平顶波束序列

Cheng Du，*IEEE*会员

摘要—平顶波束在雷达和通信系统中有诸多应用。优值因子发散的序列可以逼近理想全向波束，但不能直接用于平顶波束，因为平顶波束需要同时控制通带波纹和阻带泄漏。为弥补这一不足，我们运用傅里叶分析工具研究平顶波束这两项指标的渐近行为，并针对有限字母表和无限字母表序列分别得出不同结论。对于有限字母表序列，包括二进制和四进制序列，随着序列长度趋于无穷，其通带波纹和阻带泄漏无法同时趋于零。然而，对于无限字母表序列，当且仅当长度与带宽的乘积 $N\gamma$ 趋于无穷，且步长 a 与 $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ 之间的距离趋于零时，广义阶梯啁啾（GSC）序列才能同时满足这两项要求。此外，当 $a \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ 时，这两项指标均以 $O((N\gamma)^{-1/2})$ 的速率趋于零。这些结果将经典序列设计的适用范围从全带频谱平坦性拓展出去，并为平顶波束合成奠定了理论基础。

arXiv:2611.32418v1 [cs.IT] 24 Nov 2026

索引词—序列设计、平顶波束合成、非周期自相关、优值因子、有限字母表、广义阶跃啁啾序列。

I. 引言

平顶波束合成是天线阵列设计中的经典问题 [1], [2]: 选择激励权重，使预定角度扇区内的功率近似一致，并降低该扇区之外的辐射。这类波束可用于雷达扇区搜索，在监视区域内照射目标 [3], ，也可用于蜂窝通信系统中的波束扫描，在初始接入阶段向用户设备（UE）发送公共消息 [4], [5]。在大规模多输入多输出（MIMO）通信系统中，平顶波束还可以提高波束搜索期间的检测概率 [6]。

与平顶波束相比，全向波束将能量近似均匀地分散到整个角度范围内。在蜂窝通信系统中，它们用于在无需波束扫描的情况下广播公共消息 [4], [7], [8]。这一覆盖整个小区的广播要求由3GPP [9,第5.5], 节规定，商用5G无线电设备已经采用单个宽波束来传输同步信号块 [10]。

对于均匀线性阵列（ULAs），波束方向图本质上是激励向量 [5], [8], 的连续频率功率谱；根据维纳–辛钦定理，这些功率谱由其非周期自相关决定。因此，有必要通过序列设计来研究波束合成。具体而言，对于全向波束，全带波纹渐近趋于零要求激励序列的优值因子趋于无穷大 [11], [12]；对于平顶波束，通带波纹由非周期自相关决定，而阻带泄漏是自相关的仿射函数，详见第II-C小节。

第二个动机在于实际硬件实现方面。多相序列在序列设计中得到了广泛研究 [12], ，可产生等幅激励，并能通过单条射频（RF）链和移相器网络（PSN）实现 [6]。与全数字阵列相比，这可以减少发射机处成本高昂的数模转换器（DAC）和接收机处的模数转换器（ADC）数量 [13]。此外，恒模激励可使功率放大器（PA）的负载保持均匀，从而避免额外的功率回退，并有望提高功率放大器能效 [4], [5]。而且，序列设计中常用的二元与四元字母表 [14], [15],分别只需采用一位和两位移相器，进一步降低移相器网络（PSN）的成本 [13]。

A. 相关工作

仅相位波束合成。 仅相位波束合成通过调整激励相位，同时保持其幅度不变，来塑造波束方向图。基于优化的方法在模长为 1 的约束下处理由此产生的非凸问题 [16], [17], [18]。解析方法采用非线性调频加权 [19], 、二次相位（采样线性调频）激励 [20],或传输映射 [21], [22]。具体而言，广义阶梯啁啾（GSC）序列将采样线性调频扩展到低比特移相器的应用场景；数值证据表明，在某些参数选择下，通带波纹和阻带泄漏会渐近趋于零 [5]。

这些方法通过数值优化或解析参数选择，灵活控制平顶波束的波束宽度
。然而，随着天线数量增加，通带波纹和阻带泄漏渐近行为的严格分析仍然有限。

高优值因子序列。Littlewood 猜想，二进制序列的最优优值因子可以任意大 [23], ，而 Golay 的启发式分析则预测其渐近最优值为有限值 $12.3248\ldots$ [11]。显式构造给出了最优渐近优值因子的下界：Rudin–Shapiro型递推可产生极限优值因子为 3 [24], [25] 的序列。基于差集和有限域特征的构造 [26], [27] 包括极限优值因子为 $6.342061\ldots$ [28], [29] 的附加旋转勒让德序列。数值优化 [30]以及对劣因子分布的研究 [31] 为这些构造提供了补充。值得注意的是，OpenAI 最近的一篇预印本声称，存在优值因子发散的二进制序列 [32, 定理 8。1], 如果这一说法成立，就能证明 Littlewood 猜想。

当相位字母表允许随序列长度增大时，早已知道某些多相序列能够

ChengDu 任职于中国东莞大湾区大学计算与信息技术学院（电子邮箱: cdu@gbu.edu.cn）。

实现发散的优值因子。经典示例包括 Frank 序列和 Chu序列 [33], [34], ，其优值因子分别渐近于 $(\pi^2/4)\sqrt{N}$ 和 $(\pi/2)\sqrt{N}$ [35]，[36]。Petrolati、Angeletti 和 Toso 提出的分段线性多相码（PAT码）进一步提供了具有良好有限长度优值因子的构造 [37]。采用任意相位进行数值积分旁瓣电平（ISL）最小化，可得到更多序列设计 [38], [39], [40], ；而超平坦多项式构造则证明归一化功率谱一致收敛于常数，这同样意味着优值因子发散 [41], [42]。

尽管这些序列设计结果通过全带频谱平坦性为全向波束合成提供了理论基础，但它们无法直接推广到平顶波束合成，因为后者必须将功率集中在指定扇区内。

B. 问题与贡献

为弥合平顶波束合成与序列设计之间的差距，我们研究当序列长度趋于无穷时，平顶波束的通带波纹和阻带泄漏能否同时消失，也就是说，能否渐近逼近理想平顶波束。结果表明，答案取决于字母表的大小。

1) 有限字母表的否定结果。我们证明，当序列长度趋于无穷时，对于任何有限复数字母表，包括二进制和四进制字母表，通带波纹和阻带泄漏都无法同时消失；而这两种字母表原本尤其适合采用低成本 PSN 实现。这与全带情形形成对比，后者近期有研究声称二进制序列的优值因子可无限增大 [32]。

2) 无限字母表上的正面结果。我们证明，对于采用无限字母表的 GSC 序列，当且仅当 $N\gamma \to \infty$ 且 $\mathrm{dist}(a, \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}) \to$ 时，其通带波纹和阻带泄漏会同时消失 0，其中 N 是序列长度，γ 是归一化波束宽度，a 是 GSC 序列的步长。此外，如果 $a \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$，两个量均以 $O((N\gamma)^{-1/2})$ 的速率收敛，这保证了平顶波束的渐近性能。

本文其余部分安排如下。第二节介绍预备知识，包括波束合成模型和频谱准则，以及自相关解释。第三节建立关于有限字母表的否定结果：引理 4 为命题 5 中的滤波器构造提供依据，其估计导出主要结果——定理 3。第四节证明关于 GSC 序列的正面结果。基本思路是将 GSC 序列 $\sim X_N(\nu)$ 的谱与连续阶跃啁啾信号 $S_a(\nu)$ 的谱进行比较。所得界限控制阻带泄漏 L_N，并将通带波纹 F_N 与极限函数 $V(a)$ 联系起来。$V(a)$ 的零点和连续性，结合必要条件 $N\gamma \to \infty$，给出了同时消除 F_N 和 L_N 的参数条件；相同的界限还给出了 $a \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ 的收敛速率。图 1 总结了第三节和第四节的证明结构。本节还提供了一些数值示例，以展示理论结果。最后一节讨论未来研究方向，附录则包含辅助证明。

记号。整数、正整数、实数和复数集合分别记为 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$，而 $\mathbb{Z}_M = \{0, \ldots, M-1\}$ 表示 $M \in \mathbb{Z}^+$。对于有限集 B，$|B|$ 表示其基数；对于频带 $\mathcal{B}$，$|\mathcal{B}|$ 表示其勒贝格测度。粗体表示序列、向量和矩阵，$\|\cdot\|_2$ 表示欧几里得范数。我们用 i 表示虚数单位，用 z 表示z的复共轭，用 $\Re z$ 表示其实部，而 $(\cdot)^*$ 表示共轭转置。集合 E的示性函数记为 $\mathbf{1}_E$，$\mathrm{dist}(t, E) = \inf_{s\in E} |t-s|$，其中 $E \subseteq \mathbb{R}$非空。向下取整 $\lfloor t \rfloor$ 是指不大于 t的最大整数。我们使用归一化 sinc 函数 $\mathrm{sinc}\, t = \sin(\pi t)/(\pi t)$，其中 $\mathrm{sinc}\, 0 = 1$。记号 $u = O(v)$表示对于某个常数 C，$|u| \le C|v|$ 。

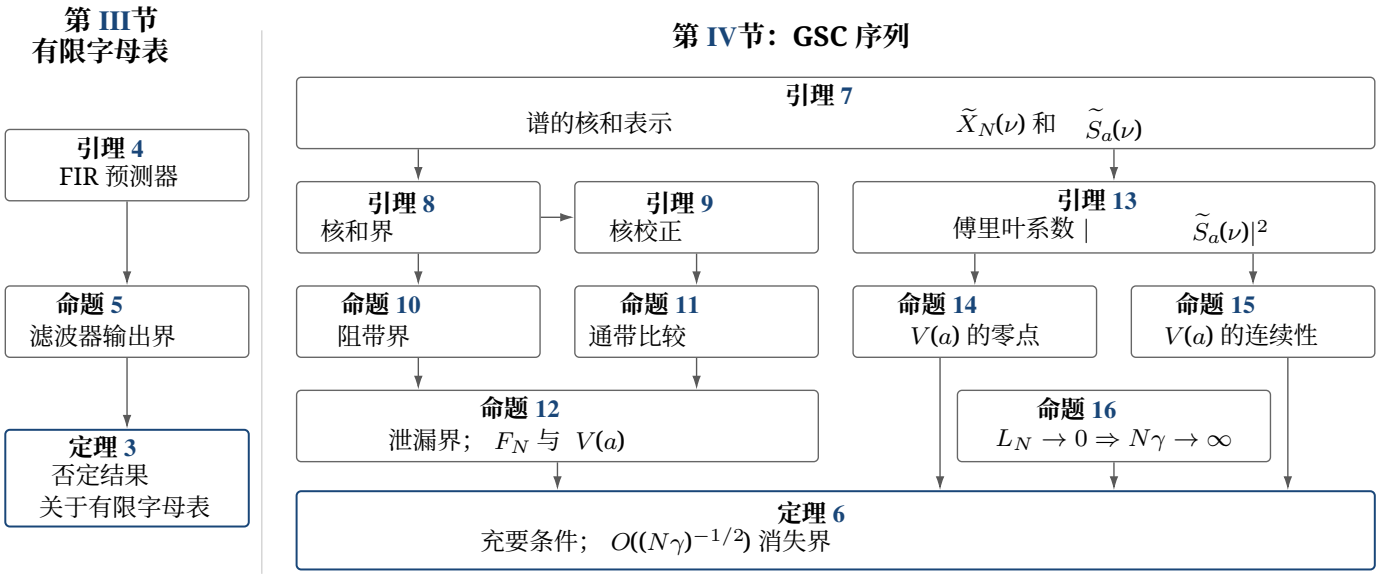

图 1. 第 III节和 IV 节的组织。

II. 预备知识

A. 波束合成与频谱准则

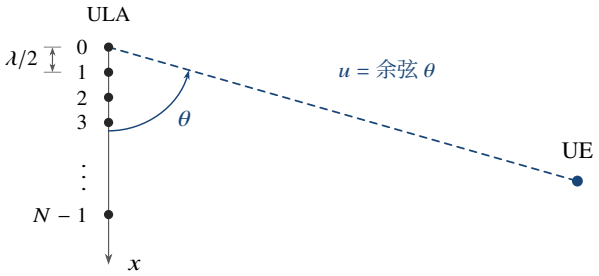

图 2. 均匀线性阵列–用户设备几何关系。

考虑图 2中的均匀线性阵列，其沿 x轴排列了 N 个各向同性天线，间距为 $\lambda/2$，其中 λ 为载波波长。对于远场中方位角为 θ 的用户设备，天线 n产生的相对传播相位为 $\mathrm{e}^{-i\pi n\cos\theta}$。当向发射天线施加激励 $\mathbf{x}=(x_0,\ldots,x_{N-1})\in\mathbb{C}^N$时，归一化接收信号是所有天线贡献之和，如下所示：

$$X_N(f)\triangleq\frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2}\sum_{n=0}^{N-1}x_n\mathrm{e}^{-2\pi inf},\quad f=\frac{1}{2}\cos\theta\pmod 1. \tag{1}$$

接收功率的角度分布 $|X_N(f)|^2\text{for }\theta\in[0,\pi]$ 称为波束方向图。因此，波束合成就是对功率谱 $|X_N(f)|^2$进行整形的问题。

多个用户设备可能位于某个角度范围内，波束应为它们提供近乎均匀的增益，同时尽量减少该角度范围之外的泄漏。由此得到通带波纹和阻带泄漏的以下定义。

定义 *1*：设 $\mathcal{B}\subseteq[0,1)$ 为指定区间。波束方向图$|X_N(f)|^2$的通带波纹和阻带泄漏分别定义为

$$F_N\triangleq\frac{\gamma}{(1-L_N)^2}\int_{\mathcal{B}}\left(|X_N(f)|^2-\frac{1-L_N}{\gamma}\right)^2\mathrm{d}f, \tag{2}$$

$$L_N\triangleq\int_{\mathcal{B}^c}|X_N(f)|^2\,\mathrm{d}f, \tag{3}$$

其中，$\mathcal{B}^c$ 是 $[0,1)$中 $\mathcal{B}$ 的补集，$\gamma=|\mathcal{B}|$ 是波束宽度。

相对于理想增益水平 $1/\gamma$使用通带误差也是很自然的：

$$D_N\triangleq\gamma\int_{\mathcal{B}}\left(|X_N(f)|^2-\frac{1}{\gamma}\right)^2\mathrm{d}f. \tag{4}$$

可以直接验证

$$D_N=(1-L_N)^2F_N+L_N^2. \tag{5}$$

定义 *2*：给定较小的阈值 $\epsilon_1,\ \epsilon_2\geq 0$，若波束方向图 $|X_N(f)|^2$满足 $\mathcal{B}=[0,1)$ 且 $F_N\leq\epsilon_1$，则其为全向波束；若满足 $\mathcal{B}\neq[0,1)$ 且 $F_N\leq\epsilon_1,\ L_N\leq\epsilon_2$，则其为平顶波束。

示例 *1*：考虑 $N=16$和 $\mathcal{B}=[-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$（模 1）–，对应于 $60^\circ\leq\theta\leq120^\circ$。令

$$\mathbf{x}=[1,i,i,-1,-i,1,1,1,1,1,1,-i,-1,i,i,1]^\top.$$

图 3展示了由序列$\mathbf{x}$ （实线）合成的平顶波束，其中 $F_{16}\approx0.0497$ 且 $L_{16}\approx0.1782$。虚线表示理想增益 2，阴影部分表示目标角度范围。

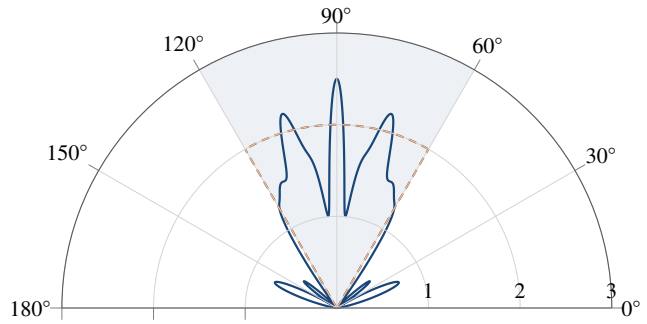

图 3. $N=16$ 和 $\gamma=1/2$的平顶波束。

通带波纹和阻带泄漏对于平顶波束的应用至关重要。例如，对于蜂窝通信中的波束搜索，当且仅当 $\epsilon_1=\epsilon_2=0$ [6, 性质 3]时，目标角度范围内的平均检测性能才能达到其理想上界。然而，这是无法实现的，因为$\mathbf{x}$ 是一个有限冲激响应（FIR）滤波器，不可能在一个频带上处处为零。因此，我们的目标是研究：当 N 足够大时，$\epsilon_1>0$ 和 $\epsilon_2>0$ 是否可以任意小，即当 $N\to\infty$ 时，$F_N,\ L_N\to0$ 是否成立。

B. 字母表选择的硬件考量

对于序列$\mathbf{x}\in\mathcal{U}^N$ 其中 $\mathcal{U}\subset\mathbb{C}$，$\mathcal{U}$ 称为字母表；如果其中仅包含有限（无限）个元素，则称其为有限（无限）字母表。波束合成的硬件实现取决于激励序列的字母表。如果字母表是非模为一的，即存在 $\alpha,\ \alpha'\in\mathcal{U}$ 使得 $|\alpha|\neq|\alpha'|$，则需要多个射频链路，对于大型阵列而言，这可能会造成高昂的成本。然而，如果字母表是模为一的，即对于任意 $|\alpha|=|\alpha'|\ \alpha,\ \alpha'\in\mathcal{U}$则可以使用一个由所有天线共享的射频链路来实现，从而降低射频链路的硬件成本。图 4展示了这种实现方式：首先将数字基带信号转换为射频信号，然后将其等分到 N 个带有移相器和等增益功率放大器的支路。

较小的字母表 $\mathcal{U}$ 可进一步减少 PSN 必须实现的相位状态数量。例如，二元字母表 $\mathcal{U}=\{\pm1\}$需要一位移相器，而四元字母表 $\mathcal{U}=\{\pm1,\pm i\}$ 需要两位移相器。因此，较小的字母表有利于以低成本实现 PSN 硬件。

C. 与非周期自相关的联系

对于$\mathbf{x}\in\mathbb{C}^N$，其非周期自相关定义为

$$r_k\triangleq\sum_{n=0}^{N-1-k}x_{n+k}\overline{x_n},\quad k=0,\ldots,N-1, \tag{6}$$

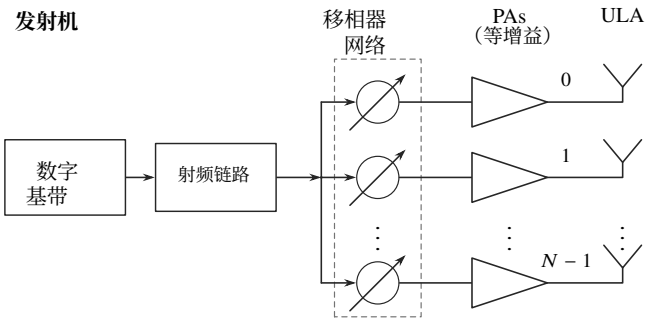

图 4. 基于单位模序列的波束合成硬件实现。

且 $r_{-k} = \overline{r_k}$ 对于 $k = 1, \ldots, N-1$。$\mathbf{x}$ 的优值因子定义为

$$\mathrm{MF}(\mathbf{x}) \triangleq \frac{\|\mathbf{x}\|_2^4}{\sum_{0<|k|<N} |r_k|^2}. \tag{7}$$

令 $\mathcal{B} = [f_0 - \gamma/2, f_0 + \gamma/2)$（模 1）并定义

$$\beta_k \triangleq \gamma \mathrm{e}^{2\pi i k f_0} \operatorname{sinc}(\gamma k), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

以下命题将通带波纹和阻带泄漏与$\mathbf{x}$的非周期自相关联系起来。

命题 *1*： 阻带泄漏 L_N 和通带波纹 F_N 满足

$$L_N = 1 - \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \boldsymbol{\beta}^* \mathbf{r}, \qquad F_N = \frac{\mathbf{r}^* \mathbf{W} \mathbf{r}}{\|\mathbf{x}\|_2^4 (1 - L_N)^2}, \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (r_{1-N}, \ldots, r_{-1}, r_0, r_1, \ldots, r_{N-1})^\top, \\ \boldsymbol{\beta} &= (\beta_{1-N}, \ldots, \beta_{-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{N-1})^\top, \\ \mathbf{W} &= \gamma \operatorname{Toep}(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2N-2}) - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^*, \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\operatorname{Toep}(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2N-2})$ 表示首列为 $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2N-2})^\top$ 的厄米特托普利茨矩阵。

证明： 维纳–辛钦定理给出

$$|X_N(f)|^2 = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \sum_{|k|<N} r_k \mathrm{e}^{-2\pi i k f}. \tag{11}$$

注意到 $\beta_k = \int_{\mathcal{B}} \mathrm{e}^{2\pi i k f} \, \mathrm{d}f$。对 11 式在 $\mathcal{B}$ 上积分得到

$$1 - L_N = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \sum_{|k|<N} r_k \overline{\beta_k} = \frac{\boldsymbol{\beta}^* \mathbf{r}}{\|\mathbf{x}\|_2^2},$$

这证明了式（9）中的泄漏恒等式。此外，

$$|X_N(f)|^2 - \frac{1 - L_N}{\gamma} = \sum_{|k|<N} \frac{r_k}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \left(\mathrm{e}^{-2\pi i k f} - \frac{\overline{\beta_k}}{\gamma} \right) \tag{12}$$

Thus

$$\begin{aligned} &\gamma \|\mathbf{x}\|_2^4 \int_{\mathcal{B}} \left(|X_N(f)|^2 - \frac{1 - L_N}{\gamma} \right)^2 \mathrm{d}f \\ &= \gamma \sum_{|k|,|\ell|<N} \overline{r_k} r_\ell \int_{\mathcal{B}} \left(\mathrm{e}^{2\pi i k f} - \frac{\beta_k}{\gamma} \right) \cdot \left(\mathrm{e}^{-2\pi i \ell f} - \frac{\overline{\beta_\ell}}{\gamma} \right) \mathrm{d}f \\ &= \sum_{|k|,|\ell|<N} \overline{r_k} \big(\gamma \beta_{k-\ell} - \beta_k \overline{\beta_\ell} \big) r_\ell = \mathbf{r}^* \mathbf{W} \mathbf{r}, \end{aligned}$$

通过检验式（9）中的纹波恒等式，证明了 F_N 在式（2）中的定义。 ■

推论 *2*：如果 $\gamma = 1$，则 $F_N \to 0 \iff \mathrm{MF}(\mathbf{x}) \to \infty$。

证明：如果 $\gamma = 1$，则对于所有$k \neq 0$，有 $\beta_0 = 1$ 和 $\beta_k = 0$。因此 $\boldsymbol{\beta}^* \mathbf{r} = r_0 = \|\mathbf{x}\|_2^2$，并且

$$\mathbf{W} = \operatorname{diag}\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{N-1}, 0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{N-1} \right).$$

根据（9），$L_N = 0$ 和 $F_N = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2^4} \sum_{0<|k|<N} |r_k|^2 = \frac{1}{\mathrm{MF}(\mathbf{x})}$，因此 $F_N \to 0 \Leftrightarrow \mathrm{MF}(\mathbf{x}) \to \infty$。 ■

上述推论表明，逼近理想全向波束图这一要求等价于设计优值因子趋于无穷大的序列。然而，逼近理想平顶波束图这一要求，即对于 $\gamma < 1$，$\lim_{N\to\infty} L_N = 0$ 和 $\lim_{N\to\infty} F_N = 0$，超出了经典序列设计的范围，将在本文后续章节中进行探讨。

III. 有限字母表上的否定结果

受有限模为一字母表在硬件实现中具有优势的启发，我们提出这样一个问题：二进制或四进制序列能否同时满足 $\lim_{N\to\infty} F_N = 0$ 和 $\lim_{N\to\infty} L_N = 0$？以下定理对范围更广的一类序列给出了否定答案。

定理 *3*：若 $\mathcal{B} \subsetneq [0,1)$，则对于任意 $\mathbf{x} \in \mathcal{U}^N$（其字母表 $\mathcal{U}$ 为有限字母表），阻带泄漏 L_N 和通带波纹F_N 不可能在 $N \to \infty$ 时同时趋于零。

注 *1*： OpenAI 最近发布的预印本 [32]证明了存在满足以下条件的二进制序列：$\lim_{N\to\infty} F_N = 0$ 若 $\mathcal{B} = [0,1)$，这意味着可以使用一位移相器逼近理想全向波束。相比之下，定理 3 的一个直接推论排除了存在同时满足$\lim_{N\to\infty} F_N = 0$ 和 $\lim_{N\to\infty} L_N = 0$ 且 $\mathcal{B} \subsetneq [0,1)$的二进制序列，这意味着永远无法使用一位移相器逼近理想平顶波束。事实上，根据定理 3，这需要无限字母表。

为证明定理 3，我们首先构造一个子带能量较小的有限冲激响应滤波器 $p(z)$。

引理 *4*： 对于任意子带 $\mathcal{B} \subsetneq [0,1)$ 和任意 $\varepsilon > 0$，存在一个有限冲激响应滤波器

$$p(z) = \sum_{k=0}^{m} p_k z^k, \qquad p_0 = 1, \quad m \geq 1,$$

仅取决于 $\mathcal{B}$ 和 ε，使得

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\mathcal{B}} p(\mathrm{e}^{-2\pi i f}) \mathrm{e}^{2\pi i k f} \, \mathrm{d}f \right| < \varepsilon. \tag{13}$$

证明见附录A。

基于引理 $p(z)$ 中的滤波器 $q(z)$，我们随后构造另一个有限冲激响应滤波器，其对所有有限字母表输入的输出功率均受到阻带泄漏的控制。

命题 *5*： 存在一个有限冲激响应滤波器 $q(z)$和一个常数$C > 0$，二者仅取决于有限字母表 $\mathcal{U}$ 和子带 $\mathcal{B} \subsetneq [0,1)$，使得对于每个非零的 $\mathbf{x} \in \mathcal{U}^N$，

$$\int_0^1 |q(\mathrm{e}^{-2\pi i f})|^2 |X_N(f)|^2 \, \mathrm{d}f \leq C L_N, \qquad \forall N \geq 1, \tag{14}$$

$$|q(\mathrm{e}^{-2\pi if})| \le 1, \qquad \forall f \in [0,1). \tag{15}$$

证明：设

$$M \triangleq \max_{\alpha\in\mathcal{U}} |\alpha|, \qquad d \triangleq \min_{\substack{\alpha,\beta\in\mathcal{U}\\ \alpha\neq\beta}} |\alpha-\beta| > 0. \tag{16}$$

从引理 $p(z)$ 中取 $\varepsilon = d/(4M)$，并令$Q \triangleq |\mathcal{U}|^m$。如果一个块 $\mathbf{v} = (v_{-m+1}, \ldots\ldots, v_Q) \in \mathcal{U}^{m+Q}$ 满足以下条件，则称其为可容许块

$$\left| v_n + \sum_{k=1}^{m} p_k v_{n-k} \right| < \frac{d}{2}, \qquad 1 \le n \le Q. \tag{17}$$

对于固定的 $v_{n-m}, \ldots\ldots, v_{n-1}$和 $1 \le n \le Q$，两个不同的候选项 α、$\beta \in \mathcal{U}$ 对于 v_n 将满足

$$|\alpha-\beta| \le \left| \alpha + \sum_{k=1}^{m} p_k v_{n-k} \right| + \left| \beta + \sum_{k=1}^{m} p_k v_{n-k} \right| < d, \tag{18}$$

这与 $d \le |\alpha-\beta|$这一事实相矛盾。因此，一个可容许块由其初始状态 $\widehat{\ }(v_{-m+1}, \ldots\ldots, v_0)$唯一确定。将可容许块的数量记为 Q。于是 $\widehat{Q} \le Q$。通过将这些块中的 $(v_Q, v_{Q-1}, \ldots\ldots, v_0)$ 作为行，构造矩阵 $\mathrm{V} \in \mathcal{U}^{\widehat{Q}\times(Q+1)}$。由于 V 的列向量线性相关，存在系数 $q_0, \ldots\ldots, q_Q$，使得 $\sum_{k=0}^{Q} |q_k| = 1$，并且对于每个可容许块 $\mathbf{v}$，都有 $\sum_{k=0}^{Q} q_k v_{Q-k} = 0$。定义滤波器 $q(z) \triangleq \sum_{k=0}^{Q} q_k z^k$。由此可得公式（15）

$$|q(\mathrm{e}^{-2\pi if})| \le \sum_{k=0}^{Q} |q_k| = 1. \tag{19}$$

任取 $N \ge 1$ 和一个非零序列$\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_{N-1}) \in \mathcal{U}^N$，并将$\mathbf{x}$补零扩展为一个双边序列。定义以下两个滤波器输出：

$$y_n \triangleq \sum_{k=0}^{m} p_k x_{n-k}, \qquad w_n \triangleq \sum_{k=0}^{Q} q_k x_{n-k}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{20}$$

给定 $n \in \mathbb{Z}$，如果对于所有 $0 \le k < Q$都有 $|y_{n-k}| < d/2$，则块 $(x_{n-Q-m+1}, \ldots, x_n)$ 是可容许的，因此有 $w_n = 0$。其逆否命题为

$$w_n \neq 0 \implies \max_{0\le k<Q} |y_{n-k}| \ge d/2. \tag{21}$$

将滤波器输出 y_n 的阻带分量定义为

$$\widetilde{y}_n \triangleq \|\mathbf{x}\|_2 \int_{\mathcal{B}^c} p(\mathrm{e}^{-2\pi if}) X_N(f) \mathrm{e}^{2\pi inf}\,\mathrm{d}f. \tag{22}$$

注意

$$\begin{aligned} |y_n - \widetilde{y}_n| &= \left| \|\mathbf{x}\|_2 \int_{\mathcal{B}} p(\mathrm{e}^{-2\pi if}) X_N(f) \mathrm{e}^{2\pi inf}\,\mathrm{d}f \right| \\ &= \left| \sum_{\ell=0}^{N-1} x_\ell \int_{\mathcal{B}} p(\mathrm{e}^{-2\pi if}) \mathrm{e}^{2\pi i(n-\ell)f}\,\mathrm{d}f \right| \\ &\le M \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\mathcal{B}} p(\mathrm{e}^{-2\pi if}) \mathrm{e}^{2\pi ikf}\,\mathrm{d}f \right| < \frac{d}{4}, \end{aligned} \tag{23}$$

其中最后一个不等式由（13）得出。结合（21）和（23）可得

$$w_n \neq 0 \implies \max_{0\le k<Q} |\widetilde{y}_{n-k}| > d/4 \implies \sum_{k=0}^{Q-1} |\widetilde{y}_{n-k}|^2 > \frac{d^2}{16}. \tag{24}$$

注意到 $|w_n| \le \sum_{k=0}^{Q} |q_k|\,|x_{n-k}| \le M$。因此，

$$|w_n|^2 \le \frac{16M^2}{d^2} \sum_{k=0}^{Q-1} |\widetilde{y}_{n-k}|^2, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{25}$$

对25求和 n 可得

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |w_n|^2 &\le \frac{16M^2}{d^2} \sum_{k=0}^{Q-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widetilde{y}_{n-k}|^2 \\ &= \frac{16QM^2}{d^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widetilde{y}_n|^2. \end{aligned} \tag{26}$$

由帕塞瓦尔定理可得

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |w_n|^2 &= \|\mathbf{x}\|_2^2 \int_0^1 |q(\mathrm{e}^{-2\pi if})|^2 |X_N(f)|^2\,\mathrm{d}f, \\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widetilde{y}_n|^2 &= \|\mathbf{x}\|_2^2 \int_{\mathcal{B}^c} |p(\mathrm{e}^{-2\pi if})|^2 |X_N(f)|^2\,\mathrm{d}f. \end{aligned} \tag{27}$$

结合（26）和（27）可得

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |q(\mathrm{e}^{-2\pi if})|^2 |X_N(f)|^2\,\mathrm{d}f \\ &\le \frac{16QM^2}{d^2} \int_{\mathcal{B}^c} |p(\mathrm{e}^{-2\pi if})|^2 |X_N(f)|^2\,\mathrm{d}f \\ &\le \frac{16QM^2}{d^2} \sup_{f\in\mathcal{B}^c} |p(\mathrm{e}^{-2\pi if})|^2 L_N, \end{aligned} \tag{28}$$

这就证明了（14）。 ■

现在我们可以证明定理 3。

定理 *3* 的证明：取命题 $q(z)$给出的固定滤波器和常数C。令5。

$$\eta \triangleq \frac{1}{\gamma} \int_{\mathcal{B}} |q(\mathrm{e}^{-2\pi if})|^2\,\mathrm{d}f. \tag{29}$$

那么 $\eta > 0$，因为非零有限冲激响应滤波器不可能在 $\mathcal{B}$ 上消失。由柯西–施瓦茨不等式和滤波器界（15），我们得到

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathcal{B}} |q(\mathrm{e}^{-2\pi if})|^2 \left(\frac{1}{\gamma} - |X_N(f)|^2 \right) \mathrm{d}f \right| \\ &\le \left[\int_{\mathcal{B}} |q(\mathrm{e}^{-2\pi if})|^4\,\mathrm{d}f \right]^{1/2} \sqrt{\frac{D_N}{\gamma}} \\ &\le \left[\int_{\mathcal{B}} |q(\mathrm{e}^{-2\pi if})|^2\,\mathrm{d}f \right]^{1/2} \sqrt{\frac{D_N}{\gamma}} = \sqrt{\eta D_N}. \end{aligned} \tag{30}$$

然后，根据三角不等式，我们有

$$\begin{aligned} \eta - \sqrt{\eta D_N} &\le \int_{\mathcal{B}} |q(\mathrm{e}^{-2\pi if})|^2 |X_N(f)|^2\,\mathrm{d}f \\ &\le \int_0^1 |q(\mathrm{e}^{-2\pi if})|^2 |X_N(f)|^2\,\mathrm{d}f \\ &\le C L_N, \end{aligned} \tag{31}$$

其中最后一个不等式是（14）。假设存在一族非零序列 $\mathbf{x}^{(N)} \in \mathcal{U}^N$，$N = 1, 2, \ldots\ldots$，使得$L_N \to 0$ 且 $F_N \to 0$。那么，根据（ $D_N \to 0$ 5），同样成立。由于η 和 C 由 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{B}$固定，（31）的左端趋于 $\eta > 0$，而右端趋于零。这一矛盾完成了定理的证明。 ■

IV. 平顶波束合成与GSC序列

在上一节中，我们排除了使用任何固定有限字母表逼近理想平顶波束的可能性。于是自然会产生一个问题：如果字母表是无限的，通带波纹和阻带泄漏能否同时消失？幅度和相位都可能有无限种选择。本节将说明，只要采用相位有无限种选择的单位模字母表，便足以给出肯定的答案。

A. GSC序列与主要结果

在我们先前的工作 [5], 中，我们通过启发式方法构造了一族带宽可调的单位模序列。

定义3：设 m，$K \in \mathbb{Z}^+$, $N = mK$, $\frac{1}{N} \le \gamma \le 1$和 $b \in \mathbb{R}$。广义阶梯啁啾（GSC）序列$\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$定义为

$$x_n = \exp\left\{\frac{2\pi i\gamma}{K}\left[n(k+b) - \frac{m}{2}k(k+1)\right]\right\}, \qquad n = km + \ell, \quad k \in \mathbb{Z}_K, \quad \ell \in \mathbb{Z}_m, \tag{32}$$

其通带和阻带规定如下

$$\mathcal{B} = \left[\frac{\gamma}{K}(b - \tfrac{1}{2}), \frac{\gamma}{K}(b - \tfrac{1}{2}) + \gamma\right) \pmod 1, \qquad \mathcal{B}^c = [0,1) \setminus \mathcal{B}. \tag{33}$$

由于参数 b 仅会使$\mathbf{x}$的频谱发生平移，因此不失一般性，我们取 $b = 1/2$ 和 $\mathcal{B} = [0, \gamma)$，来研究通带波纹 F_N 和阻带泄漏 L_N。

令 $a \triangleq \gamma m/K$，它是 [5] 中定义的阶梯啁啾信号的步长。因此，待分析的序列为

$$x_{km+\ell} = \exp\left\{i\pi a k^2 + \frac{2\pi i a}{m}(k + \tfrac{1}{2})\ell\right\}. \tag{34}$$

对于 GSC 序列，通带宽度 γ 和步长 a 可能取决于 N；在符号表示中，我们省略了这种依赖关系。

对于实数 t 和非空集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$，定义 t 到 $\mathcal{S}$ 的距离为

$$\operatorname{dist}(t, \mathcal{S}) \triangleq \inf_{s \in \mathcal{S}} |t - s|.$$

以下定理刻画了 GSC 序列趋近于理想平顶波束的充要条件。

定理 6：对于式（34）中给出的 GSC 序列，若 a有界，则以下结论成立：

$$F_N \to 0 \quad \text{and} \quad L_N \to 0 \iff N\gamma \to \infty, \qquad \operatorname{dist}\big(a, \{0, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots\}\big) \to 0. \tag{35}$$

此外，如果 $a \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$和 $N\gamma \to \infty$，则

$$F_N = O\Big((N\gamma)^{-\frac{1}{2}}\Big), \quad L_N = O\Big((N\gamma)^{-\frac{1}{2}}\Big). \tag{36}$$

本节的剩余部分将用于证明定理6。

B. 离散信号和连续信号的傅里叶表示

定义连续阶梯啁啾信号 $s_a(t)$ 如下：

$$s_a(t) \triangleq \exp\{i\pi a[k^2 + (2k+1)y]\}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{37}$$

其中 $k = \lfloor t \rfloor$ 且 $y = t - k$。容易验证，$s_a(t)$ 是连续的，并且 $s_a(-t) = s_a(t)$。式（34）中的 GSC 序列正是通过对 $s_a(t)$的截断版本进行采样得到的：

$$x_{km+\ell} = s_a(k + \ell/m), \qquad 0 \le k < K, \quad 0 \le \ell < m.$$

$s_a(t)$ 的傅里叶变换定义为

$$S_a(f) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} s_a(t) e^{-2\pi i f t}\, dt.$$

设 $P \triangleq K/\gamma = m/a$。接下来，我们采用傅里叶变换 $S_a(f)$的缩放 $f = a\nu$，以及 DTFT $X_N(f)$ 的缩放 $f = \gamma\nu/K$（见式（1））。后者将通带$f \in [0, \gamma)$ 和阻带 $f \in [\gamma, 1)$ 分别映射到 $\nu \in [0, K)$ 和$\nu \in [K, P)$。下面的引理将重缩放频谱表示为移位核函数之和，这对于分析 GSC 序列的渐近行为至关重要。

引理 7：定义两个重缩放频谱

$$\widetilde{X}_N(\nu) \triangleq \sqrt{\gamma}\, \mathrm{e}^{-i\pi a(1/4 - \nu^2)} X_N(\gamma\nu/K), \qquad \widetilde{S}_a(\nu) \triangleq \sqrt{a}\, \mathrm{e}^{-i\pi a(1/4-\nu^2)} S_a(a\nu). \tag{38}$$

于是我们有

$$\widetilde{X}_N(\nu) = \sum_{k=0}^{K-1} \Phi_{a,m}(\nu_k), \tag{39a}$$

$$\widetilde{S}_a(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi_a(\nu_k), \tag{39b}$$

其中 $\nu_k = k + \frac{1}{2} - \nu$，核函数 $\Phi_{a,\,m}$ 和 Φ_a定义如下

$$\Phi_{a,m}(x) = \begin{cases} \sqrt{a}\, \mathrm{e}^{i\pi a x(x - 1/m)} \dfrac{\sin(\pi a x)}{m \sin(\pi a x/m)}, & x \notin P\mathbb{Z}, \\ \sqrt{a}\, \mathrm{e}^{i\pi m j(jP+1)}, & x = jP, \quad j \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\Phi_a(x) = \begin{cases} \sqrt{a}\, \mathrm{e}^{i\pi a x^2} \operatorname{sinc}(ax), & x \ne 0, \\ \sqrt{a}, & x = 0. \end{cases} \tag{40}$$

证明很直接，故略去。也很容易验证

$$\Phi_{a,m}(\nu_k + P) = \mathrm{e}^{i\pi m(P - 2\nu)} \Phi_{a,m}(\nu_k). \tag{41}$$

$$|\widetilde{X}_N(\nu + P)| = |\widetilde{X}_N(\nu)|, \tag{42}$$

$$\widetilde{S}_a(\nu + 1) = \widetilde{S}_a(\nu), \quad \widetilde{S}_a(\nu) = \widetilde{S}_a(-\nu) \tag{43}$$

以及对于固定的 a，x，$\lim_{m\to\infty} \Phi_{a,\,m}(x) = \Phi_a(x)$。事实上，核函数 $\Phi_a(x)$ 是 $\Phi_{a,\,m}(x)$ 的连续对应物。

C. 阻带和通带估计

定义

$$g_a(x) \triangleq \mathrm{e}^{i\pi a x(x+1)}, \tag{44}$$

因此，式（40）中的核函数对于 $x \notin P\mathbb{Z}$ 和 $x \neq 0$分别具有以下表示：

$$\Phi_{a,m}(x) = \frac{g_a(x) - g_a(x-1)}{2i\sqrt{a}} \frac{\mathrm{e}^{-i\pi x/P}}{P\sin(\pi x/P)}, \tag{45a}$$

$$\Phi_a(x) = \frac{g_a(x) - g_a(x-1)}{2\pi i\sqrt{a}} \frac{1}{x}. \tag{45b}$$

以下两个引理给出了本节中广泛使用的核函数估计，为后续的阻带和通带分析奠定了基础。

引理 *8*：设 $R \triangleq \min_{p\le k\le q}|\nu_k|$，其中 p，q 可以是无穷大。存在一个常数 C 使得

$$\left|\sum_{k=p}^{q} \Phi_a(\nu_k)\right| \le \frac{C}{1+\sqrt{a}\,R}. \tag{46}$$

此外，若对每个 $p \le k \le q$都有 $|\nu_k| \le \frac{P}{2}$，则

$$\left|\sum_{k=p}^{q} \Phi_{a,m}(\nu_k)\right| \le \frac{C}{1+\sqrt{a}\,R}. \tag{47}$$

证明见附录B。

引理 *9*：对于任意满足 $-P < \nu_p \le \nu_q < P$ 的整数 $p \le q$，存在一个常数 C，使得

$$\left|\sum_{k=p}^{q}\left(\Phi_{a,m}(\nu_k) - \Phi_a(\nu_k)\right)\right| \le C\left[\frac{1}{1+\sqrt{a}(P-\nu_q)} + \frac{1}{1+\sqrt{a}(P+\nu_p)}\right]. \tag{48}$$

证明见附录C。

有了引理 8 和9，我们现在建立命题10 和 11，分别估计 $X_N(\nu)$ 在阻带中的幅度，以及$X_N(\nu)$ 与 $S_a(\nu)$ 在通带中的差值。

命题 *10*：存在一个常数 C，使得对于每个$\nu \in [K, P)$,

$$|\widetilde{X}_N(\nu)| \le C\left[\frac{1}{1+\sqrt{a}(\nu-K)} + \frac{1}{1+\sqrt{a}(P-\nu)}\right]. \tag{49}$$

证明：由（39a）和（41），可得

$$|\widetilde{X}_N(\nu)| \le \left|\sum_{\nu_k \ge -\frac{P}{2}} \Phi_{a,m}(\nu_k)\right| + \left|\sum_{\nu_k < -\frac{P}{2}} \Phi_{a,m}(\nu_k + P)\right|. \tag{50}$$

对每个 $\nu \in [K, P)$，我们有 $-P < \nu_k < 0$因为 $\nu_k = k + \frac{1}{2} - \nu$ $k \in \mathbb{Z}_K$ $\nu_k \in -P - \frac{P}{2}$ $P - \nu <$其中 . $|\nu_k + P| < \frac{P}{2}$ $\nu_k \in [-\frac{P}{2}, 0$ $\nu - K < |\nu_k| \le \frac{P}{2}$ 若 (,)，则 . 若)，则 . 将 (47) 应用于 (50) 得到

$$|\widetilde{X}_N(\nu)| \le \frac{C}{1+\sqrt{a}(\nu-K)} + \frac{C}{1+\sqrt{a}(P-\nu)}. \tag{51}$$

■

命题 *11*：存在一个常数 C，使得对每个$\nu \in [0, K]$,

$$|\widetilde{X}_N(\nu) - \widetilde{S}_a(\nu)| \le C\left[\frac{1}{1+\sqrt{a}\,\nu} + \frac{1}{1+\sqrt{a}(K-\nu)}\right]. \tag{52}$$

证明：固定 $\nu \in [0, K]$。将（39b）从（39a）中减去，得到

$$\widetilde{X}_N(\nu) - \widetilde{S}_a(\nu) = \sum_{k=0}^{K-1} \Delta(\nu_k) - \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}_K} \Phi_a(\nu_k), \tag{53}$$

其中 $\Delta(x) = \Phi_{a,\,m}(x) - \Phi_a(x)$。

令 C_Φ 和 C_d 分别表示式（46）和（48）中的常数。注意到 $-P < \nu_0 \le \nu_{K-1} < P$，$P - \nu_{K-1} > \nu$，且 $P + \nu_0 > K - \nu$。因此，由引理 9可得

$$\left|\sum_{k=0}^{K-1} \Delta(\nu_k)\right| \le \frac{C_d}{1+\sqrt{a}\nu} + \frac{C_d}{1+\sqrt{a}(K-\nu)}. \tag{54}$$

注意到 $|\nu_k| > \nu$ 当 $k \le -1$ 且 $|\nu_k| > K - \nu$ 当 $k \ge K$时。因此，由引理 8可得

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}_K} \Phi_a(\nu_k)\right| \le \frac{C_\Phi}{1+\sqrt{a}\nu} + \frac{C_\Phi}{1+\sqrt{a}(K-\nu)}. \tag{55}$$

结合式（53）、（54）和（55）即可证明式（52），其中 $C = C_d + C_\Phi$。

■

注 2：命题 10 预示了功率~频谱 $|X_N(\nu)|^2$ 在阻带中的衰减，如图 5(a) 所示：式（49）中的分母 $1 + \sqrt{a}(\nu - K)$ 和 $1 + \sqrt{a}(P - \nu)$ 分别随其与频带边缘 $\nu - K$ 和 $P - \nu$的距离增大而增大，这与阻带谱从边缘向中部递减、并在靠近另一侧~边缘时再次上升的趋势一致。命题 11 表明，随着 $\sqrt{a}K \to \infty$，在通带内部，$|X_N(\nu)|^2$收敛至$|\widetilde{S}_a(\nu)|^2$，如图 5(b) 所示：式（52）中的分母 $1+\sqrt{a}\,\nu$ $1+\sqrt{a}\,K-\nu$ 使得 $|X_N(\nu) - S_a(\nu)|$ 的~界在通带~中心最小，而在靠近任一边缘处较大，这解释了内部区域近乎平坦、而靠近~边缘处偏差更大的现象，其中 $|S_{1/2}(\nu)|^2 = 1$（将在下一小节中证明）。

注2 对命题10 和11中的谱估计给出了定性的解释。下述命题进一步量化了这一行为。

命题 *12*：当 $N\gamma$ 充分大时，存在常数 C_1，C_2 使得

$$L_N \le C_1(N\gamma)^{-1/2}, \tag{56}$$

$$|F_N - V(a)| \le C_2\left[\sqrt{V(a)}(N\gamma)^{-1/4} + (N\gamma)^{-1/2}\right], \tag{57}$$

其中

$$V(a) = \int_0^1 \left(|\widetilde{S}_a(\nu)|^2 - 1\right)^2 \mathrm{d}\nu. \tag{58}$$

因此，

$$N\gamma \to \infty \quad \Longrightarrow \quad L_N \to 0, \qquad F_N \to V(a). \tag{59}$$

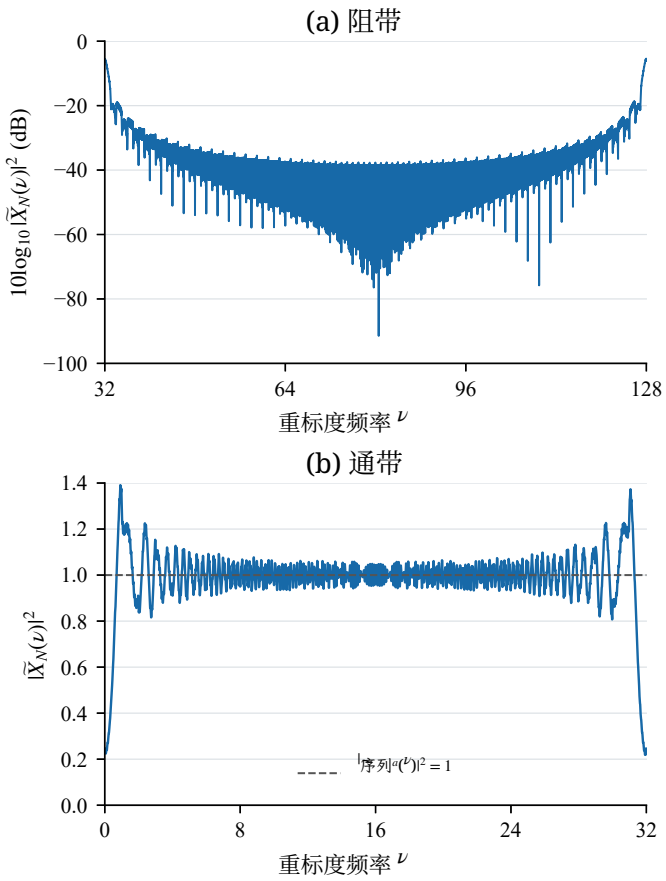

图 5. GSC 功率谱 $|\widetilde{X}_N(\nu)|^2$，其中 $\gamma = 1/4$、$K = 32$、$m = 64$ 和 $a = 1/2$。(a) 阻带 $[K, P)$，单位为 dB，其中 $P = 128$。(b) 通带 $[0, K)$，以线性功率表示。

Proof: By $|\widetilde{X}_N(\nu)|^2 = \gamma|X_N(\gamma\nu/K)|^2$, (3) and (2) can be rewritten as

$$L_N = \frac{1}{K}\int_K^P |\widetilde{X}_N(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu, \tag{60a}$$

$$F_N = \frac{1}{K}\int_0^K \left(\frac{|\widetilde{X}_N(\nu)|^2}{1-L_N} - 1\right)^2 \mathrm{d}\nu. \tag{60b}$$

为引理 C_0 选择一个公共常数8 和命题 10 以及 11。将命题 10 应用于（60a）可得

$$L_N \le \frac{2C_0^2}{K}\int_K^P \frac{\mathrm{d}\nu}{(1+\sqrt{a}(\nu-K))^2} + \frac{2C_0^2}{K}\int_K^P \frac{\mathrm{d}\nu}{(1+\sqrt{a}(P-\nu))^2}.$$

令 $t = \nu - K$，我们得到

$$L_N \le \frac{4C_0^2}{K}\int_0^{P-K} \frac{\mathrm{d}t}{(1+\sqrt{a}\,t)^2} \le \frac{4C_0^2}{K\sqrt{a}} = \frac{4C_0^2}{\sqrt{N\gamma}}, \tag{61}$$

这证明了 (56)，其中 $C_1 = 4C_0^2$。

定义归一化范数

$$\|g\|_K \triangleq \left(\frac{1}{K}\int_0^K |g(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu\right)^{1/2}.$$

同样，应用命题11 可得

$$\|\widetilde{X}_N - \widetilde{S}_a\|_K^2 \le \frac{4C_0^2}{K}\int_0^K \frac{\mathrm{d}\nu}{(1+\sqrt{a}\,\nu)^2} \le \frac{4C_0^2}{\sqrt{N\gamma}}. \tag{62}$$

将引理 8 应用于 (39b)，再结合命题 11，可得

$$|\widetilde{S}_a(\nu)| \le C_0, \qquad |\widetilde{X}_N(\nu)| + |\widetilde{S}_a(\nu)| \le 4C_0 \tag{63}$$

在 $[0, K]$ 上。于是

$$\big||\widetilde{X}_N|^2 - |\widetilde{S}_a|^2\big| \le 4C_0|\widetilde{X}_N - \widetilde{S}_a|. \tag{64}$$

根据 $\|\cdot\|_K$ 意义下的三角不等式，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{|\widetilde{X}_N|^2}{1-L_N} - |\widetilde{S}_a|^2\right\|_K \\
&\le \frac{\big\||\widetilde{X}_N|^2 - |\widetilde{S}_a|^2\big\|_K + L_N\big\||\widetilde{S}_a|^2\big\|_K}{|1-L_N|} \\
&\le \frac{4C_0\|\widetilde{X}_N - \widetilde{S}_a\|_K + C_0^2 L_N}{|1-L_N|} \\
&\le \frac{8C_0^2(N\gamma)^{-\frac{1}{4}} + 4C_0^4(N\gamma)^{-\frac{1}{2}}}{|1-L_N|} \\
&\le \frac{(8C_0^2 + 4C_0^4)(N\gamma)^{-\frac{1}{4}}}{|1-L_N|},
\end{aligned} \tag{65}$$

其中第二个不等式由 (64) 和 (63) 得出，第三个不等式由 (62) 和 (61) 得出。由 (61)，若$\sqrt{N\gamma} \ge 8C_0^2$，则 $L_N \le 1/2$，因此

$$\left\|\frac{|\widetilde{X}_N|^2}{1-L_N} - |\widetilde{S}_a|^2\right\|_K \le C_3(N\gamma)^{-1/4}, \tag{66}$$

其中 $C_3 = 16C_0^2 + 8C_0^4$。注意，

$$\sqrt{F_N} = \left\|\frac{|\widetilde{X}_N|^2}{1-L_N} - 1\right\|_K, \quad \sqrt{V(a)} = \big\||\widetilde{S}_a|^2 - 1\big\|_K.$$

因此，反三角不等式给出

$$\big|\sqrt{F_N} - \sqrt{V(a)}\big| \le \left\|\frac{|\widetilde{X}_N|^2}{1-L_N} - |\widetilde{S}_a|^2\right\|_K \le C_3(N\gamma)^{-1/4}.$$

因此，

$$|F_N - V(a)| \le 2C_3\sqrt{V(a)}\,(N\gamma)^{-1/4} + C_3^2(N\gamma)^{-1/2}.$$

取 $C_2 = \max\{2C_3, C_3^2\}$ 即可证明 (57)。由 (58) 和 (63)，可得 $V(a) \le (C_0^2+1)^2$。结合 $V(a)$ 的有界性以及 (56) 和 (57)，即可得出 (59)。 ■

由 (59)，$\lim_{N\gamma\to\infty}(F_N + L_N) = 0$ 等价于 $V(a) \to 0$。接下来，我们给出零点集，并证明$V(a)$的连续性。

D. $V(a)$ 的零点集与连续性

定义 $|\widetilde{S}_a(\nu)|^2$ 的傅里叶系数为

$$c_h(a) \triangleq \int_0^1 |\widetilde{S}_a(\nu)|^2 \mathrm{e}^{2\pi i h\nu}\,\mathrm{d}\nu, \quad h \in \mathbb{Z}. \tag{67}$$

将帕塞瓦尔定理应用于 $|\widetilde{S}_a|^2 - 1$ 在（58）中得到

$$V(a) = |c_0(a) - 1|^2 + 2\sum_{h=1}^{\infty} |c_h(a)|^2. \tag{68}$$

为确定 $V(a)$ 的零点集，接下来我们计算 $c_h(a)$，其中$h \geq 0$。

引理 *13*：对于 $h \geq 0$ 满足 $\kappa_h \triangleq \lfloor h/a \rfloor$,

$$c_h(a) = (-1)^h \begin{cases} 1 - h/a, & \kappa_h = 0, \\ \operatorname{sinc}\big(a\kappa_h(\kappa_h+1)\big), & \kappa_h \geq 1. \end{cases} \tag{69}$$

证明见附录D。

命题 *14*：

$$V(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}. \tag{70}$$

证明：由引理 13，$c_0(a) = 1$。因此，由（68），

$$V(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_h(a) = 0 \ , \forall h \geq 1. \tag{71}$$

若 $a = 1/J$ 满足 $J \in \mathbb{Z}^+$，则 $\kappa_h = Jh$。由引理 13，$c_h(a) = 0$，对每个 $h \geq 1$均成立。反之，若 $a > 1$，则 $c_1(a) = 1/a - 1 \neq 0$；若 $0 < a < 1$ 不是整数倒数，则对于 $\kappa_1 = \lfloor 1/a \rfloor$，有 $1 \leq \kappa_1 < a\kappa_1(\kappa_1 + 1) < \kappa_1 + 1$，因此$c_1(a) = -$sinc 函数$(a\kappa_1(\kappa_1 + 1)) \neq 0$。因此，

$$c_h(a) = 0 \ , \forall h \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}. \tag{72}$$

结合（71）和（72）即可完成证明。 ■

命题 *15*：函数 $V(a)$ 在 $(0, \infty)$ 上连续，并满足 $\lim_{a\to 0^+} V(a) = 0$.

证明：由引理 13，$c_0(a) = 1$ 因此是连续的。对于 $h \in \mathbb{Z}^+$，$c_h(a)$ 也连续：在任意可能的不连续点 $a = h/j$，$j \in \mathbb{Z}^+$，单侧极限为

$$\lim_{a\to(h/j)^-} c_h(a) = (-1)^h \operatorname{sinc}\big(h(j+1)\big) = 0,$$

$$\lim_{a\to(h/j)^+} c_h(a) = \begin{cases} (-1)^h \operatorname{sinc}\big(h(j-1)\big) = 0, & j \geq 2, \\ (-1)^h(1 - h/h) = 0, & j = 1. \end{cases}$$

对于 $h \geq 2a$, $\kappa_h = \lfloor h/a \rfloor \geq h/a - 1 \geq h/(2a)$ 和 $\kappa_h + 1 \geq h/a$，因此

$$|c_h(a)| \leq \frac{1}{\pi a \kappa_h(\kappa_h+1)} \leq \frac{2a}{\pi h^2}.$$

如果 $a \in (0, A]$，那么 $|c_h(a)|^2 \leq \frac{4A^2}{\pi^2 h^4}$ 对于 $h \geq 2A$。因此，根据魏尔斯特拉斯M-判别法，级数 (68) 在 $(0, A]$ 上一致收敛。结合 $c_h(a)$ 的连续性，这意味着 $V(a)$ 在 $(0, A]$ 上连续，因此在 $(0, \infty)$ 上连续，因为 $A > 0$ 是任意的。此外，对于 $0 < a \leq 1/2$,

$$0 \leq V(a) \leq \frac{8a^2}{\pi^2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^4} = \frac{4\pi^2}{45} a^2,$$

因此 $\lim_{a\to 0^+} V(a) = 0$。 ■

E. 渐近消失的泄漏的必要条件

证明定理 6 所需的剩余要素是以下必要条件。

命题 *16*：如果 $L_N \to 0$，那么 $N\gamma \to \infty$。

证明：根据傅里叶对应

$$\int_0^1 |X_N(f)|^2 \mathrm{e}^{2\pi i k f} \, \mathrm{d}f = \frac{r_k}{N}, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\Re(r_k) &= \int_0^1 \cos(2\pi k f)|X_N(f)|^2 \, \mathrm{d}f \\ &\geq \left(1 - 2\pi^2 k^2 \gamma^2\right)(1 - L_N) - L_N \\ &\geq 1 - 2\pi^2 k^2 \gamma^2 - 2L_N. \end{aligned} \tag{73}$$

其中，第一个不等式在通带上使用 $\cos t \geq 1 - t^2/2$，在阻带上使用 $\cos\, t \geq -1$。另一方面，我们有 $\Re(r_k) \leq |r_k| \leq N - k$。因此，

$$L_N \geq \frac{k}{2N} - \pi^2 k^2 \gamma^2. \tag{74}$$

如果 $N\gamma \not\to \infty$，那么沿着一个子序列 $N = N_j \to \infty$，对于某个固定的 $\Lambda \geq 1$，我们有 $N\gamma \leq \Lambda$。取 $k = \lfloor N/(4\pi^2\Lambda^2) \rfloor < N$。由于 $0 \leq k/N \leq 1/(4\pi^2\Lambda^2)$，我们得到

$$L_N \geq \frac{k}{N}\left(\frac{1}{2} - \pi^2\Lambda^2 \frac{k}{N}\right) \geq \frac{k}{4N}. \tag{75}$$

此外，沿着该子序列有 $k/N \to 1/(4\pi^2\Lambda^2)$。因此，

$$\liminf_{j\to\infty} L_{N_j} \geq \frac{1}{16\pi^2\Lambda^2} > 0,$$

这与 $L_N \to 0$ 矛盾。因此 $N\gamma \to \infty$。 ■

现在我们可以证明定理6。

定理6的证明：首先，命题16 与命题12中的（59）一起表明

$$F_N \to 0, \ L_N \to 0 \iff N\gamma \to \infty, \ V(a) \to 0. \tag{76}$$

其次，命题14 和命题15 意味着

$$V(a) \to 0 \iff \operatorname{dist}\big(a, \{0, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots\}\big) \to 0. \tag{77}$$

结合（76）和（77）可证明（35）。

最后，如果 $a \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$，则 $V(a) = 0$由命题 14 得出。将其代入（56）–（57）即可证明（36）。 ■

F. 数值结果

为验证定理 6，图 6 和 7 分别比较了 GSC 波束与 $a = \frac{1}{2}$和 $a = \frac{2}{3}$的渐近行为。此处径向坐标为 $|X_N$（cos $\theta/2$）$|^2$。蓝色曲线表示 GSC 波束，橙色虚线表示增益为 2 的理想平顶波束。阴影表示目标扇区$60° \leq \theta \leq 120°$。我们设定 $\gamma = 1/2$ 和 $b =$ （$1 - K$）$/2$，以使通带中心位于 $[-1/4, 1/4)$（模 1）。文中报告的 F_N 和L_N 是根据命题 1中的自相关闭式表达式计算得到的。

在图 6中，随着 N 增加，波束逐渐收敛，因为$a = \frac{1}{2}$ 是整数倒数。具体而言，将 $N\gamma$加倍四次后，F_N 和 L_N均约减半，这与已证明的上界 $O((N\gamma)^{-1/2})$一致。相比之下，在图 7中，将 $N\gamma$ 加倍四次后，阻带泄漏约减半L_N，而通带波纹 F_N 随着 N 增加而持续存在，因为 $\operatorname{dist}\big(\frac{2}{3}, \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}\big) = \frac{1}{6}$，不满足条件 $\operatorname{dist}\big(a, \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}\big) \to 0$。

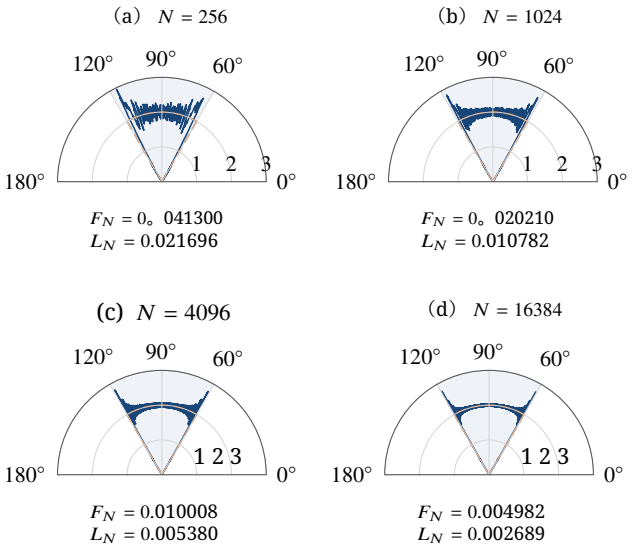

图 6. $a = 1/2$、 $\gamma = 1/2$和 $m = K$条件下 GSC 波束的收敛情况。面板 (a)–(d) 分别采用 $K \in \{16, 32, 64, 128\}$，对应 $N \in \{256, 1024, 4096, 16384\}$。

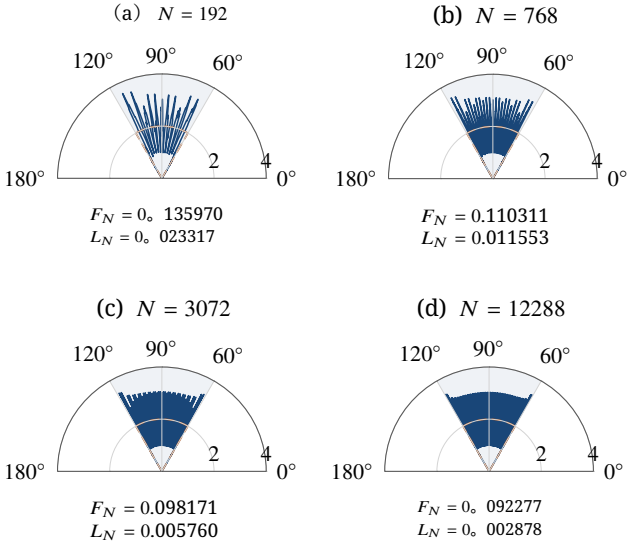

图 7. $a = 2/3$、 $\gamma = 1/2$和$m = 4K/3$ $K \in \{12, 24, 48, 96\}$ $N \in \{192, 768, 3072, 12288\}$ 条件下 GSC 持续存在的通带波纹。面板 (a)–(d) 分别采用 ，对应 。

五、结论与未来方向

为回答能否实现理想平顶波束这一根本问题，本研究将经典序列设计的范围拓展至高优值因子序列之外。具体而言，我们证明，任何有限字母表序列都无法使通带波纹和阻带泄漏同时趋于零。我们还证明，在无限字母表的单位模序列中，满足某些必要且充分条件时，GSC 序列的通带波纹和阻带泄漏可以同时趋于零，并确定了其收敛速率。

我们希望这项工作能为以下领域的研究开辟新的方向：序列设计。未来的工作可能包括以下两个方向：

1) 确定单位模序列能否使 F_N 和 L_N 随着 $N\gamma \to \infty$同时以快于$(N\gamma)^{-1/2}$的速度衰减。2) 对于多相字母表（如二进制或四元字母表），在给定泄漏约束 $L_N \le \epsilon_2$的条件下，推导 F_N 的下界，并确定能否通过在该字母表上构造序列的显式构造达到或逼近这些下界。

附录 A 引理4 的证明

证明：将 $\mathcal{B}$ 在模 1 意义下的闭包记为 $[\alpha, \alpha+\gamma]$，并令

$$I \triangleq \{\mathrm{e}^{-2\pi i f} : \alpha \le f \le \alpha+\gamma\}.$$

Vaidyanathan 的 FIR 预测误差构造 [43, 第 II 节，式 (2)] 给出了一个固定多项式 $h(z)$，使得

$$h(0) = 1, \qquad 0 < \rho \triangleq \max_{z\in I} |h(z)| < 1. \tag{78}$$

对于一个将在下文选定的整数 $\ell \ge 1$，定义

$$p(z) = (1 - \mathrm{e}^{2\pi i\alpha} z)(1 - \mathrm{e}^{2\pi i(\alpha+\gamma)} z) h(z)^{\ell}. \tag{79}$$

于是 $p(0) = 1$,

$$p(\mathrm{e}^{-2\pi i\alpha}) = p(\mathrm{e}^{-2\pi i(\alpha+\gamma)}) = 0 \tag{80}$$

and

$$\max_{z\in I} |p(z)| \le 4\rho^{\ell}. \tag{81}$$

根据乘积法则和三角不等式，

$$\max_{z\in I} |p'(z)| \le 4\rho^{\ell} + 4\ell\rho^{\ell-1} \max_{z\in I} |h'(z)|, \tag{82}$$

其中撇号表示关于.....的导数 z.

由（80）可知，函数 $p(\mathrm{e}^{-2\pi i f})\mathbf{1}_{\mathcal{B}}(f)$ 是绝对连续的，且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}[p(\mathrm{e}^{-2\pi i f})\mathbf{1}_{\mathcal{B}}(f)] \in L^2([0,1])$。因此，我们可以应用标准傅里叶系数估计 [44,p. 32, eq. (6.2)]，得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\mathcal{B}} p(\mathrm{e}^{-2\pi i f}) \mathrm{e}^{2\pi i k f} \, \mathrm{d}f \right| \\
&\le \int_{\mathcal{B}} |p(\mathrm{e}^{-2\pi i f})| \, \mathrm{d}f + \frac{1}{\sqrt{12}} \left(\int_{\mathcal{B}} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f} p(\mathrm{e}^{-2\pi i f}) \right|^2 \mathrm{d}f \right)^{1/2} \\
&\le \gamma \max_{z\in I} |p(z)| + \frac{2\pi\sqrt{\gamma}}{\sqrt{12}} \max_{z\in I} |p'(z)| \\
&\le 4\gamma\rho^{\ell} + \frac{8\pi\sqrt{\gamma}}{\sqrt{12}} \left(\rho^{\ell} + \ell\rho^{\ell-1} \max_{z\in I} |h'(z)| \right)
\end{aligned} \tag{83}$$

给定 $\varepsilon > 0$，由于 $0 < \rho < 1$ 且最大值$_{z\in I} |h'(z)|$ 与 ℓ无关，我们可以选择一个有限的 ℓ，使 (83) 的最终右端小于 ε。证明完毕。 ∎

附录 B 引理证明

引理 8

证明： 在证明 (46) 和 (47) 之前，不失一般性地假设 $\nu_p, \ldots, \nu_q$ 均非负或均非正。否则，我们总可以根据 $\nu_k < 0$ 和 $\nu_k \geq 0$ 将 (46) 或 (47) 中的求和拆分为两部分，并分别估计其幅度。

若 $R > 0$，则 $\nu_k \neq 0$ 当 $p \leq k \leq q$ 时，且式（45b）给出

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=p}^{q} \Phi_a(\nu_k)\right| = \frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \left|\sum_{k=p}^{q} \frac{g_a(\nu_k) - g_a(\nu_{k-1})}{\nu_k}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \left|\sum_{k=p}^{q-1} g_a(\nu_k) \left(\frac{1}{\nu_k} - \frac{1}{\nu_{k+1}}\right) + \frac{g_a(\nu_q)}{\nu_q} - \frac{g_a(\nu_{p-1})}{\nu_p}\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \left[\sum_{k=p}^{q-1} \left|\frac{1}{\nu_k} - \frac{1}{\nu_{k+1}}\right| + \left|\frac{1}{\nu_q}\right| + \left|\frac{1}{\nu_p}\right|\right] = \frac{1}{\pi\sqrt{a}R}.
\end{aligned} \tag{84}$$

对于 $\Phi_{a,\,m}(x)$，其中 $x \notin P\mathbb{Z}$，定义

$$\omega(x) \triangleq \frac{\mathrm{e}^{-i\pi x/P}}{P\sin(\pi x/P)}, \quad \omega'(x) \triangleq \frac{d\omega}{dx}. \tag{85}$$

由于 $|\sin(\pi x/P)| \geq 2|x|/P$ 对于 $0 < |x| \leq \frac{P}{2}$，我们有

$$\begin{aligned}
|\omega(x)| &\leq \frac{1}{2|x|}, \\
|\omega'(x)| &= \frac{\pi}{P^2\sin^2(\pi x/P)} \leq \frac{\pi}{4x^2}.
\end{aligned} \tag{86}$$

对于核 $\Phi_{a,\,m}$，附加条件 $|\nu_k| \leq \frac{P}{2}$ 与 $R > 0$ 结合，确保 $-[\nu_p, \nu_q]$ 不包含 $P\mathbb{Z}$ 中的任何点。与式（84）一样，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=p}^{q} \Phi_{a,m}(\nu_k)\right| \\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \left[\sum_{k=p}^{q-1} |\omega(\nu_k) - \omega(\nu_{k+1})| + |\omega(\nu_q)| + |\omega(\nu_p)|\right] \\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \left[\int_{\nu_p}^{\nu_q} |\omega'(x)|\,\mathrm{d}x + \frac{1}{R}\right] \\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \left[\frac{\pi}{4}\int_{R}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \frac{1}{R}\right] = \frac{\pi+4}{8\sqrt{a}\,R}.
\end{aligned} \tag{87}$$

接下来，我们证明界（46）和（47）。令 Ψ 表示 Φ_a 或 $\Phi_{a,\,m}$。若 $\sqrt{a}R \geq 1$，由式（84）和（87），存在常数 C 使得

$$\left|\sum_{k=p}^{q} \Psi(\nu_k)\right| \leq \frac{C}{2\sqrt{a}\,R} \leq \frac{C}{1+\sqrt{a}\,R}.$$

若 $\sqrt{a}R < 1$（包括 $R = 0$），则定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_0 &\triangleq \{k \in \{p, \ldots, q\} : |\nu_k| < 1/\sqrt{a}\}, \\
\mathcal{I}_1 &\triangleq \{p, \ldots, q\} \setminus \mathcal{I}_0, \\
S_j &\triangleq \sum_{k\in\mathcal{I}_j} \Psi(\nu_k), \qquad j = 0, 1.
\end{aligned}$$

注意，$|\mathcal{I}_0| \leq 1/\sqrt{a} + 1$ 和 $|\Psi(x)| \leq \sqrt{a}$ 根据（40）定义。因此，

$$|S_0| \leq \sqrt{a}\,|\mathcal{I}_0| \leq 1 + \sqrt{a}. \tag{88}$$

如果 $\mathcal{I}_1 \neq \varnothing$，则可写为 $\{p', p'+1, \cdots, q'\}$，其中 $p' \geq p$、$q' \leq q$ 和

$$R_1 \triangleq \min_{k\in\mathcal{I}_1} |\nu_k| \geq 1/\sqrt{a}.$$

因此（84）和（87）得出

$$|S_1| \leq \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a}\,R_1} \leq \dfrac{1}{\pi}, & \Psi = \Phi_a, \\ \dfrac{\pi+4}{8\sqrt{a}\,R_1} \leq \dfrac{\pi+4}{8}, & \Psi = \Phi_{a,m}. \end{cases}$$

对于 $\mathcal{I}_1 = \varnothing$，$S_1 = 0$。因此，

$$\left|\sum_{k=p}^{q} \Psi(\nu_k)\right| \leq |S_0| + |S_1| \leq 1 + \sqrt{a} + \frac{\pi+4}{8}. \tag{89}$$

取 $C \geq 2\left(1 + \sqrt{A} + (\pi+4)/8\right)$，其中 A 是 a 的上界，我们得到

$$\left|\sum_{k=p}^{q} \Psi(\nu_k)\right| \leq \frac{C}{2} \leq \frac{C}{1+\sqrt{a}R}.$$

■

附录 C

引理 9 的证明

证明： 对于 $\nu_k \neq 0$，（45）给出

$$\begin{aligned}
&\Phi_{a,m}(\nu_k) - \Phi_a(\nu_k) \\
&= \frac{g_a(\nu_k) - g_a(\nu_{k-1})}{2i\sqrt{a}} \left[\frac{\cot(\pi\nu_k/P) - i}{P} - \frac{1}{\pi\nu_k}\right].
\end{aligned}$$

为分离 $\pm P$ 处余切函数 $(\pi x/P)$ 的极点，定义

$$\rho_P(x) \triangleq \frac{\cot(\pi x/P) - i}{P} - \sum_{j=-1}^{1} \frac{1}{\pi(x - jP)}, \quad 0 < |x| < P.$$

则差值变为

$$\begin{aligned}
\Phi_{a,m}(\nu_k) - \Phi_a(\nu_k) = \frac{g_a(\nu_k) - g_a(\nu_{k-1})}{2\pi i\sqrt{a}} \sum_{\sigma=\pm1} \frac{1}{\nu_k + \sigma P} \\
+ \frac{g_a(\nu_k) - g_a(\nu_{k-1})}{2i\sqrt{a}}\,\rho_P(\nu_k).
\end{aligned} \tag{90}$$

我们先对包含极点的部分进行估计。由（44）和（45），可得

$$\frac{g_a(\nu_k) - g_a(\nu_{k-1})}{2\pi i\sqrt{a}\,(\nu_k + \sigma P)} = \mathrm{e}^{-i\pi mP + 2\pi i\sigma m\nu} \Phi_a(\nu_k + \sigma P). \tag{91}$$

Then

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=p}^{q} \frac{g_a(\nu_k) - g_a(\nu_{k-1})}{2\pi i\sqrt{a}} \sum_{\sigma=\pm1} \frac{1}{\nu_k + \sigma P}\right| \\
&\leq \sum_{\sigma=\pm1} \left|\sum_{k=p}^{q} \Phi_a(\nu_k + \sigma P)\right| \\
&\leq C_\Phi \left[\frac{1}{1+\sqrt{a}(P - \nu_q)} + \frac{1}{1+\sqrt{a}(P + \nu_p)}\right],
\end{aligned} \tag{92}$$

其中两个不等式分别由（91）和（46）得出。

对于（90）中的余项，定义

$$\rho_1(t) \triangleq \cot(\pi t) - \sum_{j=-1}^{1} \frac{1}{\pi(t-j)} - i, \quad 0 < |t| < 1,$$
$$\rho_1(0) = -i, \qquad \rho_1(\pm 1) = \mp\frac{3}{2\pi} - i.$$

利用展开式 $\cot t = t^{-1} - t/3 + O(t^3)$ 及周期性 $\cot(t+\pi) = \cot t$，可以验证 $\rho_1 \in C^1([-1,1])$。因此，绝对常数

$$C_\rho \triangleq \sup_{|t|\le 1} |\rho_1(t)| + \sup_{|t|\le 1} |\rho_1'(t)|$$

是有限的。缩放 $\rho_P(x) = P^{-1}\rho_1(x/P)$ 可延拓至 $\rho_P$to $[-P,P]$，且 $\rho_P'(x) = P^{-2}\rho_1'(x/P)$ 给出

$$\sup_{|x|\le P} |\rho_P(x)| + P \sup_{|x|\le P} |\rho_P'(x)| \le \frac{C_\rho}{P}. \tag{93}$$

恒等式（90）现在在 $\nu_k = 0$ 处也成立，这是因为 $\rho_1(t)$具有连续性。于是我们得到

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=p}^{q} \frac{g_a(\nu_k) - g_a(\nu_{k-1})}{2i\sqrt{a}}\, \rho_P(\nu_k)\right| \\ &\le \frac{|\rho_P(\nu_p)| + |\rho_P(\nu_q)| + \int_{\nu_p}^{\nu_q} |\rho_P'(x)|\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{a}} \le \frac{C_\rho}{\sqrt{a}P}.\end{aligned} \tag{94}$$

结合（90）、（92）和（94），可得（48），其中 $C = C_\Phi + C_\rho$，因为 $\nu_p \le \nu_q$ 和 $\sqrt{a}P \ge 1$ 蕴含

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+\sqrt{a}(P-\nu_q)} + \frac{1}{1+\sqrt{a}(P+\nu_p)} \\ &\ge \frac{2}{1+\sqrt{a}P} \ge \frac{1}{\sqrt{a}P}.\end{aligned}$$

■

附录 D
引理13 的证明

证明：由(39b)结合67)可得

$$c_h(a) = \lim_{M\to\infty} \sum_{k,k'=-M}^{M} \int_0^1 \Phi_a(\nu_k)\overline{\Phi_a(\nu_{k'})} \mathrm{e}^{2\pi i h\nu}\,\mathrm{d}\nu.$$

令 $d = k' - k$ 和 $x = \nu_k = k + \frac{1}{2} - \nu$。则

$$\begin{aligned}c_h(a) &= \lim_{M\to\infty} \sum_{\substack{|k|\le M \\ |k+d|\le M}} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \Phi_a(x)\overline{\Phi_a(x+d)} \mathrm{e}^{-2\pi i h(x-\frac{1}{2})}\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^h \sum_{d\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \Phi_a(x)\overline{\Phi_a(x+d)} \mathrm{e}^{-2\pi i h x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{95}$$

根据（40），

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} \Phi_a(x)\overline{\Phi_a(x+d)} \mathrm{e}^{-2\pi i h x}\,\mathrm{d}x \\ =& a\mathrm{e}^{-i\pi a d^2} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}(ax)\operatorname{sinc}(a(x+d)) \mathrm{e}^{-2\pi i(h+ad)x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意以下傅里叶对应：

$$\begin{aligned}\operatorname{sinc}(ax)\mathrm{e}^{-2\pi i(h+ad)x} &\longleftrightarrow a^{-1}\mathbf{1}_I(\eta+h+ad), \\ \operatorname{sinc}(a(x+d)) &\longleftrightarrow a^{-1}\mathrm{e}^{2\pi i d\eta}\mathbf{1}_I(\eta),\end{aligned} \tag{96}$$

其中 $I = [-a/2, a/2]$，于是由帕塞瓦尔定理可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} \Phi_a(x)\overline{\Phi_a(x+d)}\mathrm{e}^{-2\pi i h x}\,\mathrm{d}x \\ &= a\mathrm{e}^{-i\pi a d^2} \int_{\mathbb{R}} a^{-2}\mathbf{1}_I(\eta+h+ad)\mathbf{1}_I(\eta)\mathrm{e}^{-2\pi i d\eta}\,\mathrm{d}\eta \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-i\pi a d^2}}{a} \int_{I\cap(I-h-ad)} \mathrm{e}^{-2\pi i d\eta}\,\mathrm{d}\eta.\end{aligned} \tag{97}$$

区间 $I \cap (I-h-ad)$ 非空当且仅当$|h+ad| < a$。设 $h/a = \kappa_h + \beta$, $0 \le \beta < 1$。则$|\kappa_h + \beta + d| < 1$ 仅剩下 $d = -\kappa_h$, $-\kappa_h - 1$，其中

$$I\cap(I-h-ad) = \begin{cases}[-a/2, a/2 - a\beta], & d = -\kappa_h, \\ [a/2 - a\beta, a/2], & d = -\kappa_h - 1,\end{cases} \tag{98}$$

其中，若 $\beta = 0$，第二个区间便消失。对这些区间上的(97) 积分，并将其贡献相加，代入 (95) 得到 (69)。

■

参考文献

[1] A. Ksienski，《最大平坦与准光滑扇区波束》，IRE《天线与传播汇刊》，第8卷，第5期，第476–484页，1960年9月，doi: 10.1109/TAP.1960.1144881。[2] H. J. Orchard、R. S. Elliott和G. J. Stern，《赋形波束天线方向图综合优化》，IEE H辑《微波、天线与传播学报》，第132卷，第1期，第63–68页，1985年2月，doi: 10.1049/ip-h-2.1985.0013。[3] J. C. Kerce、G. C. Brown和M. A. Mitchell，《通过仅相位发射波束展宽提升雷达搜索性能》，载于IEEE雷达会议论文集，2007年4月，第451–456页，doi: 10.1109/RADAR.2007.374259。[4] M. A. Girnyk和S. O. Petersson，《大型天线阵列的高效小区专属波束成形》，IEEE Trans. Commun.，第69卷，第12期，第8429–8442页，2021年。[5] C. Du和Y. Jiang，《广播信道的宽波束设计》，IEEE 信号处理汇刊，第72卷，第3819–3833页，2024年，doi: 10.1109/TSP.2024.3440353。[6] Z. Xiao、P. Xia和X.-G. Xia，《采用混合预编码结构的毫米波信道估代码本设计》，IEEE Trans. Wireless Commun.，第16卷，第1期，第141–153页，2017年1月。[7] X.-G. Xia和X. Gao，《大规模MIMO系统中全向传输的空时码设计》，IEEE Wireless Commun. Lett.，第5卷，第5期，第512–515页，2016年10月，doi: 10.1109/LWC.2016.2597231。[8] F. Li、Y. Jiang、C. Du和X. Wang，《Golay互补矩阵的构造及其在MIMO全向传输中的应用》，IEEE Trans. Signal Process.，第69卷，2113，2021年，2100 10 1109 2021 3067467，第–页，doi: . /TSP. . .[9] 3GPP，《新空口；总体描述；第2阶段》，第三代合作伙伴计划，技术规范38.300，2018年10月，v15.3.1，Release 15。在线可查。[10] M. Girnyk、H. Jidhage和S. Fax´er，《5G大规模MIMO中的宽波束成形技术》，《爱立信技术评论》，第2023卷，第10期，第2–6页，2023年10月，doi: 10.23919/ETR.2023.10313525。[11] M. J. E. Golay，《长低自相关二进制序列的优值因子》，IEEE Trans. Inf. Theory，第28卷，第3期，第543–549页，1982年5月，doi: 10.1109/TIT.1982.1056505。[12] K.-U. Schmidt，《低相关序列》，《设计、编码与密码学》，第78卷，第1期，第237–267页，2016年，doi: 10.1007/s10623-015-0154-7。[13] R. W. Heath, Jr.、N. Gonz´alez-Prelcic、S. Rangan、W. Roh和A. M. Sayeed，《毫米波MIMO系统信号处理技术概述》，IEEE《信号处理精选主题期刊》，第10卷，第3期，第436–453页，2016年4月，doi: 10.1109/JSTSP.2016.2523924。[14] M. J. E. Golay，《互补序列》，IRE Trans. Inf. Theory，第7卷，第2期，第82–87页，1961年4月，doi: 10.1109/TIT.1961.1057620。[15] C. Du和Y. Jiang，《多相Golay互补阵列：可能的尺寸与新构造》，IEEE Trans. Inf. Theory，第70卷，第2期，第1422–1435页，2024年2月，doi: 10.1109/TIT.2023.3313574。

[16] P. Cao、J. S. Thompson和H. Haas，《通过凸松弛进行恒模赋形波束综合》，IEEE《天线与无线传播快报》，第16卷，第617–620页，2017年，doi: 10.1109/LAWP.2016.2594141。[17] J. Tranter、N. D. Sidiropoulos、X. Fu和A. Swami，《快速单位模最小二乘及其在波束成形中的应用》，IEEE 信号处理汇刊，第65卷，第11期，第2875–2887页，2017年，doi: 10.1109/TSP.2017.2666774。[18] A. Arora、C. G. Tsinos、M. R. B. Shankar、S. Chatzinotas和B. Ottersten，《恒模模拟波束成形的高效算法》，IEEE 信号处理汇刊，第70卷，第756–771页，2022年，doi: 10.1109/TSP.2021.3094653。[19] J. O. Coleman、D. P. Scholnik和K. R. McPhail，《规则平面阵列的仅相位加权——一种启发式非线性调频方法》，载于IEEE国际相控阵系统与技术研讨会论文集，2010年，第113–120页，doi: 10.1109/ARRAY.2010.5613383。[20] C. Fonteneau、M. Crussi`ere和B. Jahan，《无线通信相控阵的波束展宽方法》，EURASIP J. Wireless Commun. Netw.，第2022卷，2022年，文章编号91，doi: 10.1186/s13638-022- 02173-9。[21] P. Angeletti、G. Toso和R. Vitolo，《基于传输映射的渐近相位综合——第一部分：理论与无旋线性映射》，IEEE Open J. Antennas Propag.，第7卷，第2期，第369–393页，2026年，doi: 10.1109/OJAP.2025.3646973。[22] ——，《基于传输映射的渐近相位综合——第二部分：最优输运问题》，IEEE Open J. Antennas Propag.，第7卷，第2期，第394–405页，2026年，doi: 10.1109/OJAP.2025.3646965。[23] J. E. Littlewood，《关于多项式 $\sum^{n} \pm z^{m}$、$\sum^{n} e^{\alpha_m i} z^{m}$、$z = e^{\theta i}$ 41，1，367 376，1966，》，J. London Math. Soc.，第卷，期，页码–，doi: 10.1112/jlms/s1-41.1.367。[24] T. Høholdt、H. E. Jensen和J. Justesen，《一类二进制序列的非周期相关性与优值因子》，IEEE Trans. Inf. Theory，第31卷，第4期，第549–552页，1985年7月，doi: 10.1109/TIT.1985.1057071。[25] D. J. Katz、S. Lee和S. A. Trunov，《具有最大渐近优值因子的Rudin-Shapiro类序列》，IEEE Trans. Inf. Theory，第66卷，第12期，第7728–7738页，2020年12月，doi: 10.1109/TIT.2020.3011853。[26] J. M. Jensen、H. E. Jensen和T. Høholdt，《与差集相关的二进制序列的优值因子》，IEEE Trans. Inf. Theory，第37卷，第3期，第617–626页，1991年5月，doi: 10.1109/18.79917。[27] D. J. Katz，《由特征导出的多项式的渐近 L^4 范数》，Pacific J. Math.，第263卷，第2期，第373–398页，2013年6月，doi: 10.2140/pjm.2013.263.373。[28] P. Borwein、K.-K. S. Choi和J. Jedwab，《优值因子大于6.34的二进制序列》，IEEE Trans. Inf. Theory，第50卷，第12期，第3234–3249页，2004年12月，doi: 10.1109/TIT.2004.838341。[29] J. Jedwab、D. J. Katz和K.-U. Schmidt，《二进制序列优值因子问题的进展》，J. Combin. Theory Ser. A，第120卷，第4期，第882–906页，2013年5月，doi: 10.1016/j.jcta.2013.01.010。[30] J. M. Baden，《长二进制序列优值因子的高效优化》，IEEE Trans. Inf. Theory，第57卷，第12期，第8084–8094页，2011年12月，doi: 10.1109/TIT.2011.2164778。[31] D. J. Katz和M. E. Ramirez，《二进制序列自相关劣值因子的极限矩》，IEEE Trans. Inf. Theory，第71卷，第4期，第3181–3193页，2025年4月，doi: 10.1109/TIT.2025.3532557。[32] OpenAI，《实Littlewood多项式的渐近最小最大值》，OpenAI数学发布预印本，2026年9月23日，在线可查。[33] R. L. Frank，《具有良好非周期相关特性的多相编码》，IEEE Trans. Inf. Theory，第9卷，第1期，第43–45页，1963年1月，doi: 10.1109/TIT.1963.1057798。[34] D. C. Chu，《具有良好周期相关特性的多相编码（通信）》，IEEE Trans. Inf. Theory，第18卷，第4期，第531–532页，1972年7月，doi: 10.1109/TIT.1972.1054840。[35] I. Mercer，《Chu序列的优值因子及多相序列的最佳优值因子》，IEEE Trans. Inf. Theory，第59卷，第9期，第6083–6086页，2013年9月，doi: 10.1109/TIT.2013.2259537。[36] K.-U. Schmidt，《关于Littlewood提出的、涉及具有单位模系数多项式的问题》，J. Fourier Anal. Appl.，第19卷，第3期，第457–466页，2013年，doi: 10.1007/s00041-013-9265-6。[37] D. Petrolati、P. Angeletti和G. Toso，《基于频域综合的新型分段线性多相序列》，IEEE Trans. Inf. Theory，第58卷，第7期，第4890–4898页，2012年7月，doi: 10.1109/TIT.2012.2191664。[38] P. Borwein和R. Ferguson，《低自相关多相序列》，IEEE Trans. Inf. Theory，第51卷，第4期，第1564–1567页，2005年4月，doi: 10.1109/TIT.2004.842778。[39] P. Stoica、H. He和J. Li，《设计具有良好相关特性单位模序列的新算法》，IEEE 信号处理汇刊，第57卷，第4期，第1415–1425页，2009年，doi: 10.1109/TSP.2009.2012562。[40]J. Song、P. Babu 和 D. P. Palomar，“设计低自相关旁瓣序列的优化方法”，*IEEE* 信号处理汇刊，第 63 卷，第 15 期，第 3998–4009 页，2015 年，doi：10.1109/TSP.2015.2425808。[41] J.-P. Kahane，“论 `单模系数多项式”，《伦敦数学会通报》，第 12 卷，第 5 期，第 321–342 页，1980 年，doi：10.1112/blms/12.5.321。[42] E. Bombieri 和 J. Bourgain，“论 Kahane 超平坦多项式”，《欧洲数学会杂志》，第 11 卷，第 3 期，第 627–703 页，2009 年，doi：10.4171/JEMS/163。[43] P. P. Vaidyanathan，“基于过去采样值预测带限信号”，《*IEEE* 会议录》，第 75 卷，第 8 期，第 1125–1127 页，1987 年 8 月。[44] Y. Katznelson，《调和分析导论》，第 3 版。英国剑桥：剑桥大学出版社，2004 年，第 I 章，第 6.2 节，第 32 页，式 (6.2)，doi：10.1017/CBO9781139165372。