\in\mathbb{C}$，其中 $\Re y>0$ 且 $m,n\in\mathbb{N}$,

$$\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(1,y) = \frac{\phi_1^{-1-\frac{y(y-1)}{2}}}{[y]_{\mathcal{R}(p,q)}}, \qquad \mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(m,n) = \phi_1^{-m-\frac{n(n-1)}{2}}\phi_2^{-\frac{m(m-1)}{2}}\,\frac{[m-1]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[n-1]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{[m+n-1]!_{\mathcal{R}(p,q)}}.$$

特别地 $\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(1,1)=1/\phi_1$。

证明。将（79）与 $\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(m)=\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(m)=[m-1]!_{\mathcal{R}(p,q)}$ 和 $\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(1)=1$结合使用。数值 $\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(1,1)=1/\phi_1$ 也可以直接得到： $(1\oplus\phi_1 t_k)^2_{\mathcal{R}(p,q)}=\phi_1(1+\mathfrak{q}^k)(1+\mathfrak{q}^{k+1})$，而双边和 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1-\mathfrak{q})\mathfrak{q}^k/((1+\mathfrak{q}^k)(1+\mathfrak{q}^{k+1}))=\sum_k[(1+\mathfrak{q}^{k+1})^{-1}-(1+\mathfrak{q}^k)^{-1}]$ 通过望远镜求和化为1。□

5.2. 交换规则、平移与对称化。

定理 5.2. 假设 (Hϕ)。对于 $(x,y)\in\Omega_+$,

$$\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = \phi_1^{\frac{(y-x)(3-x-y)}{2}}\phi_2^{\frac{(y-x)(x+y-1)}{2}}\,\frac{\Omega_{\mathfrak{q}}(x)}{\Omega_{\mathfrak{q}}(y)}\,\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(y,x). \tag{81}$$

特别是在 *Jackson* 情形下， $\phi_1=1$、 $\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)=\mathfrak{q}^{(y-x)(x+y-1)/2}\,\Omega_{\mathfrak{q}}(x)\Omega_{\mathfrak{q}}(y)^{-1}\,\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(y,x)$ 和 $\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 不是交换的。

证明。 由（79）和 $\gamma_{\mathcal{R}(p,q)} = \Omega_{\mathfrak{q}}\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$,

$$\frac{\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)}{\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(y,x)} = \phi_1^{\,y-x+\frac{x(x-1)-y(y-1)}{2}}\,\phi_2^{\,\frac{y(y-1)-x(x-1)}{2}}\,\frac{\Omega_{\mathfrak{q}}(x)}{\Omega_{\mathfrak{q}}(y)},$$

且 $x(x-1)-y(y-1) = (x-y)(x+y-1)$。对于 $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = \mathfrak{q}$。由于 $\Omega_{\mathfrak{q}}$ 是一个周期函数，并且根据命题 3.1，其取值接近但不等于 1，因此 $\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(y,x)$ 前面的因子并非恒等于1。 □

定理 4.2 与 5.2 的比较颇具启发性：第一类交换缺陷仅由ϕ_1 承载，并且在 Jackson 情形下消失；而第二类交换缺陷则由两个变形函数以及 θ商 $\Omega_{\mathfrak{q}}$共同承载，并且在 Jackson 情形下仍然存在。

定理 5.3。 假设 (Hϕ)。对于 $(x,y) \in \Omega_+$ 和 $m,\ n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+m,y+n) = \phi_1^{-m-ny-\frac{n(n-1)}{2}}\,\phi_2^{-mx-\frac{m(m-1)}{2}}\,\frac{\left([x]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_m\left([y]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_n}{\left([x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_{m+n}}\,\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y). \tag{82}$$

特别地

$$\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+1,y) = \frac{[x]_{\mathcal{R}(p,q)}}{\phi_1\phi_2^x\,[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}}\,\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y), \tag{83}$$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y+1) = \frac{[y]_{\mathcal{R}(p,q)}}{\phi_1^y\,[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}}\,\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y). \tag{84}$$

证明。 根据（79），商 $\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+m,y+n)/\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$ 等于 Pochhammer 商乘以

$$\phi_1^{-m-[(y+n)(y+n-1)-y(y-1)]/2}\,\phi_2^{-[(x+m)(x+m-1)-x(x-1)]/2},$$

因为 $\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+m)/\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x) = \left([x]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_m$ 根据 $\Omega_{\mathfrak{q}}$ 的周期性，有 $(y+n)(y+n-1) - y(y-1) = 2ny + n(n-1)$ 以及 $(x+m)(x+m-1) - x(x-1) = 2mx + m(m-1)$。 □

定理 5.4。 假设（Hϕ）。该函数

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) := \frac{\phi_1^x}{K_{\mathfrak{q}}(x)}\,\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = \frac{\phi_1^x\,\mathfrak{q}^{\frac{x(x-1)}{2}}}{\Omega_{\mathfrak{q}}(x)}\,\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y), \qquad (x,y)\in\Omega_+, \tag{85}$$

满足

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = \phi_1^{-\frac{x(x-1)+y(y-1)}{2}}\,\frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\,\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)} = \phi_1^{-\frac{x(x-1)+y(y-1)+(x+y-1)(x+y-2)}{2}}\,\widetilde{\mathfrak{B}}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y), \tag{86}$$

因此是交换的。

证明。 将（78）乘以 $\phi_1^x/K_{\mathfrak{q}}(x)$ 并使用 $-(x^2+x+y^2-y)/2 + x = -[x(x-1)+y(y-1)]/2$; 第二个表达式由（65）得到。 □

注 5。 在未变形极限 $\phi_1 \to 1$ 和 $\mathfrak{q}\to 1^-$ 下，有 $\varepsilon = e^{-2\pi^2/\log(1/\mathfrak{q})} \to 0$，因此 $\Omega_{\mathfrak{q}} \to 1$和 $K_{\mathfrak{q}}(x) = \mathfrak{q}^{-x(x-1)/2}\Omega_{\mathfrak{q}}(x) \to 1$ 根据命题 *3.1*，而 $\Gamma_{\mathfrak{q}} \to \Gamma$ *[5, 14]*。公式 （77）随后化为欧拉积分 $\int_0^\infty t^{x-1}(1+t)^{-x-y}dt = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$。对于 $\phi_1 = 1$ 和 $\mathfrak{q}<1$, （77）是 $q-$上 *Ramanujan* 型的 $(0,\infty)$ 贝塔积分，详见 *[5, 14]*。

5.3. **有限区间变体**。 在 $[0,1]$ 上的第二类函数也可以由反向变形幂 $(\phi_1 t \ominus 1)^n_{\mathcal{R}(p,q)} = \prod_{k=0}^{n-1}(\phi_1^{k+1}t - \phi_2^k)$构造。当整数第二参数时，它具有显式表达式，这也说明了半直线定义（75）为何是恰当的。

命题 5.1。 假设(Hϕ)，令 $\Re x>0$ 和 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，并置 $\mathcal{B}^{[0,1]}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,n+1):=\int_0^1 t^{x-1}(\phi_1 t\ominus 1)^n_{\mathcal{R}(p,q)}\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t$。则

$$\mathcal{B}^{[0,1]}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,n+1) \;=\; (-1)^n\,\phi_2^{\frac{n(2x+n-1)}{2}}\,\frac{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{\prod_{j=0}^{n}[x+j]_{\mathcal{R}(p,q)}} \tag{87}$$

$$\;=\; (-1)^{y-1}\phi_2^{\frac{(y-1)(2x+y-2)}{2}}\,\frac{\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\,\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)}{\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)}\Big|_{y=n+1}, \tag{88}$$

因此，对于 $y\in\mathbb{N}$,

$$\mathcal{B}^{[0,1]}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+1,y) \;=\; \frac{\phi_2^{y-1}[x]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}}\,\mathcal{B}^{[0,1]}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y),\qquad \mathcal{B}^{[0,1]}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y+1) \;=\; -\frac{\phi_2^{x+y-1}[y]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}}\,\mathcal{B}^{[0,1]}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y).$$

证明。 由于 $(u\ominus 1)^n_{\mathcal{R}(p,q)}=u^n(1\ominus u^{-1})^n_{\mathcal{R}(p,q)}$，引理 2（iii）中的变形高斯公式与$u=\phi_1 t$、命题 2.2（ii）以及变换 $k\mapsto n-k$ 给出

$$\mathcal{B}^{[0,1]}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,n+1) \;=\; (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}_{\mathcal{R}(p,q)}\frac{\phi_2^{\binom{n-k}{2}}\phi_1^{\binom{k+1}{2}}}{[x+k]_{\mathcal{R}(p,q)}}.$$

这就是将 ϕ_1 和 ϕ_2 交换后的（49）左端。由于变形数和二项式系数关于 (ϕ_1,ϕ_2)具有对称性，（49）两边都是 $(\phi_1,\phi_2)\in(0,\infty)^2$ 关于实数 $x>0$的实解析函数，并且对于 $\phi_1>\phi_2$成立的恒等式可以延拓至 $\phi_1<\phi_2$。交换ϕ_1 和 ϕ_2 的角色，得到（87）中的第一个表达式，该式对于实数 $x>0$成立，并且对于 $\Re x>0$ 通过解析延拓成立。第二个表达式由 $\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(m)=[m-1]!_{\mathcal{R}(p,q)}$、$\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+n+1)=\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\prod_{j=0}^{n}[x+j]_{\mathcal{R}(p,q)}$以及 $(y-1)(2x+y-2)/2=n(2x+n-1)/2$得到。递推关系是连续取值之商。 □

公式（87）与初步版本中为该变体提出的关系式 $\phi_2^{(y-1)(2x+y-2)/2}\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)/\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)$ 仅在符号上有所不同 $(-1)^{y-1}$：被积函数在格点上变号，该函数沿 $y\in\mathbb{N}$交替变号，且第二个递推关系带有因子 -1。此外，对于 $t\in(0,1)$ 无穷乘积中的因子 $\phi_1^{k+1}t-\phi_2^k$，$(\phi_1 t\ominus 1)^{\infty}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 并不趋于 1，因此那些版本中用于复数 y 的无穷乘积之商并未定义。定义 $\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 中的半直线函数5.1 为正函数，定义于整个 Ω_+ 上，并具有相同的赋值结构；它就是本文所研究的第二类函数。

6. 对数凸性

定理 6.1。设(Hϕ)。则：

(i) 函数 $(x,y)\mapsto\phi_1^{-(y-1)(y-2)/2}\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$ 在 $(0,\infty)^2$上是联合对数凸的；特别地，对于任意固定的 $y>0$，$x\mapsto\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$ 在 $(0,\infty)$上是对数凸的，并且若$\phi_1\geq 1$，则 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 本身是联合对数凸的；(ii) 函数 $(x,y)\mapsto\phi_1^{-[(x-1)(x-2)+(y-1)(y-2)]/2}\widetilde{\mathfrak{B}}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)=\mathrm{B}_{\mathfrak{q}}(x,y)$ 在 $(0,\infty)^2$上是联合对数凸的；(iii) 函数 $(x,y)\mapsto\phi_1^{(x+y)(x+y-1)/2}\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$ 在 $(0,\infty)^2$上是联合对数凸的；特别地，若 $\phi_1\leq 1$，则对于任意固定的$y>0$，$x\mapsto\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$ 在 $(0,\infty)$ 上是对数凸的。

证明。 回顾一下，正函数是对数凸的，当且仅当其对数是凸函数；对数凸函数的乘积和逐点收敛和也是对数凸的[3], ，并且，关于 x 的凸函数与关于 y 的凸函数之和是联合凸的。

(i) 由（45），$\phi_1^{-(y-1)(y-2)/2}\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)=(1-\mathfrak{q})\phi_1^{1-x}\sum_{j\geq 0}u_j(x,y)$ 其中

$$\log u_j(x,y) \;=\; jx\log\mathfrak{q}+\log(\mathfrak{q}^{j+1};\mathfrak{q})_{\infty}-\sum_{k\geq 0}\log\left(1-\mathfrak{q}^{j+k}e^{-\lambda y}\right),\qquad \lambda=\log(1/\mathfrak{q}).$$

前两项关于 x 是仿射的。对于 $c \in (0,1)$，函数 $\psi_c(y) = -\log(1 - ce^{-\lambda y})$ 满足 $\psi_c''(y) = \lambda^2 ce^{-\lambda y}(1 - ce^{-\lambda y})^{-2} > 0$，因此最后的求和关于 y 是凸的（由于在紧集上一致收敛，可以逐项求导）。因此，每个 u_j 都是联合对数凸的，因子 ϕ_1^{1-x} 是对数仿射的，而该和是对数凸的。固定 y 时，因子 $\phi_1^{(y-1)(y-2)/2}$ 是常数；对于 $\phi_1 \geq 1$，它关于 y 是对数凸的。

（ii）是 Jackson 情形下的（i）与（65）的结合；等价地，它可由 Γ_q 的对数凸性以及 $(x,y) \mapsto -\log \Gamma_q(x+y)$ 与仿射映射复合后的联合凸性推出，但上面的级数论证可直接得到该结论，因为 $\mathrm{B}_q(x,y) = (1-q)\sum_j u_j(x,y)$。

(iii) By (76), $\phi_1^{s(s-1)/2}\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = (1-\mathfrak{q})\phi_1^{1-x}\sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k(x,y)$ with $s = x+y$ and

$$\log v_k(x,y) \;=\; kx\log\mathfrak{q} - \log(-\mathfrak{q}^k;\mathfrak{q})_\infty + \sum_{j\geq 0}\log\left(1+\mathfrak{q}^{k+j}e^{-\lambda(x+y)}\right).$$

对于 $c > 0$，$\chi_c(s) = \log(1 + ce^{-\lambda s})$ 满足 $\chi_c''(s) = \lambda^2 ce^{-\lambda s}(1+ce^{-\lambda s})^{-2} > 0$，并且与线性映射 $(x,y) \mapsto x+y$ 的复合是联合凸的。其余论证与（i）相同。最后，$\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)} = \phi_1^{-s(s-1)/2}\cdot\left(\phi_1^{s(s-1)/2}\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}\right)$ 且当 $\phi_1 \leq 1$ 时，$s \mapsto -\frac{s(s-1)}{2}\log\phi_1$ 是凸的。□

推论 6（变形 Turán 恒等式）。假设 (Hϕ)。对于所有 x，$y \in \mathbb{C}$，

$$[x+1]_{\mathcal{R}(p,q)}[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)} - [x]_{\mathcal{R}(p,q)}[x+y+1]_{\mathcal{R}(p,q)} \;=\; (\phi_1\phi_2)^x[y]_{\mathcal{R}(p,q)}. \tag{89}$$

因此，对于实数 x、$y > 0$，

$$\frac{\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+1,y)^2}{\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)\,\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+2,y)} \;=\; 1 - \frac{(\phi_1\phi_2)^x[y]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[x+1]_{\mathcal{R}(p,q)}[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}} \;<\; 1, \tag{90}$$

其为 对数凸性的离散形式，见 $x \mapsto \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$ 定理 6.1 .

证明。将（89）的左端乘以 $(\phi_1-\phi_2)^2$ 并展开后，项 ϕ_1^{2x+y+1} 和 ϕ_2^{2x+y+1} 相互抵消，剩余的四项可分解为 $\phi_1^x\phi_2^x(\phi_1-\phi_2)(\phi_1^y-\phi_2^y)$；见附录 A.1。根据（53）应用两次，（90）的左端等于 $[x]_{\mathcal{R}(p,q)}[x+y+1]_{\mathcal{R}(p,q)}/([x+1]_{\mathcal{R}(p,q)}[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)})$，而（89）给出了右端。□

注 6. 定理 6.1表明，变形贝塔函数的非交换性不会破坏其关于第一个参数的凸性，而关于第二个参数的凸性则要求在 $\phi_1^{-(y-1)(y-2)/2}$ 时进行归一化，其中 $\phi_1 < 1$。这与定理 3.3一致：变形贝塔函数的赋值因子关于参数呈二次形式，而 $\log\phi_1$ 的符号决定了它们是有助于还是妨碍对数凸性。

7. 变形欧拉积分与变形高斯求和

第一类变形贝塔函数是变形欧拉积分表示中的核，该表示对应于变形高斯超几何函数。我们完全通过变形 Pochhammer 符号和变形阶乘来引入这一函数。

定义 7.1. 假设 (Hϕ)。对于 $a,b,c \in \mathbb{C}$，其中 $[c+j]_{\mathcal{R}(p,q)} \neq 0$ 对于 $j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ 成立，变形高斯超几何函数为

$${}_2F_1^{\mathcal{R}(p,q)}(a,b;c;w) \;:=\; \sum_{n\geq 0}\frac{\left([a]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_n\left([b]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_n}{\left([c]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_n[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}\,w^n, \tag{91}$$

对于 $|w| < \phi_1^{\Re(c-a-b)+1}$。

引理 8。假设(Hϕ)。则

$${}_2F_1^{\mathcal{R}(p,q)}(a,b;c;w) \;=\; {}_2\phi_1\left(\mathfrak{q}^a,\mathfrak{q}^b;\mathfrak{q}^c;\mathfrak{q},\phi_1^{a+b-c-1}w\right), \tag{92}$$

其中 ${}_2\phi_1(A,B;C;\mathfrak{q},z) = \sum_n (A;\mathfrak{q})_n(B;\mathfrak{q})_n z^n/((C;\mathfrak{q})_n(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_n)$ 是基本超几何级数[14]。特别地，(91) 在 $|w| < \phi_1^{\Re(c-a-b)+1}$ 时绝对收敛。

证明。 由引理 1(i)， $\big([a]_{\mathcal{R}(p,q)}\big)_n = \prod_{j=0}^{n-1}\phi_1^{a+j-1}[a+j]_{\mathfrak{q}} = \phi_1^{n(a-1)+n(n-1)/2}(\mathfrak{q}^a;\mathfrak{q})_n(1-\mathfrak{q})^{-n}$ 以及$[n]!_{\mathcal{R}(p,q)} = \phi_1^{n(n-1)/2}(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_n(1-\mathfrak{q})^{-n}$。在（91）的系数中，因子 $\phi_1^{n(n-1)/2}$ 和 $(1-\mathfrak{q})^{-n}$ 相消，而 $\phi_1^{n(a-1)+n(b-1)-n(c-1)} = \phi_1^{n(a+b-c-1)}$ 保留下来。该 ${}_2\phi_1$ 级数在 $|z|<1$ [14]时收敛。 □

定理 7.1 （变形欧拉积分）。 假设 （Hϕ），并令 a、 b、 $c\in\mathbb{C}$，其中 $\Re b>0$且 $\Re(c-b)>0$。那么，对于 $|w|<\phi_1^{\Re(c-a-b)+1}$，

$$ {}_2F_1^{\mathcal{R}(p,q)}(a,b;c;w) \;=\; \frac{\phi_1^{\frac{a(a-1)}{2}}}{\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(b,c-b)}\int_0^1 \frac{t^{b-1}\,(1\ominus\phi_2 t)^{c-b-1}_{\mathcal{R}(p,q)}}{(1\ominus\phi_1^{a+b-c}w\,t)^{a}_{\mathcal{R}(p,q)}}\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t, \tag{93}$$

变形幂取自定义2.3。

证明。 置 $z=\phi_1^{a+b-c-1}w$，从而 $|z|<1$且 $\phi_1^{a+b-c}wt=\phi_1 zt$。在节点 $t_j=\mathfrak{q}^j/\phi_1$ 处有 $\phi_1 zt_j = z\mathfrak{q}^j$，并由（20）及 $\mathfrak{q}$–二项式定理（26），

$$\frac{1}{(1\ominus z\mathfrak{q}^j)^a_{\mathcal{R}(p,q)}} \;=\; \phi_1^{-\frac{a(a-1)}{2}}\frac{(z\mathfrak{q}^{j+a};\mathfrak{q})_\infty}{(z\mathfrak{q}^j;\mathfrak{q})_\infty} \;=\; \phi_1^{-\frac{a(a-1)}{2}}\sum_{n\ge0}\frac{(\mathfrak{q}^a;\mathfrak{q})_n}{(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_n}(\phi_1 zt_j)^n.$$

由于 $|z|<1$且 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(b+n,c-b)$的被积函数被 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(\Re b,\Re(c-b))$的被积函数所控制，二重级数绝对收敛，且求和与变形积分可以交换。因此，（93）中的积分等于

$$\phi_1^{-\frac{a(a-1)}{2}}\sum_{n\ge0}\frac{(\mathfrak{q}^a;\mathfrak{q})_n}{(\mathfrak{q};\mathfrak{q})_n}\,\phi_1^n z^n\,\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(b+n,c-b).$$

由（58）可得 $(x,y)=(b,c-b)$，
$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(b+n,c-b)=\phi_1^{n(c-b-1)}\big([b]_{\mathcal{R}(p,q)}\big)_n\big([c]_{\mathcal{R}(p,q)}\big)_n^{-1}\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(b,c-b)$，并根据引理 8的证明，
$\big([b]_{\mathcal{R}(p,q)}\big)_n/\big([c]_{\mathcal{R}(p,q)}\big)_n=\phi_1^{n(b-c)}(\mathfrak{q}^b;\mathfrak{q})_n/(\mathfrak{q}^c;\mathfrak{q})_n$。 ϕ_1的总幂次为 $n+n(c-b-1)+n(b-c)=0$，
因此积分等于 $\phi_1^{-a(a-1)/2}\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(b,c-b)\,{}_2\phi_1(\mathfrak{q}^a,\mathfrak{q}^b;\mathfrak{q}^c;\mathfrak{q},z)$，由引理8即可得证。 □

推论 7 (变形高斯求和)。 假设 (Hϕ) 并令 a、 b、 $c\in\mathbb{C}$，其中 $\Re b>0$、 $\Re(c-a-b)>0$ 以及 $[c+j]_{\mathcal{R}(p,q)}\neq0$ 对 $j\ge0$ 成立。则

$$ {}_2F_1^{\mathcal{R}(p,q)}\big(a,b;c;\phi_1\phi_2^{c-a-b}\big) \;=\; \phi_1^{-ab}\,\frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(c)\,\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(c-a-b)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(c-a)\,\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(c-b)}. \tag{94}$$

证明。 先假设 $\Re(c-b)>0$。令 $w=\phi_1\phi_2^{c-a-b}$则有 $z=\phi_1^{a+b-c-1}w=\mathfrak{q}^{c-a-b}$， $|z|<1$， 并且$\phi_1 zt=\phi_2\mathfrak{q}^{c-a-b-1}t$。在节点处，分子 $(\phi_1 z\mathfrak{q}^a t;\mathfrak{q})_\infty=(\phi_2\mathfrak{q}^{c-b-1}t;\mathfrak{q})_\infty$ 的 $1/(1\ominus\phi_1 zt)^a_{\mathcal{R}(p,q)}$与 $(1\ominus\phi_2 t)^{c-b-1}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 的分母相消，且（93）的被积函数变为

$$\phi_1^{\frac{(c-b-1)(c-b-2)}{2}-\frac{a(a-1)}{2}}\,t^{b-1}\,\frac{(\phi_2 t;\mathfrak{q})_\infty}{(\phi_2\mathfrak{q}^{c-a-b-1}t;\mathfrak{q})_\infty} \;=\; \phi_1^{a(c-a-b-1)}\,t^{b-1}(1\ominus\phi_2 t)^{c-a-b-1}_{\mathcal{R}(p,q)},$$

根据指数恒等式 $(u-1)(u-2)-a(a-1)-(u-a-1)(u-a-2)=2a(u-a-1)$和 $u=c-b$。因此

$$ {}_2F_1^{\mathcal{R}(p,q)}\big(a,b;c;\phi_1\phi_2^{c-a-b}\big) \;=\; \phi_1^{\frac{a(a-1)}{2}+a(c-a-b-1)}\,\frac{\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(b,c-a-b)}{\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(b,c-b)}.$$

根据定理4.1 贝塔函数的商等于 $\phi_1^{E(b,c-a-b)-E(b,c-b)}\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(c)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(c-a-b)/(\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(c-a)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(c-b))$，且 $E(b,c-a-b)-E(b,c-b)=-a(2c-a-3)/2$（附录A.1）。总指数为 $a(a-1)/2+a(c-a-b-1)-a(2c-a-3)/2=-ab$。(94)两边在 b 级数收敛的区域内解析，因此辅助条件$\Re(c-b)>0$得以去除。 □

推论8（变形Chu–Vandermonde恒等式）。假设(Hϕ)。对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $b,\ c \in \mathbb{C}$ 其中 $[c+j]_{\mathcal{R}(p,q)} \neq 0$ 且 $[c-b+j]_{\mathcal{R}(p,q)} \neq 0$ 对于 $0 \leq j < n$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\left([-n]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_k \left([b]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_k}{\left([c]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_k [k]!_{\mathcal{R}(p,q)}} \left(\phi_1 \phi_2^{c-b+n}\right)^k = \phi_1^{nb} \frac{\left([c-b]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_n}{\left([c]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_n}. \tag{95}$$

证明。对于 $a = -n$ 级数 (91) 会终止，因为 $[0]_{\mathcal{R}(p,q)} = 0$，而 (94) 两边都是关于 ϕ_1^b、ϕ_2^b 的有理函数，因此关于 b 的解析延拓显而易见。利用 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(c)/\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(c+n) = 1/\left([c]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_n$ 以及 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(c-b+n)/\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(c-b) = \left([c-b]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_n$。 □

注*7.* 对于 $\phi_1 = 1$，定理 *7.1* 和推论 *7* 化为${}_2\phi_1$ 的欧拉积分表示以及 q–高斯求和公式 *[14,* 第 *1.5* 节和第 *1.11]*节；进一步令 $\mathfrak{q} \to 1$，即可得到经典欧拉积分和高斯求和公式。在 *(94)* 中的论证 $\phi_1 \phi_2^{c-a-b}$ 起到经典点 $w = 1$的作用；赋值因子ϕ_1^{-ab} 关于 a 和 b对称，这是必然的，因为 ${}_2F_1^{\mathcal{R}(p,q)}$ 关于其两个分子参数对称。推论 *7* 的证明仅由第一类贝塔-伽马关系推出变形高斯求和，所用的仅有$\mathfrak{q}$–二项式定理和有限移位恒等式 *(58)*。

7.1. 不完全变形贝塔函数。

定义7.2。假设 (Hϕ)。对于 $0 < u \leq 1$ 和 $(x,y) \in \Omega_+$，第一类不完全变形贝塔函数为

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(u;x,y) := \int_0^u t^{x-1} (1 \ominus \phi_2 t)^{y-1}_{\mathcal{R}(p,q)} \, d_{\mathcal{R}(p,q)} t, \tag{96}$$

从而有 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(1;x,y) = \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$。

定理 7.2。假设 (Hϕ)，令 $0 < u \leq 1$ 和 $(x,y) \in \Omega_+$。则

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(u;x,y) = \phi_1^{\frac{(y-1)(y-2)}{2}} \frac{u^x}{[x]_{\mathcal{R}(p,q)}} \, {}_2F_1^{\mathcal{R}(p,q)}\left(1-y, x; x+1; \phi_1 \phi_2^y u\right), \tag{97}$$

并且分部积分递推关系

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(u;x+1,y) = \phi_1^{-x} \frac{[x]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[y]_{\mathcal{R}(p,q)}} \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(u;x,y+1) - \frac{u^x}{\phi_1^x \, [y]_{\mathcal{R}(p,q)}} (1 \ominus u)^y_{\mathcal{R}(p,q)} \tag{98}$$

成立。对于 $u = 1$ 边界项消失，(98)化为(51)，且 (97)与变形高斯求和 (94) 一起给出贝塔-伽马关系 (46)。

证明。由（20）以及 $\mathfrak{q}$–二项式定理，取 $b = \mathfrak{q}^{1-y}$ 和 $w = \phi_2 \mathfrak{q}^{y-1} t$,

$$(1 \ominus \phi_2 t)^{y-1}_{\mathcal{R}(p,q)} = \phi_1^{\frac{(y-1)(y-2)}{2}} \frac{(\phi_2 t; \mathfrak{q})_\infty}{(\phi_2 \mathfrak{q}^{y-1} t; \mathfrak{q})_\infty} = \phi_1^{\frac{(y-1)(y-2)}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(\mathfrak{q}^{1-y}; \mathfrak{q})_n}{(\mathfrak{q}; \mathfrak{q})_n} \left(\phi_2 \mathfrak{q}^{y-1} t\right)^n,$$

当 $|\phi_2 \mathfrak{q}^{y-1} t| < 1$时。在（$t = u\mathfrak{q}^k/\phi_1$ 96）的节点 处，有 $|\phi_2 \mathfrak{q}^{y-1} t| \leq |\mathfrak{q}^y| u < 1$，因此可以逐项对级数进行积分。根据命题 2.2（ii），$\int_0^u t^{x+n-1} d_{\mathcal{R}(p,q)} t = u^{x+n}/[x+n]_{\mathcal{R}(p,q)}$，并根据引理 1（i），$1/[x+n]_{\mathcal{R}(p,q)} = \phi_1^{-n} [x]^{-1}_{\mathcal{R}(p,q)} (\mathfrak{q}^x; \mathfrak{q})_n / (\mathfrak{q}^{x+1}; \mathfrak{q})_n$。因此

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(u;x,y) = \phi_1^{\frac{(y-1)(y-2)}{2}} \frac{u^x}{[x]_{\mathcal{R}(p,q)}} \sum_{n \geq 0} \frac{(\mathfrak{q}^{1-y}; \mathfrak{q})_n (\mathfrak{q}^x; \mathfrak{q})_n}{(\mathfrak{q}; \mathfrak{q})_n (\mathfrak{q}^{x+1}; \mathfrak{q})_n} \left(\mathfrak{q}^y u\right)^n,$$

由于 $\phi_2 \mathfrak{q}^{y-1}/\phi_1 = \mathfrak{q}^y$。根据引理 8 结合 $(a,b,c) = (1-y, x, x+1)$，最后一个级数为 ${}_2F_1^{\mathcal{R}(p,q)}(1-y, x; x+1; w)$ 其中 $\phi_1^{a+b-c-1} w = \phi_1^{-y-1} w = \mathfrak{q}^y u$，即 $w = \phi_1 \phi_2^y u$。对于（98），我们对 $[0,u]$结合 $f(t) = (t/\phi_1)^x$ 和 $g(t) = -(1 \ominus t)^y_{\mathcal{R}(p,q)}/[y]_{\mathcal{R}(p,q)}$，完全按照引理 6的证明进行（边界

项 $f(u)g(u)$ 不再为零。最后，在 $u=1$处，$(a,b,c)=(1-y,x,x+1)$ 满足 $c-a-b=y$，因此 $\phi_1\phi_2^y$ 是推论7中的高斯点，并且

$$ {}_2F_1^{\mathcal{R}(p,q)}\left(1-y,x;x+1;\phi_1\phi_2^y\right) = \phi_1^{x(y-1)}\frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+1)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(1)} = \phi_1^{x(y-1)}[x]_{\mathcal{R}(p,q)}\frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)}; $$

由于 $(y-1)(y-2)/2+x(y-1)=E(x,y)$，(97) 在 $u=1$ 处为 (46)。 □

公式 (97) 是经典表示的变形类比 $\mathrm{B}(u;x,y)=x^{-1}u^x\,{}_2F_1(1-y,\ x;x+1;u)$，当 $\phi_1\to 1$ 且 $\mathfrak{q}\to 1$ 时便还原为经典表示，其中自变量 $\phi_1\phi_2^y u$ 趋于 u。通过定理 $\mathfrak{q}$–4.1 中的二项式定理 以及此处的变形高斯求和公式推导贝塔-伽马关系的两种方法，为赋值指数 $E(x,y)$提供了一致性检查。

8. 变形贝塔分布

节点格上两个变形贝塔被积函数的正性，给出了两族离散概率分布，这与 $\mathcal{R}(p,q)$–离散分布的类比一脉相承，见[21, 22]。

定义 8.1。 假设(Hϕ)，并令 $x,y>0$。

(i) 第一类变形贝塔分布 $\mu_{x,y}^{(1)}$ 是定义在 $\{t_j=\mathfrak{q}^j/\phi_1 : j\geq 0\}\subset(0,1/\phi_1]$ 上的概率测度，定义如下：

$$ \mu_{x,y}^{(1)}(\{t_j\}) := \frac{(1-\mathfrak{q})\,\mathfrak{q}^j\,t_j^{x-1}\,(1\ominus\phi_2 t_j)_{\mathcal{R}(p,q)}^{y-1}}{\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)}. $$

(ii) 第二类变形贝塔分布$\mu_{x,y}^{(2)}$ 是定义在 $\{t_k=\mathfrak{q}^k/\phi_1 : k\in\mathbb{Z}\}\subset(0,\infty)$ 上的概率测度，定义如下：

$$ \mu_{x,y}^{(2)}(\{t_k\}) := \frac{(1-\mathfrak{q})\,\mathfrak{q}^k\,t_k^{x-1}}{(1\oplus\phi_1 t_k)_{\mathcal{R}(p,q)}^{x+y}\,\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)}. $$

由引理 2(v) 及引理 5 和 7可知，两个测度均定义良好，其总质量由变形积分的定义可得为1。对于服从分布 T 的随机变量 μ，记作 $\mathbb{E}_\mu[T^k]=\sum_t t^k\mu(\{t\})$。

定理 8.1。 假设(Hϕ)，令 $x,y>0$，并令 T 服从分布 $\mu_{x,y}^{(1)}$。那么，对于 $k\in\mathbb{N}$,

$$ \mathbb{E}[T^k] = \frac{\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+k,y)}{\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)} = \phi_1^{k(y-1)}\frac{\left([x]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_k}{\left([x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_k}, \tag{99} $$

and

$$ \mathbb{E}[T] = \phi_1^{y-1}\frac{[x]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}}, \qquad \mathrm{Var}[T] = \phi_1^{2(y-1)}\frac{(\phi_1\phi_2)^x\,[x]_{\mathcal{R}(p,q)}\,[y]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}^2\,[x+y+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}. \tag{100} $$

此外，矩序列确定了 $\mu_{x,y}^{(1)}$；对于 $s\in\mathbb{C}$，有 $\Re(x+s)>0$ *one has* $\mathbb{E}[T^s]=\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+s,y)/\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$，且节点处的分布函数为

$$ \mathbb{P}\left(T\leq\frac{\mathfrak{q}^m}{\phi_1}\right) = \frac{\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(\mathfrak{q}^m;x,y)}{\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)}, \qquad m\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{101} $$

与定理 7.2中的不完全变形贝塔函数。

证明。 由于 $t^k \cdot t^{x-1} = t^{x+k-1}$，矩是变形贝塔函数的商，并且（99）就是（58）。对于方差，

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[T] &= \phi_1^{2(y-1)} \frac{[x]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}} \left(\frac{[x+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[x+y+1]_{\mathcal{R}(p,q)}} - \frac{[x]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}} \right) \\ &= \phi_1^{2(y-1)} \frac{[x]_{\mathcal{R}(p,q)} \left([x+1]_{\mathcal{R}(p,q)} [x+y]_{\mathcal{R}(p,q)} - [x]_{\mathcal{R}(p,q)} [x+y+1]_{\mathcal{R}(p,q)} \right)}{[x+y]^2_{\mathcal{R}(p,q)} [x+y+1]_{\mathcal{R}(p,q)}},\end{aligned}$$

以及变形 Turán 恒等式（89）给出（100）。该测度具有有界支撑，因此由其矩确定。关于 $\mathbb{E}[T^s]$ 的公式是 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+s,y)$的定义。最后，节点 t_j 中满足 $t_j \le \mathfrak{q}^m/\phi_1$ 的那些节点为 $j \ge m$，而 $\sum_{j\ge m}(1-\mathfrak{q})\mathfrak{q}^j F(\mathfrak{q}^j/\phi_1) = \int_0^{\mathfrak{q}^m} F \, d_{\mathcal{R}(p,q)}t$ 由（12）及 $a = \mathfrak{q}^m$给出，从而得到（101）。□

定理 8.2。 假设(Hϕ)，令 x、$y > 0$，并令 T具有分布 $\mu_{x,y}^{(2)}$。则 $\mathbb{E}[T^k] < \infty$ 当且仅当$k < y$，并且对于 $k \in \mathbb{N}$满足 $k < y$，

$$\mathbb{E}[T^k] = \frac{\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+k,y-k)}{\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)} = \phi_1^{\frac{k(2y-k-3)}{2}} \phi_2^{-kx-\frac{k(k-1)}{2}} \frac{\left([x]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_k}{\left([y-k]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_k}. \tag{102}$$

特别地，对于 $y > 1$, $\mathbb{E}[T] = \phi_1^{y-2}\phi_2^{-x}[x]_{\mathcal{R}(p,q)}/[y-1]_{\mathcal{R}(p,q)}$。

证明。 恒等式 $t^k t^{x-1}/(1\oplus\phi_1 t)^{x+y} = t^{x+k-1}/(1\oplus\phi_1 t)^{(x+k)+(y-k)}$表明 $\mathbb{E}[T^k] = \mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+k,\ y-k)/\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$, 根据引理 7 的估计，该级数收敛当且仅当 $y-k>0$，这些估计对于实数自变量是锐利的。由（78），

$$\frac{\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+k,y-k)}{\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)} = \phi_1^{-\frac{(x+k)^2+(x+k)+(y-k)^2-(y-k)-x^2-x-y^2+y}{2}} \frac{K_{\mathfrak{q}}(x+k)}{K_{\mathfrak{q}}(x)} \frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+k)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y-k)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)},$$

分母 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)$ 相消。指数等于 $-k(x-y)-k^2-k$，命题3.1（i）给出 $K_{\mathfrak{q}}(x+k)/K_{\mathfrak{q}}(x) = \mathfrak{q}^{-kx-k(k-1)/2}$，以及 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+k)/\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x) = \left([x]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_k$，$\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y-k)/\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y) = 1/\left([y-k]_{\mathcal{R}(p,q)}\right)_k$。写成 $\mathfrak{q} = \phi_2/\phi_1$后，$\phi_1$ 的总幂次为 $-kx+ky-k^2-k+kx+k(k-1)/2 = k(2y-k-3)/2$。□

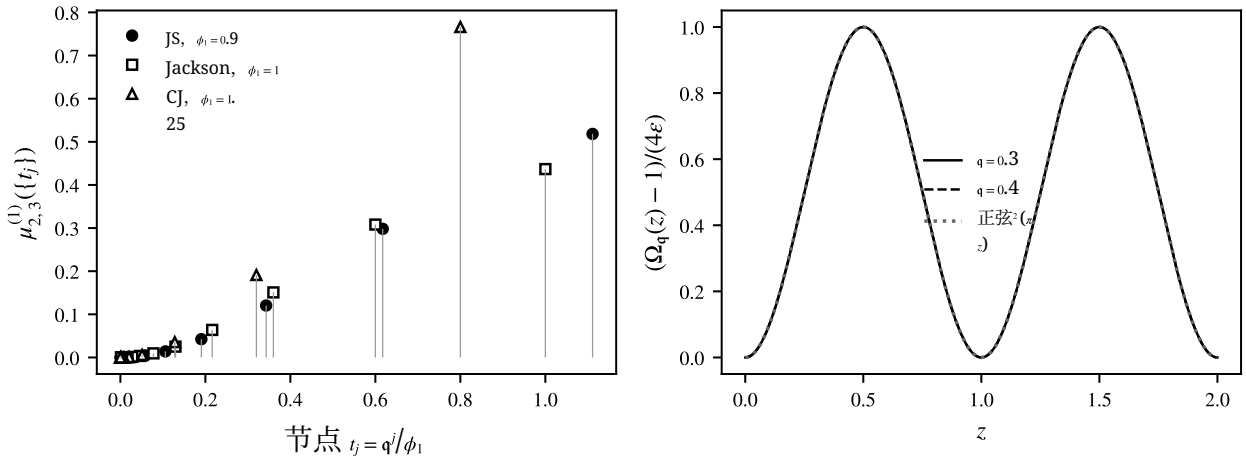

图2。左：第一类变形贝塔分布 $\mu^{(1)}_{2,3}$，对应 Jagannathan Srini- vasa Rao 变形 $(p,q)=(0.9,0.5)$、Jackson 情形 $q=0.6$ 以及 Chakrabarti Jagannathan 变形 $(p,q)=(0.8,0.5)$；原子位于格点 $\mathfrak{q}^j/\phi_1$。右：命题 3.1 中的归一化 theta 商 $(\Omega_{\mathfrak{q}}(z)-1)/(4\varepsilon)$，当 $\mathfrak{q}=0.3$ 和$\mathfrak{q}=0.4$时，在此尺度下与 $\sin^2(\pi z)$无法区分。

图2 展示了变形如何移动$\mu_x^{(1)}$ 的$_y$原子：当 $\phi_1>1$时，支撑集包含于$(0,1/\phi_1]\subset(0,1)$，且质量集中在最大的原子上；而当 $\phi_1<1$ 时，支撑集延伸到 1 以外。

注 8。 在未变形极限下，$\mu_x^{(1)}{}_{,\,y}$ 和 $\mu_x^{(2)}{}_{,\,y}$ 收敛到 $[0,1]$ 上的贝塔分布，以及 $(0,\infty)$上的贝塔素分布，其均值分别为 $x/(x+y)$ 和 $x/(y-1)$。式 (100) 中的方差为正，恰恰是因为变形 *Turán* 恒等式；因此，该恒等式正是经典恒等式 $(x+1)(x+y)-x(x+y+1)=y$的变形对应物。

9. 规范不变性与特殊情形

9.1. 规范不变性。 现在我们考虑满足规范假设的结构函数

$$(\mathrm{H}_\phi^c)\qquad \mathcal{R}(p^n,q^n) \;=\; c\,\frac{\phi_1^n-\phi_2^n}{\phi_1-\phi_2},\qquad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{103}$$

其中 $c=c(p,q)>0$和 $\phi_1=\phi_1(p,q)>\phi_2=\phi_2(p,q)>0$，规范 c和变形函数与 $\mathcal{R}(p,q)$一样，都是关于 (p,q)的亚纯函数。记$[x]_\phi=(\phi_1^x-\phi_2^x)/(\phi_1-\phi_2)$，使得$[x]_{\mathcal{R}(p,q)}:=c\,[x]_\phi$，并用下标 ϕ 表示由$[x]_\phi$构造的第 2 至 6 节中的对象。由 (5)，$\partial_{\mathcal{R}(p,q)}=c\,\partial_\phi$，而 $\partial_{\mathcal{R}(p,q)}$ 在命题 2.2(iv) 意义下的逆为 $\int\cdot\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t:=c^{-1}\int\cdot\,d_\phi t$。变形幂 (19) 和 (20) 仅涉及 ϕ_1、ϕ_2，因此保持不变，而 $E_{\mathcal{R}(p,q)}(z)=E_\phi(z/c)$ 和 $e_{\mathcal{R}(p,q)}(z)=e_\phi(z/c)$。我们通过含积分 $d_{\mathcal{R}(p,q)}t$的 (44) 和 (75) 定义 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 和 $\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}$，并

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z) \;&:=\; c^z\phi_1^{\frac{z(z-1)}{2}}\int_0^{a_{\mathcal{R}(p,q)}} t^{z-1}E_{\mathcal{R}(p,q)}(-c\,\phi_2 t)\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t,\\ \gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z) \;&:=\; c^z\phi_2^{\frac{z(z-1)}{2}}\int_0^{\infty;a_{\mathcal{R}(p,q)}} t^{z-1}e_{\mathcal{R}(p,q)}(-c\,\phi_1 t)\,d_{\mathcal{R}(p,q)}t.\end{aligned} \tag{104}$$

定理 *9.1*（规范不变性）。假设 (H_ϕ^c)。那么 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}=c^{z-1}\Gamma_\phi$, $\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}=c^{z-1}\gamma_\phi$, $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}=c^{-1}\mathfrak{B}_\phi$ *and* $\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}=c^{-1}\mathcal{B}_\phi$。因此，定理 *3.1*、*3.2*、*3.3*、*3.4*、*3.6*、*4.1*、*4.2*、*4.3*、*4.4*、*4.5*、*4.6*、*5.1*、*5.2*、*5.3*、*5.4*、*6.1*、*7.1*、*7.2*、*8.1* 和 *8.2* 以及推论 *6*、*7* 和 *8* 中，凡是通过变形数 $[x]_{\mathcal{R}(p,q)}=c[x]_\phi$、变形阶乘 $[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}=c^n[n]_\phi!$、变形 *Pochhammer* 符号以及函数 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$,$\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$, $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 表述的恒等式，均原样成立；通过 $\Gamma_{\mathfrak{q}}$ *and* $\mathrm{B}_{\mathfrak{q}}$ 表述的那些式子，例如 *(28)*、*(35)*、*(77)* 和 *(71)* 的第一种形式，则分别为伽马函数和贝塔函数带来因子c^{z-1} 和 c^{-1} 。定理 *3.5* 和命题 *3.2* 是针对 $c=1$陈述的。

证明。 由于 $d_{\mathcal{R}(p,q)}t=c^{-1}d_\phi t$ 以及 $E_{\mathcal{R}(p,q)}(-c\phi_2 t)=E_\phi(-\phi_2 t)$，式（104）给出 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z)=c^{z-1}\Gamma_\phi(z)$, 对于 $\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$同理；贝塔积分乘以 c^{-1}。在贝塔-伽马关系中，因子 c 相消，因为

$$\frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)} \;=\; c^{(x-1)+(y-1)-(x+y-1)}\,\frac{\Gamma_\phi(x)\Gamma_\phi(y)}{\Gamma_\phi(x+y)} \;=\; c^{-1}\,\frac{\Gamma_\phi(x)\Gamma_\phi(y)}{\Gamma_\phi(x+y)},$$

类似地，$\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$。高斯求和公式（94）中也会出现相同的抵消，其中 c的指数之和为 $(c-1)+(c-a-b-1)-(c-a-1)-(c-b-1)=0$，而 ${}_2F_1^{\mathcal{R}(p,q)}$的系数中，分子和分母都含有 $2n$ 变形数。在移位恒等式和变形贝塔分布的矩中，商 $\big([x]_{\mathcal{R}(p,q)}\big)_m\big([y]_{\mathcal{R}(p,q)}\big)_n/\big([x+y]_{\mathcal{R}(p,q)}\big)_{m+n}$的分子和分母都含有 $m+n$ 变形数，因此 c 会抵消。函数方程变为 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z+1)=c^z\Gamma_\phi(z+1)=c[z]_\phi\,c^{z-1}\Gamma_\phi(z)=[z]_{\mathcal{R}(p,q)}\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z)$。在定理 3.2中，$f(x+1)=[x]_{\mathcal{R}(p,q)}f(x)$当且仅当 $g(x)=c^{1-x}f(x)$满足 $g(x+1)=[x]_\phi g(x)$，且 c^{1-x} 是对数仿射的，因此凸性条件保持不变；同理，$\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$ 和 Γ_ϕ 的二阶对数导数相同。□

9.2. **特殊情形**。我们列出表 1中的情形；在每种情形中，变形数和(ϕ_1, ϕ_2, c) 均可根据结构函数，按照 [17, 18]的分类得出。(i) Jagannathan Srinivasa Rao 变形。当 $\mathcal{R}(u,v) = (u-v)/(p-q)$ 且 $0 < q < p$ 时，有$[n]_{\mathcal{R}(p,q)} = [n]_{p,\ q} = (p^n - q^n)/(p-q)$，$\phi_1 = p$，$\phi_2 = q$，$c = 1$ 且 $\mathfrak{q} = q/p$。定理 4.1 对所有$(x,y) \in \Omega_+$给出

$$\int_0^1 t^{x-1}(1 \ominus qt)_{p,q}^{y-1}\, d_{p,q}t \;=\; p^{\frac{(y-1)(2x+y-2)}{2}} \frac{\Gamma_{p,q}(x)\Gamma_{p,q}(y)}{\Gamma_{p,q}(x+y)}, \qquad \Gamma_{p,q}(z) \;=\; p^{\frac{(z-1)(z-2)}{2}}\Gamma_{q/p}(z), \tag{105}$$

它将 [40] 中针对正整数证明的关系推广到复参数。交换缺陷为 $p^{(y-x)(x+y-1)/2}$，定理 3.3 表明，$\Gamma_{p,\ q}$ 在 $(0,\infty)$ 上对数凸，当且仅当 $p \geq 1$。

对于第二类函数，定理 5.1给出

$$\int_0^{\infty;1} \frac{t^{x-1}\, d_{p,q}t}{(1 \oplus pt)_{p,q}^{x+y}} \;=\; p^{-x-\frac{y(y-1)}{2}}\, q^{-\frac{x(x-1)}{2}} \frac{\gamma_{p,q}(x)\Gamma_{p,q}(y)}{\Gamma_{p,q}(x+y)}, \qquad \gamma_{p,q} \;=\; \Omega_{q/p}\Gamma_{p,q}, \tag{106}$$

其交换缺陷为 $p^{(y-x)(3-x-y)/2} q^{(y-x)(x+y-1)/2}\, \Omega_{q/p}(x)/\Omega_{q/p}(y)$。
(ii) Jackson 情形。对于 $p = 1$ （i）中的 $\phi_1 = 1$ 和 $\phi_2 = \mathfrak{q} = q$。第一类的所有赋值因子均消失，$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)} = \mathrm{B}_{\mathfrak{q}}$ 是交换的，且 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)} = \Gamma_q$，与 [5, 14]一致；第二类函数（77）变为 $K_{\mathfrak{q}}(x)\mathrm{B}_{\mathfrak{q}}(x,y)$，并根据定理5.2仍为非交换。进一步令$q \to 1$，则两种表示都恢复为欧拉贝塔函数。

(iii) Chakrabarti Jagannathan 变形。对于 $\mathcal{R}(u,v) = (1-uv)/((p^{-1}-q)u)$ 且满足 $pq < 1$，有 $[n]_{\mathcal{R}(p,q)} = (p^{-n} - q^n)/(p^{-1}-q)$, $\phi_1 = p^{-1}$, $\phi_2 = q$, $c = 1$ 以及 $\mathfrak{q} = pq$。于是

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) \;=\; p^{-\frac{(y-1)(2x+y-2)}{2}} \frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)}, \qquad \Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z) \;=\; p^{-\frac{(z-1)(z-2)}{2}}\Gamma_{pq}(z), \tag{107}$$

交换缺陷为 $p^{-(y-x)(x+y-1)/2}$，并且，若 $p \leq 1$，$\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$ 根据定理3.3(i)，在 $(0,\infty)$ 上是对数凸的，而 $x \mapsto \mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$ 根据命题4.2(i)是递减的。第二类函数为 $\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = p^{x+y(y-1)/2} q^{-x(x-1)/2} \gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)/\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)$，其中 $\gamma_{\mathcal{R}(p,q)} = \Omega_{pq}\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$。由于$\phi_1 > 1$ 当 $p < 1$时，定理4.6(ii)表明 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$ 的增长类似于 $p^{-y^2/2}$，当 $y \to +\infty$时。(iv) 广义 q–Quesne 变形。对于 $\mathcal{R}(u,v) = (uv-1)/((q-p^{-1})v)$ 且 $pq \neq 1$，有

$$[n]_{\mathcal{R}(p,q)} \;=\; \frac{p^n - q^{-n}}{q - p^{-1}} \;=\; \frac{p}{q}\frac{\phi_1^n - \phi_2^n}{\phi_1 - \phi_2}, \qquad \{\phi_1, \phi_2\} = \{p, q^{-1}\}, \tag{108}$$

因为 $(p-q^{-1})/(q-p^{-1}) = p/q$。因此（$\mathrm{H}_\phi^c$）成立，其中 $c = p/q$，$\phi_1 = \max\{p, q^{-1}\}$ 以及 ϕ_2 =min$\{p, q^{-1}\}$。如果 $pq < 1$，那么 $\phi_1 = q^{-1}$，$\phi_2 = p$，$\mathfrak{q} = pq$，根据定理 9.1

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) \;=\; q^{-\frac{(y-1)(2x+y-2)}{2}} \frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)}, \qquad \Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z) \;=\; \left(\frac{p}{q}\right)^{z-1} q^{-\frac{(z-1)(z-2)}{2}}\Gamma_{pq}(z);$$

如果 $pq > 1$，那么 $\phi_1 = p$、$\phi_2 = q^{-1}$、$\mathfrak{q} = (pq)^{-1}$，且赋值因子为 $p^{(y-1)(2x+y-2)/2}$。（v）多参数 Hounkonnou Ngompe 变形。对于 $\mathcal{R}(u,v) = h(p,q)\, v^\nu u^{-\mu}(uv-1)/((q-p^{-1})v)$ [24, 25]，令 $\ell := q^\nu p^{-\mu}$。那么

$$[n]_{\mathcal{R}(p,q)} \;=\; h\,\ell^n \frac{p^n - q^{-n}}{q - p^{-1}} \;=\; h\frac{p}{q}\,\ell\, \frac{(\ell p)^n - (\ell q^{-1})^n}{\ell p - \ell q^{-1}}, \tag{109}$$

因为 $\ell^n[n]_{a,\ b} = \ell\,[n]_{\ell a,\ \ell b}$ 其中 $[n]_{a,\ b} = (a^n - b^n)/(a-b)$。因此，$(\mathrm{H}_\phi^c)$ 成立，其中 $c = h\, p^{1-\mu} q^{\nu-1}$ 和 $\{\phi_1, \phi_2\} = \{p^{1-\mu}q^\nu,\, p^{-\mu}q^{\nu-1}\}$的商为 pq。在 $0 < pq < 1$ 的通常范围内，[24],

$\phi_1 = p^{-\mu}q^{\nu-1}$、 $\phi_2 = p^{1-\mu}q^{\nu}$ 和 $\mathfrak{q} = pq$，因此

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = \left(p^{-\mu}q^{\nu-1}\right)^{\frac{(y-1)(2x+y-2)}{2}} \frac{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)}{\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)}, \tag{110}$$

$$\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z) = c^{z-1}\left(p^{-\mu}q^{\nu-1}\right)^{\frac{(z-1)(z-2)}{2}} \Gamma_{pq}(z), \tag{111}$$

带有交换缺陷 $(p^{-\mu}q^{\nu-1})^{(y-x)(x+y-1)/2}$。规范常数 h和因子 $p^{1-\mu}q^{\nu-1}$ 从贝塔-伽马关系中消失，这与定理 9.1一致，而参数 μ 和 ν 通过 ϕ_1进入赋值因子。与具有相同 q–的广义 Quesne 情形 (iv) 相比(p,q)，其中 $\phi_1 = q^{-1}$，有 $\phi_1^{HN} = \ell\,\phi_1^{Q}$， $\phi_2^{HN} = \ell\,\phi_2^{Q}$ 以及 $c^{HN} = h\ell\,c^{Q}$，因此

$$\Gamma^{HN}_{\mathcal{R}(p,q)}(z) = h^{z-1}\ell^{\frac{z(z-1)}{2}}\Gamma^{Q}_{\mathcal{R}(p,q)}(z), \tag{112}$$

$$\frac{\Gamma^{HN}_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\Gamma^{HN}_{\mathcal{R}(p,q)}(y)}{\Gamma^{HN}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)} = \frac{1}{h\,\ell^{xy}}\frac{\Gamma^{Q}_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\Gamma^{Q}_{\mathcal{R}(p,q)}(y)}{\Gamma^{Q}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)}, \tag{113}$$

$$\mathfrak{B}^{HN}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y) = h^{-1}\ell^{\frac{(y-1)(y-2)}{2}-x}\,\mathfrak{B}^{Q}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y). \tag{114}$$

因此，伽马商相差因子 $h^{-1}(p^{\mu}/q^{\nu})^{xy}$，该因子关于 (x,y) 对称；而贝塔函数本身则相差一个非对称因子，因为赋值因子 $\phi_1^{(y-1)(2x+y-2)/2}$ 被 $\ell^{(y-1)(2x+y-2)/2}$重新缩放。

表 3。第一类变形贝塔函数的赋值因子与交换因子 .

变形	ϕ_1	$\mathfrak{q}$	赋值因子与交换缺陷	
Jagannathan Srinivasa Rao	p	q/p	$p^{(y-1)(2x+y-2)/2}$	$p^{(y-x)(x+y-1)/2}$
Jackson	1	q	1	1
Chakrabarti Jagannathan	p^{-1}	pq	$p^{-(y-1)(2x+y-2)/2}$	$p^{-(y-x)(x+y-1)/2}$
q–Quesne， $pq<1$	q^{-1}	pq	$q^{-(y-1)(2x+y-2)/2}$	$q^{-(y-x)(x+y-1)/2}$
Hounkonnou Ngompe， $pq<1$	$p^{-\mu}q^{\nu-1}$	pq	$\phi_1^{(y-1)(2x+y-2)/2}$	$\phi_1^{(y-x)(x+y-1)/2}$

10. 数值验证

本文中的所有恒等式均使用多精度库 mpmath进行了验证，计算精度为 40 位有效数字。变形积分根据其定义的 Jackson 型级数（12）和（13）计算，级数截断于 4000 项，针对 $[0,1]$ 以及 $|k| \le 1500$ 处的双边积分；变形幂由（19）和（20）计算，闭式则根据 $\Gamma_{\mathfrak{q}}$ 及无穷乘积计算。截断误差由比率为 $\mathfrak{q}^{\Re x}$ 和 $\mathfrak{q}^{\Re y}$的几何级数尾项界定，远低于工作精度。采用了三种变形：Jagannathan Srinivasa Rao，其中 $(p,q) = (0.9, 0.5)$，因此 $\phi_1 = 0.9$和$\mathfrak{q} = 5/9$；Jackson，其中 $q = 0.6$；Chakrabarti Jagannathan，其中 $(p,q) = (0.8, 0.5)$，因此 $\phi_1 = 1.25$和 $\mathfrak{q} = 0.4$。此外，还测试了一个 $(\phi_1, \phi_2, c) = (2, 0.8, 0.4)$ Quesne 型规范化情形。

表 4 比较了 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$ 的 Jackson 级数与闭式（46），以及计算得到的交换商与定理 4.2中的因子。在所有情况下，相对偏差均小于 10^{-30}，且交换商与 $\phi_1^{(y-x)(x+y-1)/2}$ 在所有显示位数上均一致。

对于 $(x,y) = (1.3, 2.7)$ 处的 Jagannathan Srinivasa Rao 情形，(53)、(54)、(55) 以及 (58)、(59)、(60) 在 $n = 2$、3 时，(57) 的一般恒等式在 $(m,n) = (2,3)$ 处 $(x,y) = (1.3, 0.7)$、~时，分部积分和帕斯卡关系 (51)、(52) 以及 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 的对称性的相对残差均介于 3×10^{-31} 和 2×10^{-30} 之间。部分分式恒等式 (49) 在 $n \in \{0,1,3,5\}$ 和 $x \in \{0.3, 2.2\}$时进行了检验，特殊值 (48) 和图兰恒等式 (89) 也达到了相同的精度。移位和 (61) 与 (62) 对于 $n \in \{1,2,3\}$ 成立，其相对残差低于 5×10^{-41}（四十位数字）；有限区间变体 (87) 对于 $n \in \{0,\dots,4\}$ 和 $x \in \{0.7, 2.3\}$ 低于 2×10^{-40}；它为负

表 4. 第一类变形贝塔函数：Jackson级数与闭式，以及交换商。

Case	(x,y)	$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$	相对误差	$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)/\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(y,x)$	$\phi_1^{(y-x)(x+y-1)/2}$
JS	$(0.5,1.5)$	1.408035512089	3×10^{-31}	0.9486832980505	0.9486832980505
JS	$(1.3,2.7)$	0.4097476007829	7×10^{-31}	0.801510599147	0.801510599147
JS	$(2.7,1.3)$	0.5112191918847	$<10^{-31}$	1.247644137288	1.247644137288
Jackson	$(0.5,1.5)$	1.477639940991	9×10^{-31}	1	1
Jackson	$(1.3,2.7)$	0.3962833511377	4×10^{-31}	1	1
CJ	$(0.5,1.5)$	1.536420967390	$<10^{-31}$	1.118033988750	1.118033988750
CJ	$(1.3,2.7)$	0.5693285480355	2×10^{-31}	1.597758097756	1.597758097756
CJ	$(2.7,1.3)$	0.3563296276422	4×10^{-31}	0.6258769718675	0.6258769718675

对于奇数 n，例如 $\mathcal{B}^{[0,1]}_{\mathcal{R}(p,q)}(0.7,4) = -0.0265388545478134\ldots$。对于广义 q–Quesne 结构函数（其中 $(p,q)=(0.8,0.9)$，属于区域 II，并满足 (H^c_ϕ)，且 $(\phi_1,\phi_2,c)=(1/0.9,0.8,8/9)$），定理 的幂级数 $I_{\mathcal{R}(p,q)}f(a)$ 定理 2.1 对于 $f(t)=(1-t/2)^{-1}$ 和 $a=0.9$，乘子 (16) 后的区域 II 级数，以及 c^{-1} 乘以变量 12中的级数 (ϕ_1,ϕ_2)均等于 1.3661999273378131404 …，这与推论 1一致。

在 Jagannathan Srinivasa Rao 情形下，对章节 3.3、4.7、7 和 8 的结果进行了检验。乘法公式 (38) 在 $n\in\{2,3,4\}$ 处于 $z=0.83$ 时成立，反射公式 (41) 在 $x\in\{0.3,0.71\}$ 处成立，且相对误差低于 4×10^{-31}。Wendel型估计 (42) 在$x\in\{0.4,2.3,8,20\}$、 $s\in\{0.25,0.6\}$处成立，$\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+s)/\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)$ 与其上界之商对于 $s=0.25$分别为 0.806、0.980、0.99947 和 0.9999995，这与 (43) 一致。$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,1.7)$ 与 $\phi_1^{(x-1)(y-1)}\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)[x]^{-y}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 之商在 $x=5$、10、20 处分别等于 0.98473、0.99922 和 0.9999978，正如 (71) 所预测的那样。对 $(a,b,c)=(0.7,1.3,3.1)$ 和$w\in\{0.2,-0.5\}$检验了变形欧拉积分 (93)，对相同参数检验了变形高斯求和 (94)，对 $n\in\{2,4\}$检验了变形 Chu–Vandermonde 恒等式 (95)，对 $(x,y)=(1.2,3.4)$ 和 $k\in\{1,2\}$检验了矩 (102)，并对 $(x,y)=(1.3,2.6)$ 和 $u\in\{1,\mathfrak{q}^2,0.4\}$ 检验了不完全贝塔公式 (97) 和 (98)（例如 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(0.4;1.3,2.6)=0.196105082621922\ldots$），所有相对误差均低于 10^{-30}。乘积恒等式 (68) 和 (69) 在 $(x,y,z)=(0.7,1.6,2.3)$ 至 5×10^{-31}处成立，表 2 中的条目与 Jackson级数达到工作精度一致（例如 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(3,3)=0.2137354293\ldots$），并且当 $y=1.5$ 时，命题 4.2(ii) 的最小值在 $x_{\min}=3.59357\ldots$ 处取得，其中 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x_{\min},1.5)$ =0.428001 …。

表 5 涉及第二类函数。双边级数（76）与（77）一致，相对误差低于 10^{-40} 在 $(x,y)\in\{(0.5,0.5),(1.3,2.7),(2,3)\}$ 时的所有情形，包括规范化情形；该表展示了交换商，在 Jackson 情形下不等于 1，以及单位平移（84）。

表 5. $(x,y)=(1.3,2.7)$处的第二类变形贝塔函数。

量	JS $(0.9,0.5)$	Jackson $q=0.6$	预测值
$\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$	0.9205877849376	0.4377904998887	(77)
$\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(y,x)$	3.666046384441	1.279819453615	(77)
$\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)/\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(y,x)$	0.2511118759557	0.3420720779420	(81)，数字相同
$\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y+1)/\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$	1.340071766733	0.8596363183029	(84)，数字相同
$\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x+1,y)/\mathcal{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,y)$	2.147180690599	1.083053099515	(84)，数字相同

表6 展示了命题3.1 和定理3.3。积分表示（27）和（32）也与闭式（28）和（35）在 $z\in\{0.5,1,2.5,4\}$处进行了比较，相对误差低于 2×10^{-40}；对于 Jagannathan Srinivasa Rao 情形，$\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(1/2)=1.53698378365855918$ 和$\gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(1/2)=1.53698378365857518$，其商为 $\Omega_{\mathfrak{q}}(1/2)=1+1.04\times10^{-14}$。

表6。左：θ商 $\Omega_q(1/2)-1$ 与 4ε, $\varepsilon = e^{-2\pi^2/\log(1/q)}$比较。右：$\frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)$。

q	$\Omega_q(1/2)-1$	4ε
0.3	3.03232×10^{-7}	3.03232×10^{-7}
0.5	1.71542×10^{-12}	1.71542×10^{-12}
0.6	6.60922×10^{-17}	6.60924×10^{-17}

Case	$x=0.5$	$x=2$	$x=5$	$x=10$
JS, $\phi_1=0.9$	4.5355	0.28838	−0.061224	−0.10318
Jackson	4.6794	0.42186	0.056176	0.0039746
CJ, $\phi_1=1.25$	4.6998	0.51204	0.23769	0.22329

在 Jagannathan Srinivasa Rao 情形中，$\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$ 的二阶对数导数在 x_* =3.672228654 … 处为零，并趋于 $\log 0.9 = -0.10536\ldots$；而在 Chakrabarti Jagannathan 情形中，它趋于 $\log 1.25 = 0.22314\ldots$，这与定理 3.3一致。

11. 总结

我们在双根假设 (Hϕ) 及其规范化版本下，建立了与 $\mathcal{R}(p,q)$–变形量子代数相关的非交换贝塔函数理论，并始终采用变形积分的 Jackson 型级数表示。我们确定了两个变形伽马函数：第一类函数 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)} = \phi_1^{(z-1)(z-2)/2}\Gamma_q$，其特征是满足 Bohr–Mollerup 型性质，并且当且仅当 $\phi_1 \geq 1$时在正半轴上对数凸；以及第二类函数 $\gamma_{\mathcal{R}(p,q)} = \Omega_q\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$，它由双边变形积分通过 Ramanujan 的${}_1\psi_1$ 求和公式得到，与第一类函数相差一个指数趋近于 1 的一周期 theta 商。我们计算了复参数下的第一类变形贝塔函数，其赋值因子为 $\phi_1^{(y-1)(2x+y-2)/2}$；并确立了它的一般移位恒等式、交换缺陷 $\phi_1^{(y-x)(x+y-1)/2}$ 及其唯一到一个常数因子的对称化，同时还得到了一个变形部分分式恒等式。我们以闭式计算了半直线上的第二类变形贝塔函数；它将两个变形伽马函数配对，其交换缺陷涉及两个变形函数和 θ 商，因此在 Jackson 情形下仍然是非交换的。我们证明，第一类变形贝塔函数是一个变形欧拉积分的核，该积分对应于一个以变形 Pochhammer 符号表示的变形高斯超几何函数；由此得到变形高斯求和和变形 Chu–Vandermonde 恒等式。此外，两个贝塔被积函数还导出了具有显式矩的变形贝塔分布和贝塔素分布。我们证明，变形伽马函数满足一个以变形数 $[n]_{\mathcal{R}(p,q)}$ 为底的乘法公式以及一个 Wendel 型估计，而第一类贝塔函数关于其第二个参数的增长或衰减如同由 ϕ_1 决定的高斯函数。我们根据级数表示得到了归一化贝塔函数的对数凸性，并以变形 Turán 恒等式作为其离散对应。我们还利用所有关系的规范不变性，处理了广义 q–Quesne 变形和 Hounkonnou Ngompe 变形。数值检验以三十位有效数字验证了每一个恒等式。

仍有一些问题尚未解决。变形贝塔函数应当能够用于构造变形超几何函数及其相应的欧拉型积分表示，以及黎曼-刘维尔型和埃尔代伊-科贝尔型变形分数阶算子；这些算子的核是变形贝塔核 [32, 48]。不满足双根假设的结构函数，例如其变形数由两个以上几何序列组合而成的结构函数，需要采用不同的约化方法；在这种情形下，是否存在变形的博尔-莫勒鲁普定理尚不清楚。最后，第二类变形伽马函数暗示了阿斯基型拟常数理论的一种变形类比，其中 θ商 Ω_q 将发挥变形模因子的作用。

附录 A. 详细计算

A.1. **指数恒等式**。 始终有 $E(x,y) := \binom{(y-1)(2x+y-2)}{2}$，因此 $2E(x,y) = 2xy + y^2 - 3y - 2x + 2$。

第一类贝塔伽马关系。由 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(z) = \phi_1^{(z-1)(z-2)/2}\Gamma_{\mathfrak{q}}(z)$ 和 $(z-1)(z-2) = z^2 - 3z + 2$,

$$\begin{aligned}(x-1)(x-2) + (y-1)(y-2) - (x+y-1)(x+y-2) &= x^2 + y^2 - 3x - 3y + 4 - (x+y)^2 \\ &+ 3(x+y) - 2 = 2 - 2xy,\end{aligned} \tag{115}$$

因此 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)/\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y) = \phi_1^{1-xy}\mathrm{B}_{\mathfrak{q}}(x,y)$。由于 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)} = \phi_1^{1-x+(y-1)(y-2)/2}\mathrm{B}_{\mathfrak{q}}$ 根据引理 5 和定理 4.1，赋值指数为

$$1 - x + \frac{(y-1)(y-2)}{2} - 1 + xy = \frac{y^2 - 3y + 2 - 2x + 2xy}{2} = E(x,y).$$

交换与对称化。

$$\begin{aligned}2E(x,y) - 2E(y,x) &= (y^2 - 3y - 2x) - (x^2 - 3x - 2y) = y^2 - x^2 - (y-x) = (y-x)(x+y-1),\\ x(x-1) + 2E(x,y) &= x^2 + y^2 + 2xy - 3x - 3y + 2 = (x+y-1)(x+y-2).\end{aligned}$$

一般平移。令 $X = x + m$ 和 $Y = y + n$,

$$\begin{aligned}(Y-1)(2X+Y-2) &= \big[(y-1)+n\big]\big[(2x+y-2)+(2m+n)\big]\\ &= (y-1)(2x+y-2) + (y-1)(2m+n) + n(2x+y-2) + n(2m+n),\end{aligned}$$

从而 $2[E(X,Y) - E(x,y)] = 2m(y-1) + 2n(x+y) + 2mn + n^2 - 3n$，其为式（57）中指数的两倍。对于 $(m,n) = (1,0)$，$(0,1)$ 以及 $(1,1)$，可分别得到 $y-1$、$x+y-1$ 和 $x+2y-1$。第二类。由式（77）和 $\mathrm{B}_{\mathfrak{q}} = \phi_1^{xy-1}\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(y)/\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+y)$,

$$1 - x - \frac{(x+y)(x+y-1)}{2} + xy - 1 = \frac{-2x - x^2 - 2xy - y^2 + x + y + 2xy}{2} = -\frac{x^2 + x + y^2 - y}{2}.$$

利用 $K_{\mathfrak{q}}(x) = \mathfrak{q}^{-x(x-1)/2}\Omega_{\mathfrak{q}}(x)$和 $\mathfrak{q} = \phi_2/\phi_1$，$\phi_1^{-(x^2+x+y^2-y)/2}\mathfrak{q}^{-x(x-1)/2} = \phi_1^{-x-y(y-1)/2}\phi_2^{-x(x-1)/2}$ 可得式（79）。

图兰恒等式。取 $a = \phi_1$ 和 $b = \phi_2$,

$$\begin{aligned}(a^{x+1} - b^{x+1})(a^{x+y} - b^{x+y}) - (a^x - b^x)(a^{x+y+1} - b^{x+y+1}) &= -a^{x+1}b^{x+y} - b^{x+1}a^{x+y} + a^x b^{x+y+1} + b^x a^{x+y+1}\\ &= a^x b^x\left(a^{y+1} - ab^y - ba^y + b^{y+1}\right)\\ &= a^x b^x(a-b)(a^y - b^y),\end{aligned}$$

并除以 $(a-b)^2$，得到（89）。

变形高斯求和公式。取 $E(b,y) = (y-1)(2b+y-2)/2$、$y_1 = c-a-b$ 和 $y_2 = y_1 + a = c - b$,

$$\begin{aligned}(y_1 - 1)(2b + y_1 - 2) - (y_1 + a - 1)(2b + y_1 + a - 2) &= -a(2b + y_1 - 2) - a(y_1 + a - 1)\\ &= -a(2b + 2y_1 + a - 3),\end{aligned}$$

并 $2b + 2y_1 + a - 3 = 2c - a - 3$，因此 $E(b, c-a-b) - E(b, c-b) = -a(2c - a - 3)/2$。然后 $\frac{a(a-1)}{2} + a(c-a-b-1) - \frac{a(2c-a-3)}{2} = \frac{a}{2}\big[(a-1) + 2c - 2a - 2b - 2 - 2c + a + 3\big] = -ab$。作为一致性检查，取 $f(z) = (z-1)(z-2)$ 可得 $f(c) + f(c-a-b) - f(c-a) - f(c-b) = 2ab$，因此 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(c)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(c-a-b)/(\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(c-a)\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(c-b)) = \phi_1^{ab}\Gamma_{\mathfrak{q}}(c)\Gamma_{\mathfrak{q}}(c-a-b)/(\Gamma_{\mathfrak{q}}(c-a)\Gamma_{\mathfrak{q}}(c-b))$，且（94）等价于第 1 节的 $\mathfrak{q}$–高斯求和公式 [14,。5]。

A.2. **第二类变形贝塔函数：双边和**。为完整起见，我们详细说明在定理 36 中使用式（5.1 的方法。令 $a = -1$，$b = -\mathfrak{q}^{x+y}$ 以及 $w = \mathfrak{q}^x$，则有 $b/a = \mathfrak{q}^{x+y}$，$aw = -\mathfrak{q}^x$，$\mathfrak{q}/(aw) = -\mathfrak{q}^{1-x}$，$\mathfrak{q}/a = -\mathfrak{q}$ 以及 $b/(aw) = \mathfrak{q}^y$，由此得到

$$\frac{(-\mathfrak{q}^{x+y};\mathfrak{q})_\infty}{(-1;\mathfrak{q})_\infty}\frac{(\mathfrak{q},\mathfrak{q}^{x+y},-\mathfrak{q}^x,-\mathfrak{q}^{1-x};\mathfrak{q})_\infty}{(-\mathfrak{q}^{x+y},-\mathfrak{q},\mathfrak{q}^x,\mathfrak{q}^y;\mathfrak{q})_\infty} = \frac{(-\mathfrak{q}^x,-\mathfrak{q}^{1-x};\mathfrak{q})_\infty}{(-1,-\mathfrak{q};\mathfrak{q})_\infty}\frac{(\mathfrak{q},\mathfrak{q}^{x+y};\mathfrak{q})_\infty}{(\mathfrak{q}^x,\mathfrak{q}^y;\mathfrak{q})_\infty} = K_{\mathfrak{q}}(x)\frac{\mathrm{B}_{\mathfrak{q}}(x,y)}{1-\mathfrak{q}}.$$

用 $b=0$ 进行相同的计算，可得定理 3.4中的第二类变形伽马函数，此时因子 $(-\mathfrak{q}^{x+y};\mathfrak{q})_\infty$ 不再出现。

A.3. **整数第二参数：迭代推导**。 对于 $y=n+1$， $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，贝塔-伽马关系无需借助 $\mathfrak{q}$–二项式定理即可得到。从 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,1)=1/[x]_{\mathcal{R}(p,q)}$（命题 2.2（ii））出发，迭代单位平移（54）。该平移仅由分部积分和帕斯卡关系推得，见定理 4.3 ，由此可得

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,n+1) \;=\; \prod_{j=1}^{n}\phi_1^{x+j-1}\frac{[j]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[x+j]_{\mathcal{R}(p,q)}}\,\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,1) \;=\; \phi_1^{nx+\frac{n(n-1)}{2}}\,\frac{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{\prod_{j=0}^{n}[x+j]_{\mathcal{R}(p,q)}}.$$

由于 $nx+n(n-1)/2=n(2x+n-1)/2=E(x,n+1)$ 且 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x)/\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}(x+n+1)=1/\prod_{j=0}^{n}[x+j]_{\mathcal{R}(p,q)}$，这就是 46）在 $y=n+1$处的结果。根据引理 2（iii）展开变形幂，还可得到变形部分分式恒等式（49），因此，整数第二参数的贝塔-伽马关系等价于该恒等式。要将其推广到复数 y，需要递推关系以外的依据，此处采用 $\mathfrak{q}$–二项式定理；递推关系只能确定 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,\cdot)$ 到一个一周期因子为止，正如函数方程只能将 $\Gamma_{\mathcal{R}(p,q)}$ 确定到这样的因子为止（比较定理 3.2和 3.4）。

A.4. **通过积分独立验证单位平移**。 对于 $y=2$， $(1\ominus\phi_2 t)^1_{\mathcal{R}(p,q)}=1-\phi_2 t$和命题 2.2(ii) 可直接得到

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,2) \;=\; \frac{1}{[x]_{\mathcal{R}(p,q)}}-\frac{\phi_2}{[x+1]_{\mathcal{R}(p,q)}} \;=\; \frac{[x+1]_{\mathcal{R}(p,q)}-\phi_2[x]_{\mathcal{R}(p,q)}}{[x]_{\mathcal{R}(p,q)}[x+1]_{\mathcal{R}(p,q)}} \;=\; \frac{\phi_1^x}{[x]_{\mathcal{R}(p,q)}[x+1]_{\mathcal{R}(p,q)}},$$

由加法公式 $[x+1]_{\mathcal{R}(p,q)}=\phi_1^x+\phi_2[x]_{\mathcal{R}(p,q)}$。这与（54）在 $y=1$处一致，即 $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,2)=\phi_1^x[1]_{\mathcal{R}(p,q)}[x+1]^{-1}_{\mathcal{R}(p,q)}\mathfrak{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,1)$，并且与推论 2一致，因为 $E(x,2)=x$ 且 $[1]!_{\mathcal{R}(p,q)}=1$。

参考文献

[1] Abramowitz, M. 和 Stegun, I. A.（编），《数学函数手册：公式、图表和数学表》，美国国家标准局应用数学丛书第55卷，华盛顿，1964年；Dover出版社重印，纽约，1965年。[2] Andrews, G. E. 和 Askey, R.，《拉马努金求和公式》的简易证明，${}_1\psi_1$，Aequationes Math. 18（1978），第3期，333–337；https://doi.org/10.1007/BF03031684。[3] Artin, E.，《伽马函数》，Holt, Rinehart and Winston，纽约，1964年。[4] Askey, R.，《正交多项式与特殊函数》，CBMS-NSF应用数学区域会议丛书第21卷，SIAM，费城，1975年；https://doi.org/10.1137/ 1.9781611970470。[5] Askey, R.，《 q–伽马函数与 q–贝塔函数》，Applicable Anal. 8（1978），第2期，125–141；https://doi.org/10.1080/00036817808839221。[6] Bukweli Kyemba, J. D. 和 Hounkonnou, M. N.，《$(\mathcal{R},p,q)$–变形罗杰斯-塞格ő多项式的刻画：相关量子代数、变形厄米特多项式及其相关性质》，J. Phys. A: Math. Theor. 45（2012），225204；arXiv:1204.4705 [math-ph]；https: //doi.org/10.1088/1751-8113/45/22/225204。[7] Bukweli Kyemba, J. D. 和 Hounkonnou, M. N.，《$(q;l,\lambda)$–变形海森堡代数：相干态、其统计性质与几何》，Afr. Diaspora J. Math. (N.S.) 14（2012），第2期，38–56；arXiv:1211.3312 [math-ph]；https://doi.org/10.48550/arXiv.1211.3312。[8] Burban, I. M. 和 Klimyk, A. U.，《P、Q–微分、P、Q–积分以及与量子群相关的P、Q–超几何函数》，Integral Transform. Spec. Funct. 2（1994），第1期，15–36；https://doi.org/10.1080/10652469408819035。

[9] Chakrabarti, R. 和 Jagannathan, R.，《双参数量子代数的 (p,q)–振子实现》，J. Phys. A: Math. Gen. 24（1991），第13期，L711–L718；https://doi.org/10.1088/0305-4470/24/13/002。[10] Chari, V. 和 Pressley, A.，《量子群指南》，剑桥大学出版社，剑桥，1994年。[11] Drinfeld, V. G.，《量子群》，载于：《国际数学家大会会议录》，伯克利，1986年，美国数学会，普罗维登斯，1987年，798–820。[12] Erdélyi, A.（编），《高等超越函数》，第1、2、3卷，麦格劳-希尔，纽约，1953–1955年。[13] Exton, H.，《 q–超几何函数及其应用》，Ellis Horwood，奇切斯特，1983年。[14] Gasper, G. 和 Rahman, M.，《基本超几何级数》，第2版，《数学及其应用百科全书》第96卷，剑桥大学出版社，剑桥，2004年；https://doi.org/ 10.1017/CBO9780511526251。[15] Herrmann, R.，《分数阶微积分：物理学家导论》，第2版，世界科学出版社，新加坡，2014年；https://doi.org/10.1142/8934。[16] Hounkonnou, M. N.、Atta Howard, F. 和 Kangni, K.，《粒子与 p–阿迪积分：Spin $\left(\frac{1}{2}\right)$：自旋李群、 $\mathcal{R}(\rho,q)$–伽马函数与 $\mathcal{R}(\rho,q)$–贝塔函数、鬼及其应用》，预印本 arXiv:2308.06363 [math.NT]（2023）；https://doi.org/10.48550/arXiv. 2308.06363。[17] Hounkonnou, M. N. 和 Bukweli Kyemba, J. D.，《 $(\mathcal{R},p,q)$–变形量子代数：相干态与特殊函数》，J. Math. Phys. 51（2010），第6期，063518；https://doi.org/ 10.1063/1.3429996。[18] Hounkonnou, M. N. 和 Bukweli Kyemba, J. D.，《 $\mathcal{R}(p,q)$–微积分：微分与积[19] 分》，SUT J. Math. 49（2013），第2期，145–167；https://doi.org/10.55937/sut/1394548362。 $\mathcal{R}(p,q)$–Hounkonnou, M. N. 和 Melong, F.，《03059 [变形组合学：完整刻画与说明》，预印本 arXiv:1906.]math.GM[20]（2019）；https://doi.org/10.48550/ arXiv.1906.03059。 $\mathcal{R}(p,q)$–Hounkonnou, M. N. 和 Melong, F.，《08238 [变形共形维拉索罗代数》，J. Math. Phys. 60（2019），第2期，023501；arXiv:1805.]math-ph[21]；https://doi.org/10.1063/1.5079812。 $\mathcal{R}(p,q)$ Hounkonnou, M. N. 和 Melong, F.，《离散分布的01840 [类比：一般形式体系与应用》，J. Stoch. Anal. 1（2020），第4期，第11篇；https://doi.org/10.31390/josa.1.4.11；arXiv:1901.]math.PR[22]。[23] Hounkonnou, M. N. 和 Melong, F.，《来自变形量子代数的量子多项式：概率分布、生成函数与差分方程》，Rev. Math. Phys. 35（2023），第9期，2350019；https://doi.org/10.1142/S0129055X23500198。 n–Hounkonnou, M. N.、Melong, F. 和 Mitrović, M.，《由 $\mathcal{R}(p,q)$–变形量子代数诱导的广义维特、维特04778 [代数、维拉索罗代数和KdV方程》，Rev. Math. Phys. 33（2021），第4期，2150011；https://doi.org/10.1142/S0129055X21500112；arXiv:2008.]math-ph[24]。 $(p,q,\mu,\nu,\phi_1,\phi_2)$–Hounkonnou, M. N. 和 Ngompe Nkouankam, E. B.，《关于[25] 广义振子代数及相关双基超几何函数》，J. Phys. A: Math. Theor. 40（2007），第30期，8835–8843；https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/30/015。 (p,q,μ,ν,f)–Hounkonnou, M. N. 和 Ngompe Nkouankam, E. B.，《新的[26] 变形态》，J. Phys. A: Math. Theor. 40（2007），第40期，12113–12130；https://doi.org/10.1088/ 1751-8113/40/40/007。 q–Jackson, F. H.，《关于[27] 函数及某个差分算子》，Trans. Roy. Soc. Edinburgh 46（1909），第2期，253–281；https://doi.org/10.1017/S0080456800002751。 (p,q)–Jagannathan, R. 和 Sridhar, R.，《 (p,q)–罗杰斯-塞格ő多项式与振子》，载于：K. Alladi、J. R. Klauder 和 C. R. Rao（编），《Alladi Ramakrishnan的遗产》

《数学科学》，施普林格，纽约，2010年，491-501；https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6263-8_29；arXiv:1005.4309 [math.QA].[28] Jagannathan, R. 和 Srinivasa Rao, K.，《双参数量子代数、双基本数及相关广义超几何级数》，载于：《数论与数学物理国际会议论文集》，斯里尼瓦瑟·拉马努金中心，孔巴科南，印度，2005年12月20日至21日；arXiv:math/0602613 [math.NT]；https://doi.org/10.48550/ arXiv.math/0602613.[29] Jain, A.、Bhat, A. A.、Jain, R. 和 Jain, D. K.，《米塔格-莱夫勒函数的 (p,q)–类比及其(p,q)–拉普拉斯变换》，《分析理论与应用》38（2022），第3期，351-360；https://doi.org/ 10.4208/ata.OA-2018-0014.[30] Jimbo, M.，《 q–的 $U(\mathfrak{g})$ 差分类比与杨-巴克斯特方程》，《数学物理快报》10（1985），第1期，63-69；https://doi.org/10.1007/BF00704588.[31] Kac, V. 和 Cheung, P.，《量子微积分》，Universitext，施普林格，纽约，2002；https: //doi.org/10.1007/978-1-4613-0071-7.[32] Kiryakova, V.，《广义分数阶微积分及其应用》，皮特曼数学研究札记丛书301，朗文科技出版社，哈洛；约翰·威立，纽约，1994.[33] Kiryakova, V.，《多指标米塔格-莱夫勒函数：分数阶微积分中特殊函数的重要类别》，《计算数学与应用》59（2010），第5期，1885-1895；https://doi.org/ 10.1016/j.camwa.2009.08.025.[34] Kiryakova, V.，《分数阶微积分中特殊函数指南》，《数学》9（2021），第1期，文章106；https://doi.org/10.3390/math9010106.[35] Koelink, H. T. 和 Koornwinder, T. H.，《 q–特殊函数教程》，载于：《变形理论与量子群及其在数学物理中的应用》，《当代数学》134，美国数学学会，普罗维登斯，1992，141-142；扩展版：arXiv:math/9403216[math.CA]；https://doi.org/10.1090/conm/134/1187285.[36] Krasniqi, V. 和 Merovci, F.，《 (p,q)–伽马函数的一些完全单调性质》，《巴尔干数学》（新系列）26（2012），第1-2期，133-145；arXiv:1407.4231 [math.CA]；https://doi.org/10.48550/arXiv.1407.4231.[37] Marichev, O. I.，《高等超越函数积分变换手册：理论与算法表》，Ellis Horwood，奇切斯特，1983.[38] Melong, F.，《共形超维拉索罗代数：矩阵模型与量子变形代数》，Rev. Math. Phys. 36（2024），第4期，2450006；arXiv:2305.04263 [math-ph]；https://doi.org/ 10.1142/S0129055X24500065.[39] Melong, F. 和 Wulkenhaar, R.，《广义海森堡-维拉索罗代数与由量子代数产生的矩阵模型》，J. Math. Phys. 64（2023），第7期，073505；https://doi.org/10.1063/5.0150975；arXiv:2303.08073 [math-ph].[40] Milovanović, G. V.、Gupta, V. 和 Malik, N.，《 (p,q)–贝塔函数及其在逼近中的应用》，《墨西哥数学会通报》（第3辑）24（2018），第1期，219-237；https://doi.org/10.1007/ s40590-016-0139-1；arXiv:1602.06307 [math.CA].[41] Mursaleen, M.、Ansari, K. J. 和 Khan, A.，《关于 (p,q)–伯恩斯坦算子的类比》，《应用数学与计算》266（2015），874-882；https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.04.090.[42] Odzijewicz, A.，《量子代数与相关于圆盘相干态映射的 q–特殊函数》，《数学物理通讯》192（1998），第1期，183-215；https://doi.org/10.1007/ s002200050296.[43] Podlubny, I.，《分数阶微分方程》，《科学与工程中的数学》198，学术出版社，圣迭戈，1999.[44] Prudnikov, A. P.、Brychkov, Y. A. 和 Marichev, O. I.，《积分与级数》，第3卷：更多特殊函数，戈登-布里奇科学出版社，纽约，1990.[45] Sadjang, P. N.，《关于 (p,q)–伽马函数和 (p,q)–贝塔函数》，预印本 arXiv:1506.07394（2015）；https://doi.org/10.48550/arXiv.1506.07394。

[46] Sadjang, P. N.，关于 (p, q)–微积分 (p, q)–基本定理和一些泰勒公式，《数学结果》**73**（2018），第1期，文章39；https://doi.org/10.1007/s00025-018-0783-z；arXiv:1309.3934 [math.QA].[47] Saigo, M.，《涉及高斯超几何函数的积分算子评注》，《九州大学通识教育学院数学报告》**11**（1978），第2期，135-143；https://doi.org/10.15017/1449009。[48] Soontharanon, J. 和 Sitthiwirattham, T.，《分数阶 (p, q)–微积分》，《差分方程进展》**2020**（2020），文章35；https://doi.org/10.1186/s13662-020-2512-7。[49] Srivastava, H. M.、Gupta, K. S. 和 Goyal, S. P.，《一元和二元 H – 函数及其应用》，南亚出版社，新德里，1982。[50] Srivastava, H. M. 和 Kashyap, B. R. K.，《排队论和相关随机过程中的特殊函数》，学术出版社，纽约，1982。[51] Wendel, J. G.，《关于伽马函数的注记》，《美国数学月刊》**55**（1948），第9期，563-564；https://doi.org/10.2307/2304460。[52] Yakubovich, S. 和 Luchko, Y.，《积分变换与卷积的超几何方法》，《数学及其应用》**287**，Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，1994；https://doi.org/10.1007/978-94-011-1196-6。半导体材料与器件物理实验室（LPMCS），物理系，理学院，洛美大学，01 B.P. 1515，洛美01，多哥电子邮箱：lankpetre.kaweyim.myhal@gmail.com 半导体材料与器件物理实验室（LPMCS），物理系，理学院，洛美大学，01 B.P. 1515，洛美01，多哥 数学物理与应用国际讲席（ICMPA-教科文组织讲席），阿波美-卡拉维大学，072 B.P. 50，科托努，贝宁共和国电子邮箱：claudisak@gmail.com 数学物理与应用国际讲席（ICMPA-教科文组织讲席），阿波美-卡拉维大学，072 B.P. 50，科托努，贝宁共和国 数学、统计学与计算机系，科学与技术学院，金沙萨大学，金沙萨，刚果民主共和国电子邮箱：desire.bukweli@unikin.ac.cd