涡旋层级联研讨会笔记

Andrés Laín Sanclemente

2026年10月至11月

继我最近在纽约大学、芝加哥大学、普林斯顿大学和波恩大学所作的研讨报告之后，又有一些人请我发表这些笔记，因此我决定将其上传至 arXiv。近年来，涡旋层级联方法已成功应用于多个流体方程（如三维欧拉方程、Boussinesq 方程、IPM、g-SQG 等），以构造有限时间奇异性。本次报告中，我将阐释这一方法的动机并介绍其内容，概述如何将其应用于二维 Boussinesq 方程和二维非齐次欧拉方程。在这两个系统中，涡量的增长源于密度层循环形变所触发的累积滞后效应，而密度层的动力学由一条无限长的退化摆链控制。我们的工作还解决了此前悬而未决的问题：受力的二维非齐次欧拉方程的经典解是否整体存在。

arXiv:2611.32419v1 [math.AP] 24 Nov 2026

今天报告的主要目标是**解释**什么是**涡旋层级联**，以及为什么这种方法**有助于**在不可压流体中寻找**奇异性**。我将陈述的结果是与 Diego Córdoba 和 Luis Martínez-Zoroa**合作完成的**。为具体起见，我们将研究一个单独的例子：二维 Boussinesq 方程。

1 Boussinesq 系统

在今天的报告中，我们将主要考虑 Boussinesq 系统

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\cdot\nabla\rho &= f_\rho,\\ \frac{\partial u}{\partial t}+u\cdot\nabla u &= -\nabla P-\rho\hat{e}_1+f_u,\\ \nabla\cdot u &= 0,\end{aligned}$$

其中 ρ，P：$\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^2_x\to\mathbb{R}$、$u$：$\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^2_x\to\mathbb{R}^2$ 是未知量，f_ρ：$\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^2_x\to\mathbb{R}$、$f_u$：$\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^2_x\to\mathbb{R}^2$ 是源项，ρ 表示“密度涨落”（因此可以**取任意符号**）。对于初始数据 ρ_0，$u_0\in C^{1,\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$，ω_0, $\nabla\rho_0\in L^q$, $1<q<2$，Chae、Kim 和 Nam [6]建立了局部存在性理论。在速度方程中取旋度后，可以消去压力，从而得到涡量方程

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\cdot\nabla\omega=\frac{\partial\rho}{\partial x_2}+f_\omega,\quad \omega=\nabla^\perp\cdot u,\quad f_\omega=\nabla^\perp\cdot f_u,\quad \nabla^\perp=\left(-\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_1}\right).$$

2 策略：涡量层级联

2.1 哲学动机

为了证明爆破，需要一个整体存在的反例，即一个在有限时间内离开局部存在性区域的方程实际解。流体方程的显式解通常相当罕见，而我们已知的那些解并不能达到这一目的。与其掌握完整解，不如**满足于**在**无限小的空间和时间尺度上进行精细控制**

在爆破点及爆破时刻附近。（如果控制只能达到有限小的空间和时间尺度，则只能证明增长。）据我所知，围绕爆破实现这种局部控制主要有两种方法。

- **自相似**（或渐近自相似）**解**。爆破通过一个“静态”剖面来描述。采用这种方法，求解流体方程**可归结为在更低维空间上求解一个常微分方程或偏微分方程**。 [Elgindi、Jeong、Chen、Hou、Pasqualotto、Gómez-Serrano、Cao-Labora、Buck- master、Lai、Wang、Shao、Wei、Zhang、Zheng，.....]。
[21, 22, 23, 24, 11, 9, 10, 12, 7, 8, 25, 29, 31, 30, 28, 32]。
- **涡旋层级联**。在一系列（可数的）空间和时间尺度附近提供局部时空控制（即离散控制）。通过这种方法，求解流体方程**可归结为一个可数常微分方程组**。[Córdoba、Martínez-Zoroa、Zheng、Lucas-Manchón、Alpöge、Buckmaster、Dai、OpenAI]。 [18, 16, 17, 13, 5, 1, 2, 4, 19, 26, 27, 33]。

图 1 对这两种策略进行了示意性比较。

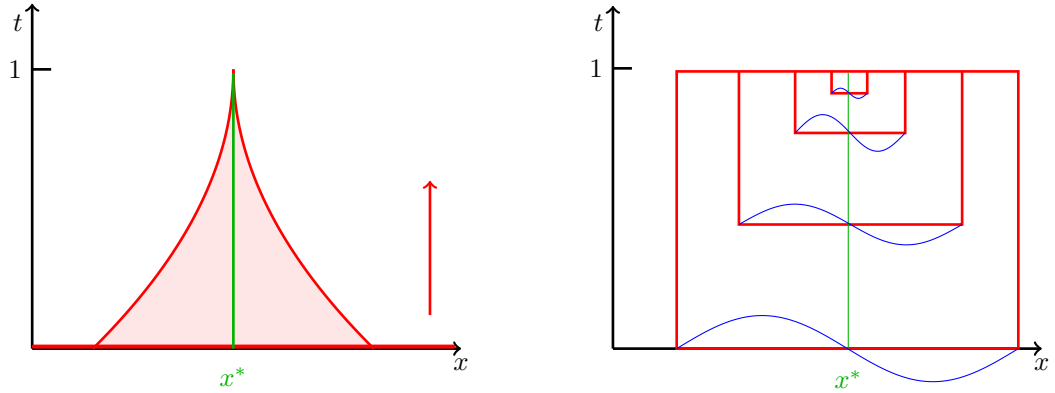

图 1：**左：** 自相似方法。真正的自相似解能够对整个时空提供“连续”控制，而渐近自相似解能够对时空中的一个“锥体”提供“连续”控制，该锥体的顶点位于爆破点和爆破时刻。**右：** 涡旋层级联。我们只能通过一系列由空间支集、空间频率和时间支集构成的三元组了解解的行为。每个矩形的水平宽度表示其空间支集，高度表示其时间支集，蓝色正弦波表示其频率。由此可见，该方法能够控制爆破点和爆破时刻处的一系列可数频率。

2.2 实现

为明确起见，我们只研究二维 Boussinesq 系统，并且大多数时候只考虑其涡量方程，但相同的思路也适用于其他流体偏微分方程。

步骤 1 找出未知量临界范数的增长机制。例如，在 Boussinesq情形下，临界范数为 $||\rho||_{\dot{C}^1}$ 和 $||\omega||_{L^\infty}$。由于密度方程是一个输运方程，增长只能通过形变实现。根据涡量方程，密度的形变可以导致涡量振幅增加。**对 ρ的形变由 ∇u决定**。形变可以通过多种方式发生。从概念上讲，考察图 2 中给出的 ∇u 的分解会有所帮助。

步骤 2 写出 未知量和源项表示为若干层之和。在 Boussinesq情形下，

$$\rho = \sum_{n\in\mathbb{N}} \rho^{(n)}, \quad u = \sum_{n\in\mathbb{N}} u^{(n)}, \quad \omega = \sum_{n\in\mathbb{N}} \omega^{(n)}, \quad f_\rho = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_\rho^{(n)}, \quad f_\omega = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_\omega^{(n)}.$$

下文中，我们将使用大写字母表示截至第 n 层的部分和：

$$P^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} \rho^{(m)}, \quad U^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} u^{(m)}, \quad \Omega^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} \omega^{(m)}, \quad F_\rho^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} f_\rho^{(m)}, \quad F_\omega^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} f_\omega^{(m)}.$$

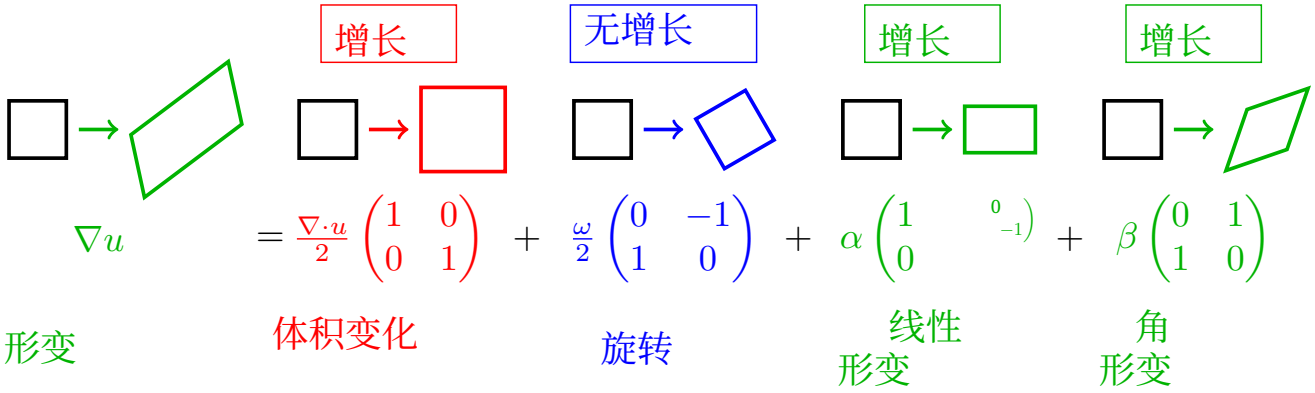

图 2：二维流体体积的一般形变的示意分解。“增长”和“无增长”标签指的是 $||\rho||_{\dot{C}^1}$ 是否可能增长。在我们的情形中，流体是不可压缩的，因此体积不可能发生变化。我们针对二维 Boussinesq 方程的构造中的增长来自线性变形。然而，在 IPM 的构造中（以及所有由其继承而来的构造中），速度场是剪切流，会导致旋转与角变形混合产生的形变。特别是， ∇u 的对角分量为零。

步骤3 将步骤2代入流体方程，并要求截至第n 层的部分和成为方程的解 $\forall n \in \mathbb{N}$。从截至第 $n-1$ 层的部分和所满足的方程中减去截至第 n 层的部分和所满足的方程，我们得到第 n 层方程，即第 n 层未知量必须满足的方程。在本例中，这相当于要求 $\left(P^{(n)},\ \Omega^{(n)},\ F^{(n)}\rho,\ F_\omega^{(n)}\right)$ 必须满足二维 Boussinesq 方程 $\forall n \in \mathbb{N}$，该方程为 $\left(\rho^{(n)}, \omega^{(n)}, f^{(n)}\rho,\ f_\omega^{(n)}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$提供层方程。第 n 层的涡量方程变为

$$\frac{\partial \omega^{(n)}}{\partial t} + U^{(n-1)} \cdot \nabla \omega^{(n)} + u^{(n)} \cdot \nabla \Omega^{(n-1)} + u^{(n)} \cdot \nabla \omega^{(n)} = \frac{\partial \rho^{(n)}}{\partial x_2} + f_\omega^{(n)}.$$

一般而言，会得到一个**可数三角偏微分方程系统**。此外，原方程中关于未知量的线性项，在第 n 层的层方程中只会涉及第 n 层；而原方程中的二次项则不仅会涉及第 n 层，还会涉及它之前的所有层。到目前为止，尚未**真正简化**原始流体偏微分方程。恰恰相反，**每个层方程都至少和原始流体方程一样难以求解！**

步骤4 假设纯二次项（唯一涉及同一层所关联的两个量的项）**相对于线性项可以忽略**。（我将在步骤8中进一步说明如何实现这一点。）如果情况确实如此，就可以利用力来吸收近似中产生的误差。于是，第 n 层方程对**未知量呈线性！**对于 Boussinesq 系统，我们得到

$$\frac{\partial \omega^{(n)}}{\partial t} + U^{(n-1)} \cdot \nabla \omega^{(n)} + u^{(n)} \cdot \nabla \Omega^{(n-1)} \approx \frac{\partial \rho^{(n)}}{\partial x_2} + f_\omega^{(n)}.$$

步骤5（可选）**利用不同的空间和时间尺度，忽略方程中的更多项**。例如，在 Boussinesq 情形下，由于临界范数为 $||\omega||_{L^\infty}$，因此 $||u||_{L^\infty}$ 应当能够在爆破时间保持有界。在这种情况下，我们将有 $\left|\left|u^{(n)}\right|\right|_{L^\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$。设 $u^{(n)}$ 的振幅为 A_n、频率为 q_n。那么， $\nabla \omega^{(n)} \sim A_n q_n^2$，因此

$$\left|\left|u^{(n)} \cdot \nabla \Omega^{(n-1)}\right|\right|_{L^\infty} \sim A_n \sum_{m=1}^{n-1} A_m q_m^2.$$

如果 A_m 关于 $m \in \mathbb{N}$ 超指数递减（例如， $A_m = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^m}$），而 $A_m q_m^2$ 关于 $m \in \mathbb{N}$ 超指数增长（例如，$A_m q_m^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^m}$），那么上述求和的主阶由其

最后一项给出，即，

$$\left|\left|u^{(n)}\cdot\nabla\Omega^{(n-1)}\right|\right|_{L^\infty}\sim A_nA_{n-1}q_{n-1}^2$$

而振幅 A_n 将能够补偿 $A_{n-1}q_{n-1}^2$的增长。总之，通过以这种方式选择振幅和频率，我们还可以将该项吸收到力中。于是，我们得到

$$\frac{\partial\omega^{(n)}}{\partial t}+U^{(n-1)}\cdot\nabla\omega^{(n)}\approx\frac{\partial\rho^{(n)}}{\partial x_2}+f_\omega^{(n)}.$$

步骤 6 忽略力，求解由此产生的线性输运方程。可选地，也可以**利用不同的空间和时间尺度，将前面各层的速度替换为其一阶泰勒近似**，从而使输运方程更易于求解。其思路如下：如果层 n 的支撑将远小于层 $n-1$的支撑，那么只需对 $U^{(n-1)}$ 进行一阶近似，就足以理解层 n的演化。对于 Boussinesq，根据泰勒余项定理，我们在这种近似中产生的误差的阶为

$$\left|\left|\mathrm{D}^2U^{(n-1)}\right|\right|_{L^\infty}\operatorname{diam}\left(\operatorname{supp}\left(\omega^{(n)}\right)\right)^2\left|\left|\nabla\omega^{(n)}\right|\right|_{L^\infty}\sim\sum_{m=1}^{n-1}A_mq_m^2\frac{1}{q_n^2}A_nq_n^2\sim A_{n-1}q_{n-1}^2A_n.$$

（该计算并不完全准确，因为 $\operatorname{diam}\left(\operatorname{supp}\left(\omega^{(n)}\right)\right)$ 实际上并不会像 $\frac{1}{q_n}$那样快速减小，但它足以帮助我们理解主要思路）。我们得到的结果与步骤 5 中完全相同。因此，误差是可控的，并且可以被吸收到力中。

若 $\Phi^{(n)}$ 是层 n的真实流映射，

$$\frac{\partial\Phi^{(n)}}{\partial t}(t,x)=U^{(n-1)}\left(t,\Phi^{(n)}(t,x)\right),\quad\Phi^{(n)}(0,x)=x,$$

则**一阶近似流映射** $\phi^{(n)}(t,x)=\eta^{(n)}(t)+\left(x-c^{(n)}\right)M^{(n)}(t)$ 可通过求解以下方程得到

$$\underbrace{\frac{\partial\eta^{(n)}}{\partial t}(t)=U^{(n-1)}\left(t,\eta^{(n)}(t)\right),\quad\eta^{(n)}(0)=c^{(n)}}_{\text{displacement of the layer}},\quad\underbrace{\frac{\partial M^{(n)}}{\partial t}(t)=M^{(n)}(t)\cdot\nabla U^{(n-1)}\left(t,\eta^{(n)}(t)\right),\quad M^{(n)}(0)=\mathrm{id}}_{\text{deformation of the layer}},$$

其中，$c^{(n)}$ 表示层中心的初始位置。特别地，层形变方程可积分为

$$M^{(n)}(t)=\mathcal{T}\exp\left(\int_0^t\nabla U^{(n-1)}\left(s,\eta^{(n)}(s)\right)\mathrm{d}s\right),\tag{1}$$

其中，$\mathcal{T}\exp$ 表示时间序指数。这个最后的方程揭示了一个关键见解：若层 n初始时具有空间变量分离，且我们希望这种空间变量分离在时间演化中得以保持，则 $\nabla U^{(n-1)}\left(t,\eta^{(n)}(t)\right)$ 必须为对角矩阵。否则，不可避免地会发生某种剪切。

通过这种方式，我们成功地用两个“非常简单”的常微分方程描述了每一层的输运和形变。此外，这一过程使我们能够近似消去层方程中的输运项。对于 Boussinesq 情形，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega^{(n)}\left(t,\phi^{(n)}(t,x)\right)\right)\approx\frac{\partial\rho^{(n)}}{\partial x_2}\left(t,\phi^{(n)}(t,x)\right),\tag{2}$$

描述涡量增长机制的方程。如果现在能够将空间和时间变量分离，并选择使 $\omega^{(n)}\left(t,\ \phi^{(n)}(t,\ x)\right)$和 $\frac{\partial\rho^{(n)}}{\partial x_2}\left(t,\ \phi^{(n)}(t,\ x)\right)$ 具有相同的空间依赖关系，那么第 n 层方程就会化简为一个常微分方程，用来描述第 n 层振幅随时间的增长。

总而言之，在最后这一步中，我们成功地将层偏微分方程简化为一个有限常微分方程组，用来描述**每一层的位移、形变和增长**。总的来说，我们已经**用一个可数三角常微分方程组取代了原来的流体偏微分方程！**

步骤7 现在，位移、形变和增长机制都已明确，根据构造方式，仍可能有一定余地来选择各层的特征时间尺度。如果在 $n \in \mathbb{N}$中**能够将时间尺度选得足够快地递减**，就可以建立**如下形式的级联** $1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to n \to \ldots$。随后，各层会按顺序随时间引入，增长过程如下：1. 层 n 通过力生成。2. 层 $n-1$ 使层 n 增长。3. 层 $n+1$ 通过力引入。4. 层 n 使层 $n+1$ 增长，依此类推。此外，由于层 n 的演化时间远短于层 $n-1$的演化时间，对于层 n而言，可以认为层 $n-1$ **在时间上保持不变**，仿佛它在爆破时间已经达到了将要达到的状态。

步骤8 选择未知量的函数形式，使纯二次项（唯一涉及同一层中两个量的项）**相对于线性项变得可以忽略**（从而证明步骤4合理）。**这一步没有标准方法**，具体做法高度依赖所考虑的方程。不过，通常需要满足以下条件：

1. 原始流体方程必须存在一个**定常解族**。因此，这些非零定常解可作为函数形式的候选，因为它们能实现所需的抵消。2. **定常解族在经 输运后必须保持封闭**，也就是说，将该族中的任意一个解经 $U^{(n-1)}$ 输运后，得到的仍是同一族中的另一个定常解。这与量 $M^{(n)}(t)$ 有关（见方程（1）），通常要求 $\nabla U_{(n-1)}$满足某种对称性。在 Boussinesq 情形下， $M^{(n)}(t)$ 将是对角矩阵。3. 该解族必须**与增长机制相容**。例如，在我们的 Boussinesq 构造中，它必须允许在式（2）中分离时间变量和空间变量，并选择 $\omega^{(n)}\left(t, \phi^{(n)}(t,x)\right)$ 和 $\frac{\partial \rho^{(n)}}{\partial x_2}\left(t, \phi^{(n)}(t,x)\right)$，使二者具有相同的空间依赖关系。

对于 Boussinesq 情形，若目标是实现线性变形，可以证明，三角函数是满足这三个要求的唯一“合理”基本构件。然而，三角函数不具有紧支集。幸运的是，足够“宽”的截断函数与三角函数的乘积是一个“近似”平稳解，因此误差足够小，可以由力吸收。

步骤9 （通常可选）**提高力的正则性**。如果上述过程产生的力具有足够的正则性和合适的函数形式，就可以通过添加专门设计的子层来消去力中正则性最低的项，并提高近似输运所用泰勒近似的阶数，从而进一步改善其正则性。其思路是，由于力具有足够的正则性，为消去力中正则性最低的项所需的子层，其振幅和频率都远小于构造中主要层的振幅和频率，因此可以将这些子层视为层的扰动。反复执行这一过程，可以使力 C^k 对于任意 $k \in \mathbb{N}$。此外，如果选择校正子层的数量和泰勒近似的阶数，使它们在爆破时间趋于无穷大，就可以使力变得光滑。

如果满足上述步骤中提到的所有简化假设，那么研究层的演化就归结为研究图 3 所描述的性质。

3 Boussinesq 构造

遗憾的是，我没有时间讲解 Boussinesq 构造的细节。下面仅作几点说明：

- 每一层的速度场都包含**双曲点**，它们会导致下一密度层发生线性变形。

- $\eta_{(n)1}(t)$ 的常微分方程，即层 n 中心的水平位置，与摆的常微分方程有着密切的关系。事实上，$\Xi_{(n)}(t) := \eta_{(n)1}(t) - \eta_{(n-1)1}(t)$，即层 n 中心相对于层 $n-1$ 水平位置的水平位置，看起来大致像 $\dot{\Xi}_{(n)} = \sin \Xi_{(n)}$，即

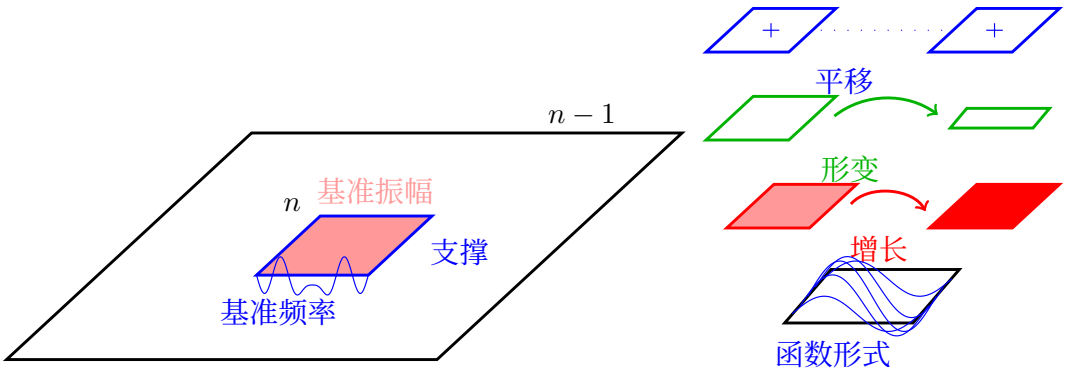

图3：定义层演化的最重要的时间无关性质和随时间变化的性质总结。

一个**退化倒置半摆！**事实上，如果再次对时间求导，$\ddot{\Xi} = (\cos\ \Xi)\ \dot{\Xi} = \cos\Xi \sin\Xi = \frac{1}{2}\sin(2\Xi)$，等价地，$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(2\Xi) - \sin(2\Xi) = 0$。“倒置”源于其负号，而普通摆的对应项为正号；“半”源于 $2\Xi^{(n)}$ 中的 2；“退化”则源于这样一个事实：实际上，这个二阶常微分方程来自一个一阶常微分方程。

- 形变矩阵 $M^{(n)}(t)$ 是**对角**的。这是避免出现剪切的关键，即保持层的变量 x_1 和 x_2 分离。

- 涡量层方程可化为涡量振幅 $A_\omega^{(n)}$、密度振幅 $A_\rho^{(n)}$ 与某个函数 $b^{(n)}$ 之间的如下关系，该函数用于衡量层 n 的形变：

$$A_\omega^{(n)}(t) = \int_0^t \underbrace{b^{(n)}(s)}_{\geq 0} \underbrace{A_\rho^{(n)}(s)}_{\geq 0} \mathrm{d}s.$$

涡量振幅的**滞后效应**由上述方程得出。

不再赘述，现陈述我们的定理 [14]:
定理 1。设 $\alpha \in (0, \alpha_*)$，$\alpha_* = \sqrt{\frac{4}{3}} = 1$。在 $[0,1) \times \mathbb{R}^2$ 上存在受迫 *Boussinesq* 系统的经典解 (u, ρ)，使得

1. 存在奇异性：

$$\lim_{T \to 1^-} \int_0^T ||\nabla \rho(t,\cdot)||_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)} \mathrm{d}t = \infty,$$

2. 力项保持“规则”：

$$f_\rho \in C_t^0 C_{x,c}^{1,\alpha}\left([0,1] \times \mathbb{R}^2\right), \quad f_u \in C_t^0 C_x^{1,\alpha}\left([0,1] \times \mathbb{R}^2\right) \cap C_t^0 L_x^2\left([0,1] \times \mathbb{R}^2\right).$$

4 非齐次欧拉方程

在介绍非齐次欧拉方程之前，我们先简要思考一下 Boussi- nesq 构造的灵活性。由于涡旋层级联的运作方式，远离爆破点时，只有有限多个层非零。因此，我们可以在远离爆破点**的地方** 修改解，并通过力项弥补这些改动，而不牺牲正则性。或者，只要新方程**在爆破点附近仍与 Boussinesq 方程相似**，我们**甚至可以修改方程本身**。这基本上就是我们将采用的策略。我们将找到一个解，使得 Boussinesq 方程和非齐次欧拉方程在首阶上看起来相同。

现在让我来介绍非齐次欧拉方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\cdot\nabla\rho&=f_\rho,\\ \frac{\partial u}{\partial t}+u\cdot\nabla u&=-\frac{\nabla P}{\rho}+f_u,\\ \nabla\cdot u&=0,\end{aligned}$$

其中 ρ, P: $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x^2\to\mathbb{R}, u$: $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x^2\to\mathbb{R}^2$ 是未知量， f_ρ: $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x^2\to\mathbb{R}$, f_u: $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x^2\to\mathbb{R}^2$ 是源项，而 ρ 表示物理 密度（因此必须非负）。Danchin 和 Fanelli [20]建立了初始数据 $\rho_0, u_0\in C^{1,\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$, $u_0\in L^2$, $\rho_0>0$ 的局部存在性理论。在我们的工作 [15]之前，整体存在与奇点形成之间的两难问题（在任何具有局部适定性的函数类中）一直悬而未决。对速度方程取旋度，可得到涡量方程

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\cdot\nabla\omega=\frac{\nabla P}{\rho}\cdot\frac{\nabla^\perp\rho}{\rho}+\nabla^\perp\cdot f_u.$$

现在，如果我们利用速度方程求解 $\frac{\nabla P}{\rho}$，便得到——

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\cdot\nabla\omega=-\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\cdot\nabla u-f_u\right]\cdot\frac{\nabla^\perp\rho}{\rho}+\nabla^\perp\cdot f_u.$$

将 Boussinesq 爆破转移到非齐次欧拉方程的关键思路是采用**试探形式**

$$\rho=\overline{\rho}+\rho_B,\quad u=u_B,$$

其中（ρ_B、 u_B、 f_{ρ_B}、 f_{u_B}）是我们的一个 Boussinesq 解， [14] 和 ρ 将取足够大。代入非齐次欧拉方程，我们得到关于力项（f_ρ、 f_u）的如下系统:

$$\begin{aligned}f_{\rho_B}&=f_\rho,\\ \frac{\partial\rho_B}{\partial x_2}\overbrace{\left(1+\frac{1}{\overline{\rho}+\rho_B}\left(f_{u,1}-\left(\frac{\partial u_B}{\partial t}+u_B\cdot\nabla u_B\right)_1\right)\right)}^{(*)}&+\\ -\frac{1}{\overline{\rho}+\rho_B}\frac{\partial\rho_B}{\partial x_1}\left(f_{u,2}-\left(\frac{\partial u_B}{\partial t}+u_B\cdot\nabla u_B\right)_2\right)+f_{\omega_B}&=\nabla^\perp\cdot f_u.\end{aligned}$$

上面的涡量方程带来了两个主要困难：1. f_u 和 $\nabla^\perp\cdot f_u$ 出现在同一个方程中。2. $\int_0^1\left|\left|\frac{\partial\rho_B}{\partial x_2}(t,\cdot)\right|\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\mathrm{d}t=\infty$，这在先验上可能会阻止 f_u 处于适定性范围 $f_u\in C^{1,\alpha}$、 $\alpha>0$内，因为其中包含 $\frac{\partial\rho_B}{\partial x_2}$的项。为了解决这些问题，我们建立一个**不动点论证**来计算 f_u，同时利用 f_u 与压力之间的**规范对称性**，使（$*$）$\forall t\in[0,1]$消失。

最后，我来陈述我们得到的结果 [15]。

定理 2. 设 $\alpha\in(0,\alpha_*)$, $\alpha_*=\sqrt{\frac{4}{3}}-1$。存在经典解 (u,ρ) 定义在 $[0,1)\times\mathbb{R}^2$ 上，它们满足带外力的非齐次欧拉方程，使得

1. 存在一个奇异性:

$$\lim_{T\to1^-}\int_0^T||\omega(t,\cdot)||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,\mathrm{d}t=\infty,$$

2. 力项仍然“规则”:

$$f_\rho\in C_t^0C_{x,c}^{1,\alpha}\left([0,1]\times\mathbb{R}^2\right),\quad f_u\in C_t^0C_x^{1,\alpha}\left([0,1]\times\mathbb{R}^2\right)\cap C_t^0L_x^2\left([0,1]\times\mathbb{R}^2\right).$$

参考文献

[1]*Levent Alpöge*；*Tristan Buckmaster*，《光滑外力作用下 *Boussinesq*方程的爆破解》。手稿，*Courant*研究所（纽约大学）（*2026*年）。*https://cims.nyu.edu/~tristanb/boussinesq.pdf*.[2] *Levent Alpöge*；*Tristan Buckmaster*，《光滑外力作用下 *Euler*方程的爆破解》。手稿，*Courant*研究所（纽约大学）（*2026*年）。*https://cims.nyu.edu/~tristanb/euler.pdf*.[3] *Levent Alpöge*；*Tristan Buckmaster*，《*Navier–Stokes*方程的有限时间爆破》。手稿，*2026*年*11*月*20*日。*https://github.com/tristanbuckmaster/navier-stokes*.[4] *Levent Alpöge*；*Tristan Buckmaster*；*Matei P. Coiculescu*，《三维*Euler*方程的有限时间奇点形成》。手稿，*Courant*研究所（纽约大学）（*2026*年）。*https://cims.nyu. edu/~tristanb/cc.pdf*.[5] *Levent Alpöge*；*Tristan Buckmaster*；*Matei P. Coiculescu*，《将 *Córdoba--Martínez-Zoroa IPM* 爆破解推广至一致时空光滑外力》。预印本（*2026*年），*arXiv:2609.16470*。*https://arxiv. org/abs/2609.16470*.[6] *Dongho Chae*；*Sung-Ki Kim*；*Hee-Seok Nam*，《*Boussinesq*方程 *Hölder*连续解的局部存在性与爆破判据》。《名古屋数学杂志》*155*，*55-80*（*1999*年）。*https://doi.org/10.1017/ s0027763000006991*.[7] *Jiajie Chen*，《具有 $C^{11/3-}$ 速度的三维不可压*Euler*方程的渐近自相似爆破 *I*：C^∞一维极限剖面》。预印本（*2026*年），*arXiv:2605.15149*。*https://arxiv.org/abs/2605.15149*.[8] *Jiajie Chen*，《具有 $C^{11/3-}$ 速度的三维不可压*Euler*方程的渐近自相似爆破 *II*：三维剖面、爆破与极限行为》。预印本（*2026*年），*arXiv:2605.15130*。*https://arxiv.org/abs/ 2605.15130*.[9] *Jiajie Chen*；*Thomas Y. Hou*，《光滑初值下二维 *Boussinesq* 方程与三维*Euler*方程稳定的近自相似爆破 *I*：分析》。预印本（*2022*年），*arXiv:2210.07191*。*https://arxiv.org/abs/ 2210.07191*.[10] *Jiajie Chen*；*Thomas Y. Hou*，《光滑初值下二维 *Boussinesq* 方程与三维*Euler*方程稳定的近自相似爆破 *II*：严格数值计算》。《多尺度建模与仿真》*23*，*25-130*（*2025*年）。*https: //doi.org/10.1137/23m1580395*.[11]*Jiajie Chen*；*Thomas Y. Hou*，《具有C^{1^α} 速度和边界的二维 *Boussinesq* 方程与三维*Euler*方程的有限时间爆破》。《数学物理通讯》*383*，*1559-1667*（*2021*年）。*https://doi.org/10.1007/ s00220-021-04067-1*.[12] *Jiajie Chen*；*Thomas Y. Hou*；*De Huang*，《三维*Euler*方程 *Hou--Luo*模型的渐近自相似爆破》。《偏微分方程年刊》*8*（*2022*年）。*https://doi.org/10.1007/s40818-022-00140-7*.[13] *Diego Córdoba*；*Óscar Domínguez*；*José Lucas-Manchón*；*Luis Martínez-Zoroa*，《*Sobolev*适定性区域内广义*SQG*方程的有限时间爆破》。预印本（*2026*年），*arXiv:2608.17192*。*https://arxiv.org/abs/2608.17192*.[14] *Diego Córdoba*；*Andrés Laín-Sanclemente*；*Luis Martínez-Zoroa*，《一致 $C^1\sqrt{4/3-1-\varepsilon} \cap L^2$ 力作用下二维 *Boussinesq* 方程通过多层退化摆产生有限时间奇点》。《数学进展》*480*，*110480*（*2025*年）。*https://doi.org/10.1016/j.aim.2025.110480*.[15]*Diego Córdoba*；*Andrés Laín-Sanclemente*；*Luis Martínez-Zoroa*，《一致 $C^1\sqrt{4/3-1-\varepsilon}$ 力作用下二维不可压缩非齐次欧拉方程的涡量爆破》。预印本（*2026*年），*arXiv:2605.29866*。*https://arxiv.org/abs/2605.29866*.[16] *Diego Córdoba*；*Luis Martínez-Zoroa*，《一致$C^{\frac{1}{12}-\varepsilon} \cap L^2$力作用下不可压三维*Euler*方程的爆破解》。预印本（*2023*年），*arXiv:2309.08495*。*https://arxiv.org/abs/2309.08495*.

[17]*Diego Córdoba*；*Luis Martínez-Zoroa*，《具有光滑源项的二维不可压多孔介质（*IPM*）方程光滑解的有限时间奇点》。预印本（*2024*年），*arXiv:2410.22920*。*https://arxiv.org/abs/2410.22920*。[18] *Diego Córdoba*；*Luis Martínez-Zoroa*；*Fan Zheng*，《$C^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})\cap C^1$中的三维不可压欧拉方程解的有限时间奇点形成》$^\alpha\cap L^2$。《偏微分方程年刊》*11*，*19*（*2025*年）。*https://doi.org/10.1007/s40818-025-00214-2*。[19] *Mimi Dai*，《二维无外力不可压多孔介质方程的有限时间爆破》。预印本（*2026*年），*arXiv:2610.06712*。*https://arxiv. org/abs/2610.06712*。[20] *Raphaël Danchin*；*Francesco Fanelli*，《端点贝西科维奇空间中的密度依赖欧拉方程适定性问题》。《纯粹与应用数学杂志》*96*（*2011*年）。*https://doi.org/10.1016/j.matpur.2011. 04.005*。[21] *Tarek M. Elgindi*，《C^1、$^\alpha$ 解在 $\mathbb{R}^3$上的不可压欧拉方程的有限时间奇点形成》。《数学年刊》（第*2*辑）*194*（*2021*年）。*https://doi.org/10.4007/annals.2021.194.3.2*。[22] *Tarek M. Elgindi*；*Tej-Eddine Ghoul*；*Nader Masmoudi*，《关于$_{C^1}$、$^\alpha$ 解在 $\mathbb{R}^3$上的不可压欧拉方程自相似爆破的稳定性》。预印本（*2019*年），*arXiv:1910.14071*。*https: //arxiv.org/abs/1910.14071*。[23]*Tarek M. Elgindi*；*In-Jee Jeong*，《轴对称三维欧拉方程强解的有限时间奇点形成》。《偏微分方程年刊》*5*，*16*（*2019*年）。*https://doi.org/10.1007/ s40818-019-0071-6*。[24] *Tarek M. Elgindi*；*In-Jee Jeong*，《*Boussinesq* 系统强解的有限时间奇点形成》。《偏微分方程年刊》*6*（*2020*年）。*https://doi.org/10.1007/s40818-020-00080-0*。[25] *Tarek M. Elgindi*；*Federico Pasqualotto*，《从不稳定性到不可压流体中的奇点形成》。预印本（*2023*年），*arXiv:2310.19780*。*https://arxiv.org/abs/2310.19780*。[26] *OpenAI*，《欧拉方程的有限时间爆破》。手稿（*2026*年）。*https://cdn.openai.com/pdf/ 315b36cd-ec98-4023-8342-93345194ece1/euler.pdf*。[27] *OpenAI*，《纳维–斯托克斯方程的有限时间爆破》。手稿（*2026*年）。*https://cdn.openai.com/pdf/32d9f210-8b73-45e0-91bc-82a30aef8a9a/navier-stokes.pdf*。[28] *Feng Shao*；*Dongyi Wei*；*Ping Zhang*；*Zhifei Zhang*，《具有 C^1、$^{(1-2/d)-}$ 速度的*d*维不可压欧拉方程自相似爆破解》。预印本（*2026*年），*arXiv:2605.19716*。*https:// arxiv.org/abs/2605.19716*。[29] *Yongji Wang*；*Ching-Yao Lai*；*Javier Gómez-Serrano*；*Tristan Buckmaster*，《利用神经网络得到的三维轴对称欧拉方程渐近自相似爆破剖面》。《物理评论快报》*130*，*244002*（*2023*年）。*https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.130.244002*。[30] *Yongji Wang*；*Tristan Léger*；*Ching-Yao Lai*；*Tristan Buckmaster*，《通过神经网络将不稳定奇点的尖锐梯度解析至机器精度》。预印本（*2025*年），*arXiv:2511.22819*。*https:// arxiv.org/abs/2511.22819*。[31] *Yongji Wang*；等，《不稳定奇点的发现》。预印本（*2025*年），*arXiv:2509.14185*。*https: //arxiv.org/abs/2509.14185*。[32] *Fan Zheng*，《广义德·格雷戈里奥方程的严格自相似爆破》。《非线性》*36*，*5252*（*2023*年）。*https://doi.org/10.1088/1361-6544/acf01e*。[33] *Fan Zheng*，《无外力光滑初始数据生成的*IPM*方程有限时间爆破》。预印本（*2026*年），*arXiv:2610.06544*。*https://arxiv.org/abs/2610.06544*。