arXiv:2611.32417v1 [math.GN] 24 Nov 2026

Smyth 完备性与 q-超凸 T_0-拟度量空间中的非扩张迭代

´COLLINS AMBURO AGYINGI 和 YAE ULRICH GABA

Abstract. 我们研究 q-超凸 T_0-拟度量空间 (X, d) 上的特化序 $\leq_d$，其定义为： $x \leq_d y$ 当且仅当 $d(x, y) = 0$。我们证明，每个非空有界子集 A of X 都有下确界 $\bigwedge A$，且该下确界可由度量公式 $d(w, \bigwedge A) = \sup_{a\in A} d(w, a)$ 对所有 $w \in X$刻画；对偶地，它还有上确界，并且幂与余幂存在。对于有界的 X ，这给出了一个带有显式度量公式的初等证明，证明已知事实：Isbell 凸 Lawvere 度量空间在富集范畴论意义下是完备的；这些公式以及向无界 q-超凸空间的有界子集的推广，并未涵盖在富集范畴论论证中，因为该论证要求 $[0, \infty]$中的半径。因而，任何至少含有两个点的 T_1-拟度量空间都不是 q-超凸的，而有界q-超凸空间上每个保序自映射的不动点构成一个非空完备格。我们证明，非扩张自映射的不动点集未必是子格，且特化序未必是分配的。我们的主要结果涉及非扩张映射的连续性。有界 q-超凸空间上的非扩张自映射未必保持递增序列的上确界，且最小元的轨道的上确界未必是不动点。我们证明，对于有界 q-超凸 T_0-拟度量空间，以下各条件等价：该空间是 Smyth 完备的；每个递增序列都在对称化度量中收敛到其上确界；每个非扩张自映射都保持递增序列的上确界；每个非扩张自映射都保持有向集的上确界；每个非扩张自映射都是 Yoneda 连续的。在此情形下，从最小元开始的 Kleene 迭代收敛到最小不动点；例如，当对称化度量是紧的时，该结论适用。

1. Introduction

K¨unzi及其学派发展了超凸度量空间理论的非对称对应理论 [3, 15, 9]：即 q-超凸（或 Isbell-凸） T_0-拟度量空间及 Isbell包 [16, 2, 14]理论。随后，人们得到了非扩张映射的不动点定理 [18, 22]。这些结果是通过对称化来证明不动点存在性的$d^s = \max\{d, d^{-1}\}$：非扩张性在对称化下保持不变，且 (

X， d^s) 在 (X， d) 为q-超凸时是超凸的 [16], ，因此 Sine、Soardi 和 Baillon 的度量定理适用。关于这一理论的综述及完整证明见配套论文 [31]。

在本文中，我们利用了一个对 d^s 不可见的要素：特化序$x \leq_d y \iff d(x, y) = 0$。非扩张映射是保序的，而序区间就是半径为 0 的球。事实不止于此：对于每个伪度量$d' \geq d^s = \max\{d, d^{-1}\}$，特化序都会丢失，因为任意这样的 d' 都满足 $d'(x, y) \geq d(x, y)$ 以及 $d'(x, y) \geq d(y, x)$，因此 $d'(x, y) = 0$ 会通过 T_0迫使 $x = y$。每个此类 d' 的特化序都是恒等关系，而非对称内容 $\leq_d$ 在每一种真正的对称化下都会消失。Fujii 观察到，对于 Lawvere 度量空间 [11]，Isbell-凸性是范畴完备性的一种几何形式；对于有界空间，这意味着 (X， $\leq_d$) 是一个完备格，因此

Date：2026年11月25日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 47H10，54E35；次分类号 06B23，54C15，18D20。*Key words and phrases.* T_0-拟度量、特化序、 q-超凸性、Isbell-凸性、非扩张映射、完备格、Kleene 迭代。通讯作者：Y. U. Gaba。

对于有界 X 定理 3.1 提取了 Fujii 定理关于特化序的推论。本文的新意在于：证明是初等的，并提供了明确的度量公式，这些公式将在 定理 4.2、7.1 和7.3的证明中以模块化方式重用；此外，该结果还推广到无界 q-超凸空间的有界子集（定理 3.1 和3.3），这些空间不属于富集范畴论论证的适用范围，因为后者要求 $[0,\infty]$中的半径。随后，格结构成为不动点结果的驱动力。

特化序已被用于获得拟度量空间中的不动点定理。Rutten 证明，完备拟度量空间上的连续非扩张自映射 T 在具有 $x_0 \leq_d Tx_0$ 的情况下存在一个高于 x_0 [27]的不动点。Valero 及其合作者在赋予特化序的拟度量空间中发展了 Kleene 型不动点定理，引入了适用于这一框架的序完备性和序连续性概念，证明 Smyth 完备性蕴含这些完备性概念，并将这些结果应用于算法的渐近复杂度分析 [21, 28, 10]。这些研究处理一般的拟度量空间，并要求映射具有序连续性。我们的观点有所不同：在q-超凸空间中，特化序是一个具有度量格运算的（条件）完备格，因此所有保序映射均存在不动点，而无需任何连续性；此外，这一框架使我们能够准确判定非扩张映射何时具有序连续性（定理 6.5）。

我们的主要结果如下。设 $(X,\ d)$ 是一个有界的 q-超凸 T_0-拟度量空间。

(1) 任意保序自映射的所有不动点，无论该映射是否连续，都构成一个非空完备格（定理4.2）。对于非扩张映射，这为 K¨unzi 和 Olela Otafudu [18, 定理 3.3] 的不动点定理中存在性部分提供了一种序论证明。(2) 非扩张自映射的不动点集不一定是 X 的子格，并且 $(X, \leq_d)$ 不一定是分配的（定理 5.2 和 5.3）。(3) 非扩张自映射不一定保持递增序列的上确界，且最小元的轨道 $(T^n\perp)$ 的上确界不一定是不动点（定理 6.4）。以下命题等价（定理 6.5）： X 是 Smyth 完备的； X 中每个递增序列都收敛到其在 (X, d^s) 中的上确界； X 中每个有向子集都收敛到其在 (X, d^s) 中的上确界； X 上每个非扩张自映射都保持递增序列或有向集的上确界； X 上每个非扩张自映射都是 Bonsangue、van Breugel 和 Rutten 意义下的 Yoneda 连续映射 [6]。证明运用了余幂以及 X 的内射性。在这些条件下，$T^n\perp$ 收敛到每个非扩张 T 的最小不动点；当 (X, d^s) 是紧的时，这些条件尤其成立（定理 6.8）。

我们还证明， q-超凸空间的一个在可比较对上为非扩张的自映射是非扩张的（定理 7.1）。

在全文中， $t \dot{-} r =$ 最大值$\{t - r, 0\}$。

2. Preliminaries

本节规定记号，并回顾理解下文所必需的最少内容。关于基础理论的自包含论述（包括完整证明、伊斯贝尔包计算的测试案例，以及非对称完备性概念的比较），请参阅配套综述 [31]。

拟度量。集合 X 上的拟伪度量是一个映射 $d\colon X \times X \to [0,\infty)$，满足 $d(x,x) = 0$，且 $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ [31, 定义 2.1]。若 $d(x,y) = 0 = d(y,x)$ 蕴含 $x = y$，则它是 T_0-拟度量；若 $d(x,y) = 0$ 蕴含 $x = y$，则它是 T_1- 拟度量。其共轭拟度量为 $d^{-1}(x,y) = d(y,x)$，而对称化 $d^s = \max\{d, d^{-1}\}$ 在 d 为 T_0时是一个度量；若 (X, d^s) 完备，则 (X, d) 是双完备的。记 $C_d(x,r) = \{y\colon d(x,y) \leq r\}$，并且

$C_{d^{-1}}(x,\ s) = \{y\colon d(y,\ x) \le s\}$。若一个映射在全域上满足 $d(fx,\ fy) \le d(x,\ y)$，则称其为非扩张。若集合 A 满足 $\operatorname{diam} A = \sup\{d(a,\ a')\colon a,\ a' \in A\} < \infty$，则称其为有界。

特化序。 T_0-拟度量空间的特化序为 $x \le_d y \iff d(x,y) = 0$ [31, 定义 2.7]；它是一个偏序，而 $\le_{d^{-1}}$ 是其逆序。我们令 $\uparrow a = C_d(a, 0)$ 和 $\downarrow a = C_{d^{-1}}(a, 0)$。若子集 D 非空，且其中任意两个元素在 D中都有上界，则称其为有向的；我们将 D 视为以自身为指标集的网。以下基本事实已在 [31, 引理 2.8]中证明。

引理 2.1。 设 (X, d) 为一个 T_0-拟度量空间。

(a) T_0-拟度量空间之间的每个非扩张映射对于 $\le_d$都是保序的。*(b)* 对于 $a \in X$，映射 $d(a, \cdot)$ 和 $d(\cdot, a)$ 在 (X, d^s)上都是1-*Lipschitz* 映射；因此 $\uparrow a$ 和 $\downarrow a$在 (X, d^s)中是闭的。*(c)* $\le_d$ 是恒等关系，当且仅当 d 是一个 T_1-拟度量；特别地，当 d 为度量时， $\le_d$ 是平凡的。

Smyth 完备性与 Yoneda 极限。网 $(x_i)_{i\in I}$ 是左 K-柯西网，如果对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 i_ε，使得只要 $i_\varepsilon \le i \le j$，就有 $d(x_i, x_j) < \varepsilon$；若每个左$K$-柯西网都在 (X, d^s) 中收敛，则该空间是 Smyth 完备的。根据 [26, 命题 1], ，这等价于每个左 K-柯西序列都 [31, 定义 3.1，引理 3.2]。点 y 是左 K-柯西网 (x_i) 的 Yoneda 极限，如果对所有 $w \in X$ [6]，都有 $d(y, w) = \inf_i \sup_{j\ge i} d(x_j, w)$；若存在，则该极限唯一。非扩张映射将左 K-柯西网映为左 K-柯西网；若非扩张映射 T 满足：当 y 是 (x_i) 的 Yoneda 极限时， Ty 也是 (Tx_i) 的 Yoneda 极限 [6, 13]，则称其为 Yoneda-连续。因为 $|d(x_j, w) - d(y, w)| \le d^s(x_j, y)$，所以 (X, d^s) 中的收敛蕴含 Yoneda 收敛。

q-超凸性。 遵循 Kemajou、K¨unzi 和 Olela Otafudu [16] （见 [31, 定义 5.2]），拟伪度量空间 (X, d) 称为 q-超凸的 （或 *Isbell*-凸的），如果对于 X 中的每个族 $(x_i)_{i\in I}$ 以及所有非负实数族 $(r_i)_{i\in I}$、$(s_i)_{i\in I}$，

$$d(x_i, x_j) \le r_i + s_j \ \text{ for all } i, j \in I \implies \bigcap_{i\in I} \big(C_d(x_i, r_i) \cap C_{d^{-1}}(x_i, s_i)\big) \neq \emptyset. \tag{1}$$

(1) 中的假设是必要的（$d(x_i, x_j) \le d(x_i, z) + d(z, x_j) \le r_i + s_j$ 对于 z 属于交集），并且对于 $I = \emptyset$，交集为 X，因此 q-超凸空间非空。当 d 是度量且 $r_i = s_i$ 时，(1) 即为 Aronszajn 和 Panitchpakdi 的超凸性[3, 9]。具有 $u(x, y) = x \dot{-} y$ 的对称化 $(\mathbb{R}, u)$，其双球为紧区间 $[x - r, x + s]$，且其特化序是 $\mathbb{R}$ 上的通常序，是典型的无界 q-超凸例子 [31, 例 2.11，引理 5.5]。我们所使用的基本结构事实汇总于下一个命题中；这些证明只需运用 (1)，并见于[31, 命题 5.4、5.7]。

命题2.2 ([16, 命题 2]； [18, 命题3.1]； [31, 命题5.4、5.7])。 设 (X, d) 是一个q-超凸拟伪度量空间。

(a) (X, d^{-1}) 是 q-超凸的。*(b)* (X, d^s) 是超凸伪度量空间；如果 d 是 T_0，则它是完备度量空间。*(c)* 如果 $(x_i, r_i, s_i)_{i\in I}$ 满足*(1)*的假设，则 $D = \bigcap_i \big(C_d(x_i, r_i) \cap C_{d^{-1}}(x_i, s_i)\big)$是 q-超凸的。

注入包。 q-超凸性的范畴对应物，是 T_0-拟度量空间及非扩张映射范畴中的内射性。

定理 2.3 (Kemajou–K¨unzi–Olela Otafudu [16, 定理 1]； [31, 定理 5.10，推论 5.11])。一个 T_0-拟度量空间是 q-超凸的，当且仅当它在由T_0-拟度量空间和非扩张映射构成的范畴中是注入的。特别地，每个 q-超凸子空间Y 都是一个 T_0-拟度量空间 X 中某个非扩张收缩的像 $X \to Y$。

每个 T_0-拟度量空间 X 都有一个 Isbell包 $Q(X)$：由极小函数对 (f,g) 构成的集合，其中 $f,g\colon X\to[0,\infty)$ 且 $g(x)+f(y)\geq d(x,y)$；在非对称距离$N((f,g),(f',g'))=\max\{\sup_y(f(y)\dot{-}f'(y)),\sup_x(g'(x)\dot{-}g(x))\}$ [16, 14] 下，它是 q- 超凸的，并且 X 通过 $x\mapsto(d(x,\cdot)\ d(\cdot,x))$ 等距嵌入。(f,g) 的极小性等价于$f(y)=\sup_x(d(x,y)\dot{-}g(x))$ 以及 $g(x)=\sup_y(d(x,y)\dot{-}f(y))$。关于二点空间和三点空间的 Isbell包的显式计算见 [31, §5]；特别地，对称二点空间的 Isbell包与 $([0,1]^2,u_\infty)$ [31, 例 5.6] 等距。

积。 我们反复使用以下基本事实，例如用以证明 $([0,1]^K,u_\infty)$ 是一个有界的 q-超凸 T_0-拟度量空间，其特化序为逐坐标序。证明可通过对每个坐标应用 (1) 得出；参见 [31, 例 2.12, 引理 5。5]。

引理 *2.4.* 设 $(X_k,d_k)_{k\in K}$ 是一族 q-超凸拟伪度量空间，且 $\sup_k \operatorname{diam} X_k<\infty$，并设 $d(x,y)=\sup_k d_k(x_k,y_k)$ *on* $X=\prod_k X_k$。则 (X,d) 是 q- 超凸的。特别地，$([0,1]^K,u_\infty)$ 其中 $u_\infty(x,y)=\sup_k(x_k\dot{-}y_k)$ 是一个有界的q-超凸 T_0-拟度量空间，且 $\leq_{u_\infty}$ 是逐坐标序。

3. Metric meets、 joins、 powers and copowers

特化序的下确界和上确界具有显式的度量公式；构造了幂和余幂，并由此推导出后文所使用的格论推论。

定理 3.1。 设(X,d) 是一个 q-超凸 T_0-拟度量空间，且 $A\subseteq X$ 非空有界。

(a) 存在唯一的点 $\bigwedge A\in X$，使得

$$d\Big(w,\bigwedge A\Big)=\sup_{a\in A} d(w,a)\qquad \textit{for all } w\in X, \tag{2}$$

并且 $\bigwedge A$ 是$(X,\leq_d)$中 A 的下确界。

(b) 存在唯一的点 $\bigvee A\in X$，使得

$$d\Big(\bigvee A,w\Big)=\sup_{a\in A} d(a,w)\qquad \textit{for all } w\in X, \tag{3}$$

且 $\bigvee A$ 是 A 在 $(X,\leq_d)$ 中的上确界。

证明。设 $\delta=\operatorname{diam} A$，固定 $a_0\in A$并令 $m(w)=\sup_{a\in A} d(w,a)\leq d(w,a_0)+\delta$。将 (1) 应用于由 $A\sqcup X$ 索引的族，该族由半径为 $(\delta,0)$ 的点 $a\in A$ 以及半径为 $(m(w)\ d(a_0,w))$ 的点 $w\in X$ 组成。(1) 的假设成立： $d(a,a')\leq\delta$；$d(a,w)\leq d(a,a_0)+d(a_0,w)\leq\delta+d(a_0,w)$； $d(w,a)\leq m(w)$；以及 $d(w,w')\leq d(w,a_0)+d(a_0,w')\leq m(w)+d(a_0,w')$。交集中的点 z 满足 $d(z,a)=0$ 对 $a\in A$ 成立（因此对每个 $a\in A$ 都成立，特别地 $\sup_{a\in A} d(z,a)=0$），并且对 $w\in X$ 有 $d(w,z)\leq m(w)$。由于 $d(w,a)\leq d(w,z)+d(z,a)=d(w,z)$，我们得到 $d(w,z)=m(w)$，这就是 (2)。若 z' 也满足 (2)，则将 $w=z'$ 代入恒等式可得 $\sup_{a\in A} d(z',a)=d(z',z')=0$，因此特别有 $d(z',z)\leq\sup_a d(z',a)=0$；将 $w=z$ 代入关于 z' 的恒等式，由于对每个 $a\in A$ 都有 $d(z,a)=0$，得到 $d(z,z')=\sup_{a\in A} d(z,a)=0$。因此由 T_0 可得 $z=z'$。点 z 是 A 的下界；若 w 是一个下界，则 $m(w)=0$，所以 $w\leq_d z$。(b) 部分由将 (a) 应用于 q-超凸空间 (X,d^{-1}) 得出，其特化序是 $\leq_d$ 的逆序：点 $\bigvee A$ 是 (X,d^{-1}) 中 A 的度量交，并且 $d^{-1}(w,\bigvee A)=\sup_a d^{-1}(w,a)$ 就是 (3)。□

我们称 $\bigwedge A$和 $\bigvee A$为 度量交 和 度量并，分别对应于 A，并记作 $x\wedge y=\bigwedge\{x,y\}$和 $x\vee y=\bigvee\{x,y\}$。公式（2）比“$\bigwedge A$是下确界”的表述更强：它确定了从 到 $\bigwedge A$的所有距离。还需注意，证明中的半径都是明确且有限的，这也是为什么只需要 A的有界性，而不需要 X的有界性。

例3.2。（a）在（$\mathbb{R}$，u）中，公式（2）表示为（w–inf A）$\dot{-}0=\sup_{a\in A}(w-a)\ \dot{-}0$，因此对于每个非空有界的 $A\subseteq\mathbb{R}$，都有 $\bigwedge A=\inf A$和 $\bigvee A=\sup A$。集合 $A=\mathbb{R}$没有下界，这表明不能省略 A 的有界性。（b）在（$[0,1]^K$，u_∞）中，度量交和度量并分别是逐坐标下确界和逐坐标上确界，因为 $\sup_k\sup_a(w_k-a_k)\ \dot{-}0=\sup_a\sup_k(w_k-a_k)\ \dot{-}0$。（c）在对称二点空间 $\{a,b\}$ 的Isbell包中——这是一个与（$[0,1]^2$，u_∞）等距的正方形，其中 $a=(1,0)$和 $b=(0,1)$是在 [31, 例5.6]中计算得到的——我们有 $a\wedge b=(0,0)$和 $a\vee b=(1,1)$，并且对于所有 $w\in[0,1]^2$，$u_\infty(w,\ a\wedge b)=\max\{w_1,w_2\}=\max\{u_\infty(w,\ a)\ u_\infty(w,\ b)\}$。

命题*3.3.* 设（X，d）是一个 q-超凸 T_0-拟度量空间，$c\in X$ 且 $r\geq 0$。存在唯一的点 $r\pitchfork c$和 $r*c$，使得对于所有 $w\in X$，$d(w,\ r\pitchfork c)=d(w,\ c)\ \dot{-}r$且 $d(r*c,\ w)=d(c,\ w)\ \dot{-}r$。此外，$c\leq_d r\pitchfork c$，$d(r\pitchfork c,\ c)\leq r$，$r*c\leq_d c$且 $d(c,\ r*c)\leq r$。

证明。将（1）应用于点 c，其半径为（0，r），以及点 $w\in X$，其半径为（$d(w,\ c)\ \dot{-}r$，$d(c,\ w)+r$）；该假设成立，因为 $d(w,\ w')\leq d(w,\ c)+d(c,\ w')\leq(d(w,\ c)\ \dot{-}r)+r+d(c,\ w')$。交集中的一点 p满足 $d(c,\ p)=0$，$d(p,\ c)\leq r$以及 $d(w,\ p)\leq d(w,\ c)\ \dot{-}r$，而 $d(w,\ c)\leq d(w,\ p)+r$给出等式。为证明唯一性，若 p和 p'都具有该定义性质，则将 $w=p'$ 代入 p 的恒等式可得 $d(p',\ p)=d(p',\ c)\ \dot{-}r$；又由于 p' 在 c处、半径为（0，r）时也满足双球条件，因此有 $d(p',\ c)\leq r$，从而 $d(p',\ c)\ \dot{-}r=0$且 $d(p',\ p)=0$。对称地，$d(p,\ p')=0$，所以 $p=p'$。最后，$d(c,\ p)=d(c,\ c)\ \dot{-}r=0$给出 $c\leq_d p$。余幂是 q-超凸空间（X，d^{-1}）中的幂，最后两个性质由共轭得到。□

在 $(\mathbb{R},u)$ 中，我们有 $r\pitchfork c=c+r$和 $r*c=c-r$；在 $([0,1]^K,u_\infty)$ 中，我们有 $r\pitchfork c=$最小值$\{c+r\mathbf{1},\mathbf{1}\}$ 和 $r*c=$最大值$\{c-r\mathbf{1},\mathbf{0}\}$，均按坐标计算。余幂和幂具有简单的序理论描述。

引理 3.4。设 (X,d) 是一个 q-超凸 T_0-拟度量空间，$c\in X$ 且 $r\geq 0$。则$r*c$是 $C_d(c,r)=\{y:\ d(c,y)\leq r\}$的最小元，而 $r\pitchfork c$是$C_{d^{-1}}(c,r)=\{y:\ d(y,c)\leq r\}$的最大元。

证明。在定义恒等式 $d(r*c,w)=d(c,w)\ \dot{-}r$中取 $w=r*c$，得到 $d(c,r*c)\ \dot{-}r=0$，因此 $r*c\in C_d(c,r)$。若 $d(c,y)\leq r$，则 $d(r*c,y)=d(c,y)\ \dot{-}r=0$，即 $r*c\leq_d y$。关于幂的结论可通过转到 (X,d^{-1}) 得到。□

推论 3.5。设 $(X,\ d)$ 是一个 q-超凸 T_0-拟度量空间。每个非空的 $A\subseteq X$在拟度量意义下有界的集合 $\operatorname{diam}A<\infty$ 都有下确界和上确界$\leq_d$。特别地，$(X,\ \leq_d)$ 是一个条件完备格：每个在拟度量意义下有界的非空子集都有下确界和上确界，且它们分别与 定理 *3.1*中的度量交和上确界一致。如果 X 本身有界，则 $(X,\ \leq_d)$ 是一个具有最小元 $\bot=\bigwedge X$和最大元 $\top=\bigvee X$的完备格。

注 3.6. 按照 [20] 的定义，Lawvere 度量空间是一个集合 X，配备了 $d\colon\ X\times X\to[0,\infty]$，满足 $d(x,x)=0$以及 $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$；根据 [11, 定义 3.6 和命题 7.6]，，当对于每个族 $(x_i,r_i,s_i)_{i\in I}$（其中 r_i、$s_i\in[0,\infty]$ 且对于所有 i,j 都有$d(x_i,x_j)\leq r_i+s_j$）而言，交集 $\bigcap_i(C_d(x_i,r_i)\cap C_{d^{-1}}(x_i,s_i))$ 非空时，它是 Isbell-凸的。Fujii 证明了，Lawvere 度量空间是 Isbell-凸的，当且仅当它作为一个$[0,\infty]$-富集范畴 [11, 命题 7.6] 是余完备的；将这一结论应用于有界 q-超凸 T_0-拟度量空间，正向蕴含给出定理3.5和定理 3.3，因为 (2) 表明 $\bigwedge A$ 是一个锥极限 [29]。定理 3.1 和 3.3 所增加的内容有两点。这里的证明仅使用带有限半径的 q-超凸性定义，而且它们产生的显式半径会在下文定理 4.2、7.1 和 7.3 中再次使用。这些公式还可推广到无界 q-超凸空间的有界子集，而这类空间不在 Fujii 的框架之内：$(\mathbb{R},u)$，其中

$u(x,\ y) = x \dot{-} y$是 q-超凸的，但族 $(x,\ 0,\ \infty)_{x\in\mathbb{R}}$表明，作为 Lawvere 度量空间，它不是 Isbell-凸的。

在相关方向上，Conradie、K¨unzi 和 Olela Otafudu 描述了非对称赋范实向量空间的 Isbell-凸包上的向量格结构 [8]。本文的结果与他们的结果相邻但不可比较。其向量格结构 [8] 假设存在环境线性结构，并表明格运算与向量加法和数乘相容；定理 3.1 仅假设存在 q-超凸 T_0-拟度量结构，不涉及任何向量运算，并在严格更广的空间类中给出格运算的度量公式。在二者的交集，即有界的q-超凸非对称赋范空间中，两个底层格相同，因为二者都是特化序，并且都由各自的度量公式刻画。

假设 $d\colon\ X\times X\to[0,\infty)$对于定理 3.1并非必要：证明可直接适用于扩展的 T_0-拟伪度量 $d\colon X\times X\to[0,\infty]$只要对于半径有限的族仍假设（1），并且 $\bigwedge A$ 和 $\bigvee A$ 均取自 X 与 A 双向距离有限的点。

推论 3.7。 至少含有两个点的 A T_1-拟度量空间不是 q-超凸的。特别地，非空度量空间是 q-超凸的，当且仅当它是单点集。

证明。 设 X 是 q-超凸的，且 T_1，并设 $x\neq y$ 属于 X。集合 $\{x,y\}$ 有界，因此由 定理 3.1 可知点 $z=x\wedge y$ 存在，并满足 $z\leq_d x$ 和 $z\leq_d y$。由于 $\leq_d$ 是恒等关系（定理 2.1（c）），$z=x$ 且 $z=y$，矛盾。显然，单点集是q-超凸的。□

例 3.8。在 $\mathbb{R}$ 上，令 $d(x,y)=y-x$ 当 $x\leq y$，令 $d(x,y)=1$ 当 $x>y$。这是一个 T_1-拟度量，其共轭拓扑是由区间 $(x-\varepsilon,x]$ 生成的 Sorgenfrey 拓扑。由定理 3.7 可知，它不是 q- 超凸的；具体而言，$\{0,1\}$ 除了满足 $d(z,0)=d(z,1)=0$ 的点 z 以外，没有其他下界，而这样的点并不存在。在有界情形下，定理 3.7 也可以由 Fujii 对 Isbell-凸空间作为完备 Lawvere 度量空间的刻画推出，[11],因为 T_1-空间的底层序是平凡的。

下一个结果从格结构以及余幂和幂的角度刻画有界空间的 q-超凸性。对于有界空间，这与 Fujii 定理密切相关；该定理指出，Isbell-凸性等价于完备性 [11, 命题 7.6]；下面的证明是初等的，只用到上确界和余幂的定义恒等式。

T定理 3.9. 对于有界的 T_0拟度量空间 (X,d)，以下条件等价 t:

(i) (X,d) 是 q-超凸的；*(ii)* $(X,\leq_d)$ 是完备格，其下确界和上确界满足 (2) 和 (3)，且幂 $r\pitchfork c$ 和余幂 $r*c$ 对所有 $c\in X$ 和 $r\geq 0$均存在。

证明。蕴含 (i)⇒(ii) 即定理 3.1 和 3.3。反过来，假设 (ii)，并令 $(x_i,r_i,s_i)_{i\in I}$为一个非空族，满足对所有 i和 j，都有 $d(x_i,x_j)\leq r_i+s_j$。令 $a_i=r_i*x_i$为 $C_d(x_i,r_i)$ 的最小元（定理 3.4），并令 $z=\bigvee_i a_i$。于是 $z\geq_d a_i$，因此 $d(x_i,z)\leq d(x_i,a_i)+d(a_i,z)\leq r_i$。由 (3) 及余幂的定义，

$$d(z,x_j)=\sup_i d(a_i,x_j)=\sup_i\big(d(x_i,x_j)\dot{-}r_i\big)\leq s_j.$$

因此，z 位于每个双球中，且(X,d)是 q-超凸的。□

对（ii）的证明⇒（i）只使用上确界和余幂，而对偶论证只使用下确界和幂。（ii）的两个部分都不可省略。子空间 $\{0,1\}$（$[0,1],\ u$）是一个完备格，其下确界和上确界满足（2）和（3），但余幂 $\frac{1}{2}*1$ 不存在 –

其中，因为它将是一个点 p 满足 $u(p,\ 0) = u(1,\ 0) \dot{-} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$。两点度量空间不是一个格。有界性还使我们能够将幂和余幂公式扩展到$r = \infty$： $\infty \pitchfork c = \top$ 以及 $\infty * c = \bot$，因为 $d(w,\ \top) \leq \operatorname{diam} X \leq \infty = d(w,\ c) \dot{-} \infty$ （将$t \dot{-} \infty = 0$解释为），而对于 $\bot$ 则有对偶结论。

命题 3.10。 设(X, d) 为 q-超凸且 T_0，并设 $A, B \subseteq X$ 非空且有界。则 $d(\bigwedge A, \bigwedge B) \leq$ 上确界$_{b\in B}$ 下确界$_{a\in A}\, d(a, b)$ 以及 $d(\bigvee A, \bigvee B) \leq$ 上确界$_{a\in A}$ 下确界$_{b\in B}\, d(a, b)$。特别地，关于 $X \times X$ 上的最大拟度量， $\wedge$ 和 $\vee$ 是非扩张的。

证明。 将 (2) 中的 A 替换为 B 和 $w = \bigwedge A$，并利用 $d(\bigwedge A, a) = 0$ 对于 $a \in A$，可得

$$\begin{aligned} d\Big(\bigwedge A, \bigwedge B\Big) &= \sup_{b\in B} d\Big(\bigwedge A, b\Big) \leq \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} \Big(d\big(\bigwedge A, a\big) + d(a, b)\Big) \\ &= \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} d(a, b). \end{aligned}$$

类似地，将 (3) 中的 $w = \bigvee B$和 $d(b, \bigvee B) = 0$ 对于 $b \in B$ 代入可得

$$\begin{aligned} d\Big(\bigvee A, \bigvee B\Big) &= \sup_{a\in A} d\Big(a, \bigvee B\Big) \leq \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} \Big(d(a, b) + d\big(b, \bigvee B\big)\Big) \\ &= \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a, b). \end{aligned}$$

对于二元情形，取 $A = \{x, y\}$ 和 $B = \{x', y'\}$，并用 $d(x,\ x')$ 以及 $d(y,\ y')$ 对下确界进行界定。□

定理 3.10 右端项是用于 [18] 中非空子集上的 Hausdorff拟伪度量的两个分量。因此， $\bigwedge$ 和 $\bigvee$ 是从有界非空子集（带有 Hausdorff拟伪度量的相应分量）到 X的非扩张映射。

命题 3.11。 设 (X, d) 为 q-超凸的，且 T_0，并设 $D = \bigcap_i (C_d(x_i, r_i) \cap C_{d^{-1}}(x_i, s_i))$ 为非空。则对于每个有界非空 $A \subseteq D$， $\bigwedge A, \bigvee A \in D$。

证明。固定 $a \in A$。由 (2)， $d(x_i, \bigwedge A) = \sup_{a'\in A} d(x_i, a') \leq r_i$，并且 $d(\bigwedge A, x_i) \leq d(\bigwedge A, a) + d(a, x_i) = d(a, x_i) \leq s_i$。对偶地，由 (3)， $d(\bigvee A, x_i) = \sup_{a'} d(a', x_i) \leq s_i$，且 $d(x_i, \bigvee A) \leq d(x_i, a) + d(a, \bigvee A) \leq r_i$。□

特别地，序区间 $[a, b] = {\uparrow}a \cap {\downarrow}b$ 是完备子格，因为它们是一个半径为 0 的双球。我们将在定理5.2 中看到， q超凸子空间若非此形式，则未必是子格。

4. Fixed points of order-preserving maps

第3节的格结构 结合 Knaster 和 Tarski 的不动点定理。我们回顾该定理并给出证明，其中包括适用于交换族的版本；由此推导出有界 q超凸空间上所有保序自映射的不动点，以度量方式描述极值不动点，将这一结果与非扩张映射的度量方法进行比较，并给出示例。

定理4.1 (Knaster–Tarski [30])。 设 L 是一个完备格。

(a) 如果 $f\colon\ L \to L$ 是保序的，那么 $\operatorname{Fix}(f)$ 在诱导序下是一个非空完备格，其最小元为 $\inf\{x\colon\ f(x) \leq x\}$，最大元为 $\sup\{x\colon\ x \leq f(x)\}$。*(b)* 如果 $\mathcal{F}$ 是 L上的两两交换的保序自映射族，那么其公共不动点集合$\operatorname{Fix}(\mathcal{F})$ 在诱导序下是一个非空完备格。

证明。(b) 令 $P = \{x \in L : \text{对所有 } f \in \mathcal{F},\ x \le f(x)$，其中包含 L的最小元。如果 $x \in P$且 $g \in \mathcal{F}$，那么对每个 $f \in \mathcal{F}$，都有 $g(x) \le g(f(x)) = f(g(x))$，因为 $x \le f(x)$ 且 g是保序的；因此 $g(x) \in P$。令 $p =$为 P的上确界。对于 $x \in P$和 $f \in \mathcal{F}$，我们有$x \le f(x) \le f(p)$，所以对所有 f都有 $p \le f(p)$，即 $p \in P$。于是，对每个 f，$f(p) \in P$，因此 $f(p) \le p$。由此，p是一个公共不动点，并且它是最大的不动点，因为 Fix($\mathcal{F}$) $\subseteq P$。

现在令 $S \subseteq$Fix($\mathcal{F}$)，且 $t =$sup Sin L。如果 $t \le x$，那么对于所有 $s \in S$and$f \in \mathcal{F}$，都有 $s = f(s) \le f(x)$，因此 $t \le f(x)$。所以，每个 $f \in \mathcal{F}$ 都将完备格 $[t, \top]$ 映射到自身，并且这些映射仍然可交换。将上一段的对偶结论应用于 $[t, \top]$，其中用 $\{x \in [t, \top]$ 替换 P：对于所有 $f\}$，有 $f(x) \le x$，并以 inf 替代 sup，由此得到一个最小公共不动点$q \ge t$。每个高于 S 中所有元素的公共不动点 y 都属于 $[t, \top]$，因此 $q \le y$。所以，q 是 Fix($\mathcal{F}$) 中 S 的上确界。Fix($\mathcal{F}$) 中的下确界可通过对偶方式得到，因此 Fix($\mathcal{F}$) 是一个完备格。

(a) 是 (b) 的 $\mathcal{F} = \{f\}$ 情形；极值不动点的公式是集合 P及其对偶，这一点由证明得出。□

定理4.2。设(X, d) 是一个有界的 q-超凸 T_0-拟度量空间，并且 T： $X \to X$ 对于 $\le_d$是保序的；不假设 T 具有连续性。

(a) Fix(T) 在由 $\le_d$诱导的序下是一个非空完备格。*(b)* 最小不动点 ℓ 和最大不动点 g 分别由 $\ell = \bigwedge\{x : Tx \le_d x\}$和 $g = \bigvee\{x : x \le_d Tx\}$给出；等价地，$d(w, \ell) = sup\{d(w, x) : Tx \le_d x\}$，$d(g, w) = sup\{d(x, w) : x \le_d Tx\}$ $(w \in X)$。*(c)* 如果 $x_0 \le_d Tx_0$，则 T 在 $\uparrow x_0$中具有最小不动点；如果 $Tx_0 \le_d x_0$，则 T 在 $\downarrow x_0$中具有最大不动点。*(d)* X 的每个两两交换的保序自映射族都有一个非空完备格的公共不动点。

证明。由定理3.5，$(X, \le_d)$是一个完备格，其下确界和上确界是定理 3.1的度量交和上确界。第(a)、(b)和(d)部分由定理4.1得出；(b)中的度量公式是（2）和（3）。对于(c)，集合 $\uparrow x_0$ 是区间 $[x_0, \top]$，属于一个完备格，因此是一个完备格。若 $x_0 \le_d x$，则 $x_0 \le_d Tx_0 \le_d Tx$，因此 T 将 $\uparrow x_0$映入自身，且(a)适用于该限制。第二个陈述是对偶的。□

由定理2.1(a)，定理4.2适用于非扩张映射。下面的推论将该结果与度量方法进行比较。

推论4.3。设(X, d)为一个有界的 q-超凸 T_0-拟度量空间，并设 T： $X \to X$ 是非扩张的。

(a) 对于 $\le_d$，*Fix(T)* 是一个非空完备格，其最小元与最大元如定理*4.2*所述。*(b) Fix(T)* 是 q- 超凸的 [18, 定理 *3.*3], ，并且存在一个从 X 到 *Fix(T)* 的非扩张收缩映射。*(c)* 对于每个非空的 $A \subseteq$ *Fix(T)*，$F =$ *Fix(T)* 中 A 的下确界 $\bigwedge^F A$ 满足$d(w, \bigwedge^F A) = sup_{a \in A} d(w, a)$，对所有 $w \in F$ 均成立；上确界的情形对偶地成立。

证明。(a) 由 定理 2.1 和 4.2(a) 得出。在 (b) 中，q-超凸性 Fix(T) 的[18, 定理 3.3], ，而收缩映射由 定理 2.3 保证存在。对于 (c)，子空间 (F, d) 的特化序是 $\le_d$ 的限制，并且 F 有界且 q-超凸；将 定理 3.1 应用于 F。□

备注4.4。定理4.2和4.3 以及 [18, 定理3。3] 共同给出了关于有界 T-超凸 q-拟度量空间（T_0X, d）上非扩张自映射的不动点集的三项不同信息。

（α）对每个保序 T ——包括不连续的 T——不动点的存在性由定理4.2（a）给出。这是新的；它既不使用度量 Sine–Soardi 定理，也不依赖非扩张性。证明从度量结构中提取出 Knaster–Tarski 所需的序理论输入。

（β）不动点集是 q-超凸的；对于每个非扩张 T，有 [18, 定理 3。3],此处将其重述为定理4.3（b）。这里不再重新证明，而是直接引用。其证明转到（X， d^s）并采用 Baillon/Sine–Soardi 路线 [9]。

（γ）不动点集是一个完备格，其下确界和上确界分别是定理 *3.1*中，对于每个保序 T，有定理4.2（b）结合定理 4.3（c）所得的度量交与上确界。完备格这一结论通过 Knaster–Tarski 得出，并且在 q-超凸情形下是新的；将格运算识别为 Fix(T) 中的度量交与上确界，本身使用了将定理 3.1 应用于子空间 Fix(T)，该子空间继承了 q-超凸性（β）。

因此（α）在假设中以保序性取代了非扩张性，（β）引自 [18], ，而（γ）通过在 Fix(T) 中明确给出度量格运算，细化了结论。（α）的证明仅使用了定理 3.1，该定理直接由 q-超凸性的定义推出，并结合 Knaster–Tarski 定理；度量理论和选择公理均未涉及。由（γ）给出的 Fix(T) 上的格运算未必与 X （定理5.2）中的格运算一致。

极值不动点随映射单调变化。

命题 4.5。 设 (X, d) 为有界的 q-超凸 T_0-拟度量空间，并设$T, S\colon X \to X$ 为保序映射，且对所有 $x \in X$都有 $Tx \le_d Sx$ 。则 $\ell_T \le_d \ell_S$和$g_T \le_d g_S$成立，其中 ℓ 和 g 分别表示最小不动点和最大不动点。

证明。 如果 $Sx \le_d x$，那么 $Tx \le_d Sx \le_d x$；因此 $\{x\colon Sx \le_d x\} \subseteq \{x\colon Tx \le_d x\}$，取下确界得 $\ell_T \le_d \ell_S$。类似地， $\{x\colon x \le_d Tx\} \subseteq \{x\colon x \le_d Sx\}$ 给出 $g_T \le_d g_S$。□

命题 4.6。 设 (X, d) 是一个有界的 q-超凸 T_0-拟度量空间，且 $T\colon X \to X$ 保序。设 $P = \{x : x \le_d Tx\}$ 且 $Q = \{x\colon Tx \le_d x\}$。

(a) $T(P) \subseteq P$, $T(Q) \subseteq Q$, P对任意上确界封闭，而 Q对任意下确界封闭；特别地， P 和 Q在诱导序下是完备格。***(b)*** 如果 T 是非扩张的，那么 P 和 Q 在 (X, d^s)中是闭的。

证明。（a）如果 $x \le_d Tx$，那么 $Tx \le_d T(Tx)$，因此 $Tx \in P$。如果 $A \subseteq P$且 $s = \bigvee A$，那么对于所有 $a \in A$，都有 $a \le_d Ta \le_d Ts$，因此 $s \le_d Ts$；空上确界 $\perp$属于 P。关于 Q的结论是对偶的。（b） $P = \{x\colon d(x, Tx) = 0\}$。如果 T是非扩张的，那么它对于 d^s也是非扩张的，并且 $x \mapsto d(x, Tx)$ 在 (X, d^s) 上连续，因为根据定理 2.1(b)， $|d(x, Tx) - d(y, Ty)| \le d^s(x, y) + d^s(Tx, Ty) \le 2d^s(x, y)$。同样的论证也适用于 Q。□

下面给出一些例子，说明该定理能得出什么结论，以及不能得出什么结论。

例 4.7（不连续保序映射）。令 $X = [0, 1]$ 带有 u，它是有界的，并且根据定理 2.4 是 q-超凸的；再令 $T(x) = 0$当 $x < \frac{1}{2}$时，以及 $T(x) = 1$当$x \ge \frac{1}{2}$时。于是，T是保序且不连续的，并且 Fix(T) $= \{0, 1\}$，这是一个完备格，具有 $\ell = 0$ 和 $g = 1$，正如定理4.2所预言的那样。然而， $\{0, 1\}$并非 q-超凸：点 1 的半径为 (1 2 ,1)，点 0 的半径为 (1, 1 2)，它们满足 (1) 的假设，因为$u(1, 0) = 1 \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$；但相应的双球在 $[0, 1]$ 中仅在 1 2 处相交。因此，定理 4.3(b) 的结论确实要求非扩张性（图 1）。

例 4.8 （不能省略这些假设）。 （a）有界性。 在无界的 q-超凸空间（$\mathbb{R}$， u）上，映射 $T(x) = x + 1$ 是等距映射，因此是保序的，但没有不动点。

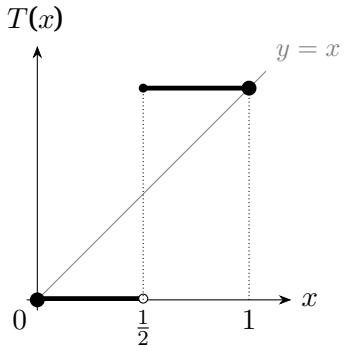


FIGURE 1. 保序阶梯映射 定理 4.7：其不动点 0 和 1 构成一个完备格，但该格并非 q-超凸。

（b）单调性。映射 $T(x) = 1$（当 $x < \frac{1}{2}$ 时）以及 $T(x) = 0$（当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时）在（$[0,1]$，u）上没有不动点；它是逆序保持的。（c） q-超凸性。在两点度量空间 $\{a,b\}$ 上，特化序是平凡的，因此交换 a 和 b 的等距映射是保序的；它没有不动点。

例 4.9（正方形的可交换映射）。设 $X = [0,1]^2$ 满足 u_∞，设 $\sigma(x_1,x_2) = (x_2,x_1)$，并且对于 $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$，令 $\kappa(x) = (\min\{\max\{x_1,\alpha\},\beta\}, \min\{\max\{x_2,\alpha\},\beta\})$。两个映射都是非扩张的：$\sigma$ 是等距映射，而 $t \mapsto \min\{\max\{t,\alpha\},\beta\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是保序且 1-Lipschitz 的，因此对于 u 是非扩张的。由于正方形 $[\alpha,\beta]^2$ 具有对称性，$\sigma\kappa = \kappa\sigma$。公共不动点构成线段 $\{(t,t): \alpha \leq t \leq \beta\}$，这是一个完备格，其最小元为 (α,α)，最大元为 (β,β)，符合定理4.2(d)。这里，$\mathrm{Fix}(\kappa) = [\alpha,\beta]^2$，而 $\mathrm{Fix}(\sigma)$（即对角线）是 X 的完备子格（定理 3.11）。

5. THE POSITION OF FIXED POINT SETS

非扩张映射的不动点集虽然在诱导序下是完备格，但不一定是子格，而且特化序本身也不一定是分配的。三点等距空间的Isbell包同时展现了这两种现象。

引理 5.1. 设 $X = [0,1]^3$ 满足 $q(g,h) = \max_k(h_k \dot{-} g_k)$ 且 $Y = \{g \in X : g \text{ 的两个最大坐标重合}\}$。则 (X,q) 与 (Y,q) 是有界的 q-超凸 T_0-拟度量空间，且 $\leq_q$ 是反向逐坐标序。此外，(Y,q) 等距于空间 $\{a,b,c\}$ 的*Isbell*包，其中 $d(x,y) = 1$ 对 $x \neq y$。

证明。空间(X,q)。由于 $q(g,h) = u_\infty(h,g)$，空间(X,q)是$([0,1]^3,u_\infty)$的共轭拟度量，由定理 2.4知其为 q-超凸；因此由定理 2.2(a)，(X,q)是 q-超凸的。此外，$g \leq_q h$ 当且仅当对所有 k有 $h_k \leq g_k$。

双球。对于 $y \in X$和 $r,\ s \geq 0$，条件 $q(y,\ h) \leq r$表示对所有 k均成立，而 $q(h,\ y) \leq s$表示对所有 k均成立。因此，$(X,\ q)$ 在 y处、半径为 $(r,\ s)$ 的双球为 $X \cap \prod_k [y_k - s, y_k + r]$。

空间 $(Y,\ q)$。设 $(y_i,\ r_i,\ s_i)_{i\in I}$是 Y中的一个非空族，且对所有$i,\ j$都有 $q(y_i,\ y_j) \leq r_i + s_j$，即对所有 $i,\ j,\ k$都有 $y_{j,\ k} - s_j \leq y_{i,\ k} + r_i$。置

$$L_k = \max\Big\{0,\ \sup_i(y_{i,k} - s_i)\Big\}, \qquad U_k = \min\Big\{1,\ \inf_i(y_{i,k} + r_i)\Big\}.$$

于是，对于每个 k，X 中的双球的交集就是盒 $\prod_k [L_k,U_k]$。我们必须在这个盒中找到 Y 的一个点。对三个坐标进行全局重新标记，使得$U_1 \geq U_2 \geq U_3$，并令 $z = (U_2,\ U_2,\ U_3)$。z 的两个最大坐标相同，因此 $z \in Y$，且 $z_2 = U_2$ 和 $z_3 = U_3$ 位于正确的区间内。剩下要证明 $L_1 \leq z_1 = U_2 \leq U_1$。对于

任意 $y \in Y$，最大坐标至少取得两次，因此 y 的最小坐标不大于另外两个坐标的最大值——等价地，对于每个 k，$y_k \le \max_{k' \neq k} y_{k'}$。在 $k=1$ 处逐个指标应用这一结论，可得对于每个 i，$y_{i,\,1} \le \max\{y_{i,2}, y_{i,3}\}$；无论在全局重新标记下，$y_{i,\,1}$，$y_{i,\,2}$，$y_{i,\,3}$ 中哪一个最小，结论都成立：对于 Y 中每个点的每个坐标，该不等式都成立。因此

$$y_{i,1} - s_i \le \max\{y_{i,2} - s_i,\ y_{i,3} - s_i\} \le \max\{L_2, L_3\} \le \max\{U_2, U_3\} = U_2,$$

并且 $L_1 \le U_2$ 因为还有 $0 \le U_2$。

*Isbell*包。在 $\{a,b,c\}$ 上写一个函数对（f，g），其中 $f=(f_a,\ f_b,\ f_c)$，以及 $g=(g_a,\ g_b,\ g_c)$。充足性意味着 $g_x + f_y \ge 1$ 对 $x \neq y$成立。第 2 节的极小性方程变为

$$f_y = \max_{x \neq y}(1 - g_x) \dot{-} 0 = 1 - \min_{x \neq y} g_x, \qquad g_x = 1 - \min_{y \neq x} f_y,$$

这里使用了极小对的取值属于 $[0,1]$这一事实。将第一个方程代入第二个方程，得到 $g_x = \max_{y \neq x} \min_{z \neq y} g_z$。将 g 的坐标排列为 $g_{\sigma 1} \le g_{\sigma 2} \le g_{\sigma 3}$。内部最小值 $\min_{z \neq y} g_z$ 在 $y = \sigma 1$ 时等于 $g_{\sigma 2}$，在 $y = \sigma 2, \sigma 3$时等于 $g_{\sigma 1}$。因此，右端在 $x = \sigma 1$时等于 $g_{\sigma 1}$，而在 $x = \sigma 2$ 以及 $x = \sigma 3$时等于 $g_{\sigma 2}$。因此，极小性成立当且仅当 $g_{\sigma 3} = g_{\sigma 2}$，即 $g \in Y$，且 f由 g确定。最后，对于 $g, g' \in Y$，我们有 $f_y - f'_y = \min_{x \neq y} g'_x - \min_{x \neq y} g_x \le \max_x (g'_x - g_x)$，所以 N中的第一项受第二项支配，并且 $N((f,g),(f',g')) = \max_x (g'_x \dot{-} g_x) = q(g,g')$。嵌入点为$e_a = (0,1,1)$、$e_b = (1,0,1)$和 $e_c = (1,1,0)$。□

定理*5.2*。设 X、q、Y 如定理 *5.1* 中所述。存在一个非扩张 $T\colon X \to X$，满足 *Fix(T)* $= Y$，且 Y 不是 *(X, $\le_q$)* 的子格：e_a *= (0, 1, 1)* 与 e_b *= (1, 0, 1)* 的上确界在 X 中为 *(0, 0, 1)*，而在 Y 中为 *(0, 0, 0)*。

证明。定义 $\rho\colon X \to X$ 为

$$\rho(g)_k = \min\Big\{ g_k,\ \max_{j \neq k} g_j \Big\}, \qquad k \in \{1,2,3\}.$$

若 g 的坐标按递增顺序排列为 $a \le b \le c$，则 $\rho(g)$ 的相应坐标为 a，b，b。因此 $\rho(X) \subseteq Y$，且 ρ 固定 Y 中的每一点。为检验非扩张性，令 $\varepsilon = q(g,\ h)$。则对每个 k 都有 $h_k \le g_k + \varepsilon$，从而

$$\rho(h)_k \le \min\Big\{ g_k + \varepsilon,\ \max_{j \neq k} g_j + \varepsilon \Big\} = \rho(g)_k + \varepsilon.$$

因此 $q(\rho(g)\ \rho(h)) \le \varepsilon = q(g,\ h)$。于是，视 $T = \rho$ 为 X 上的自映射时，它是非扩张的，并且满足 Fix$(T) = Y$。

在 X 中，序是反向逐坐标序，因此 e_a 与 e_b 的上确界是它们逐坐标的最小值（0，0，1），其中最大的坐标值只出现一次；因此（0，0，1）$\notin Y$。在 Y中，h是 e_a和 e_b的一个上界，满足 $h \le$（0，1，1）和 $h \le$（1，0，1）逐坐标成立，即 $h =$（0，0，t），且 $t \in [0,1]$，而 $h \in Y$迫使 $t = 0$。因此，e_a与 e_b在 Y中的上确界是（0，0，0）。□

命题5.3。点 $\bot =$（1，1，1）、$e_a =$（0，1，1）、$e_b =$（1，0，1）、$e_c =$（1，1，0）和$\top =$（0，0，0）在 Y中构成一个与菱形 M_3同构的子格（Y，$\le_q$）。因此，有界 q-超凸空间的特化序未必是分配的。

证明。点 $\bot = (1,1,1)$ 和 $\top = (0,0,0)$ 属于 Y，并且分别是其最小元与最大元。如同定理5.2的证明，对于 e_a、e_b、e_c 中的任意两个元素，它们在 Y 中的上确界都是 $\top$。e_a 和 e_b 在 $(Y, \le_q)$ 中的公共下界 h 按坐标满足 $h \ge (1,1,1)$，因此有 $h = \bot$；其他元素对同理。点 e_a、e_b、e_c 两两不可比。因此，这五个点构成一个同构于 M_3 的子格，并且 $e_a \wedge (e_b \vee e_c) = e_a \wedge \top = e_a \neq \bot = (e_a \wedge e_b) \vee (e_a \wedge e_c)$ 表明 Y 不是分配的。□

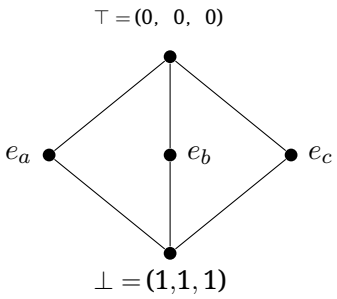


FIGURE 2. 等边三点空间的 Isbell包 M_3 内部的菱形 Y。

定理5.2 应与 定理 3.11进行对比：非扩张映射的不动点集总是 q-超凸的，而 q-容许集总是完备子格，但是 Y在 q-超凸，却不是 q-容许的（在 X 中）。自身的保序自映射表现符合定理4.2的预测。

例5.4. 设 $T\colon\ Y \to Y$, $T(g) = (m, m, m)$，其中 $m = \max_k g_k$。则 T关于反向逐坐标序保持序，且 $q(Tg, Th) = \max_k h_k \dot{-} \max_k g_k \leq \max_k(h_k \dot{-} g_k) = q(g, h)$，因此 T是非扩张的。其不动点集是对角线 $\{(t, t, t)\colon\ t \in [0, 1]\}$，这是一条从 $\top$ 到 $\bot$ 的链，并且是 Y的完备子格；通过 $(t, t, t) \mapsto 1 - t$，它与 $([0, 1], u)$ 等距。最小不动点为 $\bot$，最大不动点为 $\top$。

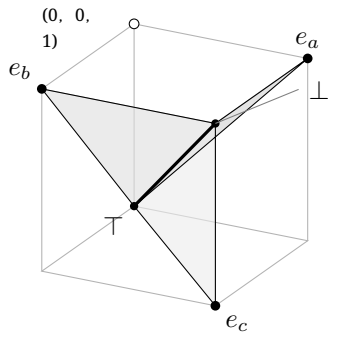


FIGURE 3. 等边三点空间的 Isbell包 Y：沿着从 $\top$ 到 $\bot$的对角线粘合的三个三角形。立方体中 e_a 与 e_b 的上确界为 (0，0，1) $\notin Y$。

6. KLEENE ITERATION

对于完备格上的保序自映射，最小不动点可通过从最小元开始进行超限迭代得到 [7]。问题在于，ω 步是否足够，即$\bigvee_n T^n \bot$ 是否为不动点；当 T保持递增序列的上确界时，该结论成立。

在将拟度量空间视为广义域的理论中，Bonsangue、van Breugel 和 Rutten 所提出的 Yoneda 极限，是前向 Cauchy 网的相关极限 [6], ，而保持这些极限的非扩张映射称为 Yoneda 连续 [6, 12, 13]。非扩张映射未必是 Yoneda 连续的：对于赋予自然二值拟度量的偏序集，非扩张映射就是单调映射，而 Yoneda 连续映射则是 Scott 连续映射 [13, 例 6.1 和 6.6]。这类二值空间若不是单点集，就绝非 q-超凸：若 $d(y,\ x) = 1$，由 y及其半径 (1 2，1) 组成的族，以及 x及其半径 (1，1 2) 满足条件 (1)，但交集中的点 z 将满足

$d(y,\ z) = 0 = d(z,\ x)$，由此得出 $d(y,\ x) = 0$。因此，问题在于q-超凸情形下会发生什么。

本节的主要结果 定理 6.5 是一个五重等价命题：对于一个有界的 q-超凸 T_0-拟度量空间，Smyth 完备性、每个递增序列或有向集向其上确界的 d^s-收敛、每个非扩张自映射保持递增上确界或有向上确界，以及每个非扩张自映射的 Yoneda 连续性彼此等价；并且每一项都蕴含 Kleene 迭代 $T^n\bot$ 收敛到每个非扩张 T 的最小不动点。整个过程中使用了两个辅助结果：有界有向集的上确界就是其 Yoneda 极限（定理 6.3），以及有界q-超凸空间的非扩张映射未必保持递增序列的上确界（定理 6.4）。

定义 6.1。 拟度量空间中的递增序列 $x_0 \le_d x_1 \le_d \cdots$ 若满足序柯西 条件 $\lim_n \sup_{m\ge n} d(x_m,\ x_n) = 0$，则称其为序柯西 。

引理 6.2。 设(x_n) 是一个 T_0-拟度量空间中的递增序列(X, d)。那么(x_n) 是序柯西的，当且仅当它是 d^s-柯西的。更确切地说，对于 $n \le m$,

$$d^s(x_n, x_m) = \max\{d(x_n, x_m), d(x_m, x_n)\} = d(x_m, x_n),$$

因此上确界$_{m\ge n}\, d^s(x_m, x_n)$ =上确界$_{m\ge n}\, d(x_m, x_n)$，两个柯西条件也就相同。

证明。 根据 $\le_d$ 的定义，对于 $n \le m$, $d(x_n, x_m) = 0$ ，因此 $d^s(x_n, x_m) = d(x_m, x_n)$。对 $m \ge n$ 取上确界，然后令 n 中的变量趋于极限，即可得到两者的等价性。□

以下引理的 (b) 部分针对递增序列指出，递增序列的 d^s-极限就是它的上确界；这一结论在每个 T_0-拟度量空间中都成立，归功于 L´opez-Ram´ırez 和 Valero [21]；另见 [10, 引理 2。18] 以及 [28, 命题 2。1]。(a) 和 (c) 部分使用度量并公式 (3)。

引理 6.3。 设(X, d) 是一个 q-超凸 T_0-拟度量空间，且 $D \subseteq X$ 是一个有界有向集，其上确界为 $s = \bigvee D$。

> ***(a)*** 对于 $x \in D$，有 $d(x, s) = 0$ 且 $d^s(x, s) = d(s, x) =$ *sup*$_{y\in D}\, d(y, x)$，并且 $x \mapsto d(s, x)$ 在 D上是非递增的。因此，当且仅当 *inf*$_{x\in D}\, d(s, x) = 0$时， D 在 (X, d^s) 中收敛到 s。***(b)*** 如果 D 在 (X, d^s) 中收敛到一点 y，则 $y = s$。***(c)*** s 是左 K-柯西网 D的唯一 *Yoneda* 极限。

特别地，递增序列(x_n) 是序柯西的，当且仅当它在(X, d^s)中收敛到其上确界。

证明。（a）根据（3）， $d(s, x) = \sup_{y\in D} d(y, x)$，且 $d(x, s) = 0$，因为 s是一个上界。若$x \le_d x'$ 属于 D，则 $d(s, x') \le d(s, x) + d(x, x') = d(s, x)$。非递增的非负实数网收敛于其下确界。（b）对于 $x \in D$，该网最终处于 d^s-闭集 $\uparrow x$中（定理 2.1(b)），因此 $x \le_d y$；如果 b 是 D的一个上界，则该网处于 d^s-闭集 $\downarrow b$中，因此 $y \le_d b$。所以 y 是上确界。（c） D 是左 K-序柯西的，因为对于 $x \le_d x'$， $d(x, x') = 0$ 。固定 w时， $x \mapsto d(x, w)$ 在 D上是非递减的，因为 $d(x, w) \le d(x, x') + d(x', w)$。因此，根据（3），$\inf_{x\in D} \sup_{x'\ge x} d(x', w) = \sup_{x\in D} d(x, w) = d(s, w)$。唯一性由 T_0推出。对于递增序列，（a）给出 $d(s, x_n) = \sup_{m\ge n} d(x_m, x_n)$，这就是序柯西条件。□

例 6.4（Kleene 迭代可能需要 $\omega + 1$ 步）。令 $X = [0, 1]^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ with$d((x, z), (y, w)) = \max\{\sup_k(x_k \dot{-} y_k)\ \ z \dot{-} w\}$。根据定理 2.4， X 是一个带有逐坐标序的有界 q-超凸T_0-拟度量空间；其最小元为 $\bot = (0, 0)$。令$S(x) = (1, x_0, x_1, \ldots)$ 表示插入 1 的移位，令 $\Lambda(x) =$上极限$_k\, x_k$，并定义

$$T(x, z) = \big(Sx,\ \max\{z, \Lambda(x)\}\big).$$

T 是非扩张的。我们有 $\sup_k\big((Sx)_k \dot{-} (Sy)_k\big) = \sup_k(x_k \dot{-} y_k)$，因为 $(Sx)_0 = (Sy)_0 = 1$，且 $\Lambda(x) - \Lambda(y) \leq$ 上极限$_k(x_k - y_k) \leq \sup_k(x_k \dot{-} y_k)$。由于 $\max\{a,b\} \dot{-} \max\{c,e\} \leq \max\{a \dot{-} c,\ b \dot{-} e\}$，我们得到 $d(T(x,\ z)\ T(y,\ w)) \leq \max\{\sup_k(x_k \dot{-} y_k)\ \ z \dot{-} w\}$。

轨道 $\perp$。根据归纳法，$T^n\perp = (c_n,\ 0)$，其中 $c_n = (1,\ \ldots\ldots,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots\ldots)$ 有 n 个条目为 1，因为 $\Lambda(c_n) = 0$。该轨道递增，其上确界为 $s = (1,\ 0)$，其中 $1 = (1,\ 1,\ \ldots\ldots)$，并且对所有 n，$d(s,\ T^n\perp) = 1$。

结论。$T(s) = (1, \Lambda(1)) = (1, 1) \neq s$，因此 $\bigvee_n T^n\perp$ 不是不动点，且 T 不保持递增序列 $(T^n\perp)$ 的上确界。唯一的不动点是 $(1, 1)$：$Sx = x$ 迫使 $x = 1$，然后 $z = \max\{z, 1\} = 1$。在超限迭代中，它等于 $T(s) = T^{\omega+1}\perp$（图 4）。

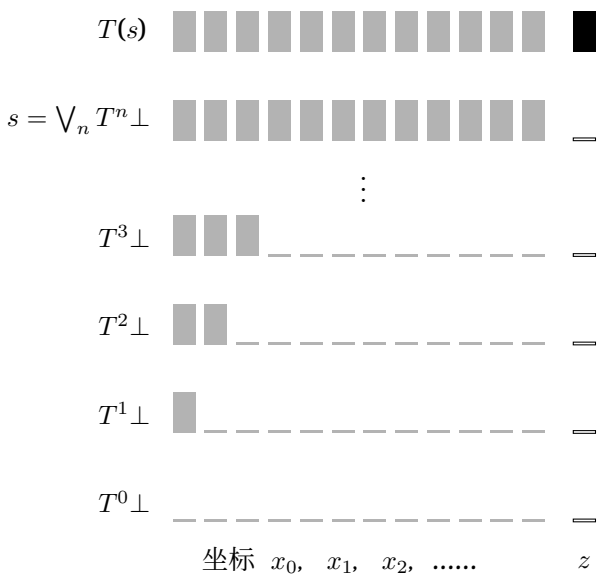


FIGURE 4. 在定理 6.4中的轨道。每根柱形表示 的一个坐标，最后一个盒为 。轨道逐个填充坐标；其上确界 具有 $z = 0$，但 $T(s)$ 具有 $z = 1$。

下列定理表明，这一现象由 Smyth 完备性所支配。

定理 6.5. 设 (X, d) 是一个有界的 q-超凸 T_0-拟度量空间。以下条件等价：

(i) X 中的每个递增序列都是序柯西的，即在 (X, d^s) 中收敛到其上确界；*(ii)* (X, d) 是 *Smyth* 完备的；*(iii)* X 中的每个有向子集都在 (X, d^s) 中收敛到其上确界；*(iv)* X 的每个非扩张自映射都保持有向子集的上确界；*(v)* X 的每个非扩张自映射都保持递增序列的上确界；*(vi)* X 的每个非扩张自映射都是 *Yoneda* 连续的。

如果这些条件成立，那么对于每个非扩张自映射 $T\colon\ X \to X$，序列 $T^n\perp$ 在 (X, d^s) 中收敛到 T 的最小不动点。

Proof. We prove (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(v)⇒(i) and (ii)⇒(vi)⇒(v).

(i)⇒(ii)。根据 [26, 命题 1]，只需证明每个左 K-柯西序列 (x_n) 都在 $(X,\ d^s)$ 中收敛。取 $n_1 < n_2 < \cdots$ 使得，当 $d(x_p,\ x_q)$ 时 $< 2^{-k}$，只要 $n_k \leq p \leq q$,

并令 $y_k = x_{n_k}$， $\eta_k = 2^{1-k}$ 以及 $q_k = \eta_k * y_k$，为定理 3.3的余幂。于是 $q_k \le_d y_k$且 $d(y_k, q_k) \le \eta_k$，因此 $d^s(q_k, y_k) \le \eta_k$。序列 (q_k) 是递增的：
$d(q_k, q_{k+1}) = d(y_k, q_{k+1}) \dot{-} \eta_k \le \big(d(y_k, y_{k+1}) + d(y_{k+1}, q_{k+1})\big) \dot{-} \eta_k \le (2^{-k} + 2^{-k}) \dot{-} 2^{1-k} = 0.$
根据 (i)，对于某个 s， $q_k \to s$ 属于 (X, d^s)，因此 $y_k \to s$ 属于 (X, d^s)。给定 $\varepsilon > 0$，选取 k 使得$2^{-k} < \varepsilon$ 且对于所有 $j \ge k$都有 $d^s(y_j, s) < \varepsilon$。当 $n \ge n_k$ 时，我们有 $d(s, x_n) \le d(s, y_k) + d(y_k, x_n) < 2\varepsilon$；选取满足 $n_j \ge n$ 的 $j \ge k$，可得 $d(x_n, s) \le d(x_n, y_j) + d(y_j, s) < 2\varepsilon$。因此， $x_n \to s$ 属于 (X, d^s)。

(ii)⇒(iii)。有向集 D 是左 K-柯西网（定理 6.3(c)）；根据 (ii)，它在（X， d^s）中收敛，且其极限由 $\bigvee D$ 根据定理 6.3(b) 给出。

(iii)⇒(iv)。设 T 为非扩张的， D 为有向的，且上确界为 s。根据 (iii)， D 在（X, d^s）中收敛于 s。由于 T对于 d^s是非扩张的，网（Tx）$_{x\in D}$在（X, d^s）中收敛于 Ts。像 T（D）是有向的，因为 T 是保序的（定理 2.1(a)）。将其应用于网（Tx）$_{x\in D}$：对于每个固定的 $x_0 \in D$，该网最终落在 d^s-闭集 $\uparrow Tx_0$中（定理 2.1(b)），因此 $Tx_0 \le_d Ts$；若 b 是 T（D）的上界，则该网落在d^s-闭集 $\downarrow b$中，因此 $Ts \le_d b$。于是 $Ts = \bigvee T$（D）。

(iv)⇒(v)显然，因为递增序列是有向集。

(v)⇒(i)。假设 (x_n) 递增但不是序柯西，并令 $s = \bigvee_n x_n$。由定理 6.3(a)， $d(s, x_n)$ 递减至某个 $\delta > 0$；特别地，对所有 n，都有 $s \ne x_n$。令 $z = \delta * s$，于是 $z \le_d s$ 且 $d(s, z) \le \delta$。此外， $z \ne s$：否则，对所有 w，都有 $d(s, w) \dot{-} \delta = d(s, w)$，因此对所有 w，都有 $d(s, w) = 0$，这与 $d(s, x_0) \ge \delta > 0$ 矛盾。在 $A = \{x_n$ 上： $n \in \mathbb{N}\} \cup \{s\}$ 定义$f(x_n) = z$，并定义 $f(s) = s$。于是 f 是非扩张的： $d(f($ $x_n)$ $f(x_m)) = 0$, $d(f(x_n)$ $f(s)) = d(z, s) = 0$，且 $d(f(s)$ $f(x_n)) = d(s, z) \le \delta \le d(s, x_n)$。由定理 2.3， f可扩张为一个非扩张的 T： $X \to X$，且 $\bigvee_n Tx_n = z \ne s = T(\bigvee_n x_n)$，这与 (v) 矛盾。

(ii)⇒(vi)。设（x_i）是一个具有 Yoneda 极限 y 的左 K-柯西网。根据（ii）， （x_i）在（X， d^s）中收敛于某个 y'，而该点是（x_i）的 Yoneda 极限；因此 $y' = y$。由于 T 对于 d^s、 $Tx_i \to Ty$ 在（X， d^s）中是非扩张的，所以 Ty 是（Tx_i）的 Yoneda 极限。

(vi)⇒（v）。根据定理 6.3（c），递增序列（x_n）的上确界是其 Yoneda 极限。由（vi），Ts 是递增序列（Tx_n）的 Yoneda 极限，而根据定理 6.3（c），该极限为 $\bigvee_n Tx_n$。

最后，在（v）和（i）条件下，递增序列 $T^n\bot$ 的上确界 s 满足 $Ts = \bigvee_n T^{n+1}\bot = s$，并且在（$X$， d^s）中满足 $T^n\bot \to s$。如果 p 是一个不动点，则根据归纳法，对所有 n 都有 $T^n\bot \le_d p$，因此 $s \le_d p$。所以 s 是最小不动点。□

注 6.6。定理 6.5 的蕴含关系 (ii)⇒(i) 在每个 T_0-拟度量空间中都成立，并且这是已知结果：Smyth 完备性意味着递增序列在 (X, d^s) 中收敛，特别是，它们也会按照 Shahzad 和 Valero 所采用的较弱的序完备性意义收敛 [28, 推论 2.16]；另见 [10, 命题 2.19]。在他们的 Kleene 型定理中， [28, 定理 2.3], [10, 推论 2.17], 映射沿轨道的序连续性是一个假设。定理 6.5 表明，对于有界 q- 超凸空间上的非扩张映射，当且仅当该空间是 Smyth 完备时，这一假设才会自动满足。只要 (ii) 成立，方向 (iii)⇒(iv)⇒(v) 以及 (ii)⇒(vi) 都是常规的； q-超凸情形中特有的内容在于逆向蕴含 (i)⇒(ii) 和 (v)⇒(i)，前者分别使用定理 3.3 的余幂和定理 2.3 的内射性，而在 [28, 10]的一般准度量理论中没有对应结果。文献 [28, 10] 采用共轭约定 $d_u(x, y) = \max\{y - x, 0\}$ 来定义 $\mathbb{R}$上的标准准度量。

注记 6.7。 对于一般的 T_0-拟度量空间，Smyth 完备性远强于递增序列的收敛性；例如，偏序集的自然 T_0-拟度量是 Smyth 完备的，当且仅当该偏序集满足升链条件，因为此时 d^s 是离散度量。(i)⇔(ii) 的等价性利用了可用的余幂

q-超凸空间：它们用小 K-距离内的递增序列取代左 d^s-柯西序列。(v)⇒(i) 的蕴含关系利用了内射性。此处构造的映射将一个非序柯西序列压缩到其上确界的余幂上；在 定理 6.4中，这种失效在 $\perp$ 自身的轨道上显而易见。是否总能做到这一点，将在第 8 节中讨论。

命题 6.8。 设 (X, d) 是一个有界的 q-超凸 T_0-拟度量空间，且(X, d^s) 是紧的。则 X 中的每个递增序列都是序柯西的；因此 X 是 *Smyth* 完备的，并且 X 的每个非扩张自映射都是 *Yoneda* 连续的。特别地，这适用于 $(\mathbb{R}^n, u_\infty)$ 中的盒子 $\prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k]$，以及每个有限 T_0-拟度量空间的 *Isbell*包。

证明。设 (x_n) 是一个上确界为 s 的递增序列。由紧性可知，子序列 (x_{n_k}) 在 (X, d^s) 中收敛于某个点 y。该子序列是递增的，因此根据定理 6.3(b)， y 是其上确界；又因为该子序列是余最终的，所以这个上确界就是 s。根据定理 6.3(a)，$d(s, x_n)$ 在 n 中是非递增的，并且 $d(s, x_{n_k}) \leq d^s(s, x_{n_k}) \to 0$；因此 $d(s, x_n) \to 0$，即 (x_n) 是序柯西的。其余断言由定理 6.5 得出。对于盒子， u_∞^s 是最大度量。对于直径为 $D =$ 的有限空间 X ，极小对满足$0 \leq f$、$g \leq D$ ，并且由第 2 节的闭条件刻画；因此 $Q(X)$ 是 $\mathbb{R}^{2|X|}$的闭有界子集，而 N^s 是对上的最大度量。□

在定理 6.4中，空间 $[0, 1]^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ 并非 Smyth 完备，这与定理 6.5一致，尽管每个因子 $[0, 1]$ 都是 Smyth 完备的。

7. Maps that are nonexpansive on comparable pairs

赋予偏序的度量空间上的单调非扩张映射已由 Bachar、Bin Dehaish、Khamsi、Wi´snicki 等人研究过 [5, 24]。在我们的设定中，序关系由拟度量读出；如果 T 是一个 T_0-拟度量空间上的自映射，则当 x和 y是 $\leq_d$-可比时，若 $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$，就称其为可比对非扩张的。若 $x \leq_d y$，则关于点对 (x, y) 的条件表示为 $Tx \leq_d Ty$，因此可比对非扩张映射是保序的；对于可比点对上的压缩映射，这一观察即为 [28, 推论 2.19]。带有外部序关系的度量版本可追溯至 Ran 和 Reurings，以及 Nieto 和 Rodr´ıguez-L´opez [25, 23]。然而，在q-超凸空间中，这种弱化并无实际收益，下一命题将说明这一点。

命题 7.1。 每个 q-超凸 T_0-拟度量空间上的可比对非扩张自映射都是非扩张的。

证明。令 x、$y \in X$以及 $j = x \vee y$（定理 3.1）。于是 $Tx \leq_d Tj$，有序对（j，y）是可比的，并且根据（3），$d(j, y) = \max\{d(x, y)\ d(y, y)\} = d(x, y)$。因此，$d(Tx, Ty) \leq d(Tx, Tj) + d(Tj, Ty) \leq 0 + d(j, y) = d(x, y)$。□

例 7.2。在 q-超凸情形之外，这两个概念并不相同。设 $X = \{\perp, a, b\}$，其中 $d(\perp, a) = d(\perp, b) = 0$，$d(a, \perp) = d(b, \perp) = 2$，$d(a, b) = 1$，$d(b, a) = 2$。这是一个 T_0-拟度量，固定 $\perp$ 并交换 a 和 b 的映射是可比对非扩张的，但不是非扩张的，因为 $d(Ta, Tb) = 2 > 1 = d(a, b)$。根据定理 7.1， $\{a, b\}$ 在 X中没有上界。

在 q-超凸空间之外，可比对非扩张映射满足以下不动点结果。这是 Rutten 定理 [27]以及 Shahzad 和 Valero 的 Kleene 型定理 [28, 定理 2.3 和推论 220], 的一个变体，其中以轨道的序柯西性质替代了序连续性；我们给出简短证明。

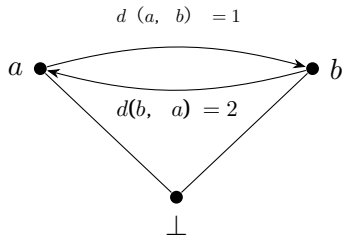


FIGURE 5. 空间 定理 7.2中的。交换 a 与 b 在可比较的点对上是非扩张的 $\{\bot, a\}$ 和 $\{\bot, b\}$，但会扩张点对（a, b）。

命题 7.3。 设 (X, d) 是一个双完备的 T_0-拟度量空间，且令 $T\colon\ X \to X$ 为可比对非扩张映射。假设 $x_0 \leq_d Tx_0$ 且轨道 $x_n = T^n x_0$ 是序柯西的。则 (x_n) 在 (X, d^s) 中收敛于点 x^*，该点是 $\{x_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$的上确界，并且是 T 在 $\uparrow x_0$中的最小不动点。

证明。由于 T 是保序的，$x_n \leq_d x_{n+1}$ 根据归纳法对所有 n 成立。由定理 6.2，序列（x_n）是 d^s-柯西的，并在完备度量空间（X, d^s）中收敛到某个 x^*。对于固定的 n，所有满足 $m \geq n$ 的 x_m 都属于 d^s- 闭集 $\uparrow x_n$，因此 $x_n \leq_d x^*$；并且如果 b 是该轨道的上界，则所有 x_m 都属于 d^s-闭集 $\downarrow b$，因此 $x^* \leq_d b$。于是 x^* 是该轨道的上确界。由 $x_n \leq_d x^*$ 可得，对所有 n都有 $x_{n+1} \leq_d Tx^*$，且 $x_0 \leq_d x_1$，因此$x^* \leq_d Tx^*$。另一方面，x_n 和 x^* 是可比较的，所以

$$d(Tx^*, x^*) \leq d(Tx^*, Tx_n) + d(x_{n+1}, x^*) \leq d(x^*, x_n) + 0 \longrightarrow 0.$$

因此 $Tx^* \leq_d x^*$，且 $Tx^* = x^*$。如果 $p \in \uparrow x_0$ 是一个不动点，则 $x_n \leq_d p$ 意味着 $x_{n+1} = Tx_n \leq_d Tp = p$，所以所有 $x_n \leq_d p$ 和 $x^* \leq_d p$。□

即使对于有界q-超凸空间上的非扩张映射，序柯西假设也不能被舍弃（定理 6.4），并且可比较的非扩张性不能弱化为单调性：在（$\mathbb{R}$, u）上，满足 T（x）$= \frac{x+1}{2}$（当 $x < 1$且 T（x）$= x + 1$当 $x \geq 1$时的映射是保序的，0 的轨道为 $1 - 2^{-n}$，它是递增的且为序柯西，而 T没有不动点。

8. OPEN PROBLEMS

上述结果留下了若干未解决的问题；对于每个问题，我们都陈述目前掌握的部分信息或猜想。

Kleene 迭代与 Scott 连续性。 定理 6.5 将 Smyth 完备性刻画为所有非扩张映射均具有 Scott 连续性的等价条件，但（v）的证明中的诊断⇒（i）是通过内射性构造的：它将任意非序柯西递增序列压缩到其上确界的一个余幂上。在 定理 6.4中，失败则具体体现在最小元的轨道（$T^n\bot$）上。

问题 8.1。 设 (X, d) 是一个有界的 q-超凸 T_0-拟度量空间，但不是 Smyth 完备的。是否存在一个非扩张自映射 $T\colon X \to X$，其轨道（$T^n\bot$）不是序柯西的，即 $\bigvee_n T^n\bot$ 不是不动点?

我们预计一般而言答案是否定的。在 (v)⇒(i) 的证明中构造的映射，将一个指定的非序柯西递增序列压缩到其上确界的余幂上，但没有理由认为这样的序列应当作为非扩张自映射的轨道（$T^n\bot$）出现，更不用说以 $\bot$ 作为起始点了。若答案为肯定，则可将 Smyth 完备性的失效定位在单个典范点的轨道上。

一个相关问题涉及超限 Kleene 迭代在哪些序数处终止。定理 6.4 表明 $\omega+1$ 可在一个有界 q-超凸空间中实现；我们不知道是否会出现更大的可数序数。Cousot 和 Cousot [7] 提供了一般的超限框架。

问题 8.2。 对于哪些可数序数 α，存在一个有界的 q-超凸T_0-拟度量空间 $(X,\ d)$ 以及一个非扩张映射 $T\colon X\to X$，使得从 $\bot$ 开始的超限 Kleene 迭代恰好在阶段 α 达到一个不动点?

对于无界的 q<style id='4}-超凸空间，$(\mathbb{R},\ u)$ 不是 Smyth 完备的：序列 $(n)_{n\in\mathbb{N}}$是左 K-Cauchy（实际上是递增的），但没有 u^s-极限。其有界递增序列确实收敛，因此，定理 6.5 的适当类比形式可能会将 (i) 、 (ii) 、 (iii) 限定于有界序列和集合。

问题 8.3。 请针对无界的 定理 6.5，表述并证明其对于无界 q-超凸T_0-拟度量空间的类比形式，并将 (i)、(ii)、(iii) 限定于有界序列和集合。

序理论方面。定理 5.3 表明，非分配格可以作为有界 q-超凸空间的特化序：菱形 M_3 作为子格嵌入等边三点空间的 Isbell包中。我们没有研究模性。

问题 8.4。等边三点空间的 Isbell包的特化序 $(Y,\ \leq_q)$，如定理 5.1所述，是否具有模性？ N_5 是否作为子格出现在 $(Y,\ \leq_q)$ 中，或者更一般地，出现在某个有界 q-超凸空间的特化序中?

对 Y中符合模律的三元组进行计算抽样 $a\leq c\Rightarrow a\vee(b\wedge c)\ =(a\vee b)\ \wedge c$ 没有发现明显的反例；我们猜想 $(Y,\ \leq_q)$ 具有模性，但不具有分配性。Banaschewski–Bruns 对戴德金–麦克尼尔完备化的描述 [4]，结合 Agyingi、Haihambo 和 K¨unzi [1] 关于偏序集的戴德金–麦克尼尔完备化与其自然 q-超凸包之间的对应关系，表明模性可以从生成偏序集的性质中读出。

问题 8.5。 哪些完备格可以作为有界q-超凸 T_0-拟度量空间的特化序（在格同构意义下）？

不动点集中的子格。 定理 3.11 和 5.2 共同表明，非扩张映射的不动点集是 q-超凸的，但不一定是环境空间的子格；而 q-可容许集始终是完备子格。这引出了：

问题 8.6。 刻画有界 q-超凸 T_0-拟度量空间中不动点集为子格的非扩张自映射。等价地，刻画有界 q-超凸空间中的 q-超凸子空间，使其成为完备子格。

一个充分条件是 q-可容许性，即不动点集满足定理 3.11中的条件（双球的交集），例如当 T 是径向收缩的复合时即成立。其逆命题尚未解决。

非对称赋范空间。 我们所知的 q-超凸非对称赋范实向量空间是 $(\mathbb{R},\ u)$ 和 $(\mathbb{R}^n,\ u_\infty)$（以及它们的积），连同 Conradie、K¨unzi 和 Olela Otafudu 所描述的 Isbell-凸包 [8]。我们不知道其他非平凡的例子。

问题 8.7。 除 $(\mathbb{R}^n,\ u_\infty)$ 及其闭子空间外，是否还存在 q-超凸非对称赋范实向量空间？更具体地说，每个 q-超凸非对称赋范空间是否都与这种形式的赋范空间等距同构?

应用与进一步方向。 Valero 及其合作者利用复杂度空间的特化序分析了算法的递推方程 [10]; 人们可以进一步探讨，在复杂度空间的 Isbell包 中，定理4.2 无需连续性假设即可适用，是否能在其中发挥更多作用。对于 q-球完备 T_0-超拟度量空间，也应当可以得到类似结果，其中半径和被最大值所取代 [19], 。

致谢。 [待补充。]

References

[1] C. A. Agyingi、P. Haihambo 和 H.-P. A. K¨unzi， T_0-拟度量空间中的端点：第二部分，《抽象与应用分析》2013（2013），文章编号539573。doi:10.1155/2013/539573。[2] C. A. Agyingi，拟度量空间范畴中的超凸包，博士论文，开普敦大学，2014年。访问地址：http://hdl.handle.net/11427/12708。[3] N. Aronszajn 和 P. Panitchpakdi，一致连续变换的延拓与超凸度量空间，《太平洋数学杂志》6（1956），405–439。doi:10.2140/pjm.1956.6.405。[4] B. Banaschewski 和 G. Bruns，MacNeille完备化的范畴刻画，《数学档案》（巴塞尔）18（1967），369–377。doi:10.1007/BF01898828。[5] B. A. Bin Dehaish 和 M. A. Khamsi，单调非扩张映射的 Browder 和 G¨ohde 不动点定理，《不动点理论与应用》2016（2016），论文编号20。doi:10.1186/s13663- 016-0505-8。[6] M. M. Bonsangue、F. van Breugel 和 J. J. M. M. Rutten，通过 Yoneda嵌入研究广义度量空间：完备性、拓扑与幂域，《理论计算机科学》193（1998），1–51。[7] P. Cousot 和 R. Cousot，Tarski不动点定理的构造性版本，《太平洋数学杂志》82（1979），43–57。doi:10.2140/pjm.1979.82.43。[8] J. Conradie、H.-P. A. K¨unzi 和 O. Olela Otafudu，非对称赋范实向量空间的 Isbell-凸包上的向量格结构，《拓扑学及其应用》231（2017），92–112。doi:10.1016/j.topol.2017.09.016。[9] R. Esp´ınola 和 M. A. Khamsi，超凸空间简介，载于《度量不动点理论手册》，Kluwer，Dordrecht，2001年，第391–435页。[10] A. Estevan、J. J. Mi˜nana 和 O. Valero，偏序集上的不动点理论及其在算法渐近复杂度中的应用，《西班牙皇家精确、物理与自然科学学院学报A辑：数学》113（2019），3233–3252。doi:10.1007/s13398-019-00691-8。[11]S. Fujii，完备性与内射性，《拓扑学及其应用》301（2021），文章107503。doi:10.1016/j.topol.2020.107503。[12] J. Goubault-Larrecq，《非豪斯多夫拓扑与域理论》，新数学专著22，剑桥大学出版社，剑桥，2013年。[13] J. Goubault-Larrecq 和 K. M. Ng，关于形式球的几点注记，《计算机科学逻辑方法》 13 （ 2017 ），第 4 期，论文编号 18。doi:10.23638/LMCS-13(4:18)2017。[14] P. Haihambo， T_0-拟度量空间的超凸性与端点，硕士论文，开普敦大学，2013年。[15] J. R. Isbell，关于内射度量空间的六个定理，《瑞士数学评论》39（1964），65–76。[16] E. Kemajou、H.-P. A. K¨unzi 和 O. Olela Otafudu，di-空间的 Isbell包，《拓扑学及其应用》159（2012），2463–2475。[17] W. A. Kirk 和 N. Shahzad，《距离空间中的不动点理论》，Springer，Cham，2014年。doi:10.1007/978-3-319-10927-5。[18] H.-P. A. K¨unzi 和 O. Olela Otafudu，拟伪度量空间中的 q-超凸性与不动点定理，《函数空间及其应用》2012（2012），文章编号765903。doi:10.1155/2012/765903。[19] H.-P. A. K¨unzi 和 O. Olela Otafudu， T_0-超拟度量空间的超拟度量内射包，《应用范畴结构》21（2013），651–670。[20] F. W. Lawvere，度量空间、广义逻辑与闭范畴，《米兰数学与物理研讨会论文集》43（1973），135–166；附作者评论重印于《理论与应用范畴重印集》1（2002），1–37。访问地址：http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/1/tr1abs.html。[21] M. L´opez-Ram´ırez 和 O. Valero，计算机科学中的定性与定量不动点技术，《数学问题集》41（2018），115–127。doi:10.2989/16073606.2017.1373712。

[22] S. N. Mishra 和 O. Olela Otafudu， q-超凸T_0-拟度量空间中的渐近非扩张映射，《高级不动点理论》3（2013），135–140。访问地址：https://scik.org /index.php/afpt/article/view/720。[23] J. J. Nieto 和 R. Rodr´ıguez-L´opez，偏序集中的压缩映射定理及其在常微分方程中的应用，《序》22（2005），223–239。[24] D. H. Quan 和 A. Wi´snicki，度量空间与模空间中的 G-单调映射不动点，《非线性分析拓扑方法》63（2024），167–184。doi:10.12775/TMNA.2024.003。[25] A. C. M. Ran 和 M. C. B. Reurings，偏序集中的一个不动点定理及其在矩阵方程中的一些应用，《美国数学学会会刊》132（2004），1435–1443。[26]S. Romaguera 和 P. Tirado，通过 Caristi 不动点定理刻画 Smyth 完备拟度量空间，《不动点理论与应用》2015（2015），论文编号183，doi:10.1186/s13663-015-0431-1。[27] J. J. M. M. Rutten，广义超度量域理论基础，《理论计算机科学》170（1996），349–381。[28] N. Shahzad 和 O. Valero，拟度量空间中的不动点定理与特化偏序，《不动点理论》19（2018），733–750。doi:10.24193/fpt-ro.2018.2.55。[29] I. Stubbe，量子拟群中充实的范畴结构：张量化范畴与余张量化范畴，《理论与应用范畴》16（2006），283–306。访问地址：http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/16/14 /16-14abs.html。[30] A. Tarski，格论不动点定理及其应用，《太平洋数学杂志》5（1955），285–309。doi:10.2140/pjm.1955.5.285。[31] C. A. Agyingi 和 Y. U. Gaba， T_0-拟度量空间中的不动点理论：一篇综述，预印本，2026年。

（C. A. Agyingi） Department of Mathematical Sciences、 University of South Africa (Unisa)、 Pretoria、 South Africa

（Y. U. Gaba） AI Research and Innovation Nexus for Africa (AIRINA Labs)、 Bénin; African Center for Advanced Studies (ACAS)、 Cameroon