arXiv:2611.32426v1 [math.AG] 24 Nov 2026

O-极小几何导论

Michel COSTE 雷恩数学研究所
michel.coste@univ-rennes.fr

1999年11月

序言

这些讲义曾作为1999年春季在比萨开设的一门课程的基础。A. Macintyre 同时讲授了一门关于构造 o-极小结构的课程。

这些讲义的内容在很大程度上得益于 L. van den Dries [vD] 的优秀著作。书中一些有趣的主题未收入本讲义，例如 Vapnik-Chervonenkis性质。

并非源自 [vD] 的部分材料取自论文[Co1]。其中包括第4章和第5章关于良好坐标的选择以及函数三角剖分的章节。后一章包含了关于集合或函数族中平凡性的结果，这也是本课程的主要目标。

最后一章讨论光滑性，旨在确立性质“D$\mathcal{C}^k$ - all k”，该性质在 Macintyre 的课程中发挥了关键作用（由 [vDMi] 中的结果很容易推得）。本章也借此机会给出了一些关于管状邻域的结果。

我很高兴感谢 Francesca Acquistapace、Fabrizio Broglia 以及数学系的所有同事，感谢他们邀请我在比萨讲授这门课程，并给予我热情友好的款待。还要特别感谢 Antonio Diaz-Cano、Pietro DiMartino、Jesus Escribano 和 Federico Ponchio 阅读这些讲义并指出其中的错误。

目录

1 o-极小结构 **5**

1.1 引言.5 1.2 半代数集.6 1.3 o-极小结构的定义.9

2 细胞分解 1 **5**

2.1 单调性定理.15 2.2 细胞分解.18

3 连通分支与维数 2 **5**

3.1 曲线选择.25 3.2 连通分支.28 3.3 维数.31

4 可定义集的三角剖分 3 **7**

4.1 良坐标.37 4.2 单纯复形.40 4.3 可定义集的三角剖分.42 4.4 可定义函数的三角剖分.44

5 可定义族的一般纤维 4 **9**

5.1 计划.49 5.2 可定义集超滤子的空间.50 5.3 o-极小结构 $\kappa(\alpha)$.52 5.4 可定义集的扩张.57 5.5 可定义映射族.58 5.6 纤维性质与整体性质.59 5.7 平凡化定理.61 5.8 集合与函数的拓扑类型.65

6 光滑性 6 **9**

6.1 单变量可定义函数.69 6.2 $\mathcal{C}^k$ 细胞分解.71 6.3 可定义流形与管状邻域.72

参考文献 **79**

索引 **81**

第1章

o-极小结构

1.1 引言

o-极小结构的主要特征是其中不存在“怪物”。我们来看一个被排除在外的病态行为示例。令 $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ 为函数 $x \mapsto \sin(1/x)$ 的图，其中 $x > 0$，并令 $\mathrm{clos}(\Gamma)$ 为 Γ 在 $\mathbb{R}^2$中的闭包。集合 $\mathrm{clos}(\Gamma)$ 是 Γ与连接点 $(0, -1)$ 和 $(0, 1)$ 的闭线段的并集。我们有

$$\dim(\mathrm{clos}(\Gamma) \setminus \Gamma) = \dim \Gamma = 1.$$

还要注意，闭包(Γ) 是连通的，但不是弧连通的：不存在一条位于闭包(Γ) 内的连续路径，将原点与 Γ 中的某个点连接起来。o-极小结构将使我们能够发展一种“驯化拓扑”，在其中这类糟糕的情形不会发生。o-极小结构的模型是半代数集类。

$\mathbb{R}^n$ 的一个半代数子集是由具有实系数的多项式方程和不等式的布尔组合定义的子集。换言之，$\mathbb{R}^n$ 的半代数子集构成包含 $\mathcal{SA}_n$ 的 $\mathbb{R}^n$ 的子集的最小类，使得：

1. 如果 $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$，那么 $\{x \in \mathbb{R}^n ; \quad P(x) = 0\} \in \mathcal{SA}_n$ 且 $\{x \in \mathbb{R}^n ; \quad P(x) > 0\} \in \mathcal{SA}_n$。
2. 如果 $A \in \mathcal{SA}_n$ 和 $B \in \mathcal{SA}_n$，那么 $A \cup B$、$A \cap B$ 和 $\mathbb{R}^n \setminus A$ 属于 $\mathcal{SA}_n$。

一方面，半代数集类在许多构造下是稳定的（例如取投影、闭包、连通分支等）；另一方面，半代数集的拓扑非常简单，不会出现

病态行为。o-极小结构可以看作对半代数几何的公理化处理。一个（扩张实数域的）o-极小结构，是对于每个正整数 n，给定幂集 $\mathbb{R}^n$的一个子集 $\mathcal{S}_n$ ，并满足某些公理。其中一些公理允许在该结构内部进行许多构造，而一个“o-极小性公理”则保证了拓扑的良性。

在研究 o-极小结构时，可以区分两类活动。第一类是从公理出发发展 o-极小结构的几何理论。在这项工作中，人们尝试仿照半代数模型。第二类活动是发现满足 o-极小结构公理的、令人感兴趣的新类别。这项工作更具创新性，而这一方向取得的进展（始于 Wilkie 证明实数域上的指数函数定义了一个 o-极小结构）证明了研究 o-极小结构的价值。本课程关注第一类活动（o-极小结构的几何理论），而 A. Macintyre 的课程则关注 o-极小结构的构造。

1.2 半代数集

上文已经定义了 $\mathbb{R}^n$ 的半代数子集。我们用 $\mathcal{SA}_n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的所有半代数子集构成的集合。半代数集这一类所具有的一些稳定性性质可直接由定义得出。

1. $\mathbb{R}^n$ 的所有代数子集都属于 $\mathcal{SA}_n$。回想一下，代数子集是由有限个多项式方程定义的子集

$$P_1(x_1,\ldots,x_n)=\ldots=P_k(x_1,\ldots,x_n)=0\ .$$

2. $\mathcal{SA}_n$ 在布尔运算下封闭，即对有限并、有限交和取补集封闭。换句话说， $\mathcal{SA}_n$ 是幂集 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 的布尔子代数。

3. 半代数集的笛卡尔积仍是半代数集。如果 $A\in\mathcal{SA}_n$ 且 $B\in\mathcal{SA}_p$，那么 $A\times B\in\mathcal{SA}_{n+p}$。

仅有集合还不够，我们还需要映射。设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是一个半代数集。如果映射 $f\colon A\to\mathbb{R}^p$ 的图 $\Gamma(f)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p=\mathbb{R}^{n+p}$ 是半代数集，则称该映射为半代数映射。例如，多项式映射都是半代数的。函数 $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ 在 $|x|\leq 1$ 上是半代数的。

半代数集最重要的稳定性性质称为“塔斯基-塞登伯格定理”。这一半代数几何中的核心结果，从定义中并不显而易见。

4. 记 p 为: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ 在前 n 个坐标上的投影。设 A 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一个半代数子集。那么投影 $p(A)$ 是半代数的。

塔斯基-塞登伯格定理有许多推论。例如，它意味着两个半代数映射的复合是半代数的。关于投影稳定性在 o-极小结构中的推论，我们将在后文作进一步说明。

直线上的半代数子集很容易描述。事实上， $\mathbb{R}$ 的半代数子集 A 可由一个变量的多项式上的符号条件（< 0、 $= 0$ 或 > 0）的布尔组合来描述。考虑 A 的定义中出现的所有多项式的有限多个根。在由这些根划分出的区间上，多项式的符号保持不变。因此，这样的一个区间要么与 A 不相交，要么包含于 A 中。由此得到如下描述。

5. $\mathcal{SA}_1$ 的元素是点和开区间的有限并集。

我们无法期待对$\mathbb{R}^n$、 $n > 1$的半代数子集作出如此简单的描述。然而，我们知道，每个半代数集都可以有限划分为若干与开盒同胚的半代数子集（即开区间的笛卡尔积）。这是所谓“柱形代数分解”（柱形代数分解）的结果，柱形代数分解是研究半代数集的主要工具。事实上，利用柱形代数分解可以证明塔尔斯基-塞登伯格定理。 $\mathbb{R}^n$ 的柱形代数分解是将 $\mathbb{R}^n$ 划分为有限个半代数子集（称为柱形代数分解的胞腔），并满足某些性质。我们通过对 n进行归纳法来定义 $\mathbb{R}^n$ 的柱形代数分解。

- $\mathbb{R}$ 的柱形代数分解是由有限个点 $a_1 < \ldots < a_\ell$进行的细分。胞腔是单点集 $\{a_i\}$ 以及由这些点界定的开区间。

- 对于 $n > 1$， $\mathbb{R}^n$ 的柱形代数分解由 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的柱形代数分解以及对于$\mathbb{R}^{n-1}$的每个胞腔 C 的连续半代数函数给出

$$\zeta_{C,1} < \ldots < \zeta_{C,\ell_C} : C \to \mathbb{R} .$$

$\mathbb{R}^n$ 的胞腔是函数$\zeta_{C,\,i}$ 的图，以及圆柱体 $C \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ 中由这些图界定的带。对于 $i = 0$、.....、 ℓ_C，带（$\zeta_{C,\,i}$、$\zeta_{C,\,i+1}$）是

$$(\zeta_{C,i}, \zeta_{C,i+1}) = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n \,;\; x' \in C \;\text{ and }\; \zeta_{C,i}(x') < x_n < \zeta_{C,i+1}(x')\}\,,$$

其中我们设为 $\zeta_{C,\,0} = -\infty$ 且 $\zeta_{C,\,\ell_C+1} = +\infty$。

注意，柱形代数分解的每个胞腔都与一个开盒同胚。对此可对 n 进行归纳法证明，因为 $\zeta_{C,\,i}$ 的图与 C 同胚，而带（$\zeta_{C,\,i}$，$\zeta_{C,\,i+1}$）与 $C \times (0,\ 1)$ 同胚。

给定 $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ 中的多项式有限列表（P_1，.....，P_k），如果 A是 $\mathbb{R}^n$ 的子集，并且每个P_i 在 A 上的符号（< 0、$= 0$ 或 > 0）均为常数，则称 A 为（P_1，.....，P_k）-不变集。关于柱形代数分解的主要结果如下。

定理 1.1 给定 $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ 中的多项式有限列表（P_1，.....，P_k），则存在 $\mathbb{R}^n$ 的柱形代数分解，使得每个胞腔都是（P_1，.....，P_k）-不变的。

由定理 1.1 可知，对于实数域 A 的每个半代数子集 $\mathbb{R}^n$，都存在一个柱形代数分解，使得 A 是胞腔的并集（这样的柱形代数分解称为适配于 A）。事实上，A由有限列多项式上的符号条件的布尔组合定义（P_1，.....，P_k），因此只需取一个柱形代数分解，使每个胞腔都对（P_1，.....，P_k）不变。

我们用一个实数域 $\mathbb{R}^3$ 的柱形代数分解来说明定理 1.1，其中每个胞腔都对（$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 1$）不变（即一个适配于单位球面的柱形代数分解）。图 1.1 展示了这样的柱形代数分解。

练习 1.2 在这个柱形代数分解中，$\mathbb{R}^3$ 有多少个胞腔？是否可能存在一个适配于单位球面的 $\mathbb{R}^3$的柱形代数分解，使胞腔数量更少？

关于 [Co2] ，可参阅半代数几何导论。

半代数几何也可以在任意实闭域上构建，而不必局限于实数域。实闭域 R 是满足以下等价条件之一的有序域：

- 每个正元素都是一个平方数，并且 $R[X]$ 中每个奇次数多项式都有一个根在 R中。
- 对于每个多项式 $F \in R[X]$ 以及所有 a，b 属于 R 且满足 $a < b$ 和$F(a)$ $F(b) < 0$的情形，存在 $c \in R$、$a < c < b$，使得 $F(c) = 0$。
- $R[\sqrt{-1}] = R[X]/(X^2 + 1)$ 是一个代数闭域。

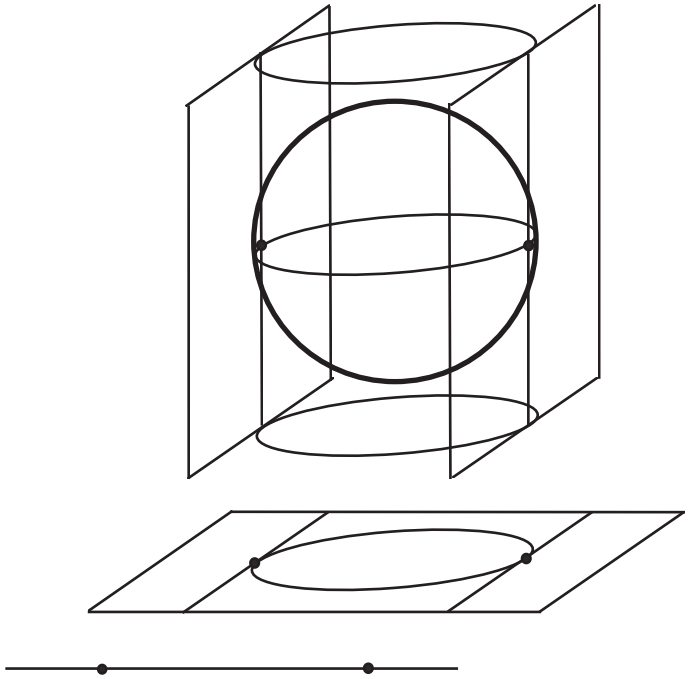


图 1.1：适配于球面的柱形代数分解

R^n 的半代数子集定义如下： $\mathbb{R}^n$。本节回顾的半代数集的性质同样适用于 R^n 的半代数子集。关于任意实闭域上的半代数几何研究，请参阅 [BCR] 。

1.3 o-极小结构的定义

现在我们将定义扩张实闭域 R 的 o-极小结构。我们考虑比实数域更一般的情形，这一点只在第5章中会很重要。除此之外，读者可以取 $R = \mathbb{R}$。

中的区间 R 总是指开区间 $(a,\ b)$（对于 $a < b$）或 $(a,\ +\infty)$ 或 $(-\infty,\ b)$。我们坚持认为，区间总是在 $R \cup \{-\infty, +\infty\}$ 中有端点。举例来说，如果 R 是实代数数域（它是最小的实闭域），那么 R 中满足 $0 < x < \pi$（$\pi = 3.14\ldots$）的 x 集合不是一个区间，因为它在 R 中没有右端点。偶尔，我们也会用记号 $[a, b]$ 表示 R 中的闭线段。

实数域 R 具有一种以区间为基的拓扑。仿射空间 R^n 赋予积拓扑。开盒，即

开区间的笛卡尔积 $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ 构成该拓扑的一个基。多项式在此拓扑下是连续的。

练习 1.3 证明多项式是连续的。

在讨论拓扑时，应注意到实闭域通常既不是局部连通的，也不是局部紧的（可以想想实代数数）。

定义 1.4 一个扩张实闭域的结构 R 是一个集合$\mathcal{S} = (\mathcal{S}^n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中每个 $\mathcal{S}^n$ 都是仿射空间 R^n的子集所组成的集合，并满足以下公理：

1. R^n 的所有代数子集都属于 S_n。
2. 对于每个 n， S_n 都是 R^n的幂集的布尔子代数。
3. 如果 $A \in S_m$ 和 $B \in S_n$，那么 $A \times B \in S_{m+n}$。
4. 如果 p： $R^{n+1} \to R^n$ 是对前 n 个坐标的投影，并且 $A \in S_{n+1}$，那么 $p(A) \in S_n$。

S_n 中的元素称为的可定义子集。如果结构 $\mathcal{S}$ 还满足以下条件，则称其为o-极小：

5. S_1 中的元素恰好是点和区间的有限并。

下文中，我们始终在扩张实闭域 R的某个 o-极小结构中进行讨论。

定义 1.5 若映射 f： $A \to R^p$ （其中 $A \subset R^n$）的图是 $R^n \times R^p$的可定义子集，则称该映射为可定义的。（应用 p次性质 4，我们可推出 A 是可定义的。）

命题 1.6 可定义集在可定义映射下的像是可定义的 .

证明。设 $f: A \to R^p$ 可定义，其中 $A \subset R^n$，并设 B 是 A的一个可定义子集。记 $\Gamma_f = \{(x, f(x)); \quad x \in A\} \subset R^{n+p}$ 为 f的图。设 Δ是 R^{p+n+p}的代数（实际上是线性）子集，由满足 $z = y$的那些 $(z, x, y) \in R^p \times R^n \times R^p$构成。那么 $C = \Delta \cap (R^p \times \Gamma) \cap (R^p \times B \times R^p)$ 是 R^{p+n+p} 的可定义子集。设 $p_{p+n+p,p}: R^{p+n+p} \to R^p$ 是到前 p 个坐标的投影。我们有 $p_{p+n+p,p}(C) = f(B)$，并应用 $n + p$ 次性质 4，可推出 $f(B)$ 是可定义的。□

注意到，每个多项式映射都是可定义映射，因为它的图是一个代数集。

练习 1.7 R^n 的每个半代数子集都是可定义的（提示：由 $P(x_1,\ldots,x_n) > 0$ 定义的集合，是满足方程 $x_{n+1}^2 P(x_1,\ldots,x_n) - 1 = 0$的代数集的投影）。因此， $\mathcal{SA}_n$ 的集合是扩张 R的最小 o-极小结构。

练习 1.8 证明， R 的每个非空可定义子集在 $R \cup \{+\infty\}$中都有最小上界。

练习 1.9 假设 $\mathcal{S}$ 是扩张有序域 R 的一个 o-极小结构（定义同上）。证明 R 是实闭的。（提示：可以使用域为实闭域的第二个等价条件、多项式的连续性以及 o-极小结构的性质 5。）

练习 1.10 设 $f = (f_1,\ldots,f_p)$是一个从 $A \subset R^n$ 到 R^p的映射。证明f可定义，当且仅当它的每个坐标函数 $f_1,\ldots,f_p$都可定义。

练习 1.11 证明两个可定义映射的复合仍是可定义的。证明可定义函数 $A \to R$ 构成一个 R-代数。

命题 1.12 R^n的可定义子集的闭包和内部都是可定义的。

证明。 只需证明关于闭包的断言。关于内部的情形可通过取补集得到。设 A 是 R^n 的可定义子集。 A 的闭包为

$$\operatorname{clos}(A) = \left\{ x \in R^n \ ; \ \forall \varepsilon \in R,\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists y \in R^n,\ y \in A \ \text{ and } \ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2 \right\} .$$

其中 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 和 $y = (y_1, \ldots\ldots, y_n)$。 A 的闭包也可描述为

$$\operatorname{clos}(A) = R^n \setminus \left(p_{n+1,n}\left(R^{n+1} \setminus p_{2n+1,n+1}(B) \right) \right) ,$$

其中

$$B = (R^n \times R \times A) \cap \left\{ (x, \varepsilon, y) \in R^n \times R \times R^n \ ; \ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2 \right\} ,$$

$p_{n+1,\ n}(x,\ \varepsilon) = x$ 以及 $p_{2n+1,\ n+1}(x,\ \varepsilon,\ y) = (x,\ \varepsilon)$。然后注意到 B 是可定义的。□

上面的例子表明，为了证明一个子集是可定义的，通常逐一写出投影很枯燥。我们更习惯于写出公式。下面精确定义（o-极小结构的语言中的）一阶公式的含义。一阶公式按照以下规则构造。

1. 如果 $P \in R[X_1, \ldots, X_n]$，那么 $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ 和 $P(x_1, \ldots, x_n) > 0$ 都是一阶公式。2. 如果 A 是 R^n的一个可定义子集，那么 $x \in A$（其中 $x = (x_1, \ldots, x_n)$）是一阶公式。3. 如果 $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ 是一阶公式，那么 “Φ 且 Ψ” 、 “Φ 或 Ψ” 、 “非 Φ” 以及 $\Phi \Rightarrow \Psi$ 都是一阶公式。4. 如果 $\Phi(y, x)$ 是一阶公式（其中 $y = (y_1, \ldots, y_p)$ 和 $x = (x_1, \ldots, x_p)$），且 A 是 R^n的一个可定义子集，那么 $\exists x \in A\ \Phi(y, x)$ 和 $\forall x \in A\ \Phi(y, x)$ 都是一阶公式。

定理 1.13 若 $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ 是一个一阶公式，那么满足 $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ 的 R^n 中的点 $x_1, \ldots, x_n$ 所成的集合是可定义的。

证明。 对公式的构造过程作归纳。规则 1 产生半代数集，而半代数集是可定义的。规则 2 显然产生可定义集。规则 3 成立，因为 $\mathcal{SA}_n$ 在布尔运算下封闭。规则 4 体现了可定义集的投影仍是可定义集这一事实。事实上，若 $B = \{(y, x) \in R^{p+n};\ \Phi(y, x)\}$ 是可定义的，且 $p_{p+n,p}\colon R^{p+n} \to R^p$ 表示到前 p 个坐标的投影，则我们有

$$\begin{aligned} \{y \in R^p\ ;\ \exists x \in A\ \Phi(y, x)\} &= p_{p+n,p}((R^p \times A) \cap B)\ , \\ \{y \in R^p\ ;\ \forall x \in A\ \Phi(y, x)\} &= R^p \setminus p_{p+n,p}((R^p \times A) \cap (R^{p+n} \setminus B))\ , \end{aligned}$$

这表明这两个集合都是可定义的。 □

应当注意，量化变量的取值范围必须是可定义集。例如，

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \exists n \in \mathbb{N}\ y = nx\}$$

不是可定义的（为什么？）。

关于模型论的相关概念，请参阅 [Pr]。

练习 1.14 设 $f: A \to R$ 是一个可定义函数。证明 $\{x \in A ; f(x) > 0\}$ 是可定义的。因此，在定义可定义集的公式中，我们可以接受涉及可定义函数的不等式。

练习 1.15 设 A 是 R^n 的非空可定义子集。对于 $x \in R^n$，定义 $\mathrm{dist}(x, A)$ 为集合 $\|y - x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$（其中 $y \in A$）的最大下界。证明 $\mathrm{dist}(x, A)$ 定义良好，并且 $x \mapsto \mathrm{dist}(x, A)$ 是 R^n 上的连续可定义函数。

练习 1.16 设 $f: A \to R$ 是一个可定义函数，且 $a \in$ 闭包(A)。对于 $\varepsilon > 0$，定义

$$m(\varepsilon) = \inf\{f(x) ; x \in A \text{ and } \|x - a\| < \varepsilon\} \in R \cup \{-\infty\} .$$

证明 m 是一个可定义函数（这意味着 $m^{-1}(-\infty)$ 是可定义的，并且 $m|_{m^{-1}(R)}$ 是可定义的）。证明 $\lim_{x \to a} f$ 的下极限(x) 存在于 $R \cup \{-\infty, +\infty\}$ 中。

第2章

细胞分解

本章将证明可定义集的细胞分解定理，这是对半代数集的柱形代数分解的推广。该结果对于研究 o-极小几何至关重要。证明相当技术性。主要结果源自 [PS、KPS], ，我们的论述则相当紧密地遵循了 [vD]。

2.1 单调性定理

定理 2.1（单调性定理）设 $f : (a, b) \to R$ 是一个可定义函数。存在一个有限细分 $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$，使得在每个区间 (a_i, a_{i+1})上， f 连续，且或者为常函数，或者严格单调。

单调性定理证明的关键是下面这个引理。

引理 2.2 设 $f : (a, b) \to R$ 是一个可定义函数。存在一个(a, b) 的子区间，在其上 f 为常数；或者存在一个子区间，在其上f 严格单调且连续。

证明。 假设不存在一个 (a, b) 的子区间，在其上 f 为常数。

第一步：存在一个子区间，使得 f 是单射。由假设可知，对于所有 $y \in R$，可定义集 $f^{-1}(y)$ 都是有限集：否则，$f^{-1}(y)$ 将包含一个区间，在该区间上 $f = y$。因此，可定义集$f((a, b))$是无限集，并包含一个区间 J。函数 g：$J \to (a, b)$ 定义为 $g(y) = \min(f^{-1}(y))$，它是可定义的，并满足 $f \circ g = \mathrm{Id}_J$。由于$g$是单射， $g(J)$是无限集，并包含（a, b）的一个子区间 I。我们有$g \circ f|_I = \mathrm{Id}_I$，且 f在 I上是单射。

第二步：存在一个子区间，使得 f 严格单调。我们知道 f 在子区间 I (a, b) 上是单射。取 $x \in I$。这些集合

$$\begin{aligned} I_+ &= \{y \in I\,;\ f(y) > f(x)\} \\ I_- &= \{y \in I\,;\ f(y) < f(x)\} \end{aligned}$$

构成 $I \setminus \{x\}$ 的可定义划分。因此，存在 $\varepsilon > 0$，使得（$x-\varepsilon$，x）（分别地，（x，$x+\varepsilon$））包含于 I_+ 或 I_- 中。有四种可能性$\Phi_{+,+}(x)$、$\Phi_{+,-}(x)$、$\Phi_{-,+}(x)$ 以及 $\Phi_{-,-}(x)$，它们给出了 I 的一个可定义划分。例如，$\Phi_{+,-}(x)$ 是

$$\exists\varepsilon\ \ \forall y \in I\ \ \Big((x-\varepsilon < y < x \Rightarrow f(y) > f(x))\ \text{ and } \\ (x < y < x+\varepsilon \Rightarrow f(y) < f(x))\Big)\,.$$

我们断言 $\Phi_{+,+}$ 和 $\Phi_{-,-}$ 都是有限的。只需对 $\Phi_{+,+}$ 证明该断言即可（对于 $\Phi_{-,-}$，将 f 替换为 $-f$）。如果 $\Phi_{+,+}$ 不是有限的，则它在 I 的某个子区间上成立；我们仍将该子区间记为 I。令

$$B = \{x \in I\,;\ \forall y \in I \quad y > x \Rightarrow f(y) > f(x)\}\,.$$

如果 B 包含一个区间，那么 f 在此区间上严格递增，这与 $\Phi_{+,+}$ 矛盾。因此，B 是有限的。若 $B \neq \emptyset$，则将 I 替换为 $(\max(B), +\infty) \cap I$，我们可以假设

$$(*) \qquad \forall x \in I\ \exists y \in I\ (y > x\ \text{ and }\ f(y) < f(x))\,.$$

取 $x \in I$。可定义集 $C_x = \{y \in I;\ \ y > x$且 $f(y) < f(x)\}$非空。若 C_x 为有限集，则其最大值将是 I 中的一个元素，这与性质 (*) 矛盾。因此，C_x 包含一个区间。令 z 为 C_x的内部的最大下界。由于 $f > f(x)$ 在某个区间 $(x, x+\varepsilon)$ 上成立，我们有 $z > x$。此外，$f > f(x)$ 在某个区间 $(z-\varepsilon,\ z)$ 上成立，且 $f < f(x)$ 在某个区间 $(z,\ z+\varepsilon)$ 上成立。因此，以下公式 $\Psi_{+,-}(z)$ 成立：

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall t \in I\ \forall u \in I\ (z-\varepsilon < t < z < u < z+\varepsilon \Rightarrow f(t) > f(u))\,.$$

我们已经证明

$$(**) \qquad \forall x \in I\ \exists z \in I\ (x < z\ \text{ and }\ \Psi_{+,-}(z))\,.$$

满足$\Psi_{+,-}$ 的 I 元素构成的可定义集非空且不是有限集：否则，其最大值将与（**）矛盾。由此可知，替换

为较小的子区间后，我们可以假设$\Psi_{+,-}$在I上成立。考虑由 $h(x) = f(-x)$ 定义的可定义函数 $h: -I \to R$。性质$\Phi_{+,+}$对 h 成立于 $-I$上。因此，根据前述论证，存在 $-I$ 的一个子区间，使得$\Psi_{+,-}$ 对 h 成立。这意味着存在 I 的一个子区间，使得 $\Psi_{-,+}$ 对 f 成立（交换左右）。在此子区间上，我们同时有$\Psi_{+,-}$ 和 $\Psi_{-,+}$，二者相互矛盾。这个矛盾证明了该断言。

由于$\Phi_{+,+}$和 $\Phi_{-,-}$都是有限的，将 I 替换为一个更小的子区间后，我们可以假设 $\Phi_{-,+}$ 在 I 上成立，或者$\Phi_{+,-}$在 I上成立。设 $\Phi_{-,+}$ 在 I上成立。那么 f 在 I上严格递增。事实上，对所有 $x \in I$，可定义集$\{y \in I;\ y > x$和 $f > f(x)$ 在 $(x,\ y)\}$ 上非空，其最小上界必然是 I 的右端点（否则，此最小上界将不满足$\Phi_{-,+}$）。类似地，如果 $\Phi_{+,-}$ 在 I上成立，那么 f 在 I上严格递减。

最后一步：存在一个子区间，使得 f 严格单调且连续。回忆一下，f 在 I上严格单调。可定义集 $f(I)$ 是无限集，并包含一个区间 J。$f^{-1}(J)$ 的原像是区间 $(\inf(f^{-1}(J)),\ \sup(f^{-1}(J)))$。将 I替换为这个区间后，我们可以假设f 是从区间 I 到区间 J的严格单调双射。由于 J 的子区间的原像是 I 的子区间，f 是连续的。

□

单调性定理的证明。令 $X_{=}$（分别为 $X_{\nearrow}$、$X_{\searrow}$）表示 $x \in (a,\ b)$ 的可定义集，其中 f 在包含x的某个区间上为常数（分别为连续且严格递增、连续且严格递减）。于是

$$(a, b) \setminus (X_{=} \cup X_{\nearrow} \cup X_{\searrow})$$

是有限的：否则，它将包含一个区间，而对该区间应用引理 2.2 就会得到矛盾。因此，存在一个细分 $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$，使得每个 (a_i, a_{i+1}) 都包含在 $X_{=}$、$X_{\nearrow}$ 或 $X_{\searrow}$中。显然，f 在每个 (a_i, a_{i+1}) 上都是连续的。取 (a_i, a_{i+1}) 中的 x。如果 (a_i, a_{i+1}) 包含在 $X_{=}$（分别为 $X_{\nearrow}$、$X_{\searrow}$）中，令 D_x 为满足以下条件的$y \in (a_i, a_{i+1})$ 的集合：$x < y$且 $f = f(x)$（分别为 $f > f(x)$、$f < f(x)$）在 (x, y) 上成立。可定义集 D_x 非空，其最小上界必然是 a_{i+1}。由此可知，f 在 (a_i, a_{i+1}) 上为常数或严格单调。□

练习 2.3 设 $f: (a,\ b) \to R$是一个可定义函数。那么 $\lim_{x \to b_-} f(x)$ 和 $\lim_{x \to a_+} f(x)$ 在 $R \cup \{-\infty, +\infty\}$ 中存在。

2.2 一致有限性、细胞分解与分段连续性

柱状可定义细胞分解（cdcd）的概念是柱面代数胞腔分解的推广。我们通过对 n 进行归纳法来定义 cdcd

定义 2.4 R^n 的 ***cdcd*** 是将 R^n 划分为有限个可定义集（C_i）$_{i \in I}$，并满足下文所述的某些性质。C_i 称为该 ***cdcd*** 的胞腔。

$n = 1$**:** R 的 ***cdcd*** 由 R 的有限细分 $a_1 < \ldots < a_\ell$ 给出。R 的胞腔是单点集 $\{a_i\}$、$0 < i \leq \ell$，以及区间（a_i、a_{i+1}）、$0 \leq i \leq \ell$，其中 $a_0 = -\infty$ 和 $a_{\ell+1} = +\infty$。

$n > 1$**:** R^n 的 ***cdcd*** 由 R^{n-1} 的 ***cdcd*** 给出，并且对于 R^{n-1} 的每个胞腔 D，给定连续可定义函数

$$\zeta_{D,1} < \ldots < \zeta_{D,\ell(D)} : D \longrightarrow R \, .$$

R^n 的胞腔是图

$$\{(x, \zeta_{D,i}(x)) \, ; \; x \in D\} \, , \qquad 0 < i \leq \ell(D) \, ,$$

以及带

$$(\zeta_{D,i}, \zeta_{D,i+1}) = \{(x, y) \, ; \; x \in D \;\text{ and }\; \zeta_{D,i}(x) < y < \zeta_{D,i+1}(x)\}$$

for $0 \leq i \leq \ell(D)$, *where* $\zeta_{D,0} = -\infty$ *and* $\zeta_{D,\ell(D)+1} = +\infty$.

注意，cdcd 的胞腔是可定义的这一事实，直接由定义和 o-极小结构的公理得出。还要注意，如果$p_{n,\,m} : \; R^n \to R^m$, $m < n$是对前 m 个坐标的投影，那么 p 将 R^n 的 cdcd 中的胞腔映射为 R^m的 cdcd 中的胞腔。

我们用归纳法定义胞腔的维数。单点集的维数为 0，区间的维数为 1。如果 C 是 R^n的一个胞腔，那么当 C 是图时，它的维数为 dim($p_{n,\,n-1}(C)$)；当 C 是带时，它的维数为 dim($p_{n,\,n-1}(C)$) + 1 。

命题2.5 对于 R^n 的 ***cdcd*** 中的每个胞腔 C，都存在一个可定义的同胚 θ_C : $C \to R^{\dim(C)}$。

证明。设 $D = p_{n,n-1}(C)$，并假设 $\theta_D : D \to R^{\dim(D)}$ 已经定义。设 $(x, y) \in C$，其中 $x \in D$。如果 C 是一个图，我们将 $\theta_C(x, y)$ 定义为 $\theta_D(x)$，而将其定义为

$$\left(\theta_D(x)\ ,\ \frac{1}{\zeta_{D,i}(x) - y} + y + \frac{1}{\zeta_{D,i+1}(x) - y}\right)$$

若 C 是带 $(\zeta_{D,\ i},\ \zeta_{D,\ i+1})$（分母中出现无穷函数的分式必须省略）。□

习题 2.6 证明（对 n 作归纳）胞腔是 R^n 中的开集，当且仅当其维数为 n。证明所有维数为 n 的胞腔的并集在 R^n 中稠密（提示：对 n 作归纳，证明 R^n 中的每个开盒都与一个维数为 n 的胞腔相交）。

我们已经指出，当 $R \neq \mathbb{R}$ 时，连通性的概念表现不佳。因此必须以可定义连通性的概念取而代之。

定义 2.7 若可定义集 A 满足以下条件，则称其为可定义连通：对于 A 的任意两个不相交的可定义开子集 U 和 V，只要 $A = U \cup V$，就有 $A = U$ 或 $A = V$。若可定义集 A 满足以下条件，则称其为可定义弧连通：对于 A 中任意两点 a 和 b，存在可定义连续映射 $\gamma : [0, 1] \to A$，使得 $\gamma(0) = a$ 且 $\gamma(1) = b$。

练习 2.8 证明以下事实：线段 $[0, 1]$ 是可定义连通的。可定义弧连通蕴含可定义连通。每个盒 $(0,1)^d$ 都是可定义连通的。cdcd 中的每个胞腔都是可定义连通的。

现在我们陈述本节的三个主要结果。下文中，我们用 $\sharp S$ 表示有限集 S的元素个数。

定理 2.9（一致有限性 UF_n）设 A 是 R^n的一个可定义子集，并且对于每个 $x \in R^{n-1}$，集合

$$A_x = \{y \in R\ ;\ (x, y) \in A\}$$

是有限的。那么存在 $k \in \mathbf{N}$，使得对于每个 $x \in R^{n-1}$，都有 $\sharp A_x \leq k$。

定理 2.10（细胞分解 CDCD_n）设 A_1、……、A_k 是 R^n 的可定义子集。存在一个 R^n 的 *cdcd*，使得每个 A_i 都是胞腔的并集。

满足该定理性质的 R^n 的 cdcd 称为适配于 A_1、.....、A_k。

习题 2.11 证明 CDCD$_n$的以下推论：设 X 是 R^n 的一个可定义子集，且 clos(X)的内部非空。那么 X的内部非空。（提示：使用习题 2.6来获得 R^n 的一个方便的 cdcd。）

定理 2.12（分段连续性 PC_n） 设 A 是R^n 的一个可定义子集，且 $f:\ A \to R$ 是一个可定义函数。存在一个适配于 A的 R^n 的 ***cdcd***，使得对于包含于 A中的每个胞腔 C，$f|_C$ 都是连续的。

习题 2.13 证明 PC$_n$的以下推论：设 X 是 R^n 的一个开可定义子集，且 $f: X \to R$ 是一个可定义函数。那么存在一个开盒 $B \subset X$，使得 $f|_B$ 是连续的（提示：使用习题 2.6）。

我们通过对 n进行归纳，同时证明这三个定理。对于 $n = 1$，UF$_1$ 是显然的（R^0 只是一个点），CDCD$_1$ 直接由 o-极小性推出，而 PC$_1$ 是单调性定理 2.1的结果。下面我们假设，对于满足 $0 < m < n$的所有整数m，$n > 1$ 以及 UF$_m$、CDCD$_m$ 和 PC$_m$ 均成立。

证明 UF$_n$。我们可以假设，对于每个 $x \in R^{n-1}$，集合 A_x 包含于 $(-1,\ 1)$ 中。设 $\mu:\ R \underline{\to (-}1,\ 1)$ 是由 $\mu(y) = y/\sqrt{1+y^2}$ 定义的半代数同胚。我们可以通过 $(x,\ y) \mapsto (x,\ \mu(y))$ 将 A 替换为其像，该像满足此假设。

对于 $x \in R^{n-1}$ 和 $i = 1,\ 2$、.....，如果存在，则将 $f_i(x)$ 定义为 A_x 的第 i 个元素。注意，函数 f_i 是可定义的。如果 f_1、.....、$f_{\sharp(A_a)}$ 在包含 a 的某个开盒上有定义且连续，并且 a 不属于 $f_{\sharp(A_a}$ 的定义域的闭包$)_{+1}$，则称 $a \in R^{n-1}$ 良好。换言之，当且仅当存在 R^{n-1} 中的一个开盒 $B \ni a$，使得 $(B \times R) \cap A$ 是连续可定义函数的图的并集时，a 才是良好的

$$\zeta_1 < \ldots < \zeta_{\sharp(A_a)} : B \to (-1, 1) \qquad (\zeta_i = f_i | B)\ .$$

如果它不好，就称其为 $a \in R^{n-1}$ 坏的 。

第一步：好点集是可定义的。令 a 为 R^{n-1}中的一个点。若b属于 $[-1, 1]$，则当存在一个开盒$C = B \times (c,\ d)$包含$(a,\ b)$，使得 $A \cap C$为空集或为连续可定义函数 $B \to (c,\ d)$的图时，我们称$(a,\ b) \in R^n$ 是正规的。

显然，如果 a 是好点，则对每个 $b \in [-1,1]$，(a,b)都是正规的。现在假设 a 是坏点。令 f_ℓ 为第一个函数 f_i，使得 a属于 f_i 的闭包，且不存在包含 a 的开盒，在该开盒上 f_i 有定义且连续。我们令 $\beta(a) =$下极限$_{x\to a} f_\ell(x) \in [-1,1]$。我们断言，$(a,\beta(a))$不是正规的。假设$(a,\beta(a))$是正规的。存在一个开盒 $B \times (c,d)$包含$(a,\beta(a))$，其与 A 的交集是连续函数 g 的图：$B \to (c,d)$。不妨设对于所有使$f_\ell(x)$有定义的 $x \in B$，都有 $f_\ell(x) > c$。如果 $\ell > 1$且 $\beta(a) = f_{\ell-1}(a)$，由于 B 是可定义连通的，我们将推出 $g = f_{\ell-1}|_B$。于是对于所有使 $f_\ell(x)$有定义的 $x \in B$，都有 $f_\ell(x) \geq d$，这与 $\beta(a) < d$矛盾。因此，我们可以假设在 B上 $\ell = 1$或 $f_{\ell-1} < c$。由此得到 $g = f_\ell|_B$，这与ℓ的定义矛盾。故断言得证。

我们已经证明，$a \in R^{n-1}$是好点，当且仅当对于所有 $b \in [-1,1]$，$(a,\ b)$都是正规的。由此很容易推出，好点集是可定义的。

第二步：好点集是稠密的。否则，就存在一个包含在坏点集中的开盒 $B \subset R^{n-1}$。考虑按第一步定义的可定义函数 $\beta: B \to [-1,1]$。根据 $\mathbf{PC}_{n-1}$，我们可以假设β 是连续的（见习题 2.13）。对于 $x \in B$，如果存在这样的 y，我们定义 $\beta_-(x)$（分别是 $\beta_+(x)$）为满足 $y < \beta(x)$（分别是$y > \beta(x)$ 的 $y \in A_x$ 的最大值（分别是最小值）。利用 $\mathbf{PC}_{n-1}$ 并缩小盒子 B，我们可以假设 β_-（分别是 β_+）要么在 B 上处处无定义，要么在B上连续。于是，满足 $y \neq \beta(x)$ 的 $(x,y) \in A\cap(B \times R)$ 的集合在 $A\cap(B \times R)$ 中既开又闭。进一步缩小盒子 B，我们可以假设$\beta|_B$ 的图要么与 A 不相交，要么包含在 A 中。第一种情况与 β 的定义矛盾。第二种情况下，对每个 $x \in B$，$(x,\beta(x))$ 都是正规的，这与第一步证明的结论矛盾。我们已经证明，好点集是稠密的。

第三步。根据 $\mathbf{CDCD}_{n-1}$，存在一个适配于好点集的 R^{n-1} cdcd。令 C 为 R^{n-1}中维数为 $n-1$ 的一个胞腔。由于好点稠密，每个 $x \in C$ 都是好点。取 $a \in C$。满足$\sharp(A_x) = \sharp(A_a)$的 $x \in C$ 构成的集合在 C中是可定义的、开且闭的。根据 C的可定义连通性，它等于 C。若 D 是 R^{n-1} 中维数较小的一个胞腔，我们可以利用 $\theta_D: D \to R^{\dim(D)}$ 的可定义同胚，以及 $\mathbf{UF}_{\dim(D)}$ 成立这一假设，证明对于 $x \in D$，$\sharp(A_x)$一致有界。由于胞腔只有有限个，$\mathbf{UF}_n$ 的证明就完成了。□

CDCD 的证明$_n$。令 A 为满足以下条件的 (x,y) 的集合：y 属于 $A_{1,x},\ldots,A_{k,x}$ 之一的边界（S在 R中的边界是闭包(S) \int$(S)$）。显然，A 是可定义的，并满足 $\mathbf{UF}_n$ 的假设。因此

$\sharp(A_x)$ 对 $x \in R^{n-1}$有最大值 ℓ，且 A 是由函数 $f_1, \ldots, f_\ell$的图组成的并集，这些函数定义于 $\mathbf{UF}_n$ 证明的开头。我们将 x 在 R^{n-1} 中的类型定义为包含以下数据：

- $\sharp(A_x)$,
- 满足 $f_i(x) \in A_{j,x}$ 对于 $i = 1, \ldots, \sharp(A_x)$ 的 $j \in \{1, \ldots, k\}$ 集合，
- 满足 $(f_i(x)\ f_{i+1}(x)) \subset A_{j,x}$ 对于 i 的 $j \in \{1, \ldots, k\}$ 集合 $=$ $0, \ldots, \sharp(A_x)$（其中 $f_0(x) = -\infty$ 且 $f_{\sharp(A_x)+1}(x) = +\infty$）。

由于可能的类型只有有限多个，且实数域中具有给定类型的点集是可定义的，因此根据 $\mathbf{CDCD}_{n-1}$，我们可以推得存在实数域的一个 cdcd，使得同一胞腔中的两个点具有相同类型。此外，利用 $\mathbf{PC}_{n-1}$，我们可以假设实数域的 cdcd 满足：对于每个胞腔 C 和 $i = 1, \ldots, \ell$，要么 f_i 在 C 上处处无定义，要么 f_i 在 C 上有定义且连续。我们得到的实数域 cdcd，连同函数 f_i 在该 cdcd 各胞腔上的限制，共同定义了一个适配于 $A_1, \ldots, A_k$ 的实数域 cdcd。□

证明 PC_n。

第一步。假设 A 是一个开盒 $B \times (a,\ b) \subset R^{n-1} \times R$。我们断言，存在一个开盒 $A' \subset A$ 使得 $f|_{A'}$ 是连续的。

对于每个 $x \in B$，令 $\lambda(x)$ 为集合 $y \in (a,\ b)$ 中满足 $f(x,\ \cdot)$ 在 $(a,\ y)$ 上连续且单调的元素的最小上界。单调性定理 2.1 蕴含，对于所有 $x \in B$，$\lambda(x) > a$。函数 λ 是可定义的。将 $\mathbf{PC}_{n-1}$ 应用于 λ，并将 B 替换为一个更小的开子盒，我们可以假设 λ 是连续的（见习题 2.13）。再次将 B 替换为一个更小的子盒，我们可以假设存在 $c > a$ 使得 $\lambda > c$。将b 替换为 c后，我们可以假设，对于每个 $x \in B$，$f(x,\ \cdot)$ 在 $(a,\ b)$ 上连续且单调。

现在考虑由满足以下条件的点组成的集合：$C(x, y) \in B \times (a, b)$，且 $f(\cdot,\ y)$ 在 x 处连续。集合 C 是可定义的。由 $\mathbf{PC}_{n-1}$ 可知，对于每个 $y \in (a, b)$，使得 $f(\cdot, y)$ 在 x 处连续的 x 的集合在 B 中稠密。因此，C 在 A 中稠密。应用 $\mathbf{CDCD}_n$，可推得 C 包含 A 的一个开子盒。用这个更小的子盒替换 A 后，我们可以假设，对于每个 $y \in (a, b)$，$f(\cdot, y)$ 都是连续的。

因此，只需考虑这样的情形：对于每个 $x \in B$，$f(x,\ \cdot)$ 在 $(a,\ b)$ 上连续且单调，并且对于每个 $y \in (a,\ b)$，$f(\cdot,\ y)$ 在 B 上连续。在这种情况下，f 在 $B \times (a,\ b)$ 上连续。事实上，取 $(x^0,\ y^0) \in B \times (a,\ b)$，并取一个包含 $f(x^0,\ y^0)$ 的区间 I。由 $f(x^0,\ \cdot)$ 的连续性，可得 $y^1 <$

$y^0 < y^2$使得对于 $i = 1,\ 2,\ f(x^0,\ y^i) \in I$。由 $f(\cdot,\ y^i)$ 的连续性，可得 $B' \ni x^0$ 中的一个开盒，使得对于 $i = 1,\ 2,\ f(B' \times \{y^i\}) \subset I$。由 $f(x,\ \cdot)$ 的单调性可知，$f(B' \times (y^1,\ y^2))$ 包含于 I 中。这就证明了 f 的连续性，并完成了该断言的证明。

第二步。现在我们可以证明 $\mathbf{PC}_n$。考虑 D 中 f 连续的点所组成的集合 A。集合 D 是可定义的。根据 $\mathbf{CDCD}_n$，存在一个适配于 A 和 D的 R^n 的 cdcd。如果 E 是包含于 A中的开胞腔，则第一步表明 $E \cap D$ 非空，因此 $E \subset D$，且 f 在 E上连续。如果 F 是包含于 A中的维数为 $d < n$ 的胞腔，则存在一个可定义同胚θ_F：$F \to R^d$。将 f 与 θ_F^{-1}复合并应用 $\mathbf{PC}_d$，我们得到 F 的一个有限划分为可定义子集 F_i，使得 $f|_{F_i}$ 连续。因此，存在 A 的一个有限划分为可定义子集 A_1、.....、A_k，使得对于 $i = 1$、.....、k，$f|_{A_i}$连续。利用 $\mathbf{CDCD}_n$，我们得到一个适配于 A_1、.....、A_k的 R^n 的 cdcd。因此，我们可以假设 A_i 是 R^n的某个 cdcd 的胞腔。

□

第3章

连通分支与维数

3.1 曲线选择

我们从一个有用的结果开始。它表明，如果公式“$\forall x \in X\ \exists y \in Y\ (x,\ y) \in Z$”成立，其中 X、Y 和 Z 是可定义集，那么 y 可以作为 $x \in X$ 的可定义函数来选取。

定理3.1（可定义选择）设 A 是 $R^m \times R^n$ 的可定义子集。记 p：$R^m \times R^n \to R^m$ 为在前 m 个坐标上的投影。存在一个可定义函数 f：p（A）$\to R^n$，使得对于每个 $x \in p$（A），（x，f（x））属于 A。

证明。只需考虑 $n = 1$ 的情形。一般情形可通过将投影 $R^{m+n} \to R^m$ 分解为 $R^{m+n} \to R^{m+n-1} \to \ldots \to R^{m+1} \to R^m$ 得到。

构造一个适配于 A 的 R^{m+1} cdcd。投影 $p(A)$ 是由 p 作用于包含在 A 中的胞腔所得像的并集。因此，我们可以假设 A 是 R^{m+1} 的一个胞腔，从而 $p(A)$ 是 R^m 的一个胞腔。若 A 是函数 ζ_i：$p(A) \to R$的图，则取 $f = \zeta_i$。若 A 是一个带（ζ_i, ζ_{i+1}），且两个函数都有限，则取$f = \frac{1}{2}(\zeta_i + \zeta_{i+1})$。例如，若 ζ_i 有限且 $\zeta_{i+1} = +\infty$，则取 $f = \zeta_i + 1$。□

我们引入一种记号。给定 $x = (x_1,\ \ldots\ldots,\ x_n)$和 $y = (y_1,\ \ldots\ldots,\ y_n)$，它们属于$R^n$，令 $\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$。给定 $r > 0$ 属于 R，我们定义开

且闭球

$$\begin{aligned} B(x,r) &= \{z \in R^n ;\ \|z-x\| < r\} , \\ \overline{B}(x,r) &= \{z \in R^n ;\ \|z-x\| \le r\} . \end{aligned}$$

开球 $B(x, r)$ 构成 x 的开邻域基。

定理 3.2（曲线选择引理）设 A 是 R^n 的可定义子集，b 是闭包(A) 中的一个点。存在连续可定义映射 $\gamma: [0,1) \to R^n$，使得 $\gamma(0) = b$ 且 $\gamma((0,1)) \subset A$。

证明。令 $X = \{(t, x) \in R \times R^n ;\ x \in A$ 且 $\|x-b\| < t\}$。令 $p: R \times R^n \to R$ 为到第一坐标的投影。由于 $b \in$ 闭包(A)，我们有 $p(X) = \{t \in R ;\ t > 0\}$。应用可定义选择 3.1 和单调性定理 2.1，我们得到 $\varepsilon > 0$ 以及连续可定义映射 $\delta: (0, \varepsilon) \to A$，使得 $\|\delta(t) - b\| < t$。显然，δ 可连续延拓至 $\delta: [0, \varepsilon) \to R^n$，且 $\delta(0) = b$；定义 $\gamma: [0,1) \to R^n$ 为 $\gamma(t) = \delta(t\varepsilon)$。□

在许多情况下，曲线选择引理可以取代序列的使用。

练习 3.3 证明：可定义函数 $f: A \to R$ 连续，当且仅当对于每个连续可定义的 $\gamma: [0,1) \to A$，$\lim_{t \to 0+} f(\gamma(t)) = f(\gamma(0))$。

我们已经看到，对于一般的实闭域，紧致性是个问题。不过，下述结果表明，只要处理的是可定义对象，我们仍能保有紧致性的良好性质。

定理 3.4 设 A 是 R^n 的可定义子集。以下性质等价。

1. A 是闭且有界的。
2. 每个可定义连续映射 $(0,1) \to A$ 都能通过连续延拓为映射 $[0,1) \to A$。
3. 对于每个可定义连续函数 $f: A \to R$，$f(A)$ 都是闭且有界的。

证明。$1 \Rightarrow 2$。一个可定义连续映射 $(0,\ 1) \to A$ 可通过连续性延拓为映射 $[0,1) \to R^n$：该映射的每个坐标在 $t \to 0_+$ 时都有极限（参见练习 2.3），且由于 A 有界，该极限属于 R。由于 A 是闭的，延拓在 0 处的值属于 A。

$2 \Rightarrow 3$。假设 $f(A)$ 不是有界的。设

$$X = \{(t,x) \in R \times R^n\ ;\ x \in A \ \text{ and } \ t\,|f(x)| = 1\}\ .$$

那么，X 在第一个坐标上的投影包含某个区间 $(0,\ \varepsilon)$。利用可定义选择 3.1 和单调性定理 2.1，并对定义区间重新缩放，我们可以假设存在一个连续映射 $\delta : (0,\ 1) \to A$，使得 $\lim_{x\to 0_+} |f(\delta(t))| = +\infty$。这意味着 δ 无法连续延拓为映射 $[0,1) \to A$，这与 2 矛盾。因此，$f(A)$ 是有界的。现在令 b 属于 $\mathrm{clos}(f(A))$。设

$$Y = \{(t,x) \in R \times R^n\ ;\ x \in A \ \text{ and } \ |b - f(x)| < t\}\ .$$

与上面的论证相同，可以证明存在一个连续映射 $\gamma : (0,\ 1) \to A$，使得 $\lim_{t\to 0_+} f(\gamma(t)) = b$。根据 2，$\gamma$ 可以连续延拓为映射 $[0,1) \to A$，且其在 0 处的值是 A 中的一个元素 a，满足 $f(a) = b$。这表明 $f(A)$ 是闭的。

$3 \Rightarrow 1$。由于 A 在每个坐标函数下的像都有界，因此 A 有界。设 b 属于 $\mathrm{clos}(A)$。由于 A 在 $x \mapsto \|x - b\|$ 下的像是闭集，它包含 0。因此 b 属于 A，这表明 A 是闭集。

□

练习 3.5 证明：闭有界可定义集上的可定义连续函数是一致连续的。

推论 3.6 设 A是一个闭有界可定义集。若 B 是一个与 A可定义同胚的可定义集，那么 B 也闭且有界。

前面的推论表明，对于可定义集而言，闭且有界这一性质是内蕴的（即它不依赖于嵌入仿射空间的方式）。局部闭这一性质在同样意义上也是内蕴的。回顾一下，若 R^n 的一个子集在其闭包中是开集，就称它为局部闭集。

命题 3.7 *1)* 可定义集 $A \subset R^n$ 是局部闭的，当且仅当每个点 $x \in A$ 在A中都有一组闭且有界的可定义邻域基。

2) 若 A 是局部闭可定义集，且 B是与 A可定义同胚的可定义集，则 B 是局部闭的。

证明。 1) 首先假设 A是局部闭的。取 $x \in A$。存在$r_0 > 0$ ，使得球 $B(x, r_0)$与闭包(A)的交集包含于 A中。于是，对于 $0 < r < r_0$，闭包(A)与闭球 $B(x, r)$的交集构成了 A中x的闭且有界可定义邻域基。

反之，假设实数域中的每个点 $x \in A$ 都有一个闭邻域 N。取 $s > 0$ 使得 $B(x, s) \cap A \subset N$。由于 $B(x, s) \cap (R^n \setminus N)$ 是开集，且与 A不相交，因此有 $B(x, s) \cap$ 闭包$(A) \subset N \subset A$。这说明 A是局部闭的。

2) 这由 1) 和推论 3.6 得出。 □

练习 3.8 证明:

1) cdcd 的一个胞腔是局部闭的。（使用 3.7 的第 2 条。）2) 每个可定义集都是有限个局部闭可定义集的并集。

3.2 连通分支

定理 3.9 设 A 是实数域的一个可定义子集。存在一个将 A 划分为有限个可定义子集 A_1、……、A_k 的划分，使得每个 A_i 在 A 中都是非空、开且闭的，并且是可定义弧连通的。这种划分是唯一的。 A_1、……、A_k 称为 A 的可定义连通分支。

证明。 构造一个适配于 A 的 R^n 胞腔分解。我们称胞腔 C 与胞腔 D 相邻，当且仅当 $C \cap$闭包$(D) \neq \emptyset$，并用 $C \prec D$ 表示这一事实。

我们断言，如果 $C \prec D$，则每个 $x \in C$ 都可以通过 $C \cup D$ 中的一条可定义连续路径与每个 $y \in D$ 相连。取 $c \in C \cap$闭包(D)。根据曲线选择引理，存在一条连续可定义的 $\gamma : [0, 1) \to C \cup D$，使得 $\gamma(0) = c$ 且 $\gamma((0,1)) \subset D$。令 $d = \gamma(1/2)$。点 c 和 d 可由 $C \cup D$ 中的一条连续可定义路径相连。由于每个胞腔都与一个仿射空间可定义同胚，因此每个点 $x \in C$ 都可以通过 C 中的一条可定义连续路径与 c 相连，并且每个点 $y \in D$ 都可以通过 D 中的一条可定义连续路径与 d 相连。这就证明了该断言。

令 $\sim$ 为包含相邻关系的、定义在包含于A 中的胞腔集合上的最小等价关系：当且仅当存在链 $C = C_0 \prec C_1 \succ C_2 \prec \ldots \succ C_{2k} = D$，其中所有胞腔 C_i均包含于A时，有 $C \sim D$ （注意，我们可以有 $C_i = C_{i+1}$）。令 $\mathcal{E}_1$、……、$\mathcal{E}_k$为关于 $\sim$的等价类，并令 A_i 为 $\mathcal{E}_i$中所有胞腔的并集。 A_i 将 A 划分为可定义集，形成有限划分。上面证明的结论以及 $\sim$ 的定义意味着

每个 A_i 都是可定义弧连通的。如果胞腔 $C \subset A$ 与 clos(A_i)有非空交集，则它与 $\mathcal{E}_i$中的某个胞腔相邻，这意味着 $C \subset A_i$。因此，每个 A_i 在 A中都是闭的。由于 A_i 构成 A的有限划分，它们在 A中也都是开的。

假设 $A = B_1 \cup \ldots \cup B_\ell$ 是另一个具有相同性质的划分。我们有 $A_i = \bigcup_{j=1}^{\ell}$ ($A_i \cap B_j$)，且每个 ($A_i \cap B_j$) 在A_i中都是可定义的、开且闭的。由于 A_i 是可定义连通的，恰有一个 j 满足 $A_i \subset B_j$。同理，对每个 j，恰有一个 i 满足 $B_j \subset A_i$。这说明这两个划分除顺序外完全相同。□

请注意，由证明可知，对于任意适配于 A的 R^n 的 cdcd， A 的可定义连通分支数目不大于 A中所包含的胞腔数目。

推论 3.10 可定义连通的可定义集是可定义弧连通的。

考虑 $R = \mathbb{R}$的情形，即 o-极小结构扩张实数域。显然，连通可定义集是可定义连通的。显然，可定义弧连通的可定义集也是弧连通的。因此，一个可定义集连通当且仅当它可定义连通；而一个可定义集的可定义连通分支就是它通常意义下的连通分支。由此可知，一个可定义集只有有限个连通分支，且这些分支都是可定义的。

现在我们要证明，在实数域的可定义子集的可定义族中，连通分支的数量存在一个统一的上界。首先，我们精确定义可定义族这一概念。设 A 是 $R^m \times R^n$ 的可定义子集。对于 $x \in R^m$，令 $A_x = \{y \in R^n ; (x, y) \in A\}$。我们称族 $(A_x)_{x \in R^m}$ 为由 R^m 参数化的实数域的子集的可定义族 R^n 参数化 R^m。

下一个结果使我们可以将实数域的一个 cdcd 视为“实数域的 cdcd 的可定义族”。假设给定了 $R^m \times R^n$ 的一个 cdcd。令 $p_{m+n,\ m}$: $R^m \times R^n \to R^m$ 为投影到前 m 个坐标上的投影。回忆一下，对于 $R^m \times R^n$ 的所有胞腔 C，$p_{m+n,\ m}(C)$ 是 R^m 的一个 cdcd 的胞腔。

命题 3.11 设 B 是 R^m、 $a \in B$ 的一个胞腔。对于所有满足 $p_{m+n,m}(C) = B$ 的胞腔 $C \subset R^m \times R^n$，令 $C_a = \{y \in R^n ; (a、 y) \in C\}$。那么这些 C_a 构成 R^n 的一个 ***cdcd***。胞腔 C_a 的维数等于$\dim(C) - \dim(B)$。

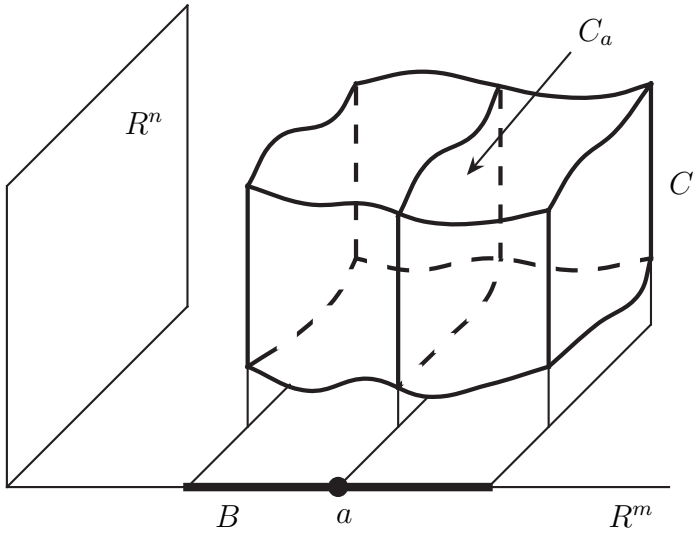


图 3.1：胞腔 C的切片 C_a 。

证明。我们对 n 进行归纳。 $n = 0$ 的情形是平凡的。现在假设 $n > 0$，且命题已对 $n-1$ 得证。 $R^m \times R^n$ 的 cdcd 通过投影 p_{m+n}、 $_{m+n-1}$： $R^m \times R^n \to R^m \times R^{n-1}$ 诱导出 $R^m \times R^{n-1}$ 的一个 cdcd。对于 $R^m \times R^{n-1}$ 的每个胞腔 D，存在连续可定义函数 $\zeta_{D,1} < \cdots < \zeta_{D,\ell(D)}$： $D \to R$，以及 $R^m \times R^n$ 的胞腔 C，使得 $p_{m+n,m+n-1}(C) = D$ 是 $\zeta_{D,i}$ 的图或带 $(\zeta_{D,i},\zeta_{D,i+1})$。根据归纳假设，对于 $R^m \times R^{n-1}$ 的所有满足 $p_{m+n-1,m}(D) = B$ 的胞腔 D，D_a 构成 R^{n-1} 的一个 cdcd，且 $\dim(D_a) = \dim(D) - \dim(B)$。对于这样的胞腔 D，通过 $(\zeta_{D,i})_a(y) = \zeta_{D,i}(a, y)$ 定义 $(\zeta_{D,i})_a$： $D_a \to R$。现在，当且仅当 $C_a \subset R^n$ 是 $(\zeta_{D,i})_a$ 的图（相应地，是带 $((\zeta_{D,i})_a, (\zeta_{D,i+1})_a)$）时，$C \subset R^m \times R^n$ 是 $\zeta_{D,i}$ 的图（相应地，是带 $(\zeta_{D,i},\zeta_{D,i+1})$）。因此，对于所有满足 $B = p_{m+n,m}(C)$ 的胞腔 C， C_a 构成 R^n 的一个 cdcd。若 C 是在 $D = p_{m+n,m+n-1}(C)$ 上的图，则 $\dim(C_a) = \dim(D_a) = \dim(D) - \dim(B) = \dim(C) - \dim(B)$。若 C 是一个带，则 $\dim(C_a) = \dim(D_a) + 1 = \dim(D) - \dim(B) + 1 = \dim(C) - \dim(B)$。□

定理 3.12 设 A 是 $R^m \times R^n$的一个可定义子集。存在 $\beta \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $x \in R^m$， A_x 的可定义连通分支数不大于 β。

证明。我们选取一个适配于 A 的 $R^m \times R^n$ cdcd。采用命题 3.11 及其证明中的记号。取 $x \in R^m$，并令 B 为其中包含

x 的 R^m 。对于满足 $p_{m+n,m}(C) = B$ 的 $R^m \times R^n$ 的每个胞腔 C，所有 C_x 的集合构成一个适配于 A_x 的 R^n cdcd。因此， A_x 的可定义连通分支数不大于包含在 A 中的 $R^m \times R^n$ 的胞腔数。□

练习 3.13 本练习旨在证明以下事实：

(♯) 设 A 是 R^n的一个可定义子集。存在 $\beta(A) \in \mathbb{N}$ 使得，对于每个 L 的仿射子空间 R^n， $L \cap A$ 的可定义连通分支数不超过 $\beta(A)$。

1）（仿射子空间的格拉斯曼流形作为 R^{n^2+n}的代数子集。）设 M 是一个系数属于 R的 $n \times n$ 矩阵，我们将其视为 R^{n^2}的一个元素；设 v 是 R^n中的一个向量。我们将 $g = (M, v) \in R^{n^2} \times R^n$ 与仿射子空间 $L_g = \{x \in R^n$ 相关联； $Mx = v\}$ 的 R^n。证明，将 $g \mapsto L_g$ 限制在代数子集上

$$G = \{g = (M, v) \in R^{n^2} \times R^n \,;\, M^2 = M \text{ and } {}^tM = M \text{ and } Mv = v\}$$

是到 R^n的所有仿射子空间集合上的一个双射。
2) 设 A 是 R^n 的可定义子集。构造一个可定义集 $\mathcal{A} \subset G \times R^n$，使得对于所有 $g \in G$、 $\mathcal{A}_g = A \cap L_g$（其中 $\mathcal{A}_g$ 定义为 $\{x \in R^n$; $(g, x) \in \mathcal{A}\}$）。3) 证明 (♯)。

3.3 维数

我们已经定义了 cdcd 的胞腔维数。现在设 A 是 R^n 的可定义子集。取一个适配于 A 的 R^n 的 cdcd。 A 维数的一种“朴素”定义是包含于 A 中的胞腔维数的最大值。但这个定义并非内蕴。我们必须证明，这样定义的维数不依赖于适配于 A 的 cdcd 的选择。我们将改为引入一种内蕴的维数定义，并证明它与“朴素”定义一致

定义 3.14 可定义集 A 的维数是满足以下条件的 d 的上确界：存在一个从 R^d 到 A的单射可定义映射。按照约定，空集的维数为 $-\infty$。

请注意，目前维数总是$< +\infty$这一点并非显而易见。这个维数定义是否与之前对胞腔给出的定义一致，也尚不清楚。这两点都将由下面的引理得出。

引理 3.15 设 A 是 R^n 的一个内部非空的可定义子集。设$f: A \to R^n$ 是一个单射可定义映射。那么， $f(A)$ 的内部非空。

证明。我们对 n使用归纳法证明此引理。若 $n = 1$, A 是无限集，则$f(A)$也是无限集，且包含一个区间。假设 $n > 1$ 成立，并且此引理对所有 $m < n$均成立。根据分段连续性 2.12，我们还可以假设 f是连续的。取一个适配于 $f(A)$的 R^n。若 $f(A)$的内部为空，则它不包含开胞腔。因此， $f(A)$是非开胞腔 C_1、.....、C_k的并集；对于 $i = 1$、.....、 k，存在一个可定义同胚$C_i \to R^{m_i}$ ，使得 $m_i < n$。取一个适配于 $f^{-1}(C_i)$的 R^n 。由于$A = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(C_i)$的内部非空，因此某个 $f^{-1}(C_i)$（不妨设为 $f^{-1}(C_1)$）必定包含一个开胞腔 B。将 f 限制在 B 上，得到一个单射连续可定义映射 $B \to C_1$。由于 B 与 R^n可定义同胚，且 C_1 与 R^m 可定义同胚，并且 $m < n$，我们得到一个单射连续可定义映射 g: $R^n \to R^m$。令 $a = (0, \ldots, 0) \in R^{n-m}$，并考虑映射 $g_a: R^m \to R^m$，其定义为 $g_a(x) = g(a, x)$。我们可以对 g_a应用归纳假设。这意味着 $g_a(R^m)$在 R^m中的内部非空。取一点 $c = g_a(b)$，使其位于 $g_a(R^m)$的内部。由于 g 连续，我们可以找到 $x \in R^{n-m}$、 $x \neq a$ ，使它们足够接近 a，从而 $g(x, b) \in g_a(R^m)$。存在 $y \in R^m$ 使得 $g(x, b) = g_a(y) = g(a, y)$，这与$g$ 是单射这一事实矛盾。因此， $f(A)$的内部非空。□

推论 3.16 R^d 的维数（根据定义 *3.14*）为 d。按照第 *2.2* 节中的定义，胞腔的维数与根据定义 *3.14* 得出的维数一致。

证明。 若 $e > d$，则不存在从 R^e 到 R^d 的单射可定义映射。否则，将这样的映射与把 R^d 嵌入 $R^e = R^d \times R^{e-d}$ 为 $R^d \times \{0\}$ 的映射复合起来，就会与引理 3.15 矛盾。这证明了推论的第一部分。第二部分则由以下事实得出：根据定义 3.14 得出的维数在可定义双射下不变。□

命题 3.17 *1.* 若 $A \subset B$ 是可定义集，则 维数 $A \leq$ 维数 B。

2. 如果 A 和 f： $A \to R^n$ 是可定义的，则 $\dim(f(A)) \leq \dim(A)$。此外，如果 f是单射，则 $\dim(f(A)) = \dim(A)$。

3. 如果 A 和 B 是 R^n 的可定义子集，则 $\dim(A \cup B) = \max(\dim A, \dim B)$。

4. 设 $A \subset R^n$ 是可定义的，并取一个适配于 A 的 R^n 的 ***cdcd***。那么， A 的维数等于包含在 A 中的胞腔的维数的最大值。

5. 若 A 和 B 是可定义集，则 $\dim(A \times B) = \dim A + \dim B$。

证明。由定义可知，1 显然成立。

2. 第二部分显然成立，因为维数在可定义双射下不变。若 f 是可定义的，由可定义选择可得一个可定义映射 g：$f(A) \to A$，使得 $f \circ g = \mathrm{Id}_{f(A)}$。因此， g 是单射，且 $\dim(f(A)) = \dim(g(f(A))) \leq \dim(A)$。

3. 不等式 $\dim(A \cup B) \geq \max(\dim A, \dim B)$ 由 1 得出。现在设 f：$R^d \to A \cup B$ 是一个可定义的单射映射。取一个适配于 $f^{-1}(A)$ 和 $f^{-1}(B)$ 的 R^d 的 cdcd，可见 $f^{-1}(A)$ 或 $f^{-1}(B)$ 包含一个维数为 d 的胞腔。由于 f 是单射，因此有 $\dim A \geq d$ 或 $\dim B \geq d$。这就证明了反向不等式 $\dim(A \cup B) \leq \max(\dim A, \dim B)$。

4 是 3 的直接推论。

5. 根据 3，只需考虑 A 和 B 是胞腔的情形。由于 $A \times B$ 与 $R^{\dim A} \times R^{\dim B}$ 可定义同胚，此情形下的断言由推论 3.16 得出。□

现在我们研究可定义族中维数的变化。回顾一下，可定义子集 A of $R^m \times R^n$ 可以被视为由 $A_{xx \in R^m}$ 参数化的、以 R^n 的子集为成员的可定义族，其中 $A_x = \{y \in R^n ; (x, y) \in A\}$。

定理 3.18 设 A 是 $R^m \times R^n$ 的可定义子集。对于 $d \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$，令 $X_d = \{x \in R^m ; \dim(A_x) = d\}$。则 X_d 是 R^m 的可定义子集，并且 $\dim(A \cap (X_d \times R^n)) = \dim(X_d) + d$。

证明。我们取一个适配于 $R^m \times R^n$ 和 A 的 cdcd，并使用命题 3.11。设 B 是 R^m 的一个胞腔。对于 B 中的每个 x， A_x 是胞腔 $C_x \subset R^n$ 的并集，其中 $C \subset R^m \times R^n$ 遍历所有包含于 A 且满足 $p_{m+n,\, m}(C) = B$ 的胞腔。此外，$\dim(C_x) = \dim C - \dim B$。因此，对于每个 $x \in B$，都有 $\dim A_x = \dim(A \cap (B \times R^n)) - \dim B$。所以，每个 X_d 都是某些胞腔 B 的并集，其中这些胞腔属于 R^m。这说明 X_d 是可定义的。由于对于胞腔 $B \subset X_d$，$\dim(A \cap (B \times R^n)) = \dim B + d$，我们有 $\dim(A \cap (X_d \times R^n)) = \dim X_d + d$。□

习题 3.19 设 A 和 B 是 $R^m \times R^n$ 的子集，且 A 非空。假设对于每个 $x \in R^m$，B_x 的维数 $<$ A_x 的维数，或 B_x 为空集。证明：$B <$ 的维数 A 的维数。

习题 3.20 设 $f: A \to R^m$ 是一个可定义映射。证明：由满足 $f^{-1}(x)$ 的维数 $= d$ 的 $x \in R^m$ 构成的集合 Y_d 是可定义的。证明：Y_d 的维数 $= f^{-1}(Y_d)$ 的维数 $- d$。

我们通过证明维数在闭包运算下性质良好，来结束本节。下面的引理将会用到。

引理 3.21 设 A 是 $R^m \times R^p$的一个可定义子集。设 M 为满足以下条件的$x \in R^m$ 的集合：A_x 在 R^p 中的闭包不同于$(\mathrm{clos}(A))_x$。那么M 是可定义的，且$\dim M < m$。特别地，若 $m = 1$，则 M 是有限的。

证明。 注意，由于$(\mathrm{clos}(A))_x$ 是闭集且包含 A_x，我们总有$\mathrm{clos}(A_x) \subset (\mathrm{clos}(A))_x$。

将 M 可定义性的验证留作练习。假设 $\dim(M) = m$。那么 M 包含一个开胞腔 C，它是 R^m的一个 cdcd 的胞腔。对于每个 $x \in C$，我们都可以找到一个盒 $B = \prod_{i=1}^{p}(a_i, b_i)$，使得 $B \cap (\mathrm{clos}(A))_x \neq \emptyset$且 $B \cap A_x = \emptyset$。根据可定义选择 3.1 和分段连续性 2.12，我们可以假设所有 a_i 和 b_i 都是 $x \in C$的可定义连续函数。设 U为满足以下条件的$(x, y_1, \ldots, y_p)$的集合：对于 $i = 1, \ldots, p$，$a_i(x) < y_i < b_i(x)$。集合 U在 $R^m \times R^p$中是开集，与 A不相交，且与$\mathrm{clos}(A)$有非空交集。这是不可能的。因此，$\dim M < m$.□

定理 3.22 设 A是 R^n的非空可定义子集。那么

$$\dim(\mathrm{clos}(A) \setminus A) < \dim(A) .$$

由该定理可得，$\dim(\mathrm{clos}(A)) = \dim A$。

证明。 我们对 n进行归纳。对于 $n = 1$，该定理显然成立。假设 $n > 1$，且该定理已对 $n - 1$证明。我们用$\xi_1, \ldots, \xi_n$表示 R^n上的坐标函数。对于 $i = 1, \ldots, n$，令 $\mathrm{clos}_i(A)$ 表示满足以下条件的 $x \in R^n$ 的集合：x 属于 A 与超平面 $\xi_i^{-1}(\xi_i(x))$的交集的闭包。

第一步。 我们声称，$\mathrm{clos}(A) \setminus A$ 的维数不大于 0 与 $\dim(\mathrm{clos}_i(A) \setminus A)$ 中的最大值，其中 $i = 1, \ldots\ldots, n$。我们有 $\mathrm{clos}_i(A) \subset \mathrm{clos}(A)$。对坐标进行置换，将第 i 个坐标置于第一位后应用引理 3.21，可得差集 $\mathrm{clos}(A) \setminus \mathrm{clos}_i(A)$ 包含于有限个超平面 $\xi_i^{-1}(a_{i,\,j})$ 的并集中，其中 $j = 1, \ldots\ldots, \ell(i)$。因此，$\mathrm{clos}(A) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{clos}_i A$ 包含于由 $\prod_{i=1}^{n} \ell(i)$ 个点 $(a_{1,\,j_1}, \ldots\ldots, a_{n,\,j_n}) \in R^n$组成的有限集中。断言得证。

第二步。我们声称，对于 $i = 1, \ldots\ldots, n$，$\dim(\mathrm{clos}_i(A) \setminus A) < \dim A$。取 $a \in R$。由于超平面 $\xi_1^{-1}(a)$ 的维数为 $n-1$，归纳假设蕴含：$\mathrm{clos}(A \cap \xi_1^{-1}(a)) \setminus (A \cap \xi_1^{-1}(a))$ 为空集，或其维数严格小于 $A \cap \xi_1^{-1}(a)$ 的维数；注意，第一个集合是 $(\mathrm{clos}_1(A) \setminus A) \cap \xi_1^{-1}(a)$。因此，应用习题 3.19 的结果，我们得到 $\dim(\mathrm{clos}_1(A) \setminus A) < \dim A$。通过置换坐标，断言得证。

现在我们可以完成该定理的证明。步骤 1 和 2 表明，$\dim(\mathrm{clos}(A) \setminus A) \leq 0$ 或 $\dim(\mathrm{clos}(A) \setminus A) < \dim A$。如果 $\dim A = 0$，A 是闭集。因此，对于每个非空的 A，$\dim(\mathrm{clos}(A) \setminus A) < \dim A$。□

第4章

可定义三角剖分

本章将说明，可定义集的拓扑完全可以用有限项编码。我们将通过三角剖分来实现这一点。

4.1 良坐标

正如上一章所见，cdcd 是一种非常强大的工具。但当胞腔不包含在同一个圆柱体中时，它无法充分控制胞腔之间的相对位置。特别是，一般而言，我们无法从可定义集分解为适配的 cdcd 胞腔中重建其拓扑。主要困难在于，我们无法控制当趋近 C 的边界时，胞腔 C 上的可定义连续函数 $\zeta\colon C \to R$ 的行为。函数 ζ 即使有界，也未必能延拓为 clos(C) 上的连续函数。例如，定义在满足 $x > 0$ 的集合上的可定义连续函数$\zeta(x,\ y) \in R^2$，其定义方式为 $\zeta(x,\ y) = 2xy/(x^2 + y^2)$，无法连续延拓到 (0，0)。所有满足 $-1 \le z \le 1$ 的点 (0，0，z) 都属于函数 ζ 的图的闭包 Γ 。可定义集 $\Gamma \subset R^3$ 的维数为 2，但投影 $R^3 \to R^2$ 到前两个坐标的限制在 Γ 上并非有限对一（见图4.1）。

在本节中，我们考虑以下问题：给定一个维数为 $< n$ 的 R^n 的可定义子集G，我们能否在 R^n 中进行多项式坐标变换，使得对 G 的投影在前 $n-1$ 个新坐标上的限制变为有限对一？换言之，我们希望找到一个多项式自同构 $u\colon R^n \to R^n$，使得 $p_{n,\ n-1}|_{u(G)}\colon u(G) \to R^{n-1}$ 是有限对一的。我们寻找形如 $u(x',\ x_n) = (x' - v'(x_n)\ x_n)$ 的 u，其中 $x' =(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})$，且 $v'\colon R \to R^{n-1}$ 是一个多项式映射。条件是

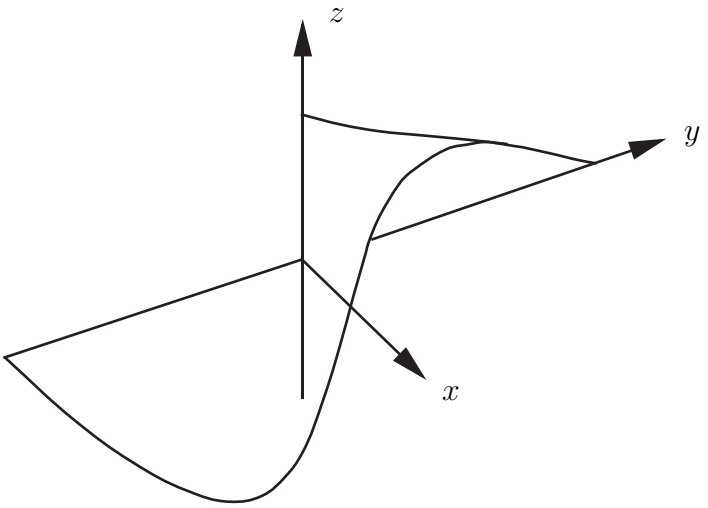


图4.1： $\Gamma \subset R^3$ 原点附近

$p_{n,\ n-1}|_{u(G)}$ 是有限对一的条件可写为:

$$(*) \qquad \begin{cases} \text{for all } y' \in R^{n-1},\ \text{the set of } x_n \in R \\ \text{such that } (y' + v'(x_n), x_n) \in G \text{ is finite.} \end{cases}$$

我们引入可定义集

$$W = \{(y', x', x_n) \in R^{n-1} \times R^{n-1} \times R^n\ ;\ (y' + x', x_n) \in G\}\ ,$$

并且，对于 $y' \in R^{n-1}$、 $W_{y'} = \{x \in R^n$，我们设；$(y',\ x) \in W\}$。注意，对于所有 $y' \in R^{n-1}$、 $W_{y'} = G - (y',\ 0)$ 的维数都是 $< n$。我们可以将条件 $(*)$ 改写如下:

对于所有 $y' \in R^{n-1}$，满足 $(v'(x_n)\ x_n) \in W_{y'}$ 的 $x_n \in R$ 的集合都是有限集。

因此，我们的问题将由下面的引理解决。在引理的表述中，我们交换了 x_1 和 x_n；这样可以更容易地写出归纳法证明。

引理 4.1 设 $W \subset R^m \times R^n (n \geq 2)$ 为一个可定义集。对于 $s \in R^m$，定义 $W_s = \{y \in R^n\ ;\ (s, y) \in W\}$。假设对于所有 s 属于 R^m 的 s，均有 维数$(W_s) < n$。那么存在一个次数不大于 m 的多项式映射 $v' :\ R \to R^{n-1}$，使得对于所有 s 属于 R^m，满足 $(x_1, v'(x_1)) \in W_s$ 的 $x_1 \in R$ 的集合是有限集。

证明。我们对 n 进行归纳。先从 $n = 2$ 开始。设 V 是 R^2 中维数为 1 的可定义子集。一个适配于 V 的 R^2 的 cdcd 将 V 分解为有限个点、竖直开区间以及可定义连续函数的图的不交并 $\zeta_i : I_i \to R$，其中 I_i 是一个区间。考虑这样的一个函数 ζ_i。对于 $a = (a_0, a_1, \ldots\ldots, a_m) \in R^{m+1}$，定义 $f_a : R \to R$，其中 $f_a(t) = \sum_{i=0}^{m} a_i t^i$。该集合

$$\Big\{x_1 \in I_i \,;\, \exists a \in R^{m+1}\ \exists \epsilon \in R \\ \Big(\epsilon > 0 \text{ and } \forall y \in I_i \ (|y - x_1| < \epsilon \Rightarrow f_a(y) = \zeta_i(y))\Big)\Big\}$$

是 R 的一个可定义开子集。它有有限多个可定义连通分支，且这些分支都是开区间。如果 U 是它的一个可定义连通分支，则存在唯一的 a 使得 $f_a|_U = \zeta_i|_U$。因此，存在有限多个 $a \in R^{m+1}$，使得满足 $(x_1, f_a(x_1)) \in V$ 的 $x_1 \in R$ 的集合是无限的。由此我们推得，对于所有 $s \in R^m$，存在有限多个 $a \in R^{m+1}$，使得集合 $B_{a,s} = \{x_1 \in R \,;\, \text{满足 } (x_1, f_a(x_1)) \in W_s\}$ 的集合是无限的。因此，满足 $B_{a,s}$ 的 (a, s) 的可定义集的维数至多为 m。那么，满足存在 $s \in R^m$ 使得 $B_{a,s}$ 的 $a \in R^{m+1}$ 的集合，其维数也至多为 m。因此，存在一个次数不大于 m 的多项式 f_a，使得对于所有 $s \in R^m$，集合 $B_{a,s}$ 是有限的。

给定 $n > 2$，假设已对 $n - 1$ 证明该引理。令 Z 为满足 $\{x_n \in R$ 的 $(s, x_1, u) \in R^m \times R \times R^{n-2}$ 可定义集，其中 $(s, x_1, u, x_n) \in W\}$ 是无限的。对于所有 $s \in R^m$，集合 Z_s 的维数至多为 $n-2$，因为 W_s 的维数至多为 $n - 1$。因此，我们可以应用归纳假设，得到一个次数至多为 m 的多项式映射 $g : R \to R^{n-2}$，使得对于所有 $s \in R^m$，满足 $(x_1, g(x_1)) \in Z_s$ 的 $x_1 \in R$ 的集合是有限的。考虑 $R^m \times R^2$ 的可定义子集

$$M = \{(s, x_1, x_n) \in R^m \times R^2 \,;\, (s, x_1, g(x_1), x_n) \in W\}\,.$$

对于所有 $s \in R^m$，集合 M_s 的维数至多为 1。因此，根据上述论证，存在一个次数至多为 m 的多项式 f，使得对于所有 $s \in R^m$，满足 $(x_1, f(x_1)) \in M_s$ 的 $x_1 \in R$ 的集合是有限的。令 $v' = (g, f)$，证明完成。□

这个引理实际上解决了比我们最初的问题更多的问题。

命题 4.2 设 G 是 $R^q \times R^n$ 的可定义子集。假设对于每个 $t \in R^q$，$G_t = \{x \in R^n \mid (t, x) \in G\}$ 的维数为 $< n$。令

p： $R^q \times R^n \to R^q \times R^{n-1}$ 为在前 $q+n-1$ 个坐标上的投影。则存在一个 u 的多项式自同构，使得

$$\forall (t, x') \in R^q \times R^{n-1} \quad p^{-1}(t, x') \cap (R^q \times u(G_t)) \quad \textit{is finite.}$$

证明。置

$$\begin{aligned} W &= \{(t, y', x', x_n) \in R^q \times R^{n-1} \times R^{n-1} \times R \,;\, (t, y' + x', x_n) \in G\} \\ W_{(t,y')} &= \{(x', x_n) \in R^{n-1} \times R \,;\, (t, y', x', x_n) \in W\} \,. \end{aligned}$$

对于 $R^q \times R^{n-1}$ 中的所有 $(t,\ y')$，$W_{(t,y')} = G_t - (y',\ 0)$ 的维数为 $< n$。根据引理 4.1（交换 x_1 和 x_n），存在一个多项式映射 $v' : R \to R^{n-1}$，使得 R 中满足 $(v'(x_n)\ x_n) \in W_{(t,y')}$ 的 x_n 的集合是有限的。现在置 $u(x',\ x_n) = (x' - v'(x_n)\ x_n)$。于是 u 是 R^n 的多项式自同构，并满足该命题的条件。□

情形 $q = 0$ 是我们最初的问题。事实上，借助 u 一个线性自同构即可解决此问题（见 [vD], 定理 4.2）。情形 $q = 1$ 将对函数三角剖分有所帮助。采用有限到一投影的意义由以下命题说明。

命题 4.3 设 F 是 R^n 的一个闭且有界可定义子集，使得 $p_{n,\ n-1}|_F$ 是有限对一的。设 $X \subset p_{n,\ n-1}(F)$ 是 R^{n-1} 的一个可定义子集，使得对于每个 $x' \in$ 闭包(X)，都存在一个邻域基 U，使得 $U \cap X$ 是可定义连通的（例如，当 X 是凸集时即为此情形）。于是，每个连续可定义函数 ζ：$X \to R$，其图包含于 F 中，都可以连续延拓到闭包(X)。

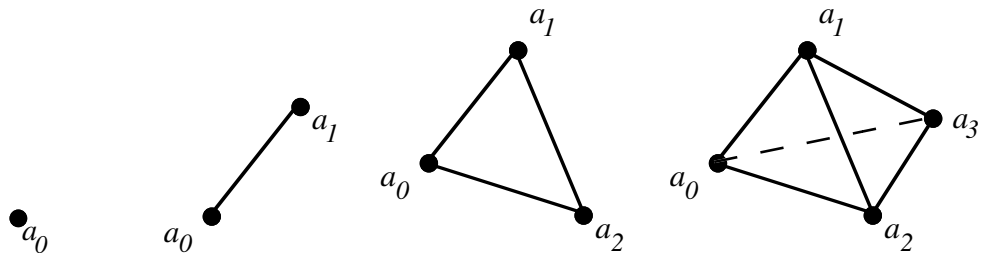
证明。设 $\Gamma \subset F$ 是 ζ 的图。其闭包有界，并且$p_{n,n-1}$(闭包$(\Gamma))$ = 闭包(X)。取 $x' \in$ 闭包(X)。集合 闭包$(\Gamma) \cap p_{n,n-1}^{-1}(x')$ 非空且有限。取 $a \in R$ 和 $\delta > 0$，使得 $(\{x'\} \times (a - \delta, a + \delta)) \cap$ 闭包$(\Gamma) = (x', a)$。对于每个 ε 使得 $0 < \varepsilon < \delta$，存在 x' 的邻域U，使得 $U \cap X$ 是可定义连通的，$U \cap \zeta^{-1}(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \neq \emptyset$，并且对于每个 $y' \in X \cap U$ 都有$\zeta(y') \neq a \pm \varepsilon$。由此可知，$\zeta(U \cap X) \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$。这证明了 ζ 可以连续延拓到 x'，其值为 a。□

4.2 单纯复形

我们回顾一些关于单纯复形的定义，这些定义是我们所需要的。设 $a_0, \ldots, a_d$ 是 R^n 中的点，它们仿射独立（即不包含在维数为 a_0的仿射子空间中）

由顶点 $a_0, \ldots, a_d$构成的 d-单纯形 是

$$[a_0, \ldots, a_d] =$$
$$\{x \in R^n \ ; \ \exists \lambda_0, \ldots, \lambda_d \in [0,1] \quad \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1 \ \text{ and } \ x = \lambda_0 a_0 + \ldots + \lambda_d a_d\} \ .$$



0-单形 1-单形 2-单纯形 3-单纯形

图4.2：单纯形

对应的开单纯形 是

$$\{x \in R^n \ ; \ \exists \lambda_0, \ldots, \lambda_d \in (0,1] \ \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1 \ \text{ and } \ x = \lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_d a_d\}$$

我们用 σ 表示与单纯形 σ对应的开单纯形。单纯形 $\sigma = [a_0, \ldots, a_d]$ 的一个面是满足以下条件的单纯形 $\tau = [b_0, \ldots, b_e]$：

$$\{b_0, \ldots, b_e\} \subset \{a_0, \ldots, a_d\} \ .$$

R^n 中的有限单纯复形是由单纯形 $\sigma_i \subset R^n$ 组成的有限集 $K = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$，满足：对于每个 σ_i， $\sigma_j \in K$，交集 $\sigma_i \cap \sigma_j$ 是 σ_i 和 σ_j 的公共面（见图4.3）。

令 $|K| = \bigcup_{\sigma_i \in K} \sigma_i$，这是 R^n 的一个半代数子集。 R^n 中的 多面体 是 R^n 的一个 P 子集，满足存在 R^n 中的一个有限单纯复形 K，使得 $P = |K|$。这样的 K 将被称为 P 的<style id='12'>单纯分解。注意，多面体是一个闭且有界可定义集。在下文中，约定：如果单纯形 σ 属于有限单纯复形 K，那么 σ 的所有面也属于 K。在此约定下， $|K|$ 是所有开单纯形 σ （其中 $\sigma \in K$）的不交并。

我们还将使用<style id='1'>锥的概念。设 B 是 R^n 中的一个多面体，并且 $a \in$（$R^n \setminus B$）满足：从 a 出发的每条半直线与 B 至多相交于一个点（即，对于每个 $x \in B$、$[a,x] \cap B = \{x\}$）。以 B 为底、以 a 为顶点的锥是多面体

$$a * B = \{tx + (1-t)a \ ; \ x \in B \ \text{ and } \ t \in [0,1]\} \ .$$

给定 B的一个单纯分解，我们通过对B的单纯分解中的每个单纯形 σ 取所有 $a * \sigma$，得到 $a * B$ 的一个单纯分解

4.3 可定义集的三角剖分

定理 4.4 设 A 是 R^n 的一个闭有界可定义子集，并设B_i、 $i = 1$、.....、k是 A 的可定义子集。则存在一个顶点在 $\mathbb{Q}^n$ 中的有限单纯复形 K，以及一个可定义同胚 Φ： $|K| \to A$，使得每个 B_i 都是 K的开单纯形在 Φ 下的像的并集。

证明。我们对 n使用归纳法。 $n = 1$ 的情形是显然的。我们可以用有限多个点 $x_1 < \ldots < x_p$ 细分 R，使得 A 与诸 B_i都是点 x_i 与区间（x_j， x_{j+1}）的并集。然后我们选取一个可定义同胚 τ： $R \to R$，使得对 $i = 1$，....., p有 τ（x_i） $= i$。我们取Φ 为 τ^{-1}在 τ（A）上的限制。

现在假设 $n > 1$，且定理已对 $n-1$ 得证。由于每个可定义集都是有限个局部闭可定义集的并集（参见练习 3.8），我们可以假设 B_i 是局部闭的。于是，我们可以用其闭包 clos(B_i) 替换 B_i，并将差集 clos(B_i) $\setminus B_i$。因此，可以假设所有 B_i 都是闭的。令 F_0 为 $A \cap$clos($R^n \setminus A$) 的边界，令 F_i 为 B_i 的边界，其中 $i = 1, \ldots, k$。置 $F = \bigcup_{i=0}^{k} F_i$。则 F 是一个维数为 $< n$ 的闭且有界可定义集。令 $p = p_{n,\ n-1}$： $R^n \to R^{n-1}$ 为



不是单纯复形　　一个单纯复形

图4.3：单纯复形

前 $n-1$ 个坐标上的投影。根据命题 4.2，我们可以假设，对于所有 $x' \in R^{n-1}$，$p^{-1}(x') \cap F$ 都是有限的。

我们构造一个适配于 R^n 的 cdcd F_0，F_1、.....、F_k。我们得到 $p(A) = p(F_0)$ 的一个有限划分为定义可连通的可定义子集 X_λ of R^{n-1}，以及可定义连续函数

$$\zeta_{\lambda,1} < \ldots < \zeta_{\lambda,m(\lambda)} : X_\lambda \longrightarrow R \,,$$

使得 $\zeta_{\lambda,\mu}$ 的每个图都包含于某个 F_i 中，并且每个 F_i 都是 $\zeta_{\lambda,\mu}$的图的并集。由于每个带（$\zeta_{\lambda,\mu}$，$\zeta_{\lambda,\mu+1}$）都是定义可连通的，且与边界 F_i不相交，因此它或者包含于A，B_1、.....、B_k中的每一个，或者与其中每一个都不相交。

应用归纳假设，我们得到一个顶点位于 $\mathbb{Q}^{n-1}$ 中的单纯复形 L 以及一个可定义同胚 Ψ : $|L| \to p(A)$，并且所有 X_λ 都是 L的开单纯形并集在 Ψ 下的像。将A 替换为 $\{(x', x_n) \in |L| \times R\,;\ (\Psi(x')\ x_n) \in A\}$，我们可以假设 Ψ 是恒等映射。此外，我们可以对 X_λ 进行划分，并假设它们是 L 的开单纯形 σ_λ（这些开单纯形不再是 cdcd 的胞腔）。我们用 $(C_\alpha)_{\alpha=1}$、.....、ℓ 表示所有 $\zeta_{\lambda,\mu}$: $\sigma_\lambda \to R$ 的图，以及所有包含于 A中的带（$\zeta_{\lambda,\mu},\zeta_{\lambda,\mu+1}$）$\subset \sigma_\lambda \times R$ 的集合。根据命题 4.3，由于 F 是闭且有界的，并且 $p|_F$: $F \to R^{n-1}$ 是有限对一的，每个$\zeta_{\lambda,\mu}$: $\sigma_\lambda \to R$ 都可以连续延拓到闭单纯形 σ_λ。我们将该延拓记为 $\overline{\zeta}_{\lambda,\mu}$。此延拓的图包含于 F中。因此，如果 $\sigma_{\lambda'}$ 包含于 σ_λ中，则 $\overline{\zeta}_{\lambda,\mu}$ 在 $\sigma_{\lambda'}$ 上的限制与某个 $\zeta_{\lambda',\mu'}$一致。我们将 C_α的闭包记为 $\overline{C}_\alpha$。它或者是某个 $\overline{\zeta}_{\lambda,\mu}$ 的图，或者是某个闭带 $[\zeta_{\lambda,\mu}, \zeta_{\lambda,\mu+1}] \subset \sigma_\lambda \times R$（记号显然）。集合 $\partial C_\alpha = \overline{C}_\alpha \setminus C_\alpha$ 是 C_β 与满足 $\dim(C_\beta) < \dim(C_\alpha)$ 的集合的并集。

对于 L 的每个单纯形 σ_λ，令 $b(\sigma_\lambda) \in \mathbb{Q}^{n-1}$ 为其重心。若 C_α 是 ζ_λ 的图，μ : $\sigma_\lambda \to R$，则令 $b_\alpha = (b(\sigma_\lambda)\ \mu) \in \mathbb{Q}^n$。若 C_α 是带 $(\zeta_{\lambda,\mu}, \zeta_{\lambda,\mu+1})$，则令 $b_\alpha = (b(\sigma_\lambda)\ \mu \pm \frac{1}{2}) \in \mathbb{Q}^n$。现在我们通过对 $\dim(C_\alpha)$ 作归纳法，为每个 C_α 关联一个多面体 D_α。此外，我们给出 D_α 的一个单纯分解。若 C_α 是一个点，则令 $D_\alpha = \{b_\alpha\}$。若 $\dim(C_\alpha) > 0$，则 D_α 是以 b_α 为顶点、以所有满足 $C_\beta \subset \partial C_\alpha$ 的 D_β 的并集 ∂D_α 为底的锥。我们以 b_α 为顶点，对 $D_\beta \subset \partial D_\alpha$ 的单纯分解中的所有单纯形取锥，从而分解 D_α。这样，我们得到一个有限单纯复形 K，使得 $|K| = \bigcup_{\alpha=1}^{\ell} D_\alpha$。$K$ 的单纯形是所有满足 $C_{\alpha_{i-1}} \subset \partial C_{\alpha_i}$ 的单纯形 $[b_{\alpha_0}, b_{\alpha_1}, \ldots, b_{\alpha_q}]$，其中 $i = 1$，.....，q。复形 K 的所有顶点都在 $\mathbb{Q}^n$中。注意，根据构造，$p(D_\alpha) = p(C_\alpha)$。我们构造一个可定义同胚 $\theta_\alpha : D_\alpha \to C_\alpha$，使得$p \circ \theta_\alpha = p|_{D_\alpha}$。若 C_α 是 ζ_λ 的图，μ，则必须有 $\theta_\alpha(x', x_n) = (x', \zeta_{\lambda,\mu}(x'))$。

若 C_α 是闭带 $[\zeta_{\lambda,\mu}, \zeta_{\lambda,\mu+1}]$，我们选取 θ_α，使得对于每个 $x' \in \sigma_\lambda$，它都以仿射方式将线段 $(\{x'\} \times R) \cap D_\alpha$ 映到线段 $\{x'\} \times [\zeta_{\lambda,\mu}(x'), \zeta_{\lambda,\mu+1}(x')]$（注意，当且仅当 $\zeta_{\lambda,\mu}(x') = \zeta_{\lambda,\mu+1}(x')$ 时，$(\{x'\} \times R) \cap D_\alpha$ 才退化为一个点）。同胚 θ_α 将 ∂D_α 映到 ∂C_α。

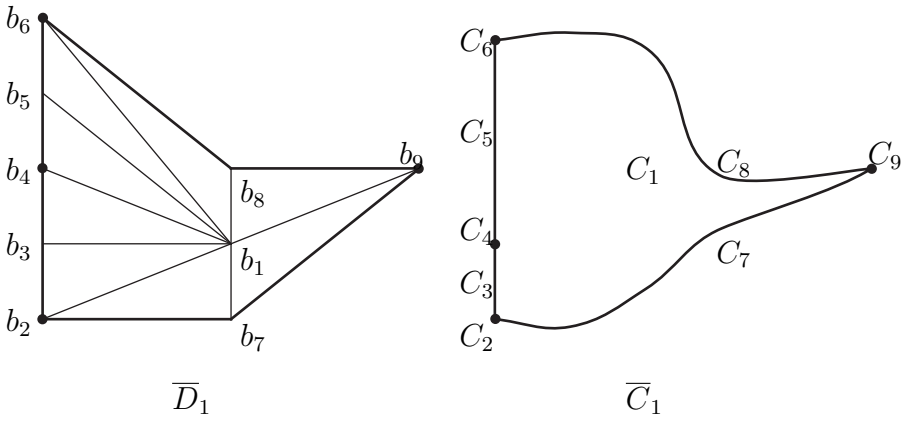


图4.4： K的构造

我们通过构造可定义同胚 $\Phi\colon |K| \to A$ 来完成证明，使得 $p \circ \Phi = p_{|K|}$ 且 $\Phi(D_\alpha) = C_\alpha$，其中 $\alpha = 1, \ldots, \ell$。我们不能直接取 $\Phi|_{D_\alpha} = \theta_\alpha$，因为对于 $D_\beta \subset \partial D_\alpha$，$\theta_\alpha|_{D_\beta}$ 可能不同于 θ_β（参见图4.4中 $D_3 \subset \partial D_1$ 的情形）。因此，我们对 θ_α 作出修改，得到一个可定义同胚 $\Phi_\alpha : D_\alpha \to C_\alpha$，使其满足 $\Phi_\alpha|_{D_\beta} = \Phi_\beta$ 和 $p \circ \Phi_\alpha = p|_{D_\alpha}$。我们对 $\dim(D_\alpha)$ 使用归纳法。若 D_α 是一个点，则取 $\Phi_\alpha = \theta_\alpha$。若 $\dim(D_\alpha) > 0$，记 $\rho_\alpha : \partial D_\alpha \to \partial D_\alpha$ 为由 $\rho_\alpha|_{D_\beta} = \theta_\alpha^{-1} \circ \Phi_\beta$ 定义的同胚，其中对所有 $D_\beta \subset \partial D_\alpha$ 均成立。我们利用 $D_\alpha = b_\alpha * \partial D_\alpha$ 的锥结构，将同胚 ρ_α 延拓为同胚 $\eta_\alpha : D_\alpha \to D_\alpha$：对于每个 $x \in \partial D_\alpha$ 和 $t \in [0,1]$，令 $\eta_\alpha(tx + (1-t)b_\alpha) = t\rho_\alpha(x) + (1-t)b_\alpha$。然后令 $\Phi_\alpha = \theta_\alpha \circ \eta_\alpha$。注意，$p \circ \eta = p|_{D_\alpha}$ 且 $p \circ \Phi_\alpha = p|_{D_\alpha}$。现在可以取由 $\Phi_{\overline{D}_\alpha} = \Phi_\alpha$ 定义的 Φ，其中 $\alpha = 1, \ldots, \ell$。□

4.4 可定义函数的三角剖分

定理 4.5 设 X 是 R^n 的一个闭有界可定义子集，且 $f : X \to R$ 是一个连续可定义函数。那么存在一个位于 R^{n+1} 中的有限单纯复形 K，以及一个可定义同胚 $\rho\colon |K|_R \to X$，使得 $f \circ \rho$ 在 K 的每个单纯形上都是仿射函数。

此外，给定 X 的有限个可定义子集 $B_1, \ldots, B_k$，我们可以选取三角剖分 $\rho: |K|_R \to X$，使得每个 B_i 都是 K 的开单纯形的像的并集。

我们用集合 $A = \{(f(x)\ x) \in R \times R^n$ 替换 $X;\ x \in X\}$ 该集合与 X可定义同胚。此集合是 R^{n+1}中的闭有界可定义子集。令 $\pi = p_{n+1,\ 1}$：$R^{n+1} \to R$ 为向第一个坐标的投影。为了证明定理 4.5，只需在 R^{n+1} 中构造一个有限单纯复形 K 以及一个可定义同胚 $\Phi : |K| \to A$，使得 $\pi \circ \Phi = \pi|_{|K|}$。事实上，$\pi$ 与同胚映射$X \to A$ 的复合为 f。因此，定理 4.5 可由下面的命题推出。

命题 4.6 设 A 是 $R \times R^n$中的闭且有界可定义子集，且 B_i、$i = 1$、……、k是 A中的可定义子集。令 π： $R \times R^n \to R$ 为向第一个坐标的投影。那么，存在一个有限单纯复形K，其顶点属于 $R \times \mathbb{Q}^n$，以及一个可定义同胚 Φ： $|K| \to A$，使得 $\pi \circ \Phi = \pi|_{|K|}$，并且每个 B_i 都是 Φ 对K中的开单纯形取像所得的并集。

证明。我们对 n 进行归纳。$n = 0$ 的情形显然。我们可以用有限多个点 $x_1 < \ldots < x_p$ 将 R 细分，使得 A 和 B_i 都是点 x_i 与区间的并集（x_j，x_{j+1}）。我们选取由点 x_i 和包含于 A 中的闭有界区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 构成的集合作为 K。

假设 $n > 0$ 成立，并且命题已对 $n-1$ 证明。与定理 4.4 的证明一样，我们可以假设所有 B_i 都是闭的。

令 G_0 为 A 的边界，令 G_i 为 B_i 的边界，其中 $i = 1, \ldots, k$。设 $G = \bigcup_{i=0}^{k} G_i$。那么 G 是维数至多为 n 的闭有界可定义集。用 C 表示满足 $\{x \in R^n$ 的有限点集 $c \in R;\ (c, x) \in G\}$ 的维数为 n。令 $F_i,\ i = 0, \ldots, k$ 为 $G_i \setminus (C \times R^n)$ 的闭包与 $C \times R^n$ 中 $G_i \cap (C \times R^n)$ 的边界的并集。设 $F = \bigcup_{i=0}^{k} F_i$。每个 F_i 都是闭有界可定义集。我们断言，对于 R 中的每个 t，$F_t = \{x \in R^n;\ (t, x) \in F\}$ 的维数为 $< n$。由于 $G_i \cap (C \times R^n)$ 的维数为 n，其边界的维数至多为 $n-1$。因此，只需验证 $(\mathrm{clos}(G_i \setminus (C \times R^n)))_t$ 的维数不大于 $n-1$。将下一条引理应用于 $X = G_i \setminus (C \times R^n)$ 即可得出这一点。

引理 4.7 设 X 是 $R \times R^n$ 的可定义子集，且对每个 $t \in R$，X_t 的维数为 $< n$。那么，对每个 $t \in R$，都有 $\dim((\text{闭包}(X))_t) < n$。

证明。 由假设可知 $\dim X \leq n$。因此， X 的边界的维数为 $< n$。由于 (闭包$(X))_t \setminus X_t$ 包含于 X 的边界中，我们有 $\dim((\text{闭包}(X))_t) < n$。□

我们回到命题 4.6 的证明。令 $p = p_{n+1,\,n}: R \times R^n \to R \times R^{n-1}$ 为在前 n个坐标上的投影。由命题 4.2，由于对每个 $t \in R$，$\dim(F_t) < n$，我们可以假设对所有 $(t,\ x') \in R \times R^{n-1}$，$(p^{-1}(t,\ x') \cap F)$ 都是有限的。我们选取 $R \times R^n$的一个 cdcd，使其适配于 $F_0, \ldots, F_k$ 以及对每个 $c \in C$ 的 $\{c\} \times R^n$。于是得到 $p(A)$ 的一个有限划分，其中各部分是 $R \times R^{n-1}$的定义可连通的可定义子集 X_λ，以及可定义连续函数

$$\zeta_{\lambda,1} < \ldots < \zeta_{\lambda,m_\lambda} : X_\lambda \longrightarrow R\,,$$

使得 $\zeta_{\lambda,\,\mu}$ 的每个图都包含于某个 F_i 中，并且每个 F_i 都是 $\zeta_{\lambda,\,\mu}$的图的并集。注意，$\zeta_{\lambda,\,\mu}$ 的每个图以及每个带 $(\zeta_{\lambda,\,\mu},\ \zeta_{\lambda,\,\mu+1})$ 要么包含于 G_i 中，要么与 G_i 不相交。因此， A 和 B_i 都是这类胞腔的并集。

应用归纳假设，我们可以假设存在一个顶点位于 $R \times \mathbb{Q}^{n-1}$ 中的单纯复形 L 以及一个可定义同胚 Ψ： $|L| \to p(A)$，使得 $p_{n,\,1} \circ \Psi = p_{n,\,1}|_{|L|}$，并且所有 X_λ 都是 Ψ将 L 的开单纯形映射所得的像的并集。从现在起，我们可以遵循定理 4.4 的证明，构造一个三角剖分 Φ: $|K| \to A$，使得 K 的所有顶点都位于 $R \times \mathbb{Q}^n$ 中，每个 B_i 都是 Φ 将 K的开单纯形的某个并集映射所得的像，并且$p \circ \Phi = \Psi \circ p|_{|K|}$。因此，

$$\pi \circ \Phi = p_{n,1} \circ p \circ \Phi = p_{n,1} \circ \Psi \circ p|_{|K|} = p_{n,1} \circ p|_{|K|} = \pi|_{|K|}\,.$$

□

命题 4.6 中构造的单纯复形的顶点除第一个坐标外，其余坐标都是有理数。我们还需要使第一个坐标也是有理数。但这需要付出一些额外的复杂性。

命题 4.8 设 A 是实数域中的一个闭有界可定义子集， B_i、 $i = 1$、.....、 k 是 A 的可定义子集。设 π： $R \times R^n \to R$ 是到第一个因子的投影。那么，存在一个顶点位于 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^n$ 中的有限单纯复形 K，以及可定义同胚 Φ： $|K| \to A$ 和 τ： $R \to R$，使得 $\tau \circ \pi \circ \Phi = \pi|_{|K|}$ 且每个 B_i 都是 Φ 对 K 的开单纯形的像的并集。

证明。 我们只需修改前述命题证明中的步骤 $n = 0$。我们可以用有限多个点 $x_1 < \ldots < x_p$细分 R，使得 A

且 B_i 是点 x_i 和区间（x_j, x_{j+1}）的并集。我们为 K选取由点 1、.....、p和线段 $[j, j+1]$ 组成的集合，使得 $[x_j, x_{j+1}]$ 包含于 A。我们为 τ 选取一个分段仿射同胚，将x_i 映到 i。证明的其余部分相同，只需使用适当的归纳假设。□

连续可定义函数的三角剖分结果不能推广到所有连续可定义映射。例如，考虑映射f：$[0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$，由 $f(x, y) = (x, xy)$定义。不存在三角剖分 $\Phi: |K| \to [0,1]^2$和 $\Psi: |L| \to f([0,1]^2)$，使得 $\Psi^{-1} \circ f \circ \Phi$在 K的每个单纯形上都是仿射的。

练习 4.9 证明前面的断言。提示：令 $a = (0, 0) \in R^2$且 $A = f((0, 1)^2)$，注意到 $a \in$闭包(A)，dim(闭包($f^{-1}(A)$) $\cap f^{-1}(a)$) $= 1$且 dim($f^{-1}(x)$) < 1 对所有 $x \in A$ 都成立。证明对于定义在多面体上且在单纯分解的每个单纯形上都是仿射的映射，这种情况不可能发生。

注意到，定理 4.5 的证明中只有对取值于 R 的函数才成立的关键一点，是断言对于 R 中的每个 t，dim(F_t) 都是 $< n$。事实上，当参数 t 在带有 $m > 1$的 R^m 中变化时，引理 4.7 不再成立。上面的反例也给出了 $m > 1$ 情形下该引理的一个反例：取

$$X = \{(x, z, y) \in R^2 \times R \,;\, x \neq 0 \text{ and } z = xy\} \,.$$

那么，对于所有 $(x, z) \in R^2$，dim($X_{(x,z)}$) < 1，但 dim(闭包(X)$^{(0,0)}$) $= 1$。

我们可以从可定义函数的三角剖分中推导出一个通常以其他方式证明的结果（作为 Hardt定理在 [vD] 中的推论）。如果 $a \in R^n$ 且 $r > 0$，我们用 $S(a, r)$ 表示以 a 为中心、半径为 r 的球面。

定理 4.10（局部锥结构） 设 $A \subset R^n$ 是一个闭可定义集，a 是 A 中的一个点。存在 $r > 0$，使得存在一个可定义同胚 h，它将以 a 为顶点、以 $S(a, r) \cap A$ 为底的锥映到 $B(a, r) \cap A$ 上，并满足 $h|_{S(a,r)\cap A} = \mathrm{Id}$ 以及 $\|h(x) - a\| = \|x - a\|$，对锥中的所有 x 均成立。

证明。 我们对函数 f 在 $A \cap B(a,1)$ 上的限制 $x \mapsto \|x - a\|$ 作三角剖分。由此得到一个可定义同胚 $\Phi: |K| \to A \cap B(a,1)$，使得 $f \circ \Phi$ 在 K 的每个单纯形上都是仿射的。由于 f 在 a 处取得最小值，这个点 a

是 K 的顶点 w 的像。令 $\mu > 0$ 为 K 所有其他顶点处 $f \circ \Phi$ 的值中的最小值，并取 r 使得 $0 < r < \mu$。取一点 $y \in |K|$ 使得 $f \circ \Phi(y) = r$，即 $\Phi(y) \in S(a, r) \cap A$。点 y 属于 K 的一个单纯形 $[v_0, \ldots, v_d]$。我们有 $y = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i v_i$，且 $\sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1$。由于 $f \circ \Phi(y) = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i f \circ \Phi(v_i)$，其中一个 v_i（设为 v_0）必定是 w。在顶点为 a、底为 $S(a, r) \cap A$ 的锥上定义 h，令 $h(ta + (1-t)\Phi(y)) = \Phi(tw + (1-t)y)$。容易验证，$h$ 具有定理中所述的性质。□

下面的练习是局部锥结构定理的推广。

练习 4.11 证明以下结果：

设 $Z \subset S$ 是两个闭且有界的可定义集。设 f 是定义在 S 上的非负连续可定义函数，且 $f^{-1}(0) = Z$。那么存在 $\delta > 0$ 和连续可定义映射 $h\colon f^{-1}(\delta) \times [0, \delta] \to f^{-1}([0, \delta])$，使得对于每个 $(x, t) \in f^{-1}(\delta) \times [0, \delta]$，都有 $f(h(x, t)) = t$；对于每个 $x \in f^{-1}(\delta)$，都有 $h(x, \delta) = x$；并且 $h|_{f^{-1}(\delta) \times\,]0, \delta]}$ 是到 $f^{-1}(]0, \delta])$ 上的同胚。提示：1）对 f 作三角剖分，使得可以假设 $S = |K|$ 是一个有限单纯复形，Z 是若干单纯形的并集，并且 f 在每个单纯形上都是仿射的。2）选取足够小的 $\delta > 0$，使得对于 K 中满足 $a \notin Z$ 的每个顶点 a，都有 $\delta < f(a)$。3）令 $x \in f^{-1}(\delta)$。点 x 属于 K 的一个单纯形 $[a_0, \ldots, a_d]$。可以假设，对于 $i = 0$，……，k，有 $a_i \in Z$；对于 $i = k+1$，……，d，有 $a_i \notin Z$。令 $x = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i a_i$ 满足 $\sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1$。证明 $\alpha = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i$ 满足 $0 < \alpha < 1$。4）对于 $t \in [0, \delta]$，定义 $h(x, t)$ 为线段 $\sum_{i=0}^{k} (\lambda_i / \alpha) a_i$ 与 x 连接后，其中满足 $f(y) = t$ 的点 y。验证 h 定义良好并满足所需性质。

第5章

可定义族的一般纤维

5.1 计划

我们用一个非常简单的代数几何例子来说明接下来要做的事情。考虑由 $t \in \mathbb{C}$ 参数化的圆锥曲线族 $x^2 - t(1+y^2) = 0$，它位于 $\mathbb{C}^2$ 中。我们也可以将 $x^2 - t(1+y^2) = 0$ 视为定义在域 $\mathbb{C}(t)$ 上的圆锥曲线方程。这条圆锥曲线是“该族的一般纤维”。一般纤维是非退化圆锥曲线这一事实（判别式为 t^2，它在 $\mathbb{C}(t)$ 中可逆），对应于该族中的圆锥曲线在 t 几乎所有取值下都非退化这一事实（唯一的例外是 $t=0$）。我们通过使用环 $\mathbb{C}[t]$ 的素谱 Spec($\mathbb{C}[t]$) 来形式化这一点。$\mathbb{C}$ 嵌入在 Spec($\mathbb{C}[t]$) 中，其中每个 $z \in \mathbb{C}$ 对应于 $\mathbb{C}[t]$ 的极大理想 $(t-z)$。这些极大理想处的剩余域为 $\mathbb{C}$。Spec($\mathbb{C}[t]$) 中还有另一个点：理想 (0)，其剩余域为 $\mathbb{C}(t)$。这个点是 $\mathbb{C}$ 的“一般点”。

我们将把 R 嵌入到一个更大的空间 $\widetilde{R^m}$。我们将为 $\widetilde{R^m}$ 每个点 $\alpha \in R^m$ 关联一个带有 o-极小结构的实闭域 $\kappa(\alpha)$。然后，给定一个可定义族 $X \subset R^m \times R^n$ 和 $\alpha \in R^m$，我们将定义纤维 X_α，它将是 $\kappa(\alpha)^n$的一个可定义子集。若 α 是点 $t \in R^m$在嵌入下的像，则 $\kappa(\alpha)$将是 R，而 X_α 将是通常的纤维 X_t。有趣之处将出现在对应于点 $\alpha \in R^m \setminus R^m$的“一般纤维” X_α 上。我们将把一般纤维 X_α的性质与参数空间R^m中“较大”子集上的族 X 的性质联系起来。借此，我们将从上一章的三角剖分定理推导出关于可定义族平凡性的结果。

我们将要介绍的工具，实际上是对经典模型论概念和结果（m-类型、可定义超幂，.....）的重新表述。这种重新表述以实谱理论为基础（参见[BCR]）。

5.2 可定义集的超滤子空间

令 S_m 为 R^m的可定义子集所成的布尔代数。本节的内容无非是构造布尔代数 S_m 的 Stone 空间（参见 [BS]）。不过，对于不熟悉超滤子和 Stone 空间的读者，我们仍将或多或少地自包含地介绍这一构造。

我们记 $\mathcal{S}_m$的超滤子集合。回忆一下，的超滤子是 α 的一个子集，它满足

1. $R^m \in \alpha$2. $A \cap B \in \alpha$ 当且仅当 $A \in \alpha$ 且 $B \in \alpha$3. $\emptyset \notin \alpha$4. $A \cup B \in \alpha$ 当且仅当 $A \in \alpha$ 或 $B \in \alpha$

我们称 $\mathcal{F}$ 的 R^m 可定义子集族生成超滤子 α，如果 α 是由满足存在 $B \in \mathcal{F}$ 使得$B \subset A$的可定义集 $A \subset R^m$ 所组成的集合。如果 $\mathcal{F}$ 是 R^m的一个非空可定义子集族，并且对有限交封闭，那么它生成超滤子当且仅当 $\emptyset \notin \mathcal{F}$，并且对于每个 $A \in S_m$， A 或 $R^m \setminus A$ 包含某个 $B \in \mathcal{F}$。

如果 t 是 R^m中的一个点，则包含 t的 R^m 的可定义子集构成一个超滤子 α_t。这称为由 t生成的主超滤子。映射 $t \mapsto \alpha_t$ 将 R^m 嵌入为 R^m的一个子集。下面的练习给出了 $R^m \setminus R^m$中点的示例

练习 5.1 R的点。证明以下各族生成 S_1的超滤子：1）所有区间（$x, +\infty$）构成的族，其中 $x \in R$。2）所有区间（$-\infty, x$）构成的族，其中 $x \in R$。3）固定一个 $a \in R$，所有区间（$a, a+\varepsilon$）构成的族，其中 $\varepsilon > 0$。4）固定一个 $a \in R$，所有区间（$a-\varepsilon, a$）构成的族，其中 $\varepsilon > 0$。若 $R = \mathbb{R}$，证明 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ 的所有点都对应于上述四种情况之一。

练习 5.2 通过归纳法构造 R^m 的点。设 α 是 R^m 的一个点。证明 R^{m+1} 中形如以下形式的可定义子集构成的族

$$\{(x,y) \in R^m \times R\,;\ x \in A \ \text{ and } \ 0 < y < f(x)\}\,,$$

其中 $A \in \alpha$ 和 $f\colon\ A \to R$ 是正可定义函数，生成了 S_{m+1} 的一个超滤子 $\alpha_\uparrow$。提示：给定 R^{m+1} 的一个可定义子集 B，利用 R^{m+1} 的一个 cdcd 证明，B 或其补集属于 $\alpha_\uparrow$。

练习 5.3 R^m 中一个点的维数。对于 $\alpha \in R^m$，将 $\dim \alpha$ 定义为对于 $A \in \alpha$，$\dim A$ 的最小值。证明 $\dim\ \alpha = d$ 当且仅当 α 由维数为 d 的可定义集构成的一个族生成。证明 $\dim(\alpha_\uparrow) = \dim \alpha + 1$（使用练习 5.2 中的记号）。证明在 R^m 中存在一个维数为 m 的超滤子。证明 $\dim A$ 是对于 $\alpha \ni A$，$\dim \alpha$ 的最大值。

现在我们在 R^m 上赋予一个拓扑。我们将 R^m 视为幂集 2^{S_m} 的一个子集，并将超滤子 α 与其示性函数 $\mathbf{1}_\alpha\colon\ S_m \to 2 = \{0,1\}$ 等同。我们在 2 上赋予离散拓扑，在 2^{S_m} 上赋予积拓扑。根据蒂霍诺夫定理，2^{S_m} 是紧的 Hausdorff 空间。我们将 $\widetilde{R^m}$ 上由 2^{S_m} 的拓扑诱导的拓扑作为其拓扑。

命题 5.4 *R^m 的拓扑有一个由开且闭集组成的基，该基由所有 $A = \{\alpha \in R^m\,;\ \alpha \ni A\}$（其中 $A \in S_m$）构成。空间 R^m 是紧豪斯多夫的。*

证明。首先注意，运算 $A \mapsto A$ 保持有限并、有限交以及取补集。

$\widetilde{R^m}$ 上的拓扑，诱导集基由如下形式的集合构成：

$$U = \{\alpha \in \widetilde{R^m}\,;\ \mathbf{1}_\alpha(A_1) = \ldots = \mathbf{1}_\alpha(A_k) = 1 \ \text{ and } \ \mathbf{1}_\alpha(B_1) = \ldots = \mathbf{1}_\alpha(B_\ell) = 0\}\,,$$

其中（A_1，.....，A_k）和（B_1，.....，B_ℓ）是 S_m 中元素构成的有限族。注意，$U = \widetilde{A}$，其中 $A = \bigcap_{i=1}^k A_i \cap \bigcap_{j=1}^\ell (R^m \setminus B_j)$。这证明了命题的第一个断言。

最后，请注意，超滤子定义中的四个条件分别定义了 2^{S_m} 的一个闭子集。因此，$\widetilde{R^m}$ 在 2^{S_m} 中是闭的。这证明了第二个断言。□

习题 5.5 证明，映射 $A \mapsto A$ 是从 S_m 到 R^m 的开且闭子集集的双射。

5.3 与超滤子相关的 o-极小结构

若 A 是 R^m 的可定义子集，我们用 $\mathrm{Def}(A,R)$ 表示可定义函数 $A \to R$ 构成的环。给定 $\alpha \in R^m$，我们将 $\kappa(\alpha)$ 定义为 $\mathrm{Def}(A,R)$（$A \in \alpha$）的归纳极限。具体如下。我们取不交并 $\bigsqcup_{A\in\alpha} \mathrm{Def}(A,R)$。若存在 $C \in \alpha$、$C \subset A \cap B$ 使得 $f|_C = g|_C$，则称这个不交并中的两个元素 $f\colon A \to R$ 和 $g\colon B \to R$ 等价。于是，$\kappa(\alpha)$ 就是关于此等价关系的等价类集合。我们用 $f(\alpha) \in \kappa(\alpha)$ 表示 $f\colon A \to R$ 的等价类。根据定义，$f(\alpha) = g(\alpha)$ 当且仅当 f 和 g 在属于 α 的某个可定义集上重合。归纳极限 $\kappa(\alpha)$ 具有自然的交换 R-代数结构：和 $f(\alpha) + g(\alpha)$ 为 $(f+g)(\alpha)$，其中 $f+g$ 定义在 f 和 g 的定义域的交集上，该交集属于 α。乘积 $f(\alpha)g(\alpha)$ 也有类似定义。R 中元素的像是常值函数的等价类。验证很容易。

如果 f 在属于 α 的可定义集上为正，则称 $f(\alpha) \in \kappa(\alpha)$ 为正。这与代表元 f 的选择无关。

命题 5.6 交换 R-代数 $\kappa(\alpha)$，其正元素如上定义，是一个有序域，并且是 R 的有序扩张。

证明。我们验证，对于 $\kappa(\alpha)$ 中的元素 $f(\alpha)$，$f(\alpha) > 0$、$f(\alpha) = 0$ 和 $-f(\alpha) > 0$ 三种可能性恰有一种成立。这是因为 f 的定义域被划分为三个可定义集，分别对应 f 为正、为零或为负的情形。这三个集恰有一个属于 α。此外，如果 $f(\alpha) \neq 0$，那么 $1/f$ 在属于 α 的可定义集上有定义。因此，$(1/f)(\alpha)$ 是 $\kappa(\alpha)$ 中 $f(\alpha)$ 的逆元。其他验证也很容易。□

现在我们将在 $\kappa(\alpha)$ 上构造一个 o-极小结构。为此，我们需要可定义族 $X \subset R^m \times R^n$ 在 $\alpha \in R^m$ 处的纤维这一概念。如果 $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon A \to R^n$ 是一个可定义映射，并且 $A \in \alpha$，我们用 $f(\alpha)$ 表示点 $(f_1(\alpha) \ldots, f_n(\alpha)) \in \kappa(\alpha)^n$。

定义 5.7 设 X 是 $R^m \times R^n$ 的一个可定义子集。X 在 $\alpha \in R^m$ 处的纤维是集合 X_α，由满足以下条件的 $f(\alpha)$ 组成：它们属于 $\kappa(\alpha)^n$，且存在 $A \in \alpha$，使得 f 在其上有定义，并且对于所有 $t \in A$，都有 $(t, f(t)) \in X$。

换句话说，当且仅当存在 $A \in \alpha$，使得对于所有 $t \in A$，$f(\alpha)$ 都属于 X_α，且 $f(t) \in X_t$。这个定义是合理的，因为如果我们取 $f(\alpha)$ 的另一个代表元 g（即 $g(\alpha) = f(\alpha)$），那么 g 和 f 在某个 $B \in \alpha$ 上重合，因此对于所有 $t \in A \cap B$，都有 $g(t) \in X_t$，其中 $A \cap B \in \alpha$。

值得看看前述构造和定义在主超滤子 α_t 对应于点 $t \in R^m$时会得到什么。由于超滤子 α_t 由单点集 $\{t\}$生成，归纳极限 $\kappa(\alpha_t)$（在典范意义下同构于）$\mathrm{Def}(\{t\}, R) = R$。此外，若 $f: A \to R$ 是一个可定义函数，且 $A \ni t$，那么 $f(\alpha_t) = f(t) \in R$。最后，给定一个可定义集 $X \subset R^m \times R^n$，其纤维 X_{α_t}就是所有满足 $(t, x) \in X$ 的 $x \in R^n$ 所构成的集合，也就是 X_t。

现在我们可以在 $\kappa(\alpha)$ 上定义 o-极小结构。令 $S_n(\alpha)$为所有纤维 X_α 构成的族，其中 X 是 $R^m \times R^n$ 的一个可定义子集。

定理 5.8 集合$(S_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ 是扩张有序域 $\kappa(\alpha)$的一个 *o*-极小结构。特别地，$\kappa(\alpha)$ 是实闭的。

证明。 我们需要验证 o-极小结构定义中的五条性质。

1)对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$S_n(\alpha)$ 都是 $\kappa(\alpha)^n$的幂集的一个布尔子代数。
只需验证以下事实。设 X 和 Y 是 $R^m \times R^n$ 的可定义子集。那么：

$$(X \cap Y)_\alpha = X_\alpha \cap Y_\alpha\,, \qquad (X \cup Y)_\alpha = X_\alpha \cup Y_\alpha\,,$$
$$((R^m \times R^n) \setminus X)_\alpha = \kappa(\alpha)^n \setminus X_\alpha\,.$$

我们来验证最后一个等式。设 $f(\alpha)$ 是 $\kappa(\alpha)^n$ 的一个元素，其中 $f_i \in \mathrm{Def}(A, R)$ 且 $A \in \alpha$。两个可定义集 $B = \{t \in A;\ f(t) \in X_t\}$ 和$C = \{t \in A;\ f(t) \in ((R^m \times R^n) \setminus X)_t\}$ 将 A 划分。因此，B 和 C 中恰有一个属于 α。这意味着，$f(\alpha)$ 属于 $((R^m \times R^n) \setminus X)_\alpha$，当且仅当它不属于 X_α。

其他等式的验证留给读者完成。

2)所有代数子集都属于 $\kappa(\alpha)^n$ 中的 $S_n(\alpha)$。只需验证由一个方程给出的代数集 $V \subset \kappa(\alpha)^n$

$$\sum_{i\in I} a_i(\alpha) x^i = 0\,,$$

其中 I是 $\mathbb{N}^n$的有限子集， $i=(i_1, \ldots, i_n)$，且 $x^i = x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$。令 $A \in \alpha$使得所有可定义函数 a_i 都在 A上有定义。设

$$X = \{(t,x) \in R^m \times R^n \,;\, t \in A \text{ and } \sum_{i\in I} a_i(t)x^i = 0\}\,.$$

那么， X 是一个可定义集。当且仅当存在 $B \in \alpha$使得对于所有 $t \in B$都有 $f(\alpha) \in V$，即对于所有 $t \in B$都有 $f(t) \in X_t$， $\sum_{i\in I} a_i(t)f^i(t) = 0$。因此， $V = X_\alpha$。

3) 如果 $X_\alpha \in S_n(\alpha)$ 且 $Y_\alpha \in S_p(\alpha)$，那么 $X_\alpha \times Y_\alpha \in S_{n+p}(\alpha)$。令

$$X \times_{R^m} Y = \{(t,x,y) \in R^m \times R^n \times R^p \,;\, (t,x) \in X \text{ and } (t,y) \in Y\}\,.$$

注意，对于所有 $t \in R^m$， $(X \times_{R^m} Y)_t = X_t \times Y_t$。由此可得， $(X \times_{R^m} Y)_\alpha = X_\alpha \times Y_\alpha$。

4) 如果 $p : \kappa(\alpha)^{n+1} \to \kappa(\alpha)^n$ 是到前个坐标上的投影，并且$X_\alpha \in S_{n+1}(\alpha)$，那么 $p(X_\alpha) \in S_n(\alpha)$。令 π： $R^m \times R^{n+1} \to R^m \times R^n$ 为到前 $m+n$ 个坐标上的投影。只需验证

$$p(X_\alpha) = \pi(X)_\alpha\,.$$

令 $f(\alpha)$ 是 $\kappa(\alpha)^n$ 中的一个元素。若 $f(\alpha)$ 属于 $p(X_\alpha)$，则存在 $g(\alpha) \in \kappa(\alpha)$ 和 $A \in \alpha$，使得对所有 $t \in A$，都有 $(f(t)\ g(t)) \in X_t$。因此，对所有 $t \in A$， $f(t) \in \pi(X)_t$，这说明 $f(\alpha) \in \pi(X)_\alpha$。反过来，假设 $f(\alpha) \in \pi(X)_\alpha$。那么存在 $B \in \alpha$，使得对于所有 $t \in B$，都存在 $y \in R$，满足 $(f(t)\ y) \in X_t$。根据可定义选择 3.1，我们可以选取这样的一个 y，使其成为可定义函数 $g : B \to R$。由此可得 $(f(\alpha)\ g(\alpha)) \in X_\alpha$，且 $f(\alpha) \in p(X_\alpha)$。

5) $S_1(\alpha)$ 的元素恰好是 $\kappa(\alpha)$ 中点和区间的有限并。取 $X_\alpha \in S_1(\alpha)$，并选择一个适配于 X 的 $R^m \times R$ cdcd。我们将 R^m 划分为胞腔 C_1、…、C_k，并且对于每个胞腔 C_i，存在连续可定义函数 $\zeta_{i,1} < \cdots < \zeta_{i,\ell(i)}$： $C_i \to R$，使得 X 是 $\zeta_{i,j}$ 的图以及带 $(\zeta_{i,j},\zeta_{i,j+1})$ 的并集。 C_i 中恰有一个属于超滤子 α，设其为 $C_1 \in \alpha$。我们断言， X_α 是以下各点 $\zeta_{1,j}(\alpha)$ 以及以下各区间 $(\zeta_{1,j}(\alpha)\zeta_{1,j+1}(\alpha))$ 的并集：$\zeta_{1,j}$ 的图包含于 X 中，且带 $(\zeta_{1,j}, \zeta_{1,j+1})$ 包含于 X 中。由于 $C_1 \in \alpha$，我们可以用 $X \cap (C_1 \times R)$ 替换 X。由于在 α 处取纤维与并集可交换，我们可以假设 X 是 C_1 上的图或带。若 X 是带 $(\zeta_{1,j}, \zeta_{1,j+1})$，则 $f(\alpha) \in X_\alpha$ 当且仅当存在 $B \in \alpha$，使得对于所有 $t \in B$，$\zeta_{1,j}(t) < f(t) < \zeta_{1,j+1}(t)$，即 $f(\alpha) \in (\zeta_{1,j}(\alpha)\ \zeta_{1,j+1}(\alpha))$。□

请注意，证明中有两个关键点：在证明投影下的稳定性（第 4 点）时使用可定义选择，以及使用 cdcd 证明 o-极小性（第 5 点）。其余部分都相当形式化。

定理 5.8 的证明表明，在 α 处取纤维与布尔运算和投影可交换。我们将把这一观察形式化，以便获得一个有用的工具，将纤维 X_α 的性质转化为纤维 X_t 的性质，其中所有属于 α中的某个可定义集的 t 均如此。首先引入一些记号。我们考虑公式的可定义族 $\Phi_t(x)$，其中 t 在 R^m中取值，这些族按照以下规则构造：

1. 若 $X \subset R^m \times R^n$ 是可定义的，则 $x \in X_t$ 是一个公式的可定义族。2. 多项式方程 $P(x) = 0$ 或不等式 $P(x) > 0$ （其系数属于 R ）是一个可定义的（常值）公式族。3. 若 $\Phi_t(x)$和 $\Psi_t(x)$是公式的可定义族，则 $\Phi_t(x) * \Psi_t(x)$（其中 $*$ 是“且”、“或”、 $\Rightarrow$、 $\Leftrightarrow$之一）以及否定“非 $\Phi_t(x)$”都是公式的可定义族。4. 若 $\Phi_t(x, y)$是公式的可定义族（其中 y 在 R^p中取值），且$Y \subset R^m \times R^p$ 是可定义的，则存在量化 $\exists y \in Y_t\ \Phi_t(x, y)$和全称量化 $\forall y \in Y_t\ \Phi_t(x, y)$都是公式的可定义族。

给定一个可定义公式族 $\Phi_t(x)$和 $\alpha \in R^m$，我们按以下方式定义纤维公式 $\Phi_\alpha(x)$：

1. 如果 $\Phi_t(x)$是 $x \in X_t$，那么 $\Phi_\alpha(x)$是 $x \in X_\alpha$。2. 如果 $\Phi_t(x)$是常值族 $P(x) = 0$ 或 $P(x) > 0$，那么 $\Phi_\alpha(x)$是 $P(x) = 0$或 $P(x) > 0$。3. 如果 $\Phi_t(x)$是 $\Theta_t(x) * \Psi_t(x)$，或“not $\Theta_t(x)$”，那么 $\Phi_\alpha(x)$分别是 $\Theta_\alpha(x) * \Psi_\alpha(x)$或“not$\Theta_\alpha(x)$”。4. 如果 $\Phi_t(x)$是 $\exists y \in Y_t\ \Psi_t(x, y)$或 $\forall y \in Y_t\ \Psi_t(x, y)$，那么 $\Phi_\alpha(x)$分别是 $\exists y \in Y_\alpha\ \Psi_\alpha(x, y)$或 $\forall y \in Y_\alpha\ \Psi_\alpha(x, y)$。

注意，如果 $\Phi_\alpha(x)$ 是一个带有 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 的纤维公式，那么满足 $\Phi_\alpha(x)$ 的 $x \in \kappa(\alpha)^n$ 的集合在 $\kappa(\alpha)$ 上的 o-极小结构中是可定义的。

我们来看一个例子。对于可定义公式族

$$\forall x \in X_t \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall y \in R^n \quad (\|x - y\| < \varepsilon \Rightarrow y \in X_t)$$

相应的纤维公式为

$$\forall x \in X_\alpha \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall y \in \kappa(\alpha)^n \quad (\|x - y\| < \varepsilon \Rightarrow y \in X_\alpha) .$$

注意，$\|x - y\| < \varepsilon$ 可以表示为一个多项式不等式。

命题 5.9 设 X 是 $R^m \times R^n$ 的一个可定义子集，且 $\Phi_\alpha(x)$ 是可定义公式族 $\Phi_t(x)$ 的纤维公式，其中 $x = (x_1, \ldots, x_n)$。等式

$$X_\alpha = \{x \in \kappa(\alpha)^n \,;\, \Phi_\alpha(x)\}$$

成立，当且仅当存在 $A \in \alpha$，使得等式

$$X_t = \{x \in R^n \,;\, \Phi_t(x)\}$$

对所有 $t \in A$ 都成立。特别地，如果 $n = 0$ （即不存在自由变量），则纤维公式 Φ_α 成立，当且仅当存在 $A \in \alpha$，使得 Φ_t 对所有 $t \in A$ 都成立。

证明。我们按照规则 1-4，对可定义公式族的构造进行归纳。

规则 1：$\Phi_t(x)$ 是 $x \in Y_t$。我们需要证明，$X_\alpha = Y_\alpha$ 成立，当且仅当存在 $A \in \alpha$，使得对于所有 $t \in A$，$X_t = Y_t$ 都成立。“若”部分很容易证明。为证明“唯若”部分，只需考虑 $Y = \emptyset$ 的情形，因为在 α 处取纤维会保留布尔运算。假设所有满足 $X_t = \emptyset$ 的 t 所构成的集合不属于 α。那么，X 在由前 m 个坐标构成的空间 R^m 上的投影属于 α。根据可定义选择，存在一个从该投影到 R^n 的可定义映射 f，其图包含于 X。由此可得 $f(\alpha) \in X_\alpha$，这与 $X_\alpha = \emptyset$ 矛盾。

规则 2。注意，实际上我们可以省略这条规则。事实上，如果 $X_t = \{x \in R^n ;\ P(x) = 0\}$ 对所有 $t \in R^m$ 都成立，那么 $X_\alpha = \{x \in \kappa(\alpha)^n ;\ P(x) = 0\}$，于是问题就归结为规则 1（将 $>$ 替换为 $=$时也相同）。

规则 3。这里我们利用这样一个观察：在 α 处取纤维与布尔运算可交换。

规则 4。这里我们利用这样一个观察：在 α 处取纤维与投影（对于存在量化）可交换。全称量化可归结为否定和存在量化。□

练习 5.10 设 X 和 Y 是 $R^m \times R^n$ 的可定义子集。证明：X_α 在 Y_α 中是闭的，当且仅当存在 $A \in \alpha$，使得对于每个 $t \in A$，X_t 在 Y_t 中是闭的。

5.4 可定义集的扩展

设 α 是 R^m 的一个元素。我们首先将多面体从 R 延拓到 $\kappa(\alpha)$。这将用于证明 Hardt定理 5.22。

设 $a_0, \ldots, a_d$ 是 R^n 中仿射独立的点。记它们在 R^n 中生成的单纯形为 $[a_0, \ldots, a_d]_R$，记它们在 $\kappa(\alpha)^n$ 中生成的单纯形为 $[a_0, \ldots, a_d]_{\kappa(\alpha)}$。若 K 是一个顶点位于 R^n 中的有限单纯复形，则记其在 R^n 中的几何实现为 $|K|_R$，记其在 $\kappa(\alpha)^n$ 中的几何实现为 $|K|_{\kappa(\alpha)}$，即对所有 $[a_0, \ldots, a_d]_R$ in K，相应单纯形 $[a_0, \ldots, a_d]_{\kappa(\alpha)}$ 的并集。若 V_R 是 K 的开单纯形的并集，则定义 $V_{\kappa(\alpha)}$ 为 $\kappa(\alpha)^n$ 中相应开单纯形的并集。

引理 5.11 $|K|_{\kappa(\alpha)} = (R^m \times |K|_R)_\alpha$。 $V_{\kappa(\alpha)} = (R^m \times V_R)_\alpha$。

证明。 由于在 α 处取纤维会保留有限并，只需对顶点为 $a_0, \ldots, a_d$ 的开单纯形 σ 证明该引理。开单纯形σ 是满足公式的 $x \in R^n$ 的集合

$$\exists \lambda_1 \in R \ldots \exists \lambda_d \in R \left(\lambda_1 > 0 \text{ and } \ldots \text{ and } \lambda_d > 0 \text{ and } \sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 1 \text{ and } \sum_{i=1}^{d} \lambda_i a_i = x \right).$$

因此，纤维 $(R^m \times \sigma)_\alpha$ 由公式常值族的纤维公式描述:

$$\exists \lambda_1 \in \kappa(\alpha) \ldots \exists \lambda_d \in \kappa(\alpha) \left(\lambda_1 > 0 \text{和} \ldots \text{和} \quad \lambda_d > 0 \text{和} \sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 1 \text{ and } \sum_{i=1}^{d} \lambda_i a_i = x \right).$$

这个纤维公式描述了 $\sigma_{\kappa(\alpha)}$。 □

多面体的记号也将用于常值可定义族的纤维。设 S 是 R^n 的一个可定义子集。那么 $R^m \times S$ 可以视为一个常值可定义族。我们用 $S_{\kappa(\alpha)} \subset \kappa(\alpha)^n$ 表示纤维 $(R^m \times S)_\alpha$，并称 $S_{\kappa(\alpha)}$ 为 S 在 $\kappa(\alpha)$ 上的延拓。

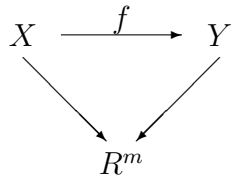
练习 5.12 证明 $S_{\kappa(\alpha)} \cap R^n = S$。

从模型论的角度来看， $\kappa(\alpha)$上的o-极小结构是 R上的o-极小结构的扩张。o-极小的任一阶公式

R 上的结构可在 $\kappa(\alpha)$上的o-极小结构中解释，即将该公式中出现的可定义集扩张到 $\kappa(\alpha)$。命题 5.9 表明， $\kappa(\alpha)$是 R的初等扩张：每一个不含自由变量的公式在 R 上成立，当且仅当它在 $\kappa(\alpha)$上成立。

5.5 可定义映射族

设 X 和 Y 分别是 $R^m \times R^n$ 和 $R^m \times R^p$ 的可定义子集。我们将它们视为由 R^m 参数化的可定义族。一个从 X 到 Y 的可定义映射族是指可定义映射 $f: X \to Y$，使得下图交换:



其中，映射到 R^m 的映射是对前 m 个坐标的投影。由此得到由 $t \in R^m$ 参数化的映射族 f_t: $X_t \to Y_t$，其定义为 $f(t,\ x) = (t,\ f_t(x))$。

给定 $\alpha \in R^m$，我们将定义 $f_\alpha: X_\alpha \to Y_\alpha$，它将是 $\kappa(\alpha)$ 上的 o-极小结构的一个可定义映射。令

$$\Gamma = \{(t,x,y) \in R^m \times R^n \times R^p \ :\ (t,x) \in X \ \text{ and } \ f(t,x) = (t,y)\}\ .$$

集合 Γ 是由 R^m 参数化的可定义族，并且对每个 $t \in R^m$， Γ_t 都是 f_t: $X_t \to Y_t$ 的图。因此，公式的可定义族中的公式

$$(*)_t \qquad \begin{cases} \forall x \in R^n\ ((\exists y \in R^p\ (x,y) \in \Gamma_t) \Leftrightarrow x \in X_t) \\ \forall x \in R^n\ \forall y \in R^p\ ((x,y) \in \Gamma_t \Rightarrow y \in Y_t) \\ \forall x \in R^n\ \forall y \in R^p\ \forall z \in R^p \Big(((x,y) \in \Gamma_t \ \text{ and } \ (x,z) \in \Gamma_t) \Rightarrow y = z\Big) \end{cases}$$

对每个 $t \in R^m$ 都成立。根据命题 5.9， α 的纤维公式也

$$(*)_\alpha \qquad \begin{cases} \forall x \in \kappa(\alpha)^n\ ((\exists y \in \kappa(\alpha)^p\ (x,y) \in \Gamma_\alpha) \Leftrightarrow x \in X_\alpha) \\ \forall x \in \kappa(\alpha)^n\ \forall y \in \kappa(\alpha)^p\ ((x,y) \in \Gamma_\alpha \Rightarrow y \in Y_\alpha) \\ \forall x \in \kappa(\alpha)^n\ \forall y \in \kappa(\alpha)^p\ \forall z \in \kappa(\alpha)^p \Big(((x,y) \in \Gamma_\alpha \ \text{ and } \ (x,z) \in \Gamma_\alpha) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow y = z\Big) \end{cases}$$

成立。这些纤维公式表达了以下事实： Γ_α 是映射 $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ 的图。由于 Γ_α 是可定义的，对于 $\kappa(\alpha)$ 上的 o-极小结构，映射 f_α 是可定义的。

下一个命题说明，所有可定义映射都可以通过这种方式得到。我们引入一个记号。若 X 是 $R^m \times R^n$ 的可定义子集，且 A 是 R^m 的可定义子集，则我们用 X_A 表示 $X \cap (A \times R^n)$ 在 $R^m \times R^n$ 中的可定义子集。换言之， X_A 是限制在 A 上的可定义族 X。

命题 5.13 设 $\varphi : X_\alpha \to Y_\alpha$ 是关于 $\kappa(\alpha)$ 上的 *o*-极小结构的可定义映射。则存在 $A \in \alpha$ 以及一个可定义映射族$f : X_A \to Y_A$，使得 $\varphi = f_\alpha$。

证明。令 Γ_α 为 φ 的图。则上述纤维公式 $(*)_\alpha$ 成立。根据命题 5.9，存在 $A \in \alpha$，使得对于每个 $t \in A$，公式 $(*)_t$ 均成立。这意味着，对于每个 $t \in A$， Γ_t 是一个映射$f_t : X_t \to Y_t$的图。由此我们得到一个可定义映射族 $f : X_A \to Y_A$，其满足 $f_\alpha = \varphi$。 □

习题 5.14 证明 $f_\alpha = g_\alpha$ 当且仅当存在 $A \in \alpha$ 使得$f_t = g_t$ 对每个 $t \in A$都成立。

习题 5.15 设 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$ 是由 R^m参数化的可定义映射族$\widetilde{\ }$，其中 X' 是 X的可定义子集。对于 $\alpha \in R^m$，证明 $(g \circ f)_\alpha = g_\alpha \circ f_\alpha$。 证明 $f(X')_\alpha = f_\alpha(X'_\alpha)$。

习题 5.16 证明 f_α 连续，当且仅当存在 $A \in \alpha$ 使得对于每个 $t \in A$， f_t 连续。（使用命题 5.9。）

5.6 纤维性质与整体性质

我们已经看到了几个例子，表明在 α 处的纤维具有某种性质，当且仅当存在 $A \in \alpha$ 使得对于所有 $t \in A$，在 t 处的纤维都具有相同的性质。本节关注对整个族整体成立的拓扑性质。一个整体性质的例子是“X 是闭的”，这比逐纤维性质“每个纤维 X_t 都是闭的”更强。

主要工具如下。

引理 5.17 令 X 为 $R^m \times R^n$ 的一个可定义子集。存在一个将 R^m 划分为可定义集 C_1、 ..... 、 C_k 的划分，使得对于 $i = 1$、 ..... 、 k，以及任意 $t \in C_i$，都有 闭包(X_t) =(闭包 $X_{C_i})_t$（回忆一下，X_{C_i} 表示 $X \cap (C_i \times R^n)$）。

证明。我们对 m 使用归纳法。因此，假设对于所有 d、 $0 \leq d < m$，该引理均已证明。令 G 为满足 clos$(X_t) = (\text{clos}\, X)_t$ 的那些 $t \in R^m$ 所构成的可定义子集。引理 3.21 表明， R^m 中 G 的补集的维数为 $< m$。选取一个适配于 G 的 R^m 的 cdcd。该 cdcd 的每个开胞腔 C 都包含于 G 中，并且对于每个 $t \in C$ ，都有 clos$(X_t) = (\text{clos}\ X)_t = (\text{clos}\ X_C)_t$。现在令 D 为一个维数为 $d < m$ 的胞腔。存在一个可定义同胚 $\theta_D : D \to R^d$。我们将归纳假设应用于由 $(u, x) \in R^d \times R^n$ 构成的可定义族，其中 $(\theta_D^{-1}(u)\ x) \in X$。由此可知，我们可以将 D 划分为有限个可定义子集 D_j，使得对于每个 $t \in D_j$，都有 clos$(X_t) = (\text{clos}\ X_{D_j})_t$。引理得证。□

命题 5.18 设 $X \subset Y$ 是 $R^m \times R^n$的可定义子集。设 $\alpha \in R^m$。纤维 X_α 在 Y_α 中是闭（分别为开）的，当且仅当存在 $A \in \alpha$ 使得 X_A 在 Y_A中是闭（分别为开）的。

证明。只需证明闭的情形。开集的情形可通过取 X 在 Y中的相对补集得出。

如果 X_A 在 Y_A中是闭的，那么对每个 $t \in A$， X_t 在 Y_t 中都是闭的。因此（参见练习 5.10）， X_α 在 Y_α中是闭的。

反过来，假设 X_α 在 Y_α中是闭的。我们利用引理 5.17，将 R^m 划分为有限个可定义集 C_1、.....、C_k，使得对每个 $t \in C_i$都有 clos$(X_t) = (\text{clos}\, X_{C_i})_t$。由于 α 是可定义集的超滤子，它恰好包含其中一个 C_i，记作 C_1。由X_α 在 Y_α 中是闭的这一假设可知，存在 $A \in \alpha$ ，使得对每个 $t \in A$， X_t 在Y_t 中都是闭的（参见练习 5.10）。以 $A \cap C_1$替换 A 后，可假设 $A \subset C_1$。于是对每个 $t \in A$都有 clos$(X_t) = (\text{clos}\, X_A)_t$。由此可得，对每个 $t \in A$ 都有 $(\text{clos}\, X_A)_t \cap Y_t = \text{clos}(X_t) \cap Y_t = X_t$（第二个等式用到了 X_t 在 Y_t中是闭的这一事实）。这意味着 $(\text{clos}\, X_A) \cap Y_A = X_A$，即 X_A 在 Y_A中是闭的。□

定理 5.19 设 $f : X \to Y$ 是由R^m参数化的可定义映射族，且 $\alpha \in R^m$。那么，当且仅当存在 $A \in \alpha$ 使得 $f_A : X_A \to Y_A$ 连续时， f_α 连续。

证明。设 Y 是 $R^m \times R^p$的可定义子集。我们可以假设，对所有 t， Y_t 都包含于有界盒 $(-1,1)^p$ 中（那么 Y_α 就包含于实数域中的有界盒 $(-1,1)^p_{\kappa(\alpha)}$ $\kappa(\alpha)^p$）。理由如下。令 $\mu : R^p \to (-1,1)^p$ 为如下定义的半代数同胚

$$\mu(y_1, \ldots, y_p) = \left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}, \ldots, \frac{y_p}{\sqrt{1+y_p^2}} \right) .$$

我们可以用复合替换 f

$$g = (\mathrm{Id}_{R^m} \times \mu) \circ f : X \to R^m \times (-1,1)^p \ .$$

注意， g_α是 $\mu_{\kappa(\alpha)} \circ f_\alpha$，其中$\mu_{\kappa(\alpha)}$： $\kappa(\alpha)^p \to (-1,1)^{p}_{\kappa(\alpha)}$是由与 μ相同的公式定义的半代数同胚。 g_A 的连续性等价于 f_A的连续性，而 g_α 的连续性等价于 f_α的连续性。

现在设

$$\Gamma = \{(t,x,y) \in X \times (-1,1)^p \ ; \ f(t,x) = (t,y)\} \ .$$

映射 f_A： $X_A \to A \times (-1,1)^p$ 连续当且仅当 Γ_A 在 $X_A \times R^p$中是闭的。映射 f_α： $X_\alpha \to (-1,1)^{p}_{\kappa(\alpha)}$ 连续当且仅当 Γ_α 在 $X_\alpha \times \kappa(\alpha)^p$中是闭的。因此，该定理由命题 5.18 推出。

□

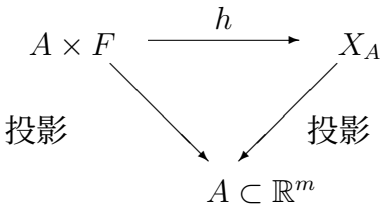
练习 5.20 假设 φ ： $X_\alpha \to Y_\alpha$ 是可定义同胚。证明存在 $A \in \alpha$ 以及可定义映射族 f： $X_A \to Y_A$，使得 f 是同胚且 $f_\alpha = \varphi$。

练习 5.21 设 f 是一个以 R^m 为参数的可定义映射族。假设对于每个 $t \in R^m$， f_t 都是连续的。证明：存在一个将 R^m 划分为可定义子集 C_1、.....、 C_k 的有限划分，使得对于 $i = 1$、.....、 k， f_{C_i}是连续的。提示：可以使用引理 5.17 和定理 5.19 的证明。另一种方法如下： $\widetilde{\ }$1）证明：对于每个 $\alpha \in R^m$，存在 $C(\alpha) \in \alpha$，使得 $f_{C(\alpha)}$ 是连续的。 $\widetilde{\ }$2）利用 R^m 的紧致性证明， R^m 是有限并集$R^m = C(\alpha_1) \cup \ldots \cup C(\alpha_k)$。修改 $C(\alpha_1)$、.....、 $C(\alpha_k)$，以得到 R^m 的一个划分。

5.7 平凡化定理

设 $X \subset R^m \times R^n$ 是一个可定义族。设 A 是 R^m 的一个可定义子集。若存在一个可定义集 F 和一个可定义同胚 h： $A \times F \to X_A$，使得下列图表交换，则称族 X 在 A 上是 可定义平凡的

图表交换:



我们称 h为 X 在 A上的可定义平凡化。现在设 Y是 X的一个可定义子集。如果存在 F的一个可定义子集 G，使得 $h(A\times G) = Y_A$，则称平凡化 h 与 Y 相容。注意，如果 h与 Y相容，则其在 Y_A 上的限制是 Y 在 A上的平凡化。

定理 5.22（可定义族的哈特定理）
设 $X \subset R^m \times R^n$ 是一个可定义族。设 Y_1，...， Y_ℓ 是X的可定义子集。存在一个将 R^m 划分为可定义集 C_1，...， C_k 的有限划分，使得 X 在每个 C_i 上都是可定义平凡的，而且，每个 C_i 上的平凡化都与 Y_1，...， Y_ℓ相容。

该定理由 R. Hardt 在半代数情形下证明。证明。我们可以假设 X 是闭的，并且包含于 $R^m \times [-1,1]^n$中。理由如下。设 μ： $R^n \to (-1,\ 1)^n$ 是由下式定义的半代数同胚

$$\mu(x_1,\ldots,x_n) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}},\ldots,\frac{x_n}{\sqrt{1+x_n^2}}\right) .$$

首先，我们可以将 X （以及每个 Y_j）替换为其在 $\mathrm{Id}_{R^m} \times \mu$ 下的像，该像包含于 $R^m \times (-1,\ 1)^n$ 中。然后，我们可以将 X 替换为 $\mathrm{clos}\, X$，它是闭的且包含于 $R^m \times [-1,1]^n$ 中，并将 X 添加到可定义子集 Y_1，...， Y_ℓ 的列表中。与 X 相容的 $\mathrm{clos}(X)$ 在 C_i 上的可定义平凡化，将诱导出 X 在 C_i 上的可定义平凡化。

设 α 是 R^m 的一个元素。上述假设意味着 X_α 在 $\kappa(\alpha)^n$ 中有界且闭。因此，根据三角剖分定理 4.4，存在一个有限单纯复形 K，其顶点在 $\mathbb{Q}^n \subset R^n$ 中，并存在一个可定义同胚 Φ: $|K|_{\kappa(\alpha)} \to X_\alpha$，使得每个 $(Y_j)_\alpha$ 都是 Φ 对 K 的开单纯形之并 $(V_j)_{\kappa(\alpha)}$ 的像。根据引理 5.11，我们有 $|K|_{\kappa(\alpha)} = (R^m \times |K|_R)_\alpha$。因此（参见练习 5.20），存在 $C(\alpha) \in \alpha$ 以及一个可定义映射族 $h: C(\alpha) \times |K|_R \to X_A$，使得 h 是一个同胚，并且 $h_\alpha = \Phi$。此外，由于

$$h_\alpha((R^m \times (V_j)_R)_\alpha) = h_\alpha((V_j)_{\kappa(\alpha)}) = (Y_j)_\alpha ,$$

我们可以假设，将 $C(\alpha)$ 替换为仍包含于 α 中的一个更小的可定义集后，$h(C(\alpha) \times (V_j)_R) = (Y_j)^{C(\alpha)}$。我们证明了以下事实：对每个 $\widetilde{\alpha} \in R^m$，都存在 $C(\alpha) \in \alpha$，以及 X 在 $C(\alpha)$ 上的一个可定义平凡化，且该平凡化与每个 Y_j 相容。

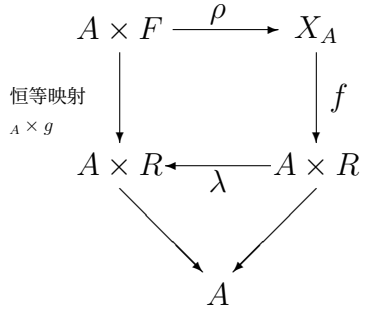
$\widetilde{\alpha}$ 开且闭子集 $C(\alpha)$覆盖了 R^m。由于 R^m 是紧的，我们可以从这个覆盖中抽取一个有限子覆盖。因此，存在 α_1、.....、 α_k，使得 $R^m = C(\alpha_1) \cup \ldots \cup C(\alpha_k)$。将 $C(\alpha_i)$替换为 $C_i = C(\alpha_i) \setminus \cup_{j<i} C(\alpha_j)$后，我们得到 R^m 的一个划分，它由可定义集 C_1、.....、C_k组成；并且对每个 i，都有一个 X 在 C_i 上的可定义平凡化，该平凡化与每个 Y_j相容。□

练习 5.23 利用Hardt定理，给出可定义集的局部锥结构的另一种证明（参见4.10）。提示：将可定义族平凡化

$$A_\varepsilon = \{x \in A\,;\ \|x - a\| = \varepsilon\}\,.$$

对于取值于 R的函数可定义族，我们也有类似的平凡化定理。首先，我们必须定义函数族的平凡化这一概念。

设 $f\colon\ X \to R^m \times R$ 是由 R^m 参数化、且 A 为 R^m 的可定义子集的函数族。若存在一个可定义函数 $g\colon\ F \to R$ 以及可定义同胚 $\rho\colon\ A \times F \to X_A$ 和 $\lambda\colon\ A \times R \to A \times R$，使得下图交换，则称 f 在 A 上可定义平凡，



其中到 A 的映射是到第一因子的投影。二元组（ρ，λ）称为 f 在 A 上的可定义平凡化。若 Y 是 X 的可定义子集，则当存在 F 的可定义子集 G 使得 $\rho(A \times G) = Y_A$ 时，我们称平凡化（ρ，λ）与 Y 兼容。注意，在此情形下，（ρ，λ）诱导出 $f|_Y$ 在 A 上的可定义平凡化。

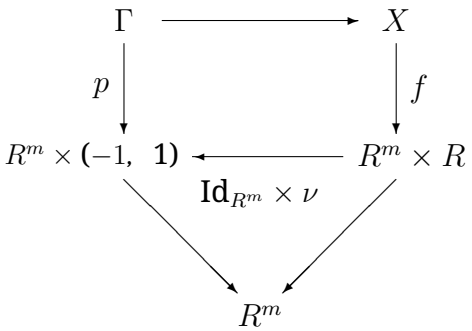
定理 5.24（函数族的可定义平凡性）
令 $f\colon\ X \to R^m \times R$ 为以 R为参数的可定义函数族 ^{m}.

令 Y_1、……、Y_ℓ 为 X的可定义子集。存在一个将 R^m划分为可定义集 C_1、……、C_k 的有限划分，使得 f 在每个 C_i 上都是可定义平凡的；此外，在每个 C_i 上的平凡化都与 Y_1、……、Y_ℓ相容。

证明。 我们可以假设 X 在 $R^m \times [-1,1] \times [-1,1]^n$ 中是闭的，并且f 是投影 p 在前 $m+1$ 个坐标上的限制，作用于 X。理由如下。令 $\nu\colon R \to (-1,1)$为由 $\nu(y) = y/\sqrt{1+y^2}$定义的半代数同胚，并令 $\mu\colon R^n \to (-1,1)^n$ 为由 $\mu(x_1,\ldots,x_n) = (\nu(x_1)\ldots,\nu(x_n))$定义的半代数同胚。首先，我们通过可定义映射将 X替换为其同胚像 $\Gamma \subset R^m \times (-1,1) \times (-1,1)^n$

$$(t,x) \longmapsto (t, \nu(f_t(x)), \mu(x)) \ .$$

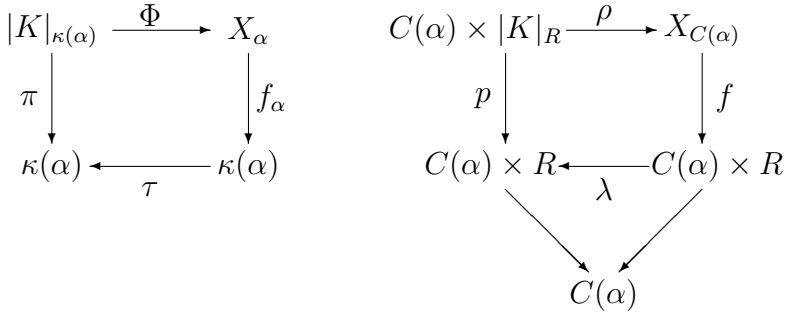
我们也将 Y_j 替换为它们的像 $\Delta_j \subset \Gamma$。由此得到以下交换图，其中水平映射是可定义同胚，而映射到 R^m 的是在前 m 个坐标上的投影。



现在我们将 Γ 替换为 $\mathrm{clos}(\Gamma) \subset R^m \times [-1,1] \times [-1,1]^n$，并将 Γ 加入可定义子集 Δ_1、……、Δ_ℓ的列表中。与 Γ，Δ_1，……，Δ_ℓ 相容的 $p|_{\mathrm{clos}(\Gamma)}$ 的可定义平凡化，将导出与Δ_1，……，Δ_ℓ相容的 $p|_\Gamma$ 的可定义平凡化。通过与上图中水平箭头所表示的可定义同胚复合，我们得到与 Y_1，……，Y_ℓ相容的 f 的可定义平凡化。

令 $\alpha \in R^m$。上述假设意味着，X_α 在 $\kappa(\alpha) \times \kappa(\alpha)^n$ 中是闭且有界的，并且 f_α 是投影 π 在 X_α 上的限制，该投影取第一坐标。根据命题 4.8，存在一个顶点位于 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^n$ 中的有限单纯复形 K，以及可定义同胚 $\Phi\colon |K|_{\kappa(\alpha)} \to X_\alpha$ 和 $\tau\colon \kappa(\alpha) \to \kappa(\alpha)$，使得下方左侧图交换，并且

每个 Y_j 都是通过 Φ对开单纯形的像的并集。



我们得到 $C(\alpha) \in \alpha$ 以及可定义映射族 $\rho: C(\alpha) \times |K|_R \to X_{C(\alpha)}$和 $\lambda: C(\alpha) \times R \to C(\alpha) \times R$，它们是同胚，并且满足$\rho_\alpha = \Phi$和 $\lambda_\alpha = \tau$。在必要时缩小 $C(\alpha)$后，(ρ, λ)是 f 在 $C(\alpha)$上的可定义平凡化，并且与 Y_j相容。我们仿照 Hardt定理的证明得出结论。□

5.8 集合与函数的拓扑类型

两个嵌入 $Y \subset X$ 和 $Y' \subset X'$（其中所有集合均为可定义的）称为具有相同的（可定义）拓扑类型，如果存在一个（可定义）同胚 $h: X \to X'$，使得 $h(Y) = Y'$。两个可定义映射 $f: X \to Y$和 $f': X' \to Y'$称为具有相同的（可定义）拓扑类型，如果存在（可定义）同胚 $\rho: X \to X'$和 $\lambda: Y' \to Y$，使得$\lambda \circ f' \circ \rho = f$。

假设可定义族 $X \subset R^m \times R^n$ 在 $A \subset R^m$上可定义平凡，且该平凡化与 $Y \subset X$ 相容。这意味着存在一个可定义同胚 $h: A \times F \to X_A$，其形式为 $h(t, x) = (t, h_t(x))$，以及一个 F 的可定义子集 G，使得 $h(A \times G) = Y_A$。现在令t 和 t' 为 A中的两个点。那么 $h_{t'} \circ h_t^{-1}$是从 X_t 到X'_t的可定义同胚，而 Y_t 在此同胚下的像为 $Y_{t'}$。因此，对于 $t \in A$，所有嵌入 $Y_t \subset X_t$ 都具有相同的拓扑类型。由此讨论和 Hardt定理可得以下结论。

推论 5.25 设 $X \subset R^m \times R^n$ 是一个可定义族，X 的一个可定义子集为 Y。对于 $t \in R^m$，嵌入 $Y_t \subset X_t$ 只有有限多个可定义拓扑类型。

我们给出一个应用示例。

定理 5.26 给定 n 和 d 为正整数，嵌入 $V \subset R^n$ 只有有限多个拓扑类型，其中 V 是由次数至多为 d 的方程定义的代数子集。

证明。若 V由次数至多为 d的方程 $P_1 = \ldots = P_\ell = 0$定义，那么它也可由单个次数至多为$2d$的方程 $P_1^2 + \cdots + P_\ell^2 = 0$定义。因此，只需证明嵌入 $V \subset R^n$ 只有有限种拓扑类型，其中 V由一个次数至多为 $2d$的方程定义。若 $i = (i_1, \ldots\ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$，则设 $|i| = i_1 + \cdots + i_n$和 $x^i = x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$。令 I_{2d}为满足 $|i| \leq 2d$的 $i \in \mathbb{N}^n$ 有限集。我们用 $a = (a_i)_{i \in I_{2d}}$ 表示仿射空间 $R^{I_{2d}}$中的一个元素。令

$$Y = \{(a, x) \in R^{I_{2d}} \times R^n \,;\, \sum_{i \in I_{2d}} a_i x^i = 0\} \subset R^{I_{2d}} \times R^n \,.$$

对于 $a \in R^{I_{2d}}$， Y_a 是由一个次数为$\leq 2d$的方程定义的 R^n 代数子集，这样便得到了所有这类代数子集。因此，由推论 5.25 应用于由 $R^{I_{2d}}$参数化的半代数族 $Y \subset R^{I_{2d}} \times R^n$，即可得到该定理。□

现在我们转向函数族的情形。假设由 $t \in R^m$ 参数化的可定义函数族 f_t：$X_t \to R$ 在 A 上是平凡的。这意味着存在如下形式的可定义同胚 ρ：$A \times F \to X_A$ $\rho(t, x) = (t, \rho_t(x))$，以及如下形式的可定义同胚 λ：$A \times R \to A \times R$ $\lambda(t, y) = (t, \lambda_t(y))$，还有一个可定义函数 g：$F \to R$，使得 $\lambda \circ f \circ \rho = \mathrm{Id}_A \times g$。设 t 和 t' 是 A 中的两个点。那么 $\rho_{t'} \circ \rho_t^{-1}$：$X_t \to X_{t'}$ 和 $\lambda_t^{-1} \circ \lambda_{t'}$：$R \to R$ 是满足以下条件的可定义同胚

$$\lambda_t^{-1} \circ \lambda_{t'} \circ f_{t'} \circ \rho_{t'} \circ \rho_t^{-1} = f_t \,.$$

这表明，对于 $t \in A$，所有 f_t 都具有相同的可定义拓扑类型。由上述讨论和定理 5.24，我们得到以下结论。

推论 5.27 在由 $t \in R^m$参数化的函数可定义族 f_t： $X_t \to R$ 中，只有有限多个可定义拓扑类型。

关于可定义映射族的类似陈述并不成立。例如，存在一个半代数映射族 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，其中有无穷多个拓扑类型（参见 [CR]）。

我们给出一个由指数函数生成的 $\mathbb{R}_{\exp}$ 扩张 $\mathbb{R}$ 结构的应用示例。这意味着

$\mathbb{R}_{\exp}$ 是一个结构 $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $S_n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$，且 S_2 包含指数函数的图；对于具有这些性质的每个结构 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$，$S_n \subset T_n$。$\mathbb{R}_{\exp}$ 是 o-极小的这一事实（即 S_1 由点和区间的有限并组成）是 A. Wilkie 的一项基本成果 [Wi]。在 $\mathbb{R}_{\exp}$ 中，函数 $(x,\ \lambda) \mapsto x^\lambda$ 在 $\{x>0\}\times\mathbb{R}$ 上是可定义的，因为

$$y = x^\lambda \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{R}(x = \exp(z) \text{ and } y = \exp(\lambda z)) .$$

定理 5.28 给定 n 和 k 两个正整数，对于次数不受限制、至多含有 k 个单项式的多项式 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 所构成的族，其中只有有限多个拓扑类型。

证明。我们将幂函数 $(x,\lambda) \mapsto x^\lambda$ 扩展为两个可定义函数M_ϵ：$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，其中 $\epsilon = 0,1$，定义如下：

$$M_\epsilon(x,\lambda) = \begin{cases} x^\lambda & \text{if } x>0 , \\ 0 & \text{if } x=0 \text{ and } \lambda \neq 0 , \\ 1 & \text{if } x=0 \text{ and } \lambda = 0 , \\ (-1)^\epsilon |x|^\lambda & \text{if } x<0 . \end{cases}$$

现在考虑所有函数 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 所构成的族

$$(x_1,\ldots,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{k} \left(a_i \prod_{j=1}^{n} M_{\epsilon_{i,j}}(x_j,\lambda_{i,j}) \right) .$$

这是一个由 $((a_i),(\lambda_{i,j}),(\epsilon_{i,j})) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{kn} \times \{0,1\}^{kn}$ 参数化的可定义函数族，它是 $\mathbb{R}^{k+2kn}$ 的一个可定义子集。在这个族中，我们有所有至多含有 k 个单项式的 n 元多项式。因此，定理由推论 5.27 得证。□

请注意，次数有界的多项式 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 只有有限多个拓扑类型这一结论（Fukuda [Fu] 通过完全不同的方法得到）可通过在半代数结构中进行研究得出（将所有次数为 $\leq d$ 的多项式 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 放入一个半代数族并不困难）。定理 5.28 更强。其陈述并未提及 o-极小结构，但其证明实质性地运用了这套理论。

第6章

光滑性

本章中，为简便起见，我们假设 $R = \mathbb{R}$，即我们考虑实数域 $\mathbb{R}$ 的一个 *o*-极小扩张。本章的结果对于扩张任意实闭域的 o-极小结构仍然成立。为了证明这些结果，首先必须为可定义映射建立分析学的基本事实（例如局部反演定理）。这将在 [vD] 中完成。

6.1 一元可定义函数的可导性

若 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个可定义子集，我们称函数 $g\colon A \to \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ 为可定义的，如果 $-\infty$ 和 $+\infty$ 的逆像是 A 的可定义子集，且 g 在 $g^{-1}(\mathbb{R})$ 上的限制是一个取值于 $\mathbb{R}$ 的可定义函数。

引理 6.1 设 $f: I \to \mathbb{R}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 的开区间 I 上的可定义连续函数。则 f 在 I 中的每一点 x 处都有左导数和右导数，分别记为 $f'_\ell(x)$ 和 $f'_r(x)$。函数 f'_ℓ 和 f'_r 从 I 到 $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ 是可定义的。

证明。 将单调性定理应用于函数 $y \mapsto (f(y) - f(x))/(y - x)$，以证明当 y 从左侧或右侧趋近于x 时，它在 $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ 中存在极限（参见练习 2.3）。左导数和右导数的可定义性留作练习。□

引理 6.2 设 $f: I \to \mathbb{R}$ 是实数域 $\mathbb{R}$的开区间 I上的可定义连续函数。如果 $f'_\ell > 0$（分别为 $f'_r > 0$）在 I上，则 f在 I上严格递增。

证明。将单调性定理应用于函数 f，再结合以下事实：I 不存在使 f 为常数或 f 严格递减的子区间（否则，在这样的子区间上将有 $f'_\ell \le 0$ 和 $f'_r \le 0$）。□

请注意，无需假设 f 是可定义的，也可以证明前面的引理。

练习 6.3 设 f 是一个函数，在 I 的每一点都具有正的（或 $+\infty$）左导数。取 $a \in I$。证明

$$\sup\{x \in I\,;\ f \ge f(a) \text{ on } [a,x]\}$$

是 I 的右端点（如果 I 在上方无界，则为 $+\infty$）。推导出 f 在 I 上非递减，从而 f 严格递增。

定理 6.4 设 $f:\ I \to \mathbb{R}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 的开区间 I 上的可定义连续函数。那么，对于 I 中除有限多个点以外的所有点，都有 $f'_\ell(x) = f'_r(x) \in \mathbb{R}$。因此，$f$ 在 I 的一个有限子集之外处处可导。

证明。首先证明，I 不存在这样的子区间，在其上 $f'_\ell = +\infty$，或 $f'_\ell = -\infty$，或 $f'_r = +\infty$，或 $f'_r = -\infty$。例如，假设 $f'_\ell = +\infty$ 在 I 的一个子区间 J 上。取 $a < b$，均属于 J，并设

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,x \qquad \text{for } x \in J\,.$$

我们在 J 上有 $g'_\ell = +\infty$。根据引理 6.2，g 在 J 上严格递增。由此可得 $g(b) > g(a)$，这显然不可能。我们可以用类似的方法证明其他情形都会导致矛盾。

现在假设存在 I 的一个子区间 J，在该区间上，f'_ℓ 和 f'_r 的取值分别属于 $\mathbb{R}$ 和 $f'_\ell < f'_r$。将 J 换成一个更小的子区间后，我们可以假设 f'_ℓ 和 f'_r 连续。再取一个更小的子区间，我们可以假设存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $f'_\ell < c < f'_r$。引理 6.2 表明，$x \mapsto f(x) - cx$ 在这个子区间上同时严格递增又严格递减，这是不可能的。我们可以用类似的方法证明，不存在一个子区间使得 f'_ℓ 和 f'_r 的取值分别属于 $\mathbb{R}$ 和 $f'_\ell > f'_r$。

f'_ℓ和f'_r的可定义性，加上刚刚证明的事实，推出了定理的结论。□

推论 6.5 令 $f:\ I \to \mathbb{R}$ 为可定义函数。对于所有 $k \in \mathbb{N}$，存在 I的有限子集 $M(k)$，使得 f在 $I \setminus M(k)$上属于 $\mathcal{C}^k$类。

证明。利用定理 6.4、导数的可定义性以及分段连续性，对 k 作归纳。□

6.2 $\mathcal{C}^k$ 细胞分解

$\mathbb{R}^n$ 上的 $\mathcal{C}^k$ 柱状可定义细胞分解，是满足额外光滑性条件的 cdcd；这些条件尤其意味着每个胞腔都是 $\mathbb{R}^n$的 $\mathcal{C}^k$子流形。

- 的 $\mathcal{C}^k$ cdcd是 $\mathbb{R}$的任意cdcd，即 $\mathbb{R}$ 的有限细分（即 $\mathbb{R}$的有限细分）。

  若 $n > 1$，则 $\mathbb{R}^n$ 的 $\mathcal{C}^k$ cdcd由 $\mathcal{C}^k$ 的cdcd给出，并且对 $\mathbb{R}^{n-1}$中的每个胞腔D，都有 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的 $\mathcal{C}^k$类可定义函数

  $$\zeta_{D,1} < \ldots < \zeta_{D,\ell(D)} : D \to \mathbb{R} .$$

  $\mathbb{R}^n$ 的胞腔当然是$\zeta_{D,\ i}$ 的图，以及由这些图界定的带。

由归纳法描述可知，a $\mathcal{C}^k$ cdcd的胞腔是 $\mathbb{R}^n$的$\mathcal{C}^k$ 子流形。此外，对于每个胞腔 C，存在一个可定义的 $\mathcal{C}^k$微分同胚 θ_C： $C \to \mathbb{R}^{\dim C}$。微分同胚 θ_C可以对 n进行归纳定义，所用公式与命题2.5中的相同。

现在陈述本节的两个定理。

定理6.6（$\mathcal{C}^k$ 细胞分解： $\mathcal{C}^k\mathrm{CDCD}_n$）给定实数域 $\mathbb{R}^n$的有限多个可定义子集 X_1，...，X_ℓ，存在一个适配于 X_1，...，X_ℓ的 $\mathcal{C}^k$ ***cdcd*** $\mathbb{R}^n$ （即每个 X_i 都是胞腔的并集）。

定理6.7（分段 $\mathcal{C}^k$： $\mathrm{P}\mathcal{C}^k_n$）给定一个可定义函数 f： $A \to \mathbb{R}$，其中 A 是实数域 $\mathbb{R}^n$ 的可定义子集，则存在对 A 的有限划分，将其分为可定义的$\mathcal{C}^k$ 子流形 C_1，...，C_ℓ，使得每个限制 $f|_{C_i}$ 都是 $\mathcal{C}^k$。

证明。我们通过对 n归纳，同时证明这两个定理。 $n = 1$ 的情形已经完成： $\mathcal{C}^k\mathrm{CDCD}_1$ 显然成立，而$\mathrm{P}\mathcal{C}^k_1$ 由定理6.4推出。因此我们假设 $n > 1$ 成立，并且这两个定理对更小的维数均已证明。

1) $\mathcal{C}^k\mathrm{CDCD}_n$。从一个适配于 $X_1, \ldots, X_\ell$ 的 $\mathbb{R}^n$ cdcd $\mathbb{R}^n$ 开始。利用 $\mathrm{P}\mathcal{C}^k_{n-1}$，对所诱导的 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的 cdcd 中的胞腔进行划分，使所有 $\zeta_{C,j}$ 都属于 $\mathcal{C}^k$ 类。然后，利用 $\mathcal{C}^k\mathrm{CDCD}_{n-1}$，细化为一个 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的 $\mathcal{C}^k$ cdcd。

2) $\mathrm{P}\mathcal{C}^k_n$。我们使用以下引理。

引理 6.8 设 g： $U \to \mathbb{R}$ 是一个可定义函数，其中 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的可定义开子集。那么存在 U 的一个可定义开子集 V，使得 $f|_V$ 是 $\mathcal{C}^k$，且 $\dim(U \setminus V) < n$。

证明。对 k 进行归纳，只需证明偏导数 $\partial g/\partial x_i$ 存在的集合 G_i 是可定义的，其在 U 中的补集内部为空，并且 $\partial g/\partial x_i$ 在 G_i 上是可定义的。可定义性的验证留给读者，我们证明 $U \setminus G_i$ 的内部为空。否则，就存在一个非空开盒，使得其中 $\partial g/\partial x_i$ 不存在。考虑将 g 限制在一条平行于 x_i 轴且包含于此盒中的直线的某个区间上，便与定理 6.4 矛盾。□

我们回到 P$\mathcal{C}^k_n$ 的证明。我们选择一个适配于 A 的 $\mathbb{R}^n$ cdcd。根据引理 6.8，对于包含在 A 中的 $\mathbb{R}^n$ 的每个开胞腔 C_i，都存在一个可定义开子集 V_i，使得 $f|_{V_i}$ 是 $\mathcal{C}^k$，且 $\dim(C_i \setminus V_i) < n$。根据 $\mathcal{C}^k$CDCD$_n$，我们可以将该 cdcd 细化为一个适配于 A 和 V_i 的 $\mathcal{C}^k$ cdcd $\mathbb{R}^n$。在这个新 cdcd 中包含于 A 的每个开胞腔上，f 是 $\mathcal{C}^k$。设 D 是包含于 A 中的一个维数为 $< n$ 的胞腔。利用从 D 到 $\mathbb{R}^{\dim D}$ 的一个可定义微分同胚 $\mathcal{C}^k$ 以及归纳假设，我们可以将 D 划分为有限个可定义子流形 $\mathcal{C}^k$，在这些子流形上 f 是 $\mathcal{C}^k$。这就完成了两个定理的证明。

□

6.3 可定义流形与管状邻域

设 $M \subset \mathbb{R}^n$ 是一个可定义的 $\mathcal{C}^k$ 子流形（我们总是假设 $1 \leq k < \infty$）。我们引入 M 的切丛和法丛。

切丛 TM 是由满足以下条件的$(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n$ 构成的集合：v 是 M 在 x 处的切向量。我们用 $p : TM \to M$ 表示由 $p(x, v) = x$ 定义的投影，并用T$_x M$ 表示 M 在 x处的切空间，即当 $x \in M$时的T$_x M = p^{-1}(x)$。为了证明 TM是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$的可定义子集，我们可以如下论证。考虑由三元组$(x, y, v)$组成的集合 S，其中 v是一个向量，与连接 M中两个不同点 x 和 y 的直线平行，也就是说

$$S = \{(x, y, \lambda(y - x)) \in M \times M \times \mathbb{R}^n \; ; \; x \neq y \text{ and } \lambda \in \mathbb{R}\} \; .$$

这个集合 S 显然是可定义的。它在 $M \times M \times \mathbb{R}^n$ 中的闭包clos(S)也可定义。我们断言

$$\mathrm{T}M = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n \; ; \; (x, x, v) \in \mathrm{clos}(S)\} \; ,$$

这表明它是可定义的。

练习 6.9 证明这个断言，并同时说明 $\mathrm{T}M$ 是一个 $\mathcal{C}^{k-1}$子流形（这是微分几何中的一个经典事实）。提示：可以假设原点 0 属于 M，并在 0 的某个邻域内进行讨论。还可以假设前 $\dim(M)$ 个坐标$x_1,\ldots,x_d$是 M在 0 的某个邻域内的一张坐标卡的坐标。那么其他坐标就是 M中 0 的某个邻域上的函数 $x_j = \xi_j(x_1,\ldots,x_d)$（对于 $j = d+1,\ldots,n$）。接着证明，$(0,0,v)$ 属于 S 的闭包，当且仅当 v 是以下向量的线性组合

$$e_i + \sum_{j=d+1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{x_i}(0) e_j \qquad \text{for } i = 1,\ldots,d\ ,$$

其中 e_i 表示 $\mathbb{R}^n$的典范基中的第 i个向量。这些向量构成 $\mathrm{T}_0 M$ 的一组基。

习题 6.10 设 $f : M \to \mathbb{R}$ 是一个可定义的 $\mathcal{C}^k$ 函数。证明 $\mathrm{d}f : \mathrm{T}M \to \mathrm{T}\mathbb{R} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 是一个可定义映射（属于 $\mathcal{C}^{k-1}$类）。提示：构造 df 的图，将上面的集合 S 替换为集合

$$(x, y, \lambda(y-x), f(x), \lambda(f(y)-f(x)))\ ,$$

其中 x 和 y 是 M和 $\lambda \in \mathbb{R}$的两个不同点。

法丛 $\mathrm{N}M$ 是由满足 v 与 $\mathrm{T}_x M$正交的 (x,v) 组成的集合。它是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 的一个正规子流形，并且它是可定义的，因为 $\mathrm{T}M$ 是可定义的。

现在我们引入一个可定义的 $\mathcal{C}^{k-1}$ 映射

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathrm{N}M & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x,v) & \longmapsto & (x+v) \end{array}$$

映射 φ 诱导出从法丛的零截面 $M\times\{0\}$到 M的典范微分同胚，并且它在每个点 $(x,0)$ 处都是局部微分同胚。事实上，导数 $\mathrm{d}^{(x,0)}\varphi : \mathrm{T}_x M \times \mathrm{N}_x M \to \mathbb{R}^n$ 是一个同构，它将 (ξ, v) 映射到 $\xi + v$。

本节旨在证明以下结果，即管状邻域定理的可定义版本。

定理 6.11（可定义管状邻域） 设 M 是 $\mathbb{R}^n$中的一个可定义$\mathcal{C}^k$ 子流形。存在法丛 $\mathrm{N}M$ 中零截面 $M \times \{0\}$ 的一个可定义开邻域 U，使得限制 $\varphi|_U$ 是

$\mathcal{C}^{k-1}$ 到 $\mathbb{R}^n$中 M 的一个开邻域Ω上的微分同胚。此外，我们可以取 U 为如下形式

$$U = \{(x, v) \in \mathrm{N}M \; ; \; \|v\| < \varepsilon(x)\} \; ,$$

其中， ε 是定义在 M 上的正可定义函数 $\mathcal{C}^k$ 。

定理中上述邻域 Ω 称为 M 的可定义 $\mathcal{C}^{k-1}$ 管状邻域。在 Ω 上有一个可定义的 $\mathcal{C}^{k-1}$ 收缩映射 $\pi : \Omega \to M$ ，以及一个可定义的 $\mathcal{C}^{k-1}$ "距离平方函数" $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$，它们定义如下:

$$\begin{aligned} \pi(\varphi(x, v)) &= x \\ \rho(\varphi(x, v)) &= \|v\|^2 \; . \end{aligned}$$

为证明定理 6.11，我们首先需要考虑闭可定义子流形的情形。

引理 6.12 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可定义 $\mathcal{C}^k$ 子流形，且在 $\mathbb{R}^n$ 中闭。设$\psi : M \to \mathbb{R}$ 是一个正可定义函数，它在局部由正常数从下方有界（对于每个 x ，若 M，都存在 $c > 0$ 以及 M 中 x 的一个邻域V，使得在 V 上有 $\psi > c$ ）。那么存在一个正可定义函数 $\mathcal{C}^k$ $\varepsilon : M \to \mathbb{R}$ ，使得在 M 上有 $\varepsilon < \psi$ 。

证明。对于 $r \in \mathbb{R}$，令

$$M_r = \{ \; x \in M \; ; \; \|x\|^2 \leq r \} \; .$$

我们可以设 $M_{r_0} \neq \emptyset$ ，其中 r_0。注意，对于 $r \geq r_0$， M_r 是紧的。对于这样的 r，我们通过 $\mu(r) = \inf\{\psi(x) \; ; \quad x \in M_r\}$ 来定义 $\mu(r)$。函数 $\mu : [r_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 是可定义的且非增。它为正，因为 M_r 被有限个子集覆盖，在这些子集上， ψ 被正常数从下方界定。根据定理 6.4，存在 $a > r_0$ ，使得 μ 在包含 $[a, +\infty$ 的开区间上是 $\mathcal{C}^k$ 。选择一个可定义的 $\mathcal{C}^k$ 函数 $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ，使得 $\theta = 0$ 在 $(-\infty, a]$, θ 上从 0 增加到 1，在 $[a, a+1]$ 上，并且在$[a+1, +\infty$ 上 $\theta = 1$)。定义函数 $\mu_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为

$$\mu_1(r) = \theta(r)\mu(r) + (1 - \theta(r))\mu(a + 1) \; .$$

注意， μ_1 是 $\mathcal{C}^k$、可定义的，并且在 $[r_0, +\infty$上满足 $\mu_1 \leq \mu$)。我们将$\varepsilon(x)$ 定义为 $= \frac{1}{2}\mu_1(\|x\|^2)$)，其中 $x \in M$。根据构造，正的、可定义的 $\mathcal{C}^k$函数 ε 在 M上满足 $\varepsilon < \psi$ 。□

注意，如果我们只假设存在一个可定义的$\mathcal{C}^k$ 微分同胚，将 M 映到某个 $\mathbb{R}^m$的闭子流形上，那么引理 6.12 仍然成立。稍后我们将证明，该结论对每个可定义子流形都成立。

习题 6.13 为上面的证明给出 θ 的一个显式公式（可以取 θ 在 $[a, a+1]$ 上的一个适当选取的多项式的原函数）。

习题 6.14 考虑到该引理推广到扩张任意实闭域的 o-极小结构的情形，请将前一个引理证明中关于 μ正性的论证替换为在这种一般情形下也适用的论证。（提示：如果 $\psi(r) = 0$，证明存在 $b > 0$ 和一个可定义路径 $\gamma : (0, b) \to M_r$，使得 $\psi(\gamma(t)) = t$。）

引理 6.15 如果 M 是$\mathbb{R}^n$中的闭集，或者可定义地 $\mathcal{C}^k$ 微分同胚于某个 $\mathbb{R}^m$ 中的闭子流形（例如，如果M 是某个 $\mathcal{C}^k$ *cdcd* 的胞腔），则可定义管状邻域 *6.11*成立。

证明。 我们希望避免以下两种“坏”情形：

1. φ 在 (x, v) 处不是局部微分同胚。
2. 存在 (x, v) 和 (y, w)，使得 $\varphi(x, v) = \varphi(y, w)$。

令 Z 为 (x, v) 在 $\mathrm{N}M$ 中满足以下条件的子集

$$\mathrm{d}_{(x,v)}\varphi : \mathrm{T}_{(x,v)}(\mathrm{N}M) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

不是同构。集合 Z 是可定义的，在 $\mathrm{N}M$ 中是闭的，并且与零截面 $M \times \{0\}$ 不相交。对于 M 中的 x，令 $\psi(x)$ 为 1、$\mathrm{dist}((x, 0), Z)$ 和满足以下条件的 $r \in \mathbb{R}$ 的下确界三者中的最小值

$$\exists (y, w) \in \mathrm{N}M \quad \exists v \in \mathrm{N}_x M \quad \|w\| \le \|v\| = r \ \text{ and } \ y + w = x + v \, .$$

函数 $\psi : M \to \mathbb{R}$ 是可定义的。

我们断言，它在局部由正常数从下方有界。取$x \in M$。逆函数定理表明，存在 $c_x > 0$，使得将 φ限制在 $\mathrm{N}M$与开球 $B((x, 0), c_x) \subset \mathbb{R}^{2n}$的交集上，是一个映射到 $\mathbb{R}^n$中 x 的某个邻域的微分同胚。我们证明，$\psi \ge c_x/4$在 M 与开球 $B(x, c_x/4) \subset R^n$的交集上成立。当然，我们可以取 $c_x/4 \le 1$。由于 $B((x, 0), c_x)$ 与 Z不相交，因此对于每个 $y \in M \cap B(x, c_x/4)$，都有 $c_x/4 \le \mathrm{dist}((y, 0), Z)$。现在假设 $\mathrm{N}M$中存在 (y, v) 和 (z, w)，使得 $y \in B(x, c_x/4)$，$\|w\| \le \|v\| < c_x/4$ 并且

$y+v=z+w$。于是，$(y,\ v)$ 和 $(z,\ w)$ 都属于 $B((x,\ 0)\ c_x)$，这与以下事实矛盾：将 φ 限制在该球与 $\mathrm{N}M$的交集上时，它是单射的。因此，该断言得证。我们可以将引理 6.12应用于函数 ψ。我们得到一个可定义的正常数 $\mathcal{C}^k$ 函数$\varepsilon : M \to \mathbb{R}$，使得在可定义开子集上

$$U = \{(x,v) \in \mathrm{N}M\ ;\ \|v\| < \varepsilon(x)\}\ ,$$

映射 φ是一个单射局部微分同胚。因此，$\varphi|_U$ 是从 M 到 $\mathbb{R}^n$中一个开可定义邻域的微分同胚。□

命题 6.16 设 M 是 $\mathbb{R}^n$的一个可定义 $\mathcal{C}^k$ 子流形，在 $\mathbb{R}^n$ 中是闭的，或可定义地 $\mathcal{C}^k$ 微分同胚于某个 $\mathbb{R}^m$的闭子流形。那么，在 $\partial M =$闭包$(M) \setminus M$的补集内，M 具有一个非负可定义的 $\mathcal{C}^{k-1}$方程。这意味着存在一个非负可定义 $\mathcal{C}^{k-1}$ 函数 $f:\ \mathbb{R}^n \setminus \partial M \to \mathbb{R}$，使得 $M = f^{-1}(0)$。此外，可以选取 $f \le 1$。

证明。 根据引理 6.15，我们可以选取一个半径为 ε 的 M 的可定义管状邻域 Ω：$M \to (0,\ +\infty)$。根据引理 6.12，我们可以假设，对于 M 中的所有 x，$\varepsilon(x) <$min$(1,\ \mathrm{dist}(x,\ \partial M))$。注意，距离平方函数 $\rho : \Omega \to [0,+\infty)$ 是 Ω 中 M 的一个可定义非负 $\mathcal{C}^{k-1}$ 方程。我们将使用单位分解把它延拓到 $\mathbb{R}^n \setminus \partial M$。我们选取一个 $\mathcal{C}^{k-1}$可定义函数 $\theta:\ \mathbb{R} \to [0,1]$，它在 $(-\infty,\ 0]$ 上为 0，在 $[1,+\infty$ 上为 1，并在 $[0,1]$上从 0 增加到 1。然后令

$$f(x) = \begin{cases} \theta(2\rho(x)/\varepsilon^2(x)) & \text{on } \Omega \\ 1 & \text{outside } \partial M \cup \{x \in \Omega\ ;\ \rho(x) \le \frac{1}{2}\varepsilon^2(x)\} \end{cases}\ .$$

函数 $f:\ \mathbb{R}^n \setminus \partial M \to \mathbb{R}$非负、可定义，且 $f^{-1}(0) = M$。假设 $\varepsilon(x) <$ $\min(1,\ \mathrm{dist}(x,\ \partial M))$，这意味着 $\partial M \cup \{x \in \Omega\ ;\ \rho(x) \le \frac{1}{2}\varepsilon^2(x)\}$ 是闭的¯（证明留作练习）。这表明 f 确实是 $\mathcal{C}^{k-1}$，并完成了该命题的证明。□

定理 6.17 设 F 是 $\mathbb{R}^n$的一个闭可定义子集。对于每个正整数 k，存在一个可定义、连续、非负的函数 $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得 $f^{-1}(0) = F$，且 f 在 $\mathbb{R}^n \setminus F$上的限制属于 $\mathcal{C}^k$ 类。

证明。 我们对 F 的维数进行归纳。若 F 为空集，则可将任意正的常值函数取作 f。现在设 $d =$ 维 $F \ge 0$，并假设定理对 $\mathbb{R}^n$ 中所有维数为 $< d$ 的闭可定义子集均成立。取一个适配于 F 的 $\mathbb{R}^n$ cdcd。令 $\mathcal{D}$ 为以下胞腔的有限集：

包含于 F 且维数为 d 的胞腔。根据命题 6.16，每个 d-胞腔 $C \in \mathcal{D}$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \partial C$ 中都有一个非负可定义的 $\mathcal{C}^k$ 方程 g_C。令 Z 为包含于 F 的所有维数为 $< d$ 的胞腔，以及所有 ∂C（其中 $C \in \mathcal{D}$）的并集。集合 Z 在 $\mathbb{R}^n$ 中是可定义且闭的。对所有 $C \in \mathcal{D}$，函数 g_C 的乘积定义了一个函数 g: $U = \mathbb{R}^n \setminus Z \to \mathbb{R}$。函数 g 属于 $\mathcal{C}^k$ 类，并且是 U 中 $F \cap U$ 的一个可定义的非负方程。此外，我们可以令所有 g_C 均有界于 1，因此有 $g \leq 1$。根据归纳假设，存在一个可定义、连续、非负的函数 h: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得 $h^{-1}(0) = Z$，且 h 在 U 上的限制属于 $\mathcal{C}^k$ 类。乘积 $f = gh$ 在 U 上有定义且 $\mathcal{C}^k$。令 $f = 0$ 在 Z 上取值，即可将其连续延拓至 $\mathbb{R}^n$。于是，F 的零点集为 $Z \cup (F \cap U) = F$。函数 f 满足定理的性质。□

推论 6.18 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的可定义的 $\mathcal{C}^k$ 子流形。则存在 N 的可定义的 $\mathcal{C}^k$ 子流形 $\mathbb{R}^{n+1}$，其在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中为闭的，使得投影 $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ 到前 n 个坐标诱导出从 N 到 M 的微分同胚。因此，$\mathbb{R}^n$ 的每个可定义的 $\mathcal{C}^k$ 子流形都与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的某个闭子流形可定义地微分同胚，并且引理 *6.12* 和命题 *6.16* 对每个可定义的 $\mathcal{C}^k$ 子流形都成立。

证明。设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的可定义的 $\mathcal{C}^k$ 子流形。由于 M 是局部闭的，$\partial M =$ 闭包$(M) \setminus M$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中是闭的。根据定理 6.17，存在一个连续、非负的可定义函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得 $f^{-1}(0) = \partial M$ 且 f 在 $\mathbb{R}^n \setminus \partial M$ 上是 $\mathcal{C}^k$。令

$$N = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \, ; \, x \in M \text{ and } tf(x) = 1\} \, .$$

则 N 是一个可定义的 $\mathcal{C}^k$ 子流形，在 $\mathbb{R}^{n+1}$中是闭的，并且映射 $x \mapsto (x, 1/f(x))$ 是从 M到 N的可定义的 $\mathcal{C}^k$微分同胚，它是 $\pi|_N$的逆映射。□

前述推论与引理 6.15 一起完成了可定义管状邻域定理 6.11 的证明。我们以一条性质作为结尾，该性质在 Macintyre 构造 o-极小结构的过程中发挥着重要作用。

命题 6.19（D$\mathcal{C}^k$ - all k）设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的可定义子集。对于每个正整数 k，存在一个可定义的 $\mathcal{C}^k$ 函数 $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$，使得 $A = \pi(f^{-1}(0))$，其中 $\pi = \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ 是到前 n 个坐标的投影。

证明。固定 k。取一个适配于 A 的 $\mathcal{C}^{k+1}$ cdcd $\mathbb{R}^n$ 。根据推论 6.18，对于每个胞腔 C，存在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的可定义 $\mathcal{C}^{k+1}$ 子流形 D，其在$\mathbb{R}^{n+1}$中是闭的 $\pi|_D$，使得 C是一个微分同胚。根据命题 6.16，存在一个可定义的 $\mathcal{C}^k$ 函数 $f_C: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$，使得 $f_C^{-1}(0) = D$。令 f 为包含于 A的所有胞腔 C 所对应函数 f_C 的乘积。则 f 是定义在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的可定义 $\mathcal{C}^k$ 函数，并且 $A = \pi(f^{-1}(0))$。□

参考文献

[BS] J.L. Bell, A.R. Slomson：模型与超积：导论。North Holland（1969）[BCR] J. Bochnak, M. Coste, M-F. Roy：实代数几何。Springer，1998[Co1] M. Coste：少项式的拓扑类型。载于奇点研讨会—— *Łojasiewicz 70*。Banach 中心出版物 44（1998），81–92[Co2] M. Coste：半代数几何导论。数学研究博士课程，比萨大学数学系。国际出版与印刷研究所，2000[CR] M. Coste, M. Reguiat：家族中的平凡化，载于实代数几何，数学讲义 1524，Springer，1992，193–204[vD] L. van den Dries：驯性拓扑与 *o*-极小结构。伦敦数学会讲义 248。剑桥大学出版社，1998[vDMi] L. van den Dries, C. Miller：几何范畴与 *o*-极小结构，杜克数学杂志 84（1996）497–540[Fu] T. Fukuda：多项式的拓扑类型，高等科学研究所数学出版物 46（1976）87–106[KPS] J. Knight, A. Pillay, C. Steinhorn：*o*-极小结构中的可定义集 *II*，美国数学会汇刊 295（1986）593–605[PS] A. Pillay, C. Steinhorn：有序结构中的可定义集 *I*，美国数学会汇刊 295（1986）565–592[Pr] A. Prestel：实代数几何学家的模型论。数学研究博士课程，比萨大学数学系。国际出版与印刷研究所，1998

[Wi] A.Wilkie：实数域扩张为受限 *Pfaffian* 函数和指数函数时的模型完备性结果，《美国数学会杂志》9（1996）1051–1094

索引

适配的 cdcd，20

带，18

胞腔，7，18

cone，42

连通
  可定义的 – 分量，28
  可定义的 –，19
  可定义的弧连通 –，19

曲线选择引理，26

柱形代数分解，7

柱状可定义细胞分解 (cdcd)，18

可定义的
  – 选择，25
  – 映射，10
  – 集合，10

可定义族
  – 公式的，55
  – 映射，58
  – 集合的，29

维数，31
  – 胞腔的，18

可定义集的延拓，57

面，41 纤维，52 –公式，55 一阶公式，12

图，18

区间，9 正规丛，73 开盒，9 半代数–映射，6 –集合，5,6 单纯形，41 开–，41 结构，10 o-极小–，10 切丛，72 塔斯基-塞登伯格定理，7 平凡族，61,63 管状邻域，74 超滤子，50 主–，50