锥约束下线性时间序列模型的可容许性

Won-Ki Seo

悉尼大学经济学院

arXiv:2611.32414v1 [math.ST] 24 Nov 2026

摘要

时间序列分析的研究对象不仅包括向量值观测，还扩展到随时间演变的概率密度、分位数函数和协方差算子。这些对象具有内在约束，因此引出了关于加性线性模型可容许性的问题；长期以来，加性线性模型一直是时间序列建模与理论的基础。我们给出了平稳希尔伯特空间线性过程几乎必然保持在闭凸锥内的充要支撑条件。下尾无界的创新项（包括高斯创新项）会将随机性限制在该锥的最大线性子空间内。对于归一化累积系数收敛的分数阶滤波器，即使创新项有界，其主要随机方向也受到同样的限制。对于实线上的分位数，在下尾无界和主要分数阶累积的情况下，变化只能通过位置平移发生。对于锥值过程，中心化平稳增量的部分和在任何对锥上非负的线性泛函作用下，其均方值都保持有界，这与随机游走方差不断增大的情形形成对比。我们为局部绝对连续分位数推导出精确的斜率判据，并构造了适用于分位数、密度和协方差矩阵的、具有有界创新项的非退化加性模型。这些发现阐明了普通加性建模在结构约束下的适用范围。

关键词：函数型时间序列；凸锥；创新支撑集；分位数函数

1 引言

线性模型是传统时间序列分析和函数型时间序列分析的共同基础。通过当前和过去创新项的影响来描述观测值，可以得到易于处理的时间依赖模型，并为预测、估计和推断提供基础（Brockwell and Davis, 1991；Phillips and Solo, 1992）。希尔伯特空间扩展将这一方法拓展至函数型自回归和线性过程（Bosq, 2000）、随机趋势和协整的表示（Beare, Seo, and Seo, 2017；Beare and Seo, 2020；Franchi and

Paruolo, 2020），以及共同趋势维数的推断（Nielsen, Seo, and Seong, 2023, 2026）。这种建模简洁性与理论深度的结合，使线性模型成为新型时间序列数据的自然基准。

其中一种扩展是研究分布时间序列，其目标是跟踪离散程度、不对称性或尾部行为的变化，而不局限于单一标量概括。密度和分位数函数将这些观测表示为曲线，使函数型线性框架成为自然的起点。协方差算子是嵌入线性空间中的另一类对象。然而，这些表示必须遵守约束：密度必须非负且归一化，分位数必须非递减，而协方差算子必须是半正定的。因此，应用线性框架需要确定其实现是否仍为有效对象，以及一个可容许模型能够容纳多大程度的变异。

分位数函数被用作分布回归中的函数型观测（Yang 等，2020；Ghosal 等，2023），并且在连续多个时期记录时，也被用于自回归模型（Zhang、Kokoszka 和 Petersen，2022；Zhu 和 Müller，2023）。对于具有有限二阶矩的单变量分布，分位数映射是将 2-瓦瑟斯坦空间等距嵌入到 $L^2(0,1)$ 中的映射（Panaretos 和 Zemel，2020）。其像是由具有非递减版本的函数构成的闭凸锥。因此，希尔伯特空间表示仍保留单调性约束；即使以参考分位数为基准进行中心化后，该约束依然存在。此外，该锥在 $L^2(0,1)$ 中具有空内部，因此，希尔伯特范数中的任意微小扰动都可能破坏分位数的有序性。因此，线性表示必须辅以能够保持单调性的条件。

这些约束能否得到维持，也取决于冲击效应的持续方式。单独来看能够维持约束的冲击，跨滞后期叠加后可能会违反约束。在下文提出的分位数自回归模型中，持续性越强，可容许的冲击幅度上限越低。用于刻画长记忆的分数阶滤波器也带来相关问题，因为其累积系数可能无限增长。因此，冲击的支撑集与持续性是需要共同考量的建模选择。一个有用的刻画必须同时说明这些限制，以及非退化动力学的实现空间。

在适用于特定方法的假设下，现有方法通过转换为希尔伯特空间坐标（Petersen and Müller, 2016）、在贝叶斯希尔伯特空间中采用修正的线性运算（Seo and Beare, 2019），或使用瓦瑟斯坦切坐标和最优传输映射（Zhang、Kokoszka 和 Petersen, 2022；Zhu and Müller, 2023），来处理分布约束。具体而言，Zhu and Müller (2023) 使用传输映射的复合以及一种保持单调性的标量乘法形式来构建自回归动力学。我们的结果从互补的角度出发，刻画普通加性模型在何种条件下可容许，以及创新支撑集和持续性如何限制其所能表示的变化。适当的支撑集和滤波条件也允许采用具有有界创新项的非退化加性模型。结构约束是

分布值数据固有的特征，无论采用何种建模框架，都必须予以遵守。

我们研究一个实可分希尔伯特空间$\mathcal{H}$ 和一个闭凸锥$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$。设 $\mu \in \mathcal{H}$ 为固定均值，设$\{\varepsilon_t\}$ 为中心化、独立同分布的$\mathcal{H}$值创新项，并设 $a_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 为有界线性系数。我们考虑平稳线性过程

$$X_t = \mu + \sum_{j \geq 0} a_j \varepsilon_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

其级数在均方意义下收敛。我们刻画该模型何时保持在$\mathcal{C}$ 中，以及它能够表示哪些形式和幅度的随机变异。附录 A 证明主要结果。补充材料针对各节给出进一步结果和示例，并附有证明。

2 通过创新支撑集讨论可容许性

2.1 几何结构与线性过程

除非另有说明，“几乎处处”均指勒贝格测度意义下。

记 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 为 H 上的内积和范数，并记 B(H) 为 H 上有界线性算子构成的空间，其算子范数为 $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$。对于 $D \subseteq \mathrm{H}$，span D, $D^{\perp}$ 和D 分别表示其线性张成、正交补和范数闭包。对于算子 A， A^{*}、ran A 和 ker A 分别表示其伴随算子、值域和核。恒等算子记为 Id，并且 $(x \otimes y)z = y\langle z, x\rangle$ 适用于 $x, y, z \in \mathrm{H}$。主要示例采用 L^2(0, 1)，即 (0, 1) 上勒贝格平方可积实函数构成的希尔伯特空间，其中几乎处处相等的函数视为相同，内积为 $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(u) g(u)\, \mathrm{d}u$。在不会引起混淆时，我们将其简记为 L^2。对于 (0, 1) 上的可测实函数 f，记 $\|f\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{u \in (0,1)} |f(u)|$，其值允许为 ∞。若 f 在 $[0, 1]$, 上连续，则这等于 $\sup_{u \in [0,1]} |f(u)|$。

对偶锥为 $\mathcal{C}^{*} = \{h \in \mathcal{H} : \langle h, x \rangle \geq 0$ 对所有 $x \in \mathcal{C}\}$ 均成立。闭凸锥的双极定理（Bauschke 和 Combettes，2017年，第 6.3 节）给出： $x \in \mathcal{C}$ 当且仅当$\langle h, x \rangle \geq 0$ 对每个 $h \in \mathcal{C}^{*}$ 都成立。将这一刻画应用于 x 和 $-x$，可得

$$\operatorname{lin}(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}^{*})^{\perp} = (\overline{\operatorname{span}}\, \mathcal{C}^{*})^{\perp}. \tag{2}$$

若锥满足 lin($\mathcal{C}$) $= \{0\}$，则称其为尖锥。我们将其噪声容量 定义为 cap($\mathcal{C}$) $=$ dim lin($\mathcal{C}$)，其值可以为 ∞。其作用取决于下文确立的创新项条件或累积条件；它并不限制有界可容许随机性的维数。

假设 1（线性过程）。 创新项 $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ 是定义在概率空间 (Ω, $\mathcal{F}$ $\mathbb{P}$) 上的独立同分布的 $\mathcal{H}$ 值随机元素，且 $\mathbb{E}(\varepsilon_0) = 0$ 和$\mathbb{E}(\|\varepsilon_0\|^2) < \infty$。其协方差算子为 $\Sigma = \mathbb{E}[\varepsilon_0 \otimes \varepsilon_0]$， $\Sigma^{1/2}$ 表示其非负平方根。系数 $a_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足 $\sum_{j \geq 0} \mathbb{E}(\|a_j \varepsilon_0\|^2) < \infty$，且 $\mu \in \mathcal{H}$。

对于每个固定的 t，级数 (1) 在均方意义下且几乎必然收敛。该过程严格平稳，均值为 μ。此系数条件弱于算子范数下的绝对可和性，并包含平方可和标量滤波器；标准线性过程框架参见 Bosq (2000)。

令 conv 表示凸包的范数闭包。不带下标时，ess inf 和 ess sup 均取在该概率测度下。记 $\operatorname{supp}\varepsilon_0$ 为创新分布的拓扑支集，定义 $\mathcal{K} = \operatorname{conv}(\operatorname{supp}\ \varepsilon_0)$ 以及 $\kappa(g) = \inf_{x\in\mathcal{K}}\langle g, x\rangle = \operatorname{ess\,inf}\langle g, \varepsilon_0\rangle$ for $g \in \mathcal{H}$。映射 κ（我们称之为下支撑泛函）将每个 g 映射为标量创新投影 $\langle g, \varepsilon_0\rangle$ 的本质下界。根据连续性和支撑集的定义，它可表示为在 $\mathcal{K}$ 上的下确界。创新均值属于 $\mathcal{K}$，因此 $0 \in \mathcal{K}$ 且 $\kappa(g) \le 0$。

2.2 可容许性的支撑集判据

定理1（可容许性刻画）：在假设 *1* 下，以下陈述等价：

(i) 对每个 $t \in \mathbb{Z}$，$X_t \in \mathcal{C}$ 几乎必然成立。
(ii) 对每个 $h \in \mathcal{C}^*$，$\langle h, \mu\rangle + \sum_{j\ge 0}\kappa(a_j^* h) \ge 0$。

(iii) 对每个整数 $m \ge 0$ 以及每个 $x_0, \dots, x_m \in \mathcal{K}$，$\mu + \sum_{j=0}^{m} a_j x_j \in \mathcal{C}$。
此外，对于每个 $h \in \mathcal{H}$，本质下确界 $\langle h, X_t\rangle = \langle h, \mu\rangle + \sum_{j\ge 0}\kappa(a_j^* h)$。下支撑值序列 $\kappa(a_j^* h)$ 均在 $[-\infty, 0]$ 中理解；任何 $-\infty$ 项或趋于 $-\infty$ 的发散都会违反条件 *(ii)*。

对于每个 $h \in \mathcal{C}^*$，条件 (ii) 要求均值投影 $\langle h, \mu\rangle$ 覆盖滞后创新项造成的总最坏向下贡献 $-\sum_j \kappa(a_j^* h)$。这里，$\kappa(a_j^* h) = \operatorname{ess\,inf}\langle h, a_j\varepsilon_0\rangle$ 是该方向上滞后-j 贡献的本质下界。条件 (iii) 为下文构造中的可容许性提供了一种方便的检验：它只涉及确定性有限和，尽管 X_t 是由无穷级数定义的。检验这些和足以判定可容许性，因为在假设 1 下，实际得到的部分和几乎必然收敛到 X_t，且 $\mathcal{C}$ 是闭集。无需要求从 $\mathcal{K}$ 中取任意无限序列都收敛。

对于 $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ 和 $\mathcal{C} = [0, \infty)$，条件 (ii) 表示为 $\mu + \sum_{j\ge 0}\operatorname{ess\,inf}(a_j\varepsilon_0) \ge 0$；例如，对于系数非负且创新项为正并具有有限二阶矩的一阶自回归过程，该条件成立；Davis and McCormick (1989) 研究了具有正创新项的自回归过程的估计。

补充材料第 S2.1 节推导出定理1的两个推论：可容许性要求 $\mu \in \mathcal{C}$，并且若 $\langle h, \mu\rangle = 0$ 对某个 $h \in \mathcal{C}^*$ 成立，则每个滞后项 $\langle h, a_j\varepsilon_{t-j}\rangle$ 几乎必然消失，因此均值若属于 $\operatorname{lin}(\mathcal{C})$，则必有 $X_t - \mu \in \operatorname{lin}(\mathcal{C})$。同一节还讨论

独立性的作用：根据备注 S1，在存在相关创新项时，支撑判据是充分条件，但不是必要条件。

3 支撑集与持续性的限制

我们考察创新支撑集和冲击效应的持续性如何限制可容许线性动力学。

3.1 无界下尾

定义 1. 若中心化创新项的协方差为 Σ，下支撑泛函为 κ，则当 $\Sigma^{1/2}g \neq 0$ 蕴含 $\kappa(g) = -\infty$ 对每个 $g \in H$ 都成立时，该创新项具有无界下尾。

定义 1 要求每个方差为正的标量投影 $\langle g, \varepsilon_0\rangle$ $\|\Sigma^{1/2}g\|^2$ 都无界下方：$\mathbb{P}(\langle g, \varepsilon_0\rangle < -M) > 0$ 对每个 $M > 0$都成立。方差为零的投影几乎必然为零，因此允许退化协方差。补充材料 S2.2 节对此作了说明，并进一步指出两点：此时每个方差为正的投影也无界上方；此外，创新范数无界，或某个方向上的高斯分量退化且总创新方差为正，均不足以推出该条件。

中心化高斯随机元素满足以下条件：每个标量投影 $\langle g, \varepsilon_0\rangle$ 要么恒等于零，要么其支撑集为 $\mathbb{R}$ （Bogachev，1998）。以下定理表明，在这一尾部条件下，可容许的随机变异被限制在锥的线性空间中。

定理 2（坍缩至线性空间）。 假设假设 *1* 成立，且创新项具有无界下尾。则 $X_t \in C$ 几乎必然当且仅当 $\mu \in C$，并且

$$\operatorname{ran}(a_j\Sigma^{1/2}) \subseteq \operatorname{lin}(C) \qquad \textit{for every } j \geq 0. \tag{3}$$

在这种情况下，$a_j\varepsilon_{t-j} \in \operatorname{lin}(C)$ 几乎必然，$X_t \in \mu + \operatorname{lin}(C)$ 几乎必然，且 X_t 的协方差算子的值域包含于 $\operatorname{lin}(C)$ 中。如果该锥是尖锥，则 $X_t = \mu$ 几乎必然。

当（3）不成立时，对创新项进行非零重新缩放无法恢复可容许性。具有正方差的标量投影 $\langle g, \varepsilon_0\rangle$ 在重新缩放后仍然向下无界，无论其方差变得多么小。反之，任何取值于线性部分的中心化线性过程，在加上锥中的均值进行平移后都是可容许的。因此，$\dim \operatorname{lin}(C)$ 是该创新类别实际可达到的确切维数，而不仅仅是一个没有可实现对应项的上界。补充材料 S2.2 节中的例 S1 表明，仅有无界支撑并不足够：中心化指数创新向上无界但向下有界，却能在 $[0, \infty$ 中产生一个非退化过程。

3.2 持续线性过程的可容许性

假设 1 中的线性过程也可以表现出持续性，包括长期依赖，因为不要求系数 a_j 具有绝对可和性。现在，我们考察在不作无界尾部假设的情况下，可容许性如何限制持续性。累积系数 $F_m = \sum_{j=0}^{m} a_j$ 记录了单个创新项经过滞后 m累积后的响应。我们允许系数算子随滞后变化，而仅对归一化累积响应施加极限条件。

定理 3（对累积响应的限制）。 假设假设 *1* 成立且 $X_t \in$ 几乎必然成立。若正标量 $r_m \to \infty$ 和算子 $\widetilde{F}_\infty \in \mathcal{B}(H)$ 满足 $r_m^{-1} F_m \to \widetilde{F}_\infty$（按算子范数计），则

$$\operatorname{ran}(\widetilde{F}_\infty \Sigma^{1/2}) \subseteq \operatorname{lin}(\mathcal{C}). \tag{4}$$

特别地，设对于某些 $0 < d < 1/2$ 和 $B \in \mathcal{B}(H)$，系数满足

$$a_j = j^{d-1} B + R_j \quad (j \geq 1), \qquad \frac{\|R_j\|_{\mathrm{op}}}{j^{d-1}} \longrightarrow 0 \quad as\ j \to \infty. \tag{5}$$

则 $m^{-d} F_m \to B/d$（按算子范数计），且 $\operatorname{ran}(B\Sigma^{1/2}) \subseteq \operatorname{lin}(\mathcal{C})$。这些结论对所有满足假设 *1* 的创新分布均成立，包括有界创新项。

在分数阶情形（5）中，该限制涉及 $\operatorname{ran}(B\Sigma^{1/2})$：对于实值随机变量的分位数函数，该值域仅包含常值函数；在尖锥上，它为零。绝对可和分量仍可能在 $\operatorname{lin}(\mathcal{C})$ 之外产生可容许的变化。因此，位置偏移可以遵循分数阶动态，而形状变化仍保持有界，如例 1 之后所示。

补充材料第 S2.3 节中的注 S2（详见第 S7.1 节）表明，对于形如 $a_j = b_j B$ with $\sum_j |b_j| = \infty$ 的标量倍数，如常见的标量分数阶滤波器和函数型局部 Whittle 方法（Li、Robinson和Shang（2021）；Seo和Shang（2024））中那样，可容许性会将整个中心化过程限制在 $\operatorname{lin}(\mathcal{C})$ 内，即使 $\sum_{j \leq m} b_j$ 保持有界也是如此。原因在于，对于每个满足 $\operatorname{var}(\langle h, B\varepsilon_0 \rangle) > 0$ 的 $h \in \mathcal{C}^*$，滞后-j 下支撑值 $\kappa(b_j B^* h)$ 至多为 $-c_h |b_j|$，其中某个 $c_h > 0$；这些值之和为 $-\infty$，因此定理1的条件 (ii) 不成立。

4 具有平稳增量的过程

考虑具有中心化平稳增量的 $Q_t = Q_0 + \sum_{s=1}^{t} u_s \in \mathcal{C}$ u_s。回想一下， $h \in \mathcal{C}^*$ 蕴含 $\langle h, Q_t \rangle \geq 0$。下面的定理表明，对于每个这样的 h，标量部分和 $\sum_{s=1}^{t} \langle h, u_s \rangle = \langle h, Q_t - Q_0 \rangle$ 都是平方可积平稳序列中两个项之差。因此，其二阶矩关于 t 一致有界。

定理 4 (具有平稳增量的锥值水平)。 设 $\{u_t\}_{t\ge1}$ 是一个严格平稳的 H 值序列，满足 $\mathbb{E}(u_1) = 0$ 和 $\mathbb{E}(\|u_1\|^2) < \infty$。设 $Q_0 \in \mathcal{C}$ 几乎必然成立，且满足 $\mathbb{E}(\|Q_0\|^2) < \infty$；并假设对每个 $t \ge 1$， $Q_t = Q_0 + \sum_{s=1}^{t} u_s \in \mathcal{C}$ 几乎必然成立。对于每个 $h \in \mathcal{C}^*$，都存在一个严格平稳的平方可积标量序列 $\{M_t^h\}_{t\ge0}$，其中每个 M_t^h 都关于 $\{u_{t+s}\}_{s\ge1}$ 可测，使得

$$\sum_{s=1}^{t} \langle h, u_s \rangle = M_0^h - M_t^h, \qquad \mathbb{E}\{(M_0^h)^2\} \le \mathbb{E}(\langle h, Q_0 \rangle^2). \tag{6}$$

因此，

$$\sup_{t\ge1} \mathbb{E}(\langle h, Q_t - Q_0 \rangle^2) \le 4\mathbb{E}(\langle h, Q_0 \rangle^2) < \infty. \tag{7}$$

对于每个固定的 $h \in \mathcal{C}^*$，式 (6) 中的序列可选为 $M_t^h = \inf_{n\ge0} \sum_{s=1}^{n} \langle h, u_{t+s} \rangle = \inf_{s\ge t} \langle h, Q_s - Q_t \rangle$，其中空和等于零。因此， M_t^h是 $\langle h, Q_s - Q_t \rangle$ 在 $s \ge t$ 上的下确界。由于 $h \in \mathcal{C}^*$且 $Q_s \in \mathcal{C}$，我们有 $\langle h, Q_s \rangle \ge 0$，因此$-\langle h, Q_t \rangle \le M_t^h \le 0$。该定理不假设 Q_0 与 $\{u_t\}_{t\ge1}$之间存在独立性，也不假设各增量之间相互独立。对于平稳序列，当部分和的二阶矩一致有界时，此类表示存在（Browder，1958年，引理 5 和定理 2 的证明）；在此，锥约束直接给出了该表示。

推论 1 (累积增量的极限)。 在定理 *4* 的条件下，令$S_T = Q_T - Q_0 = \sum_{s=1}^{T} u_s$。

(i) 若 $\{r_T\}$ 是满足 $r_T \to \infty$ 的正确定性序列，且 S_T / r_T 在 H 中弱收敛到 G，则 $G \in \operatorname{lin}(\mathcal{C})$ 几乎必然。

(ii) 若有界非负自伴算子 Λ 满足

$$\langle h, \Lambda h \rangle = \lim_{T\to\infty} T^{-1} \mathbb{E}(\langle h, S_T \rangle^2) \quad \text{for every } h \in \mathcal{H}, \tag{8}$$

则 $\operatorname{ran} \Lambda \subseteq \operatorname{lin}(\mathcal{C})$ 且 $\operatorname{rank} \Lambda \le \operatorname{cap}(\mathcal{C}) = \dim \operatorname{lin}(\mathcal{C})$。

补充材料的 S3.1 节表明，不能省略中心化条件 $\mathbb{E}(u_1) = 0$，并且定理 4 限制的是累积增量，而非水平值的依赖性：对于任意取值于$\mathcal{C}$的严格平稳过程，只要满足 $\mathbb{E}(\|Q_0\|^2) < \infty$，$Q_T - Q_0$ 在均方意义下有界，无论 Q_t 的序列协方差衰减得多么缓慢。S3.2 节解释了推论 1 如何由定理 4 得出，并指出推论 1(ii)中的极限存在，例如在滞后协方差绝对可和的条件下。该节还说明，当 $\operatorname{lin}(\mathcal{C})^\perp$为有限维时，标量界给出 $\sup_T \mathbb{E}(\|PS_T\|^2) < \infty$（其中 P 是到 $\operatorname{lin}(\mathcal{C})^\perp$ 的正交投影），但在其他情况下，单凭这些标量界无法得出这一结论。S3.3 节讨论均值可能随时间变化的随机密度。根据注 S3，仅单位质量这一条件就足以迫使中心化随机密度变化的归一化极限趋于零，从而对任何平方可积密度都得到 Beare（2017）的限制，而无需平稳增量或线性条件。

5 主要示例的几何结构

具有有限二阶矩的单变量分布的分位数函数构成闭凸锥

$$\mathcal{Q} = \{q \in L^2(0,1) : q \text{ has a nondecreasing version}\}. \tag{9}$$

分位数映射是从单变量 2-瓦瑟斯坦空间到 L^2(0,1) 的等距映射（Panaretos 和 Zemel, 2020）。记 1(u) $= 1$ 为 (0,1) 上的常值函数。一个函数及其相反数均为非递减函数，当且仅当该函数为常值函数，因此 lin($\mathcal{Q}$) = span$\{1\}$。支撑在 $[0, \infty)$ 上的分布，其分位数均为非负数，因此相应的锥是尖锥。中心化分位数满足 $\int_0^1 q(u)\, \mathrm{d}u = 0$，这也消除了常值方向。因此，这两种情形的线性部分均为零， L^2(0,1) 的非负锥（其中包含平方可积密度）以及自伴希尔伯特–施密特算子的半正定锥也同样如此。在所有这些锥中，定理 2 表明，具有无界下尾的加性过程是确定性的；对于密度而言，仅非负性就足以得出这一结论。

补充材料第 S1 节详述了密度和半正定算子的情形，并讨论了线性部空间由仿射函数构成的凸函数；因此，在相同条件下，只有截距和斜率会变化。截距和斜率上的独立高斯随机游走表明，推论 1(ii) 中的界 rank $\Lambda \le$ cap($\mathcal{C}$) $= 2$ 可以达到。单调性只留下截距；再加上非负性（如洛伦兹曲线所要求的），便会产生与密度相同的退化情形。表 S1 总结了这些情形。根据命题 S1，当且仅当 $B\mu = b$ and $Ba_j\Sigma^{1/2} = 0$ 对每个 j 都成立时，仿射约束 $BX_t = b$（例如单位质量或固定均值）几乎必然成立。在无界下尾的情况下，它将 $X_t - \mu$ 限制在 lin($\mathcal{C}$) $\cap$ ker B 中；而在定理 3 中，它给出 ran($\widetilde{F}_\infty \Sigma^{1/2}$) $\subseteq$ lin($\mathcal{C}$) $\cap$ ker B。

6 分位数函数的可容许线性动力学

分位数函数的可容许线性模型，是 2-Wasserstein 几何结构下分布的时间序列模型（Zhang、Kokoszka 和 Petersen，2022）。当创新项具有无界下尾时，定理 2 将分位数变化限制在位置平移范围内；高斯创新项就是一个例子。对于式 (5) 中的首要分数阶项，定理 3 对任意创新分布也得出相同结论。这些结果或许会让人认为，可容许分位数模型只能在 lin($\mathcal{Q}$) =span$\{1\}$ 内变化，也就是说，只能发生位置变化。但单凭单调性并不能得出这一结论。只要创新项的幅度和系数a_j 满足适当的界，有界创新项便允许形状发生变化，尽管 $\mathcal{Q}$ 在 L^2(0,1) 中的内部为空。我们首先在局部绝对连续性条件下推导可容许性的精确斜率条件，而不假设创新项有界。随后利用该条件构造具有一个、多个或无穷多个随机形状方向的此类模型。

本节中，$\mathcal{H} = L^2(0,1)$，且 $\mathcal{C} = \mathcal{Q}$（见式 (9)）。回忆一下，$\mathcal{K} = \overline{\text{cone}}(\text{supp}\, \varepsilon_0)$ 是第 2 节所述的闭凸创新支撑集，而 $\mu = \mathbb{E}(X_t)$ 是均值分位数函数。

6.1 精确斜率条件

为了通过导数刻画可容许线性动力学，我们假设 μ 以及每个函数 $a_j x$, $x \in \mathcal{K}$均为局部绝对连续。这意味着它们在 $(0,1)$ 的每个闭子区间上都具有绝对连续性。对于这样的函数 h, h' 表示其导数，该导数几乎处处有定义。

假设 2（局部绝对连续）。 均值 $\mu \in \mathcal{Q}$ 在 $(0,1)$ 上具有一个局部绝对连续版本。对于每个 $j \geq 0$ 和每个 $x \in \mathcal{K}$， $a_j x$ 在 $(0,1)$ 上具有一个局部绝对连续版本。

对于每个滞后，定义可测函数 $s_j : (0,1) \to [0, \infty]$，除去勒贝格零测集外，由 $s_j =$ 本质上确界$_{x \in \mathcal{K}} \{-(a_j x)'\}$给出。由于 $0 \in \mathcal{K}$， $s_j \geq 0$。

定理 5（必要且充分的斜率条件）。 在假设 *1* 和 *2*,

$$X_t \in \mathcal{Q} \text{ almost surely} \quad \Longleftrightarrow \quad \mu'(u) \geq \sum_{j \geq 0} s_j(u) \quad \text{for almost every } u \in (0,1). \tag{10}$$

在 (10) 中， $s_j(u)$ 衡量当 x 在$\mathcal{K}$中变化时， $a_j x$ 项最多能使斜率降低多少。滞后项上的总和不得大于均值斜率 $\mu'(u)$。创新支撑集决定每个滞后对应的可能斜率，而系数决定这些贡献如何在各滞后间相加。定理 5 补充了 Zhang、Kokoszka 和 Petersen (2022) 给出的充分导数界，在所述正则性条件下，为一般算子滤波器提供了精确的可容许性判据。

补充材料的 S4.1 节阐释了 (10)：如果 μ 是正密度 f_μ 的分位数函数，那么在反函数关系适用处， $\mu'(u) = 1/f_\mu\{\mu(u)\}$ ，因此 f_μ 较小时，允许更大的斜率扰动；在 μ 的平坦区间（表示点质量）上， X_t 必须保持平坦，但其位置可以移动。该节还指出，斜率判据要求局部绝对连续性，因为否则几乎处处非负的导数未必意味着单调性；定理1则不需要这一条件。

6.2 构造可容许的线性过程

我们构造了具有有界创新项的可容许线性分位数过程。例 1 给出了一个具有单一形状方向的模型，对于该模型，定理 5 给出了精确的可容许性条件。补充材料 S4.3 节中的命题 S2 将这一构造扩展到有限个或无限个形状方向，只要它们的合计向下斜率满足一个充分界。

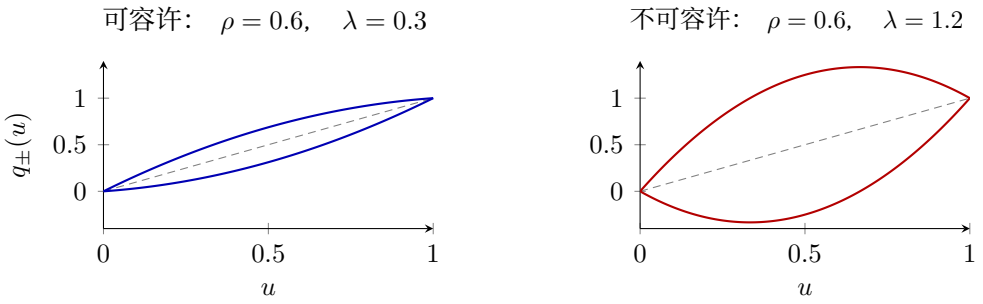


图1：例 1 中的支撑极值 $q_{\pm}$，其中 $\rho = 0.6$；虚线为均值$\mu(u) = u$。左图，$\lambda = 0.3$：二者均为非递减函数。右图，$\lambda = 1.2$：q_{-} 在 $(0,\ 1/3)$ 上递减，并在 $(2/3,\ 1)$ 上 q_{+}。这些是确定性界，而非模拟路径。

例 1（单一形状方向）。设 $\mu(u) = u$、$v(u) = u(1-u)$，并设 η_t 独立同分布且中心化，具有正方差和 $|\eta_t| \le 1$。对于 $|\rho| < 1$ 和 $\lambda > 0$，考虑 $X_t(u) = u + Z_t u(1-u)$，其中 $Z_t = \lambda \sum_{j \ge 0} \rho^j \eta_{t-j}$。

当且仅当 $|Z_t| \le 1$ 时，所实现的函数是非递减的。由于 $|Z_t| \le \lambda/(1-|\rho|)$，只要 $\lambda \le 1 - |\rho|$，该过程几乎必然为分位数值。这只用到了η_t的界，而没有用到其分布。此外，若 ess inf $\eta_0 = -1$ 且 ess sup $\eta_0 = 1$，如拉德马赫变量或取值于 $[-1, 1]$ 的均匀变量，则 $s_j(u) = \lambda|\rho|^j|1-2u|$，并且定理 5 表明 $\lambda \le 1 - |\rho|$ 也是必要条件。此时，Z_t 的本质极值为 $\pm\lambda/(1-|\rho|)$。其支撑集未必覆盖这些极值之间的整个区间。若 $\lambda > 1 - |\rho|$，则一个具有正概率的支撑事件会产生非单调函数。图1绘出了这一边界两侧 X_t 的支撑极值$q_{\pm}(u) = u \pm \{\lambda/(1-|\rho|)\}u(1-u)$。

每个实现都位于 q_{-} 和 q_{+} 之间；在端点条件下，以正概率任意接近两者。在图1右侧面板中，靠近端点时单调性消失，此处形状方向的斜率 $|v'(u)| = |1-2u|$ 相对于均值斜率 $\mu'(u) = 1$最大。边界 $\lambda \le 1 - |\rho|$ 还量化了持续性对形状变化的限制。在例 1的端点条件下，$\mathrm{var}(Z_t) = \lambda^2 \mathrm{var}(\eta_0)/(1-\rho^2) \le \lambda^2/(1-\rho^2)$，因此，可容许性结合 $0 \le \rho < 1$ 意味着 $\mathrm{var}(Z_t) \le (1-\rho)/(1+\rho)$。因此，持续性趋近于 1 会迫使形状方差趋于零。补充材料的 S4.2节进一步讨论了这个例子：Z_t 的符号如何改变所表示的分布中的概率质量；在端点条件下，Z_t 的极值为 $\pm\lambda/(1-|\rho|)$ 的直接论证；以及为什么 Z_t的支撑集——对于拉德马赫 η_t 而言是康托尔集，且 $|\rho| < 1/2$（Peres、Schlag 和 Solomyak，2000）——不会影响可容许性。

任何中心化的平方可积标量过程 L_t 均可作为位置偏移加入：$X_t + L_t\mathbf{1}$ 在 $\lambda \le 1 - |\rho|$下仍是一个分位数。特别地，L_t 可以是高斯过程。Zhang、Kokoszka 和 Petersen（2022）的例3.2–3.3已允许无界的位置创新与有界的形状变化同时存在，并由同一个标量自回归滤波器作用。

这里，位置和形状可以遵循不同的滤波器。例如，取 $L_t = \sum_{j\ge 0}(j+1)^{d-1}\zeta_{t-j}$，其中 $0 < d < 1/2$ 和 $\{\zeta_t\}$ 相互独立且同分布、中心化并且平方可积，且与 $\{\eta_t\}$独立。于是，位置偏移遵循分数阶动态，而形状系数 Z_t 仍保持其一阶自回归动态。这说明定理 3 允许位置具有分数阶累积，同时形状变化保持有界。

补充材料 S4.3 节中的命题 S2 将例 1 扩展到可数多个形状方向 v_k，其系数均不超过一，并带有 $a_j = \lambda\rho^j\mathrm{Id}$；当 $\mu' \ge c > 0$ 时，在 $\lambda\sum_k\|v_k'\|_\infty \le c(1-|\rho|)$ 下成立。令 $\mu(u) = u$, $\varepsilon_t = \sum_k \eta_{t,\,k} v_k$ 且令 $v_k(u) = 2^{-k}(2\pi k)^{-1}\sin(2\pi k u)$，则有 $\sum_k\|v_k'\|_\infty = 1$；这为 $\lambda \le 1-|\rho|$ 提供了可容许性，其中创新项和过程协方差算子具有无限秩。同一节还表明，以标准正态分位数作为均值时，$\mu' \ge \sqrt{2\pi}$ 和 $\lambda\sum_k\|v_k'\|_\infty \le \sqrt{2\pi}(1-|\rho|)$ 即已足够。

这些例子将形状扰动的大小与其维数区分开来。均值斜率和滞后冲击效应决定了多大的形状变化是可容许的；有界创新项可以在无限多个方向上满足这一条件。位置变化不受单调性的限制。

7 一般锥的可容许动力学

与第6节中的分位数函数类似，有界创新项使一般锥（包括尖锥）中的非退化加性模型成为可能。补充材料的 S5 节采用闵可夫斯基泛函 $p_\mu(v) = \sup_{h\in\mathcal{C}^*}|h,v|/h,\mu$，其中 $0/0 = 0$, 且该泛函满足 $p_\mu(v) \le 1$ 当且仅当$\mu \pm v \in \mathsf{C}$。根据命题 S3，对于 $\mu \in \mathsf{C}$，$\sum_{j\ge 0}\sup_{x\in\mathcal{K}} p_\mu(a_j x) \le 1$ 足以保证可容许性；此条件仅对扰动 $a_j x$施加界限，因此 μ 不必是 C 的内点。由于该条件分别处理每个滞后，可能过于保守，而定理1的条件 (ii) 则是精确的。根据在 S7.2 节推导的例S2–S4，对于密度，$p_\mu(v)$ 等于 $\|v/\mu\|_\infty$；对于均值为正定的协方差矩阵，等于 $\|\mu^{-1/2}v\mu^{-1/2}\|_{\mathrm{op}}$；对于分位数，则当 μ 和 v 局部绝对连续时，等于 $\|v'/\mu'\|_\infty$。例如，令 Z_t 如例 1 所示，则只要$\lambda \le 1-|\rho|$，$X_t(u) = 1 + Z_t(2u-1)$ 就是一个非退化的取值为密度的过程，因此定理 2 中的尾部条件是必要的。若取值于 K 的相关创新所生成的滤波序列几乎必然收敛，命题 S3 也适用于这种情形。

8 讨论与结论

可容许性同时限制约束集、创新分布和系数算子。无界下尾将变异限制在 $\mathrm{lin}(\mathcal{C})$ 中；即使创新项有界，累积也会对主导分数阶项以及累积平稳增量的极限产生同样的限制，甚至在

对于分位数，仅剩下位置平移；对于密度和协方差算子，则不再存在随机性。然而，有界创新项仍允许非退化模型，其精确条件见定理1和定理5。

这些限制对于模型设定至关重要。如果使用并非几乎必然为常值函数的高斯创新项，对分位数曲线进行函数型自回归模拟或预测，则定理 2 表明，即使非恒定部分再小，所生成的曲线仍以正概率呈现非单调性。单调重排（Chernozhukov、Fernández-Val 和 Galichon，2010）可以恢复单调性，但重排后的曲线不再遵循加性动力学。相反，定理 5 展示了如何限制创新支撑集和持续性，使模型本身保持可容许。

进一步的研究可以针对其归一化累积和不存在非零极限的一般算子系数，推导明确的限制条件；还可以处理相关创新，因为对于相关创新，可容许性取决于不同滞后期上哪些创新值能够共同出现。

生成式人工智能使用声明

ChatGPT Astra 6.0（OpenAI）用于检查数学论证，Claude Opus 5.5（Anthropic）用于润色语言。作者审阅并核实了全部内容，并对此承担全部责任。

主要结果的证明

我们使用创新支撑集 $\mathcal{K} = \text{conv}(\text{supp}\,\varepsilon_0)$、其下支撑泛函 $\kappa(g) = \inf_{x\in\mathcal{K}}\langle g, x\rangle$，以及第 2 节中的创新协方差 Σ，并将 $\mathbb{L}^2_{\mathbb{R}}$ 记作具有有限二阶矩的实值随机变量空间。泛函 κ 对于正标量是正齐次的，并且具有超可加性。其相反数是在 $-g$处取值于 $\mathcal{K}$ 的通常支撑函数。

定理*1*的证明。 我们首先证明定理最后一部分所述的本质下确界恒等式：$\text{ess inf}\langle h, X_t\rangle = \langle h, \mu\rangle + \sum_{j\geq 0}\kappa(a_j^* h)$。然后，我们证明 (i)、(ii) 和 (iii) 的等价性。在整个证明过程中，对于独立且几乎必然有限的实值随机变量 Y 和 Z，我们使用恒等式 $\text{ess inf}(Y+Z) = \text{ess inf}\ Y + \text{ess inf}\ Z$，其中允许本质下确界等于 $-\infty$。这可由在 Steutel 和 van Harn（2004，附录 A，命题2.1）的支撑恒等式中取下确界得到。

固定 $t\in\mathbb{Z}$和 $h\in\mathcal{H}$，并令 $\xi_j = \langle a_j^* h, \varepsilon_{t-j}\rangle$、$\ell_j = \text{ess inf}\ \xi_j = \kappa(a_j^* h)$ 和 $S = \sum_{j\geq 0}\xi_j = \langle h, X_t - \mu\rangle$。假设 1 确保该级数几乎必然收敛，且在 $\mathbb{L}^2_{\mathbb{R}}$ 中收敛。这些变量 ξ_j 相互独立且已中心化，因此对每个 j，都有 $\ell_j \leq 0$。因此，$\sum_{j\geq 0}\ell_j$ 可定义为其单调不增部分和的极限，其取值属于 $[-\infty, 0]$。

对于每个 $m \geq 0$，记 $S_m = \sum_{j=0}^{m} \xi_j$ 和 $R_m = S - S_m = \sum_{j>m} \xi_j$。变量 S_m和 R_m 相互独立，因为它们分别依赖于互不相交的创新项集合。此外，均方收敛和中心化给出 $\mathbb{E}(R_m) = 0$，因此 ess inf $R_m \leq 0$。对 S_m 中的独立项反复应用 ess inf$(Y+Z) =$ ess inf $Y +$ ess inf Z，可得 ess inf $S_m = \sum_{j=0}^{m} \ell_j$。再将同一等式应用于 $S = S_m + R_m$，便得到 ess inf $S \leq \sum_{j=0}^{m} \ell_j +$ ess inf $R_m \leq \sum_{j=0}^{m} \ell_j$。令 $m \to \infty$，可得 ess inf $S \leq \sum_{j\geq 0} \ell_j$。若该和为 $-\infty$，则等式立即成立。否则，在一个概率为一事件上，对每个 j，都有 $S_m \to S$ 和 $\xi_j \geq \ell_j$。在 $S_m \geq \sum_{j=0}^{m} \ell_j$ 中取极限可得 $S \geq \sum_{j\geq 0} \ell_j$，从而得到 ess inf S 的反向不等式。加上常数 $\langle h, \mu \rangle$，即可证明 X_t 的本质下确界恒等式。

我们现在证明 (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i)。

(i) ⇒ (ii)。假设对于每个 $t \in \mathbb{Z}$，$X_t \in \mathcal{C}$ 几乎必然成立。固定 $h \in \mathcal{C}^*$ 以及任意 $t \in \mathbb{Z}$。根据$\mathcal{C}^*$的定义，$\langle h, X_t \rangle \geq 0$ 几乎必然成立。因此，ess inf$\langle h, X_t \rangle$ 的公式给出$\langle h, \mu \rangle + \sum_{j\geq 0} \kappa(a_j^* h) =$ ess inf$\langle h, X_t \rangle \geq 0$，这就是 (ii)。

(ii) ⇒ (iii)。固定 $m \geq 0$ 和 $x_0, \ldots\ldots, x_m \in \mathcal{K}$。对于每个 $h \in \mathcal{C}^*$，根据 κ 的定义，有$\langle a_j^* h, x_j \rangle \geq \kappa(a_j^* h)$。由于每个 $\kappa(a_j^* h) \leq 0$，这些值的有限部分和不小于它们的总和。因此，(ii) 蕴含

$$\langle h, \mu + \sum_{j=0}^{m} a_j x_j \rangle \geq \langle h, \mu \rangle + \sum_{j=0}^{m} \kappa(a_j^* h) \geq \langle h, \mu \rangle + \sum_{j\geq 0} \kappa(a_j^* h) \geq 0.$$

这些确定性不等式对每个 $h \in \mathcal{C}^*$都成立。因此，第 2 节回顾的对偶锥刻画给出 $\mu + \sum_{j=0}^{m} a_j x_j \in \mathcal{C}$，从而证明了 (iii)。

(iii) ⇒ (i)。固定 $t \in \mathbb{Z}$。由于 $\mathbb{P}(\varepsilon_0 \in \mathcal{K}) = 1$，由 (iii) 可知，对每个 $m \geq 0$，$\mu + \sum_{j=0}^{m} a_j \varepsilon_{t-j} \in \mathcal{C}$ 几乎必然成立。这些和在均方意义下收敛到 X_t，因此存在一个子序列几乎必然收敛到 X_t。由于每个部分和都几乎必然属于 $\mathcal{C}$，且 $\mathcal{C}$ 是闭集，因此 $X_t \in \mathcal{C}$ 几乎必然成立。■

定理 *2* 的证明。首先，假设 $X_t \in \mathcal{C}$ 几乎必然成立。由于 $\mathcal{C}$ 是闭且凸的，$\mu = \mathbb{E}(X_t) \in \mathcal{C}$。定理 1的条件 (ii) 给出，对于每个 $h \in \mathcal{C}^*$ 以及每个$j \geq 0$，$\kappa(a_j^* h) > -\infty$。因此，定义 1 蕴含 $\Sigma^{1/2} a_j^* h = 0$。由连续性，有界算子 $\Sigma^{1/2} a_j^*$在 span$\mathcal{C}^* =$lin$(\mathcal{C})^\perp$ 上为零，其中等式由 (2) 得出。取伴随算子即得(3)。

反之，设 $\mu \in$ C 且 (3) 成立。我们首先证明 $\varepsilon_0 \in$ ran $\Sigma^{1/2} =$ (ker $\Sigma)^\perp$几乎必然成立。取 ker Σ 的一个正交归一基 $\{g_k\}$。对于每个 k，$\mathbb{E}(g_k, \varepsilon_0^2) = g_k, \Sigma g_k = 0$，因此 $g_k, \varepsilon_0 = 0$ 几乎必然成立。取可数交可使这些等式对所有 k 同时成立，这意味着 ε_0 与 ker Σ 正交。由于同分布，对于每个创新项 ε_t 都有相同结论。对于任意 $x \in$ ran $\Sigma^{1/2}$，取 $z_n \in$ H 使得 $\Sigma^{1/2} z_n \to x$。由式 (3) 可知，对于每个 n，$a_j \Sigma^{1/2} z_n \in$ lin(C)。因此，根据 a_j 的连续性以及 lin(C) 的闭性，可得 $a_j x \in$lin(C)。

将此应用于创新项，可得对每个 j，$a_j \varepsilon_{t-j} \in$ 几乎必然属于 lin$(\mathcal{C})$。因此，这些项的每个有限和都属于 lin$(\mathcal{C})$。取一个几乎处处收敛子列，并利用 lin$(\mathcal{C})$ 的闭性，可得 $X_t - \mu \in$ lin$(\mathcal{C})$，从而 $X_t \in \mu +$ lin$(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$

几乎必然成立。取可数交，即可使这些结论对所有 $t \in \mathbb{Z}$ 和 $j \geq 0$ 同时成立。

最后，对于所有 $h \in \operatorname{lin}(\mathcal{C})^{\perp}$，都有 $\langle h, X_t - \mu \rangle = 0$ 几乎必然成立，因此 X_t 的协方差在 $\operatorname{lin}(\mathcal{C})^{\perp}$ 上为零。由自伴性可知，其值域包含于 $\operatorname{lin}(\mathcal{C})$。若 $\mathcal{C}$ 是尖锥，则 $\operatorname{lin}(\mathcal{C}) = \{0\}$，且 $X_t = \mu$ 几乎必然成立。■

定理1的条件（iii）允许在每个~滞后处取相同的创新支持值 $x \in \mathcal{K}$，从而得到 $\mu + F_m x \in \mathcal{C}$。除以 r_m 并取极限，可知 $F_\infty x$ 属于该锥。~ ~由于 $F_\infty \varepsilon_0$ 是中心化的，对于每个满足 $h \in \mathcal{C}^*$ 的 $\langle h, F_\infty \varepsilon_0 \rangle$，其值均非负且均值为零，因此必为零。这证明了该限制，无需对过程部分和使用极限定理。

定理 3 的证明。 首先，假设 $r_m^{-1} F_m \to \widetilde{F}_\infty$ 在算子范数下成立，其中 $r_m \to \infty$。回顾 $F_m = \sum_{j=0}^{m} a_j$。对于每个 $x \in \mathcal{K}$，将条件（iii）应用于 $x_0 = \cdots = x_m = x$，可得 $\mu + F_m x \in \mathcal{C}$。由于 $r_m > 0$，该锥包含 $r_m^{-1}\mu + r_m^{-1} F_m x$。由闭性可知~$F_\infty x \in \mathcal{C}$。

~ ~因此 $F_\infty \varepsilon_0 \in \mathcal{C}$ 几乎必然成立。对于每个 $h \in \mathcal{C}^*$，标量 $\langle h, F_\infty \varepsilon_0 \rangle$ 非负且均值为零，因此它几乎必然为零。其方差为 $\| \Sigma^{1/2} \widetilde{F}_\infty^{*} h \|^2 = 0$。由方程 (2) 并取伴随算子可得 (4)。

对于分数阶情形 (5)，取 $r_m = m^d$，其中 $m \geq 1$。由于 x^{d-1} 在 $[1, \infty)$ 上递减，$\int_1^{m+1} x^{d-1}\,dx \leq \sum_{j=1}^{m} j^{d-1} \leq 1 + \int_1^{m} x^{d-1}\,dx$。计算积分并除以 m^d，得 $m^{-d} \sum_{j=1}^{m} j^{d-1} \to 1/d$。给定 $\delta > 0$，选取 $J \geq 1$，使得对于 $j \geq J$，有 $\|R_j\|_{\mathrm{op}} \leq \delta j^{d-1}$。来自 $j < J$ 的贡献除以 m^d 后趋于零，而其余项的范数至多为 $\delta m^{-d} \sum_{j=J}^{m} j^{d-1}$。因此 $\limsup_{m \to \infty} \| m^{-d} \sum_{j=1}^{m} R_j \|_{\mathrm{op}} \leq \delta / d$。令 $\delta \downarrow 0$，得到 $m^{-d} \sum_{j=1}^{m} R_j \to 0$ 在算子范数下成立。由于 $m^{-d} a_0 \to 0$，可知 $m^{-d} F_m \to B/d$。在 $\widetilde{F}_\infty = B/d$ 下应用 (4)，得 $\operatorname{ran}(B\Sigma^{1/2}) \subseteq \operatorname{lin}(\mathcal{C})$，因为 $1/d \neq 0$。■

定理 4 的证明。固定 $h \in \mathbf{C}^*$，记 $x_t = \langle h, u_t \rangle$，并定义 $M_t^h = \inf_{n \geq 0} \sum_{s=1}^{n} x_{t+s}$ for $t \geq 0$，其中空和等于零。下确界取自一个可数集合，因此 M_t^h 关于 $\{u_{t+s}\}_{s \geq 1}$ 可测。由于 $Q_n \in \mathbf{C}$ 几乎必然成立，对于每个 $n \geq 0$，几乎必然有 $\sum_{s=1}^{n} x_s = \langle h, Q_n - Q_0 \rangle \geq \langle -h, Q_0 \rangle$。因此 $\langle -h, Q_0 \rangle \leq M_0^h \leq 0$，从而得到 $M_0^h \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{R}}$，以及 $\mathbb{E}\{(M_0^h)^2\} \leq \mathbb{E}\langle h, Q_0 \rangle^2$。

对于每个 t，M_t^h 可通过将相同的可测映射 $(y_s)_{s \geq 1} \mapsto \inf_{n \geq 0} \sum_{s=1}^{n} y_s$ 应用于 $(x_{t+s})_{s \geq 1}$ 得到。因此，$\{x_t\}$ 的严格平稳性意味着 $\{M_t^h\}$ 的严格平稳性。每个 M_t^h 的分布都与 M_0^h 相同，因此属于 $\mathbb{L}^2_{\mathbb{R}}$。

对于 $t \geq 1$，根据定义有 $M_{t-1}^h = \min(0,\ x_t + M_t^h) \leq x_t + M_t^h$。可积随机变量 $x_t + M_t^h - M_{t-1}^h$ 非负且均值为零，因为 $\mathbb{E}\langle x_t \rangle = 0$，并且 M_t^h和M_{t-1}^h具有相同的分布。因此，该变量几乎必然为零。于是 $x_t = M_{t-1}^h - M_t^h$，求和即可得到 (6)。最后，由平稳性可得 $\mathbb{E}\{(M_0^h - M_t^h)^2\} \leq 4\mathbb{E}\{(M_0^h)^2\}$，从而证明 (7)。■

推论 1 的证明。回顾 $S_T = \sum_{s=1}^{T} u_s$。对每个固定的 $h \in \mathsf{C}^*$，由 (7) 可得，在第 (i) 部分的归一化 $r_T \to \infty$ 下，$h, S_T/r_T \to 0$属于 $\mathbb{L}^2_{\mathbb{R}}$。若 $S_T/r_T \Rightarrow G$，对 $x \mapsto h, x$应用连续映射定理，可得 $h, G = 0$ 几乎必然成立。取 C^* 的一个可数稠密子集 $\{h_n\}_{n\geq 1}$。取可数交，便得到一个概率为一事件，在该事件上，对每个 n 都有 $h_n, G = 0$。在此事件上，利用 $h \mapsto h, G$ 的连续性，可将等式推广至每个$h \in \mathsf{C}^*$。由于对每个这样的 h，都有 $h, G = h, -G = 0$，闭凸锥的对偶刻画表明，G 和 $-G$ 均属于 C。因此，$G \in \mathsf{C} \cap (-\mathsf{C}) = \mathsf{C}$ 的线性包，且该结论几乎必然成立。

对于 (ii)，令 Λ 满足 (8)。同一界给出$\langle h, \Lambda h\rangle = 0$ 对每个 $h \in \mathcal{C}^*$均成立。Λ 的非负性意味着，对每个这样的 h都有 $\Lambda h = 0$。因此，闭线性子空间 $\ker \Lambda$包含 $\operatorname{span}\mathcal{C}^* = \operatorname{lin}(\mathcal{C})^{\perp}$。自伴性意味着 $\operatorname{ran} \Lambda \subseteq \operatorname{lin}(\mathcal{C})$，由此立即得到 $\operatorname{rank}\Lambda \leq \operatorname{cap}(\mathcal{C})$。■

定理 5 的证明使用以下引理。

引理 A.1 (可数表示)。设 $(S, \mathcal{A}, m)$ 是一个有限测度空间，且 $\{g_a : S \to \mathbb{R}\}_{a\in I}$ 是一个非空的可测函数族。存在一个可数集合$J \subseteq I$，使得

$$g := \operatorname*{ess\,sup}_{a\in I} g_a = \sup_{a\in J} g_a \qquad m\text{-}almost\ everywhere$$

引理 *A.1* 的证明。零测度情形是显然的。否则，将 m 归一化为概率测度。这保持零集不变，并且函数 g_a 是所得概率空间上的随机变量。令 $\Phi = \{\max_{a\in F} g_a : F \subseteq I,\ F \text{ 有限且非空}\}$。$\Phi$ 中的两个元素的最大值仍然是有限最大值，因此 Φ 是向上有向的（Föllmer 和 Schied，2016，定理 A.37）。通过取 $F = \{a\}$，每个 g_a 都属于 Φ。反之，如果对于每个 a几乎处处有 $\psi \geq g_a$，则对任意有限的 F 取最大值可得$\psi \geq \max_{a\in F} g_a$ 几乎处处成立。因此，Φ 与原函数族具有相同的几乎处处上界。根据 Föllmer 和 Schied（2016，附录 A.5，定理 A.37），它们的本质上确界 g 存在，并且存在一个递增序列 $h_n \in \Phi$，使得 $h_n \uparrow g$ 几乎处处成立。对于每个 n，将 $h_n = \max_{a\in F_n} g_a$ 写作有限集合 $F_n \subseteq I$的最大值。于是 $J = \bigcup_{n\geq 1} F_n$ 是可数的，并且 $g = \sup_{n\geq 1} h_n = \sup_{a\in J} g_a$ 几乎处处成立。■

定理 5 的证明。回忆第6节中的 $s_j = \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathcal{K}}(-(a_j x)')$。由引理 A.1，对于每个 j，我们可以选取 $x_{j,k} \in \mathsf{K}$，$k \geq 1$，使得 $x_{j,1} = 0$，并且满足 $s_j(u) = \sup_{k\geq 1}\{-(a_j x_{j,k})'(u)\}$ 几乎处处。对于 $n \geq 1$，令 $g_{j,n}(u) = \max_{1\leq k\leq n}\{-(a_j x_{j,k})'(u)\}$。因此，$g_{j,n}$ 是滞后 j 处前 n 个选定负导数中的最大值，并且 $0 \leq g_{j,n} \uparrow s_j$ 几乎处处。

首先，假设 $X_t \in \mathcal{Q}$ 几乎必然成立。固定 $m \geq 0$ 和 $n \geq 1$，并考虑 $x_j \in \{x_{j,1}, \ldots, x_{j,n}\}$ 对于 $j = 0, \ldots, m$的所有取值。定理1的条件（iii）对每一种此类取值都给出 $\mu + \sum_{j=0}^{m} a_j x_j \in \mathcal{Q}$。其局部绝对连续版本是非递减的，因此$\mu' \geq \sum_{j=0}^{m}(-(a_j x_j)')$几乎处处成立。对于固定的 m，n，$(x_0, \ldots, x_m)$至多有 n^{m+1} 种取值。因此，当 m, n 变化时，所涉及的导数不等式只有可数多个。

舍去一个勒贝格零测集后，我们可以取 u ，使得所有这些不等式均成立，所涉及的所有导数均有定义，并且对于每个 j，$g_{j,n}(u) \uparrow s_j(u)$。固定这样的 u和 $m \geq 0$。对于每个 $n \geq 1$ 以及每个 $j = 0, \ldots, m$，从 $\{x_j, 1, \ldots, x_{j,n}\}$ 中选取 x_j，使得$-(a_j x_j)'(u) = g_{j,n}(u)$。由于有限多个值中的最大值必能取得，这样的选取是存在的。对这些取值应用导数不等式，得到 $\mu'(u) \geq \sum_{j=0}^{m} g_{j,n}(u)$。固定 m，令 $n \to \infty$ 趋于无穷，得到 $\mu'(u) \geq \sum_{j=0}^{m} s_j(u)$。该不等式对于同一个 u处的每个 m 都成立。由于 $s_j \geq 0$，令 $m \to \infty$ 趋于无穷即可证明（10）中的斜率不等式。

反之，假设斜率不等式成立。固定 $m \geq 0$和 $x_0, \ldots\ldots, x_m \in \mathcal{K}$，并利用假设 2 中的局部绝对连续版本取 $q_m = \mu + \sum_{j=0}^{m} a_j x_j$。根据 s_j 的定义，对于每个选定的 x_j，有 $-(a_j x_j)' \leq s_j$ 几乎处处成立。因此，$q_m' = \mu' + \sum_{j=0}^{m} (a_j x_j)' \geq \mu' - \sum_{j=0}^{m} s_j \geq 0$ 几乎处处成立。对于任意 $0 < u < v < 1$，局部绝对连续性给出 $q_m(v) - q_m(u) = \int_u^v q_m'(w)\, \mathrm{d}w \geq 0$。因此， q_m的这一版本在 (0,1) 上是非递减的。由于 $q_m \in L^2(0, 1)$，它属于 $\mathcal{Q}$。这对每个有限的 m以及 $x_0, \ldots\ldots, x_m$的每一种取值都成立，因此定理1的条件（iii）给出 $X_t \in \mathcal{Q}$ 几乎必然成立。■

补充材料

以 S 为前缀的结果、方程、表格和章节属于补充材料；其他内容均指主论文。我们使用主论文中的记号和假设。

此外，记 $\mathbb{L}^2_{\mathcal{H}}$ 为定义在 $(\Omega, \mathcal{F}\ \mathbb{P})$ 上的 $\mathcal{H}$ 值随机元素 Y 的空间，其中 $\mathbb{E}(\|Y\|^2) < \infty$；记 $\mathbb{L}^2_{\mathbb{R}}$ 为具有有限二阶矩的实值随机变量空间。在假设 1 下，式 (1) 中的级数在 $\mathbb{L}^2_{\mathcal{H}}$ 中且几乎必然收敛：其部分和构成二阶矩一致有界的希尔伯特值鞅，且尾部方差趋于零。

S1 几何与仿射限制

本节是对主论文第 5 节的补充。表 S1 总结了定理 2 和推论 1 中的限制条件。这些例子分为三组。第一组是式 (9) 中的分位数锥$\mathcal{Q}$，主论文第 5 节对此进行了讨论，并位于表 S1 的第 1 行和第 2 行。第 5 节还指出，第二组中的锥是尖锥；具体细节如下所述。第三组，即凸函数，以及命题 S1 中的仿射限制，仅在本节中讨论。

（ii）非负函数与半正定算子

$L^2(0,\ 1)$ 中的非负锥是自对偶且尖的：$f \geq 0$ 和 $-f \geq 0$ 蕴含 $f = 0$几乎处处成立。概率密度还满足 $\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = 1$，这是一种仿射约束，将在下文的命题 S1 中处理。密度归一化对累积增量的影响将在注 S3 和 Beare（2017）中讨论。对于协方差算子，取实可分希尔伯特空间$\mathcal{G}$上自伴希尔伯特–施密特算子构成的希尔伯特空间。当 B 为半正定时，记作 $B \succeq 0$；当 $D - B \succeq 0$时，记作 $B \preceq D$。其半正定锥是闭且尖的：$B \succeq 0$ 和 $-B \succeq 0$ 蕴含 $B = 0$。取值于$\mathcal{G}$且平方可积的随机元素的协方差算子属于迹类，因此也属于该希尔伯特空间。

(iii) 凸函数

设 $\mathcal{C}_{\mathrm{cvx}}$ 为 $L^2(0,1)$ 中具有凸版本的函数所构成的闭锥，并记 $\iota(u) = u$。当且仅当函数为仿射函数时，该函数及其相反数才都为凸函数。因此，$\mathrm{lin}(\mathcal{C}_{\mathrm{cvx}}) = \mathrm{span}\{\mathbf{1}, \iota\}$，且 $\mathrm{cap}(\mathcal{C}_{\mathrm{cvx}}) = 2$。根据定理 2，随机性可以体现在截距和斜率上，而曲率保持不变。要求函数非递减，会使线性部分缩减为 $\mathrm{span}\{\mathbf{1}\}$。再加上非负性，便得到一个包含洛伦兹曲线的尖锥。定理 2 下产生的退化性并未将端点求值用作 L^2 上的连续线性泛函。秩二增量协方差界可以达到：令$\{A_t\}$ 和 $\{B_t\}$ 为从零开始的独立高斯随机游走，且各自具有独立的标准正态增量。于是 $Q_t(u) = u^2 + A_t + B_t u,\ t \geq 0$ 保持凸性。其中心化

表 S1：支配这些限制条件的几何结构。“平稳线性过程”列适用于定理 2。“增量协方差”列仅适用于推论 1 中的极限存在的情况。其中，c_t 和 d_t 是中心化标量线性过程，$\mathbf{1}(u) = 1$、$\iota(u) = u$，而 Λ 是长期协方差算子。

可容许表示	线性部分	平稳线性过程	增量协方差
1 实线上的分位数	跨度$\{\mathbf{1}\}$	$X_t = \mu + c_t\mathbf{1}$	秩 $\Lambda \le 1$
2 非负/中心化分位数	$\{0\}$	$X_t = \mu$	$\Lambda = 0$
3 非负函数（密度）	$\{0\}$	$X_t = \mu$	$\Lambda = 0$
4 半正定算子	$\{0\}$	$X_t = \mu$	$\Lambda = 0$
5 凸函数	张成$\{\mathbf{1}, \iota\}$	$X_t = \mu + c_t\mathbf{1} + d_t\iota$	秩 $\Lambda \le 2$
6 凸非减函数	span$\{\mathbf{1}\}$	$X_t = \mu + c_t\mathbf{1}$	秩 $\Lambda \le 1$
7 非负凸非减函数（包括洛伦兹曲线）	$\{0\}$	$X_t = \mu$	$\Lambda = 0$

独立平稳增量的长期协方差为 $\Lambda = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \iota \otimes \iota$，其秩为二，因为 $\mathbf{1}$ 和 ι 线性无关。

仿射限制

密度观测和具有固定均值的分位数，除了锥归属外，还施加了仿射限制。单位质量固定了密度积分，而给定的分布均值固定了分位数积分。下一个命题说明这些限制如何影响可容许性，以及它们如何消除锥所允许的随机方向。

命题 S1 (锥内的仿射约束)。 设 $p \ge 1$ 为整数，设 $B : H \to \mathbb{R}^p$ 为有界线性，设 $b \in \mathbb{R}^p$，且设 $D = \{x \in C : Bx = b\}$。在假设 *1* 下，$X_t \in D$ 几乎必然成立，当且仅当定理 *1(ii)* 中的支撑条件成立，并且

$$B\mu = b, \qquad Ba_j\Sigma^{1/2} = 0 \quad \textit{for every } j \ge 0. \tag{S1}$$

在无界下尾情形下（定义 *1*），$X_t - \mu \in \mathrm{lin}(C) \cap \ker B$ 几乎必然成立。在定理 *3* 的归一化收敛假设下，(S1) 对每个 m 都给出 $BF_m\Sigma^{1/2} = 0$，因此 $B\widetilde{F}_\infty\Sigma^{1/2} = 0$。结合 (4)，可得 $\mathrm{ran}(\widetilde{F}_\infty\Sigma^{1/2}) \subseteq \mathrm{lin}(C) \cap \ker B$。

在 $(0,1)$ 上，这些限制使用 $Bf = \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u$，其中密度的 $b = 1$，而分位数的 b 等于规定的均值。对于中心化分位数，$\mathrm{lin}(Q) \cap \ker B = \{0\}$，因此，具有无界下尾的加性模型是确定性的。对于交集，对于任意线性子空间 V，$\mathrm{lin}(C \cap V) = \mathrm{lin}(C) \cap V$；线性部分维数可能减少，但绝不会增加。仿射端点约束要求所处空间能够定义相关迹并保证其连续，或者要求对所选版本进行直接论证。

S2 关于创新支撑集与持续性的进一步结果

本节是对主论文第 2 节和第 3 节的补充。S2.1 节给出定理1的进一步推论，并讨论独立创新项的作用；S2.2 节讨论定义 1 和定理 2；S2.3 节则是对标量滤波器相关定理 3 的补充。

S2.1 支撑判据的推论

由于 $0 \in \mathcal{K}$，在定理1的条件（iii）中取 $m = 0$ 和 $x_0 = 0$，可得 $\mu \in \mathcal{C}$。这一刻画还给出了边界限制。若 $h \in \mathcal{C}^*$ 且 $\langle h, \mu \rangle = 0$，则条件（ii）迫使每个 $\kappa(a_j^* h)$ 都为零，因为它们均非正。因此，标量随机变量 $\langle h, a_j \varepsilon_0 \rangle$ 几乎必然非负且期望为零，所以对每个 j，它都几乎必然等于零。因此，在任何满足假设 1 的创新分布下，$\mu \in \mathrm{lin}(\mathcal{C})$ 都会迫使 $X_t - \mu \in \mathrm{lin}(\mathcal{C})$。

注 S1（创新独立性的作用）。独立性使标量项 $\langle h, a_j \varepsilon_{t-j} \rangle$ 的本质下界可以相加，从而得到条件（ii）中的和 $\sum_j \kappa(a_j^* h)$，并使该条件成为必要条件。若由边缘支撑集位于$\mathcal{K}$中的相关创新构造的滤波序列几乎必然收敛，则定理1的条件（iii）仍能确保可容许性。反过来则未必成立。举一个简单的反例，取$\mathcal{H} = \mathbb{R}$ 和$\mathcal{C} = [0, \infty)$，并令$\{\eta_t\}$ 为独立的拉德马赫变量。设 $\varepsilon_t = \eta_t - \eta_{t-1}$, $\mu = 2$,$a_0 = a_1 = \mathrm{Id}$，且 $a_j = 0$ 对于 $j \geq 2$。序列$\{\varepsilon_t\}$ 是中心化且 1-依赖的，并且

$$X_t = 2 + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} = 2 + \eta_t - \eta_{t-2} \in \{0, 2, 4\} \quad \text{almost surely}$$

因此，该过程可容许且非退化。然而，$\mathcal{K} = [-2, 2]$ 和 $\kappa(1) = -2$，因此条件 (ii) 不成立（在 $h = 1$ 处，$\langle h, \mu \rangle + \sum_{j \geq 0} \kappa(a_j^* h) = -2$）。

S2.2 无界下尾

若 $\Sigma^{1/2} g = 0$，则投影 $\langle g, \varepsilon_0 \rangle$ 的方差为零，且根据中心化，其均值为零。因此，$\langle g, \varepsilon_0 \rangle = 0$ 几乎必然成立，其本质下界 $\kappa(g)$ 为零。因此，该定义允许协方差退化。由于它同时适用于 g 和 $-g$，每个方差为正的 $\langle g, \varepsilon_0 \rangle$ 也都在上方无界。仅创新范数无界并不能推出该条件；在总创新方差为正的方向上存在退化的高斯分量也不能推出该条件。

例 S1（无界支撑仍可容许）。令 $\mathcal{H} = \mathbb{R}$、$\mathcal{C} = [0, \infty)$，且$\varepsilon_t = E_t - 1$ 具有 E_t 个相互独立的标准指数随机变量。对于 $a_j \geq 0$ 且 $\sum_j a_j < \infty$的情形，

当且仅当 $\mu \geq \sum_j a_j$时，该模型可容许。创新项上方无界，但下方有界。这是一个处于尖锥中的非退化过程，因此仅凭“创新项无界”不能取代定义 1。

S2.3 标量滤波器和持续性

注 S2（固定算子的标量倍数）。 标量系数序列和固定算子的标量倍数会出现在函数型局部 Whittle 方法中（Li、Robinson和Shang（2021）；Seo和Shang（2024））。如果 $a_j = b_j B$ 对于某个 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 在假设 1 和 $\sum_j |b_j| = \infty$下成立，则可容许性意味着 ran$(B\Sigma^{1/2}) \subseteq$ lin$(\mathcal{C})$，即使带符号的累积系数保持有界。事实上，如果对于某个 $h \in \mathcal{C}^*$，$Y = \langle h, B\varepsilon_0 \rangle$ 具有正方差，则中心化意味着 Y 以正概率取正值和负值。因此，存在某个 $c_h > 0$，使得对于每个 j均满足$\kappa(b_j B^* h) \leq -c_h |b_j|$。当 $\sum_j |b_j| = \infty$时， $B\varepsilon_t$ 在线性部分之外的变化会产生累积的负贡献，而任何固定均值都无法抵消这些贡献。因此，可容许性要求 $B\varepsilon_t$ 几乎必然位于线性部分中。由于每个系数都是B的标量倍数，整个中心化过程也位于其中；当锥为尖锥时，该过程为零。这适用于通常的标量分数阶滤波器，其权重对于 $0 < d < 1/2$具有 j^{d-1} 阶。更多细节见第 S7.1 节。

S3 关于具有平稳增量的过程的进一步结果

本节对主论文第 4 节作补充。S3.1 节讨论定理 4 的条件，S3.2 节说明推论 1 如何由该定理得出以及其第 (ii) 部分何时适用，S3.3 节讨论均值可能随时间变化的随机密度。

S3.1 定理 4 的条件

定理 4 中的中心化条件 $\mathbb{E}(u_1) = 0$ 至关重要。在 $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ 与 $\mathcal{C} = [0, \infty)$ 下，确定性增量 $u_t = 1$ 给出可容许水平 $Q_t = Q_0 + t$，尽管 lin$(\mathcal{C}) = \{0\}$。

该定理并未排除水平值的持续性。若$\{Q_t\}_{t \geq 0}$是任意取值于$\mathcal{C}$的严格平稳过程，且 $\mathbb{E}(\|Q_0\|^2) < \infty$，则增量 $u_t = Q_t - Q_{t-1}$ 是中心化且严格平稳的，并且无论 Q_t 的序列协方差衰减得多么缓慢， $S_T = Q_T - Q_0$ 都满足 $\mathbb{E}(\|S_T\|^2) \leq 4\mathbb{E}(\|Q_0\|^2)$。定理 4 限制的是增量的累积，而不是水平值之间的依赖性。

S3.2 从定理 4 到推论 1

对每个固定的 $h \in \mathsf{C}^*$，定理 4 中的 (7) 对 $\mathbb{E}(h, S_T^2)$ 关于 T 给出了统一界。因此，对于任意 $r_T \to \infty$，$h, S_T/r_T \to 0$ 属于 $\mathbb{L}^2_{\mathbb{R}}$，且 $T^{-1}\mathbb{E}(h, S_T^2) \to 0$。在推论 1 的 (i) 部分，第一个极限给出 $h, G = 0$ 几乎必然成立；在 (ii) 部分，第二个极限给出 $h, \Lambda h = 0$，进而得到 $\Lambda h = 0$，因为 Λ 是非负的。两者对每个 $h \in \mathsf{C}^*$ 均成立，而 (2) 随后将 G 和 $\operatorname{ran}\Lambda$ 限制在 C 的线性包内。(ii) 部分的秩界成立，是因为 $\operatorname{cap}(\mathsf{C}) = \dim \mathsf{C}$ 的线性包，这就是第 2 节定义的噪声容量。完整证明见主论文的附录 A。

推论 1 的第 (ii) 部分仅假设某个有界算子 Λ 满足 (8)；它并未断言这些极限存在。例如，如果 $\{u_t\}$ 的滞后协方差算子是绝对可和的，那么这些极限就存在于 $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ 中；此时它们的和是满足 (8) 的有界算子 Λ。

该论证仅使用固定 $h \in \mathcal{C}^*$ 的标量界限。它不要求对 $\mathbb{E}(\|PS_T\|^2)$ 存在界限，其中 P 是 $\operatorname{lin}(\mathcal{C})^{\perp}$ 上的正交投影。如果 $\operatorname{lin}(\mathcal{C})^{\perp}$ 是有限维的，则它由 $\mathcal{C}^*$ 中的有限多个元素张成，而 (7) 给出 $\sup_{T \geq 1} \mathbb{E}(\|PS_T\|^2) < \infty$。在无限维情形下，对于每个固定的 $\langle h, S_T \rangle$ 所得到的界限本身并不能推出这一范数界限。

S3.3 均值随时间变化的随机密度

注 S3（密度归一化）。设 $\{f_t\}_{t \geq 0}$ 是 $L^2(0,1)$ 中的随机概率密度，且 $\mathbb{E}(\|f_t\|^2) < \infty$，并令 $w_t = f_t - \mathbb{E}(f_t)$。均值 $\mathbb{E}(f_t)$ 可能随 t 变化，因此增量 $f_t - f_{t-1}$ 不一定是中心化的，定理 4 通常不适用于 $Q_t = f_t$。归一化则给出一个几乎处处成立的界。对于 $(0,1)$ 上的有界可测函数 h，回忆 $h, f_t = \int_0^1 h(u) f_t(u)\, \mathrm{d}u$。由于 $f_t \geq 0$ 且 $\int_0^1 f_t(u)\, \mathrm{d}u = 1$，$h, f_t$ 和 $h, \mathbb{E}(f_t)$ 均属于 $[-\|h\|_\infty, \|h\|_\infty]$，因此

$$|\langle h, w_T - w_0 \rangle| \leq 4\|h\|_\infty \quad \text{almost surely, for every } T \geq 1.$$

对于每个有界可测 h，所显示的界给出 $\langle h,\ w_T - w_0 \rangle / r_T \to 0$ 在 $\mathbb{L}^2_{\mathbb{R}}$ 中，只要 $r_T \to \infty$。如果 $(w_T - w_0)/r_T$ 在 $L^2(0,\ 1)$ 中弱收敛到 G，则可推出 $\langle h,\ G \rangle = 0$ 几乎必然对每个这样的 h 成立。有界可测函数在 $L^2(0,\ 1)$ 中稠密，因此 $G = 0$ 几乎必然成立。如果 Λ 满足带有 $S_T = w_T - w_0$ 的条件 (8)，则同一界对每个有界可测 h 给出 $\langle h,\ \Lambda h \rangle = 0$，而连续性给出 $\Lambda = 0$。这两个结论都不需要平稳增量、线性滤波器或高斯极限。Beare（2017）利用密度归一化表明，Chang、Kim 和 Park（2016）的线性增量设定无法容纳随机趋势。上述界对任意平方可积随机密度都给出了相同的限制。

S4 分位数过程的进一步结果

本节是对主论文第6节的补充。S4.1节解释定理 5中的斜率条件，S4.2节重新讨论例 1，S4.3 节则将该例扩展到多个形状方向。

S4.1 斜率条件的解释

若分位数函数为 μ 的分布具有正密度 f_μ，则在反函数关系适用的地方，$\mu'(u) = 1/f_\mu(\mu(u))$。这里，$f_\mu$ 是与 μ对应的密度，而不是 X_t所表示的密度的平均值。方程 (10) 允许在密度倒数较大的区域出现更大的向下导数扰动。这些区域不一定局限于尾部。

平坦分位数区间对应于所表示分布中的一个点质量。若$\mu(u) = c$ 在区间 $I \subset (0, 1)$ 上，则 (10) 要求对每个j，在 I 上几乎处处有 $s_j = 0$ 。可容许的 X_t 还必须在整个 I 上保持常数，但该值可以随 t变化。例如，若 $\{L_t\}$ 是一个中心化平方可积标量线性过程，则 $X_t = \mu + L_t\mathbf{1}$ 仍是分位数，并且在 I 上等于 $c + L_t$。因此，即使分位数在 I上保持平坦，点质量的位置仍可能发生变化。

(10) 中的斜率判据依赖于局部绝对连续性：若没有这一条件，几乎处处非负的导数未必意味着单调性。定理1中的一般支撑集刻画不需要这一假设。

S4.2 具有一个形状方向的自回归分位数过程

主论文中的例 1 取均匀分布分位数函数 $\mu(u) = u$ ，并加入一个随机形状方向 $v(u) = u(1 - u)$：

$$X_t(u) = u + Z_t u(1 - u), \qquad Z_t = \lambda \sum_{j \geq 0} \rho^j \eta_{t-j},$$

其中，η_t 相互独立且同分布、中心化，具有正方差，并且$|\eta_t| \leq 1$，且 $\lambda > 0$、$|\rho| < 1$。由于 $v(0) = v(1) = 0$，每个实现都从 0 延伸至 1，因此所有所表示的分布都落在 $[0, 1]$上。导数 $X_t'(u) = 1 + Z_t(1 - 2u)$关于 u呈线性，其在两个端点处的值分别为 $1 + Z_t$ 和 $1 - Z_t$。因此，当且仅当 $|Z_t| \leq 1$时，一个实现是非递减的。正的 Z_t 使 X_t 呈凹形，因此所表示的密度 $1/X_t'\{X_t^{-1}(x)\}$随 x 增加，且概率质量向 1 移动；负的 Z_t 则使概率质量向 0 移动。当 $|Z_t| = 1$时，斜率在一个端点处为零，密度在该处无界。

因此，可容许性取决于 $|Z_t|$ 能有多大。由于 $|\eta_t| \leq 1$，我们有$|Z_t| \leq \lambda \sum_{j \geq 0} |\rho|^j = \lambda/(1 - |\rho|)$，所以无论 η_t 的分布律如何，$\lambda \leq 1 - |\rho|$ 都足够。在端点条件 ess inf $\eta_0 = -1$ 和 ess sup $\eta_0 = 1$ 下，这一界是紧的。对于每个

m， η_{t-j} 与 ρ^j 的符号在 $j=0$、……、m 处接近这一事件具有正概率，其余各项的绝对值之和至多为 $\lambda|\rho|^{m+1}/(1-|\rho|)$。因此 ess sup $Z_t = \lambda/(1-|\rho|)$，而反转符号可得 ess inf $Z_t = -\lambda/(1-|\rho|)$。斜率判据给出了相同的边界：这里 $s_j(u) = \lambda|\rho|^j|1-2u|$，因此式（10）对几乎处处的 u 读作 $\lambda|1-2u| \le 1-|\rho|$，并且当 u 趋近于 0 或 1 时，约束达到等号。

主论文的图1绘出了两个支撑极值 $q_\pm(u) = u \pm \{\lambda/(1-|\rho|)\}u(1-u)$。$X_t$ 的每个实现都位于二者之间；在端点条件下，以正概率可以任意接近这两个极值中的任意一个。它们是确定性界，而非模拟路径。在左图中，$\rho = 0.6$ 和 $\lambda = 0.3$，因此 $\lambda/(1-|\rho|) = 0.75$。两个极值都是非递减的，每个实现也都是如此。在右图中，$\lambda = 1.2$ 给出$\lambda/(1-|\rho|) = 3$。于是，q_- 在 $(0,\ 1/3)$ 上递减，并且 q_+ 在 $(2/3,\ 1)$ 上递减。接近任一极值的实现都不是分位数函数，且它们以正概率出现，因此该模型不可容许。端点附近的单调性遭到破坏，因为形状方向的斜率 $|v'(u)| = |1-2u|$ 相对于均值斜率 $\mu'(u) = 1$ 最大。

边界 $\lambda \le 1-|\rho|$ 将冲击幅度与持续性联系起来：固定 λ时，随着 $|\rho|$ 增大，极值范围会扩大，因此，持续性更强的动力学只容许幅度更小的冲击。由于 $\mathrm{var}(Z_t) = \lambda^2\,\mathrm{var}(\eta_0)/(1-\rho^2) \le \lambda^2/(1-\rho^2)$，在$0 \le \rho < 1$ 下满足端点条件的可容许性要求 $\mathrm{var}(Z_t) \le (1-\rho)/(1+\rho)$，当 $\rho \to 1$时，该值趋于零。 Z_t的支撑集不一定覆盖其极值之间的整个区间。对于拉德马赫 η_t，Z_t/λ 服从参数为 $|\rho|$的对称伯努利卷积分布；而当 $|\rho| < 1/2$ 时，其支撑集是一个康托尔集（Peres、Schlag 和 Solomyak，2000）。对于可容许性而言，只有极值才重要。

S4.3 多种形状方向下的分位数过程

S4.2节中的过程只有一个形状方向。命题 S2 将这一构造扩展到可数族形状方向，并使用系数 $a_j = \lambda\rho^j\mathrm{Id}$ 和可求和导数界。它表明，可容许形状变化的创新项协方差算子和过程协方差算子可以具有无限秩。

命题 S2（有界创新项的形状动力学）。设 μ 如假设 *2* 所述，且 $\mu' \ge c > 0$ 几乎处处。设 v_k 在 $[0,1]$, 上绝对连续，满足 $v_k(0) = 0$，并遵循 $V = \sum_{k\ge1}\|v_k'\|_\infty < \infty$。设 $\eta_{t,\,k}$ 在 t 上相互独立，在 t 上对每个 k同分布、中心化、绝对值不超过一且具有正方差。令

$$\varepsilon_t = \sum_{k\ge1}\eta_{t,k}v_k, \qquad a_j = \lambda\rho^j\,\mathrm{Id}, \qquad \lambda > 0, \quad |\rho| < 1. \tag{S2}$$

若 $\lambda V \le c\,(1-|\rho|)$，则该模型满足假设 *1*，且几乎必然为分位数值。若无穷多个 v_k 线性无关，则过程协方差的秩为无限。

对于这一构造，$s_j \le \lambda|\rho|^j V$，因此定理 5 给出了所述界限下的可容许性。取 $\mu(u) = u$, $v_1(u) = u(1-u)$，以及对于 $k \ge 2$ 的 $v_k = 0$，即可得到例 1，其中取

$\eta_{t,\,1} = \eta_t$。通过取 $\mu(u) = u$、如命题所述的系数 $\eta_{t,\,k}$，例如独立的拉德马赫变量，以及$v_k(u) = 2^{-k}(2\pi k)^{-1}\sin(2\pi k u)$，可以构造无限维的可容许过程。这里 $V = 1$，因此 $\lambda \le 1 - |\rho|$ 保证了可容许性。由于函数 v_k 线性无关，创新协方差和过程协方差的秩均为无限。另一种选择是标准正态分位数，它具有 $\mu' \ge \sqrt{2\pi}$，并满足 $\lambda V \le \sqrt{2\pi}(1 - |\rho|)$。这两种构造都不会自动使形状变化集中在特定的分位数区域。

S5 一般锥的可容许动力学

本节扩展主论文的第 7 节。现在，我们为一般闭凸锥 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$构造具有有界创新项的可容许加性动力学。回顾第 2 节，$\mathcal{K}$ 是创新支撑集的闭凸包，而 a_j 是系数算子。我们给出一个充分条件，用于比较 $|\langle h, a_j x\rangle|$ 与 $\langle h, \mu\rangle$ 在 $x \in \mathcal{K}$ 和$h \in \mathcal{C}^*$上的情形，随后将其应用于密度、协方差矩阵和分位数。

许多相关的锥在其希尔伯特空间中空内部。回顾一下，$L^2(0,1)$由平方可积函数组成，其中 $\|f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f(u)|^2 \,\mathrm{d}u$。在足够短的区间上发生较大变化，范数 L^2 仍可能很小，却会违反非负性或单调性。因此，非负锥和分位数锥不包含任何开 L^2 球。对于有限维空间中的正定矩阵，足够小的扰动仍能保持正定性。

对于 $\mu \in \mathcal{C}$ 和 $v \in \mathcal{H}$，定义

$$p_\mu(v) = \sup_{h \in \mathcal{C}^*} \frac{|\langle h, v\rangle|}{\langle h, \mu\rangle}, \tag{S3}$$

其中 $0/0 = 0$ 且正数除以零为 ∞。对于每个 $h \in \mathcal{C}^*$，该比值比较变化量 $|\langle h, v\rangle|$ 与均值 $\langle h, \mu\rangle$。应用第 2 节（Bauschke 和 Combettes，2017年，第 6.3 节）中回顾的对偶锥刻画，得到

$$p_\mu(v) \le 1 \iff \mu + v, \mu - v \in \mathcal{C}, \qquad \{v : p_\mu(v) = 0\} = \mathrm{lin}(\mathcal{C}). \tag{S4}$$

第二个恒等式成立，是因为 $p_\mu(v) = 0$ 等价于 (S3) 中所有分子 $|\langle h, v\rangle|$均为零，而 (2) 表明这些分子构成 $\mathrm{lin}(\mathcal{C})$。在其有限值定义域上，$p_\mu$ 满足 $p_\mu(\alpha v) = |\alpha| p_\mu(v)$，其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 且 $p_\mu(v + w) \le p_\mu(v) + p_\mu(w)$。特别地，$\{v \in \mathcal{H} : p_\mu(v) < \infty\}$ 是一个线性子空间。这些性质以及 (S4) 在 S7.2 节中得到证明。

命题 S3（相对扰动判据）。假设 *1* 成立且 $\mu \in \mathcal{C}$。令 $r_j = \text{上确界}_{x \in \mathcal{K}} p_\mu(a_j x)$。如果 $\sum_{j \ge 0} r_j \le 1$，则 $X_t \in \mathcal{C}$ 几乎必然成立。对于满足以下条件的相关创新，结论同样成立：对每个 t，$\varepsilon_t \in \mathcal{K}$ 几乎必然成立，并且当 $m \to \infty$ 时，$\mu + \sum_{j=0}^{m} a_j \varepsilon_{t-j} \to X_t$ 几乎必然属于 $\mathcal{H}$。

这一充分条件可能较为保守，因为对 $h \in \mathcal{C}^*$ 的上确界是在每个滞后处分别取得的。确切判据是定理1的条件（ii）。均值 μ 不必是 $\mathcal{C}$ 的内点：该充分条件控制所指定的扰动 $a_j x$，而不要求 μ 在希尔伯特范数下的每个充分小扰动都仍属于 $\mathcal{C}$。然而，并非每个均值都允许非退化变异：如果 $\mu = 0$ 且 $\mathcal{C}$ 是尖锥，则即使创新项有界，可容许性也迫使 $X_t = 0$ 几乎必然成立。

以下示例将命题 S3 应用于密度、协方差矩阵和分位数模型。

例 S2（密度）。取 $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$，令 $\mathcal{C}$ 为其非负锥。令 $\mu \in \mathcal{C}$ 为一个密度。在这种情况下，

$$p_\mu(v) = \operatorname*{ess\,sup}_{u \in (0,1)} \frac{|v(u)|}{\mu(u)}, \tag{S5}$$

采用相同的零分母约定。(S5) 的推导见 S7.2 节。设创新项独立同分布、中心化、平方可积、积分为零，并且对某个有限的 $R \geq 0$，几乎处处、几乎必然满足 $|\varepsilon_t(u)| \leq R\mu(u)$。对于 $a_j = \lambda \rho^j \mathrm{Id}$，在 $\lambda > 0$ 和 $|\rho| < 1$ 的条件下，命题 S3 给出一个取值为密度的过程，只要 $\lambda R \leq 1 - |\rho|$。特别地，取 $\mu(u) = 1$ 和 $\varepsilon_t(u) = \eta_t(2u - 1)$，其中 η_t 为独立的拉德马赫变量。令 $Z_t = \lambda \sum_{j \geq 0} \rho^j \eta_{t-j}$ 如例 1 中所示，则该模型为 $X_t(u) = 1 + Z_t(2u - 1)$。当且仅当 $\lambda \leq 1 - |\rho|$ 时，它几乎必然取值为密度；尽管非负锥是尖锥，但该模型仍是非退化的。因此，定理 2 中关于无界下尾的假设不可省略。这些结论将在 S7.2 节中得到验证。

例 S3（协方差矩阵）。设 $\mathcal{H}$ 为实对称 $p \times p$ 矩阵组成的空间，其内积为 $\langle B, D \rangle = \operatorname{tr}(BD)$，并设 $\mathcal{C}$ 为其半正定锥。对于正定均值 $\mu = M$，

$$p_M(B) = \|M^{-1/2} B M^{-1/2}\|_{\mathrm{op}}, \tag{S6}$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ 是作用于 $\mathbb{R}^p$ 上的矩阵的算子范数。设 $\{D_t\}$ 为中心化的独立同分布对称矩阵，且 $\|D_t\|_{\mathrm{op}} \leq R < \infty$ 几乎必然。令 $\varepsilon_t = M^{1/2} D_t M^{1/2}$ 和 $a_j = \lambda \rho^j \mathrm{Id}$，其中 $\lambda > 0$ 且 $|\rho| < 1$。命题 S3 保证当 $\lambda R \leq 1 - |\rho|$ 时 $X_t \succeq 0$ 几乎必然。取 $D_t = \eta_t D$ 为独立的拉德马赫变量 η_t 以及一个固定的非零对称矩阵 D，即可得到满足 $R = \|D\|_{\mathrm{op}}$ 的非退化示例。相关公式和构造见 S7.2 节。

例 S4（分位数）。取 $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$ 和 $\mathcal{C} = \mathcal{Q}$，即（9）中的分位数锥。如果 $\mu \in \mathcal{Q}$ 和 $v \in L^2(0, 1)$ 具有局部绝对连续版本，则

$$p_\mu(v) = \operatorname*{ess\,sup}_{u \in (0,1)} \frac{|v'(u)|}{\mu'(u)}, \tag{S7}$$

采用相同的零分母约定。常数满足 $p_\mu(v) = 0$。(S7) 的推导见 S7.2 节。

因此，命题 S3 给出了充分条件：分位数的导数界、密度的逐点界，以及协方差矩阵的矩阵不等式。

S6 证明

本节证明补充材料中陈述的结果；主论文中的结果在其附录 A 中证明。我们使用创新支撑集 $\mathcal{K} = \mathrm{conv}(\mathrm{supp}\,\varepsilon_0)$、其下支撑泛函 $\kappa(g) = \inf_{x\in\mathcal{K}}\langle g, x\rangle$，以及第 2 节中的创新协方差 Σ。

命题 *S1* 的证明。回忆 $D = \{x \in \mathcal{C} : Bx = b\}$，其中 $B : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^p$ 是有界线性。假设 $BX_t = b$ 几乎必然成立。取期望可得 $B\mu = b$，因此 $BX_t - B\mu = 0$几乎必然成立。对每个有限 m，由独立性和中心化可得 $\mathbb{E}(\langle Ba_j\varepsilon_{t-j}, Ba_k\varepsilon_{t-k}\rangle) = 0$，只要 $j \neq k$。因此，展开平方范数可得

$$\mathbb{E}(\|\sum_{j=0}^{m} Ba_j\varepsilon_{t-j}\|^2) = \sum_{j=0}^{m}\mathbb{E}(\|Ba_j\varepsilon_0\|^2).$$

由于 B 有界，左侧的有限和在均方意义下收敛到 $BX_t - B\mu$。令 $m \to \infty$，得到 $0 = \mathbb{E}(\|BX_t - B\mu\|^2) = \sum_{j\geq 0}\mathbb{E}(\|Ba_j\varepsilon_0\|^2)$。每一项均非负，因此 $\mathbb{E}(\|Ba_j\varepsilon_0\|^2) = 0$，从而对每个 j，$Ba_j\varepsilon_0 = 0$ 几乎必然成立。对于$q \in \mathbb{R}^p$，$\mathbb{E}(\langle q, Ba_j\varepsilon_0\rangle^2) = \|\Sigma^{1/2}a_j^*B^*q\|^2$，所以这等价于对每个 j，$Ba_j\Sigma^{1/2} = 0$ 成立。反过来，这些算子恒等式意味着对每个 j，$Ba_j\varepsilon_{t-j} = 0$ 几乎必然成立，或者等价地$a_j\varepsilon_{t-j} \in \ker B$。由 B 的连续性以及级数的收敛性，可得 $BX_t = B\mu = b$。结合这一等价关系与定理1，可证明对 $X_t \in D$的刻画。

在无界下尾的情况下，定理 2 给出 $X_t - \mu \in \mathrm{lin}(\mathcal{C})$ 几乎必然成立。由于$B(X_t - \mu) = 0$，我们得到 $X_t - \mu \in \mathrm{lin}(\mathcal{C}) \cap \ker B$。最后，(S1) 蕴含 $BF_m\Sigma^{1/2} = 0$ 对每个 m均成立。若 $r_m^{-1}F_m \to \widetilde{F}_\infty$ 在算子范数下成立，则由连续性可得 $B\widetilde{F}_\infty\Sigma^{1/2} = 0$。结合 (4)，这证明了 $\mathrm{ran}(\widetilde{F}_\infty\Sigma^{1/2}) \subseteq \mathrm{lin}(\mathcal{C}) \cap \ker B$。■

命题 *S2* 的证明。回顾 $V = \sum_{k\geq 1}\|v_k'\|_\infty$ 以及 $a_j = \lambda\rho^j\mathrm{Id}$。由于 v_k 是绝对连续的，且 $v_k(0) = 0$，我们有 $v_k(u) = \int_0^u v_k'(w)\,\mathrm{d}w$。因此，对于 $u \in [0,1]$，$|v_k(u)| \leq u\|v_k'\|_\infty \leq \|v_k'\|_\infty$，从而得到 $\|v_k\|_\infty \leq \|v_k'\|_\infty$。由于$|\eta_{t,\,k}| \leq 1$ 以及 $\|v_k\|_\infty \leq \|v_k'\|_\infty$，创新部分和满足

$$\sup_{u\in[0,1]}\left|\varepsilon_t(u) - \sum_{k=1}^{N}\eta_{t,k}v_k(u)\right| \leq \sum_{k>N}\|v_k'\|_\infty \to 0.$$

因此，它们的近似误差在 u 和 $\|\varepsilon_t\| \leq \|\varepsilon_t\|_\infty \leq V$ 上一致趋于零。此外，$\sum_{k\geq 1}|\eta_{t,\,k}v_k'(w)| \leq V$对几乎处处的 w 成立。定义 $d_t(w) = \sum_{k\geq 1}\eta_{t,\,k}v_k'(w)$，则 $|d_t(w)| \leq V$几乎处处成立。由于 $v_k(u) = \int_0^u v_k'(w)\,\mathrm{d}w$，由控制收敛定理可得 $\varepsilon_t(u) = \int_0^u d_t(w)\,\mathrm{d}w$。因此，$\varepsilon_t$ 绝对连续，$\varepsilon_t' = d_t$ 几乎处处成立，且$\|\varepsilon_t'\|_\infty \leq V$ 几乎必然成立。关于 $\eta_{t,\,k}$ 的假设以及控制收敛定理表明

创新项独立同分布且中心化。此外，$\sum_{j\ge 0}\mathbb{E}(\|a_j\varepsilon_0\|^2) = \lambda^2\mathbb{E}(\|\varepsilon_0\|^2)/(1-\rho^2) < \infty$，从而证明假设 1。

对于每个 $m \ge 0$，置 $q_{t,\,m} = \mu + \lambda\sum_{j=0}^{m}\rho^j\varepsilon_{t-j}$。由于 μ 是局部绝对连续的，且每个 ε_{t-j} 都是绝对连续的，因此 $q_{t,\,m}$ 具有局部绝对连续版本。利用$\mu' \ge c$和 $|\varepsilon'_{t-j}(u)| \le V$，我们得到 $q'_{t,\,m}(u) = \mu'(u) + \lambda\sum_{j=0}^{m}\rho^j\varepsilon'_{t-j}(u) \ge c - \lambda V\sum_{j=0}^{m}|\rho|^j \ge c-\lambda V/(1-|\rho|) \ge 0$几乎处处、几乎必然成立。因此，该版本是非递减的，所以 $q_{t,\,m} \in \mathcal{Q}$ 几乎必然成立。假设 1 给出 $q_{t,\,m} \to X_t$ 在 $L^2(0,\,1)$ 中几乎必然成立。由于$\mathcal{Q}$是闭集，$X_t \in \mathcal{Q}$ 几乎必然成立。

系数的独立性和中心化给出 $\langle g,\ \Sigma g\rangle = \sum_{k\ge 1}\mathrm{var}(\eta_{0,\,k})\langle g,\ v_k\rangle^2$ 对于每个$g \in L^2(0,\,1)$均成立。由于每个 $\mathrm{var}(\eta_{0,\,k})$ 都为正，该和为零当且仅当 $\langle g,\ v_k\rangle = 0$ 对每个 k均成立。因此 $\ker\Sigma = (\mathrm{span}\{v_k : k \ge 1\})^{\perp}$。如果有无穷多个 v_k 线性无关，则Σ 具有无限秩。过程协方差为 $\lambda^2(1-\rho^2)^{-1}\Sigma$，因此具有相同的秩。■

命题 S3 的证明。回顾 $r_j = \sup_{x\in\mathcal{K}} p_\mu(a_j x)$。由于 $\sum_{j\ge 0} r_j \le 1$，每个 r_j都是有限的。固定$j \ge 0$、$x \in \mathsf{K}$和 $h \in \mathsf{C}^*$。根据定义，有 $p_\mu(a_j x) \le r_j$。若 $h,\mu > 0$，则 (S3) 中的比值至多为 r_j，因此 $|h, a_j x| \le r_j h,\mu$。若 $h,\mu = 0$，则根据 $p_\mu(a_j x)$ 的有限性，依据零分母约定，必有 $h, a_j x = 0$，从而 $|h, a_j x| \le r_j h, \mu = 0$。

对于每个 $m \ge 0$ 以及每个 x_0、……、$x_m \in \mathcal{K}$，可得

$$\langle h, \mu + \sum_{j=0}^{m} a_j x_j\rangle \ge \langle h,\mu\rangle - \sum_{j=0}^{m}|\langle h, a_j x_j\rangle| \ge \Big(1 - \sum_{j=0}^{m} r_j\Big)\langle h,\mu\rangle \ge 0.$$

这对每个 $h \in \mathcal{C}^*$ 都成立，因此第 2 节中的对偶锥刻画给出 $\mu+\sum_{j=0}^{m} a_j x_j \in \mathcal{C}$。这就是定理 1的条件（iii），由此可得 $X_t \in \mathcal{C}$ 几乎必然成立。

对于任意的 $\mu + \sum_{j=0}^{m} a_j x_j \in \mathcal{C}$ $x_0, \ldots, x_m \in \mathcal{K}$，推导结论时并未使用独立性。对于满足以下条件的相关创新：对每个 s，几乎必然有 $\varepsilon_s \in \mathcal{K}$，代入 $x_j = \varepsilon_{t-j}$ 后，因此可得对每个 m，$\mu + \sum_{j=0}^{m} a_j\varepsilon_{t-j} \in \mathcal{C}$ 几乎必然成立。若不再假设独立性，仅有假设 1中的二阶矩可和条件未必能保证这些部分和收敛。因此，在相关情形下，需另行假设这些部分和几乎必然收敛到$\mathcal{H}$中的 X_t。在部分和对每个 m 都属于$\mathcal{C}$ 且在$\mathcal{H}$ 中收敛到 X_t的概率为一事件上，由$\mathcal{C}$ 的闭性可知$X_t \in \mathcal{C}$。■

S7 辅助结果与补充讨论

本节给出注 S2 的详细内容以及 S5 节的推导。定理 5 的证明中使用的可数表示是主论文中的引理 A.1。

S7.1 固定算子的标量倍数（备注S2）

对于注 S2 中的模型 $a_j = b_j B$，我们解释为何在可容许性条件下，$\sum_{j\ge 0}|b_j| = \infty$ 会使 $\mathrm{ran}(B\Sigma^{1/2}) \subseteq \mathrm{lin}(\mathcal{C})$。该论证不要求带符号和 $\sum_{j=0}^{m} b_j$ 发散。

固定 $h \in \mathcal{C}^*$，并令 $Y = \langle h, B\varepsilon_0\rangle$。若 $\mathrm{var}(Y) > 0$，则中心化意味着 Y 以正概率取正值和负值。选择 $c_h > 0$ 使得 $\mathbb{P}(Y < -c_h) > 0$ 且 $\mathbb{P}(Y > c_h) > 0$。当 $b_j > 0$ 时，在 $\{Y < -c_h\}$ 上；当 $b_j < 0$ 时，在 $\{Y > c_h\}$ 上，我们有 $b_j Y < -c_h|b_j|$。因此，对于每个 j，$\kappa(b_j B^* h) = \operatorname{ess\,inf}(b_j Y) \le -c_h|b_j|$，且在 $b_j = 0$ 处取等号。由于 $\sum_{j\ge 0}|b_j| = \infty$，可推出 $\sum_{j\ge 0}\kappa(b_j B^* h) = -\infty$，这与定理1的条件(ii)矛盾。

因此，对于每个 $h \in \mathcal{C}^*$，$\mathrm{var}(Y) = \|\Sigma^{1/2} B^* h\|^2 = 0$。式(2)、连续性以及取伴随算子给出 $\mathrm{ran}(B\Sigma^{1/2}) \subseteq \mathrm{lin}(\mathcal{C})$。由于 Y 是中心化的，对于每个 $h \in \mathcal{C}^*$，我们还有 $\langle h, B\varepsilon_0\rangle = 0$ 几乎必然成立。取 $\mathcal{C}^*$ 的一个可数稠密子集，并利用连续性延拓，可得 $B\varepsilon_0 \in (\mathcal{C}^*)^{\perp} = \mathrm{lin}(\mathcal{C})$ 几乎必然成立。因此，每个 $a_j\varepsilon_{t-j} = b_j B\varepsilon_{t-j}$ 几乎必然属于 $\mathrm{lin}(\mathcal{C})$，其收敛和也几乎必然属于该空间。若 $\mathcal{C}$ 是尖锥，则这给出 $X_t = \mu$ 几乎必然成立。

S7.2 一般锥的公式与构造

我们证明 p_μ 的性质以及示例 S2、S3 和 S4 中的公式与构造。回顾 (S3) 及其零分母约定。

对于 $r \ge 0$，根据定义，当且仅当对每个 $h \in \mathsf{C}^*$ 都有 $p_\mu(v) \le r$ $\langle h, v\rangle \le r\langle h, \mu\rangle$。当 $\langle h, \mu\rangle = 0$ 时，这两个条件都要求 $\langle h, v\rangle = 0$。根据第 2 节中的对偶锥刻画，这些不等式等价于 $r\mu + v$，$r\mu - v \in \mathsf{C}$。取 $r = 1$ 即可证明 (S4) 中的第一个恒等式；取 $r = 0$ 可得，根据 (2)，当且仅当 $p_\mu(v) = 0$ $v \in (\mathsf{C}^*)^{\perp} = \mathsf{C}$ 的线性包时，$p_\mu(v) = 0$。

对于 v，w 在 p_μ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$ 有限时，由定义和标量三角不等式可得 $p_\mu(\alpha v) = |\alpha| p_\mu(v)$，以及 $p_\mu(v+w) \le p_\mu(v) + p_\mu(w)$。因此，$\{v\colon p_\mu(v) < \infty\}$ 是一个线性子空间。

密度和协方差矩阵构造都使用 $a_j = \lambda\rho^j \mathrm{Id}$，其中 $\lambda > 0$ 和 $|\rho| < 1$。对于中心化、独立同分布的平方可积创新项，假设 1 由 $\sum_{j\ge 0}\mathbb{E}(\|a_j\varepsilon_0\|^2) = \lambda^2\mathbb{E}(\|\varepsilon_0\|^2)/(1-\rho^2) < \infty$ 推出。若对于某个有限的 $R \ge 0$，$p_\mu(\varepsilon_0) \le R$ 几乎必然成立，则闭凸集 $\{v\colon R\mu + v,\ R\mu - v \in \mathcal{C}\}$ 包含 $\mathcal{K}$。因此，对于 $x \in \mathcal{K}$，$p_\mu(x) \le R$，从而得到 $r_j \le \lambda|\rho|^j R$ 和 $\sum_j r_j \le \lambda R/(1-|\rho|)$。因此，当 $\lambda R \le 1 - |\rho|$ 时，命题 S3 适用。

密度

对于 $L^2(0,1)$ 中的非负锥，$r\mu + v$，$r\mu - v \in \mathcal{C}$ 表示 $r\mu(u) + v(u) \ge 0$ 且 $r\mu(u) - v(u) \ge 0$ 几乎处处成立。这些不等式等价于 $-r\mu(u) \le v(u) \le r\mu(u)$ 几乎处处成立。因此，一般刻画给出：$p_\mu(v) \le r$ 当且仅当

$|v| \le r\mu$ 几乎处处成立。对 $r \ge 0$ 取下确界可得 (S5)。在 $\{\mu = 0\}$ 上，任何有限界都要求 $v = 0$ 几乎处处成立，这一点已由分母约定编码。

例 S2 中的界 $|\varepsilon_t| \le R\mu$ 表明 $p_\mu(\varepsilon_t) \le R$ 几乎必然，因此当 $\lambda R \le 1 - |\rho|$ 时，命题 S3 推出 $X_t \ge 0$ 几乎必然。令 $q_{t,\,m} = \mu + \sum_{j=0}^{m} a_j \varepsilon_{t-j}$。由于 μ 的积分为一，且每个创新项的积分为零，因此对每个 m，都有 $\int_0^1 q_{t,\,m}(u)\,\mathrm{d}u = 1$ 几乎必然。假设 1 表明，在 $L^2(0,\,1)$ 中，$q_{t,\,m} \to X_t$ 几乎必然。因此，由柯西–施瓦茨不等式可得 $\left|\int_0^1 X_t(u)\,\mathrm{d}u - 1\right| = \left|\int_0^1 (X_t - q_{t,\,m})(u)\,\mathrm{d}u\right| \le \|X_t - q_{t,\,m}\| \to 0$ 几乎必然。由于左侧不依赖于 m，因此 $\int_0^1 X_t(u)\,\mathrm{d}u = 1$ 几乎必然。

在例 S2 的拉ademacher 构造中，$1 + Z_t(2u - 1)$ 几乎处处非负，当且仅当 $|Z_t| \le 1$。与例 1 中一样，$\operatorname{ess\,sup} |Z_t| = \lambda/(1 - |\rho|)$，从而得到精确条件 $\lambda \le 1 - |\rho|$。非退化性由 $\operatorname{var}(Z_t) = \lambda^2/(1 - \rho^2) > 0$ 得出。

协方差矩阵

对于例 S3 中的正定 M，一般刻画给出：$p_M(B) \le r$当且仅当 $-rM \preceq B \preceq rM$。左右两侧分别乘以 $M^{-1/2}$得到 $-rI_p \preceq M^{-1/2} B M^{-1/2} \preceq rI_p$，其中 I_p是 $p \times p$单位矩阵。由于 $M^{-1/2} B M^{-1/2}$是对称的，这些不等式等价于 $\|M^{-1/2} B M^{-1/2}\|_{\mathrm{op}} \le r$，从而证明了（S6）。

对于该构造，$\varepsilon_t = M^{1/2} D_t M^{1/2}$ 是中心化的独立同分布变量，且 $\|\varepsilon_t\| \le \sqrt{p}\,\|M\|_{\mathrm{op}} R$ 和 $p_M(\varepsilon_t) = \|D_t\|_{\mathrm{op}} \le R$几乎必然成立。在 S7.2 节开头验证的系数可和性以及命题 S3，在$\lambda R \le 1 - |\rho|$时给出可容许性。对于 $D_t = \eta_t D$ 且 $D \ne 0$的情形，独立性和中心化给出 $\mathbb{E}(\|X_t - M\|^2) = \lambda^2 \|M^{1/2} D M^{1/2}\|^2/(1 - \rho^2) > 0$，从而证明了非退化性。

分位数

对于例 S4 中局部绝对连续的 μ 和 v，$p_\mu(v) \le r$ 等价于$r\mu + v,\ r\mu - v \in \mathcal{Q}$，或几乎处处成立的 $|v'| \le r\mu'$。对 $r \ge 0$ 取下确界即可证明 (S7)。此外，$p_\mu(v) = 0$ 当且仅当 $v' = 0$ 几乎处处成立；根据在闭子区间上的积分，这等价于 v 为常数。

参考文献

Bauschke, H. H. 和 P. L. Combettes（2017）。希尔伯特空间中的凸分析与单调算子理论，第 2 版。Springer，Cham。Beare, B. K.（2017）。Chang–Kim–Park 协整密度值时间序列模型无法容纳随机趋势。*Econ Journal Watch* 14(2)，133–137。Beare, B. K. 和 W.-K. Seo （ 2020 ）。I(1) 和 I(2) 自回归希尔伯特过程的表示。《计量经济理论》36(5)，773–802。

Beare, B. K.、J. Seo 和 W.-K. Seo（2017）。希尔伯特空间中的协整线性过程。《时间序列分析杂志》38(6)，1010–1027。Bogachev, V. I.（1998）。高斯测度。美国数学学会，普罗维登斯。Bosq, D.（2000）。函数空间中的线性过程：理论与应用。Springer，纽约。Brockwell, P. J. 和 R. A. Davis（1991）。时间序列：理论与方法，第 2 版。Springer，纽约。Browder, F. E.（1958）。非紧极小动力系统中的变换迭代。《美国数学学会会刊》9(5)，773–780。Chang, Y.、C. S. Kim 和 J. Y. Park（2016）。状态密度时间序列的非平稳性。《计量经济学杂志》192(1)，152–167。Chernozhukov, V.、I. Fernández-Val 和 A. Galichon（2010）。无交叉的分位数曲线与概率曲线。《计量经济学》78(3)，1093–1125。Davis, R. A. 和 W. P. McCormick（1989）。具有正值或有界创新项的一阶自回归过程的估计。《随机过程及其应用》31(2)，237–250。Föllmer, H. 和 A. Schied（2016）。随机金融：离散时间导论，第 4 版（修订增补）。德古意特，柏林。Franchi, M. 和 P. Paruolo（2020）。函数型自回归过程中的协整。《计量经济理论》36(5)，803–839。Ghosal, R.、V. R. Varma、D. Volfson、I. Hillel、J. Urbanek、J. M. Hausdorff、A. Watts 和 V. Zipunnikov（2023）。基于分位数函数的分布数据分析及其在阿尔茨海默病步态数字生物标志物建模中的应用。《生物统计学》24(3)，539–561。Li, D.、P. M. Robinson 和 H. L. Shang（2021）。函数型时间序列长程依赖的局部 Whittle 估计。《时间序列分析杂志》42(5–6)，685–695。Nielsen, M. Ø.、W.-K. Seo 和 D. Seong（2023）。函数型时间序列非平稳子空间维数的推断。《计量经济理论》39(3)，443–480。Nielsen, M. Ø.、W.-K. Seo 和 D. Seong（2026）。函数型时间序列共同趋势的推断。《计量经济理论》在线优先发表，1–51。Panaretos, V. M. 和 Y. Zemel（2020）。*Wasserstein* 空间统计学导论。Springer，Cham。Peres, Y.、W. Schlag 和 B. Solomyak（2000）。伯努利卷积六十年。载于 C. Bandt、S. Graf 和 M. Zähle（编），《分形几何与随机性 *II*》，《概率进展》46，39–65 页。Birkhäuser，巴塞尔。Petersen, A. 和 H.-G. Müller（2016）。通过变换到希尔伯特空间对密度函数进行函数型数据分析。《统计年鉴》44(1)，183–218。Phillips, P. C. B. 和 V. Solo（1992）。线性过程的渐近理论。《统计年鉴》

20(2), 971–1001. Seo, W.-K. 和 B. K. Beare (2019). 贝叶斯希尔伯特空间中的协整线性过程。《统计学与概率快报》147, 90–95. Seo, W.-K. 和 H. L. Shang (2024). 具有协整性的分数积分曲线时间序列。《电子统计学杂志》18(2), 3858–3902. Steutel, F. W. 和 K. van Harn (2004). 实线上概率分布的无限可分性。Marcel Dekker，纽约。Yang, H., V. Baladandayuthapani, A. U. K. Rao, 和 J. S. Morris (2020). 分布数据标量回归分析中的分位数函数。《美国统计学会会刊》115(529), 90–106. Zhang, C., P. Kokoszka, 和 A. Petersen (2022). 密度时间序列的Wasserstein自回归模型。《时间序列分析杂志》43(1), 30–52. Zhu, C. 和 H.-G. Müller (2023). 自回归最优传输模型。《英国皇家统计学会会刊*B*辑：统计方法学》85(3), 1012–1033.