arXiv:2611.32448v1 [math.CV] 24 Nov 2026

# 特希米勒空间中的尖锐重心代价

李航宇
数学系，香港中文大学hyli@math.cuhk.edu.hk

**摘要**

闭双曲曲面上的仿射贝尔特拉米纤维具有二次法向响应，其最小垂直 $L^2$ 能量等于对偶于双曲余切上确界范数的切范数。我们通过曲率恒等式和精确的局部化响应确立了这一校准结果。其严格性决定了近极小元的能量测度；在振幅约束下，当支撑微分具有非退化极大值时，它给出一个正的超额，其二次下系数是显式的。单个纤维中代表元的逐点庞加莱重心提供了一种非线性实现：等权对能够精确达到预先指定的小输出，并且当且仅当输出尺度相对于振幅界的平方而言可忽略时，它们的生成能量趋近于校准范数。恢复到完整局部纤维图的主导代价是 Weil–Petersson 范数平方的四倍。对于退化曲面，我们确定了校准范数在持久分量和领圈方向上的加性极限。诱导长度度量完备化为带标记增广 Teichmüller 空间，并且到固定夹断层的距离为 $\frac{\pi}{2}\sum_i \ell_i + O((\sum_i \ell_i)^2)$。依赖于最短闭测地线长度的估计还给出了沿退化族的精确非线性实现。

*2020*年数学主题分类。 主要分类：30F60；次要分类：32G15、53C60。关键词。 特希米勒纤维、余切标定、能量集中、魏尔–彼得森度量。

## 1 引言

全纯二次微分的双曲上确界范数在 Teichmüller 空间上定义了一种芬斯勒余度量。其对偶切范数是 $L^p$ 余切对偶度量族 [8, §2]中的一种。我们将此范数与一个源自仿射特希米勒纤维曲率的最小能量问题联系起来。沿该纤维切向的扰动所产生的法向响应是二次的，其最小垂直 $L^2$ 能量可由精确余切标定得到。

这一联系在两个尺度上带来推论。在固定曲面上，标定是严格的：近极小元集中于某个支撑二次微分的最大值集上。逐点振幅界阻止了无限精细的集中，并迫使其相对于切范数出现超额。沿挤压族，相应的余切单位球分离

映射到极限带 puncture 曲面上的持久微分以及收缩领圈的主部。对偶范数变为可加的，每条被挤压曲线都对应一个明确的贡献。

二次响应也支配着一个非线性问题。同一标记共形类的代表元，可以通过对其 Beltrami 系数取庞加莱重心，逐点进行聚合。所得系数不一定仍属于它们的公共纤维。对所规定输出的精确双点实现可恢复尖锐的二次能量；而将聚合结果返回完整局部纤维图所需的代价，则由 Weil–Petersson 范数控制。非线性估计在集中性下仍保留两个 $L^2$ 因子，并且允许给出一致的、依赖缝长的版本。

## 1.1 主要结果

设 $X$ 是一亏格为 $g \geq 2$ 的闭双曲曲面。记 $\pi : \mathrm{Bel}(X) \to \mathcal{T}(X)$ 为 Teichmüller 投影。取 $V = \ker D\pi_0$ 的调和补空间，则经过原点的纤维局部上是如下图像

$$\Phi(v) = v + \Psi(v), \qquad \Psi(0) = D\Psi_0 = 0.$$

其仿射垂向 Hessian 为 $\mathbf{S}_{0,}$，并令 $q_X(v) = -\frac{1}{2}\mathbf{S}_0(v, v)$。下文中的所有 $L^2$ 范数均采用双曲面积。

**纤维曲率与精确标定**。起点是变分范数

$$\gamma_X(u) = \inf\{\mathbb{E}\|v\|_2^2 : \mathbb{E}v = 0,\ \mathbb{E}q_X(v) = u\},$$

其中下确界取遍垂直方向的有限中心化概率律。曲率恒等式与局部化的点响应表明

$$\gamma_X^*(\phi) = \|\phi\|_{\infty,h}. \tag{1}$$

不等式 $|\langle q_X(v)\ \phi\rangle| \leq \|\phi\|_{\infty,h}\|v\|_2^2$ 对非零 $v$ 和 $\phi$ 均为严格不等式。然而，每个 $u$ 都有平滑的单方向响应 $q_X(v)$，其能量可任意接近 $\gamma_X(u)$（引理 2.7和2.13 以及定理 2.11 和2.14）。

**集中性与约束能量**。固定 $u \neq 0$ 和一个支撑微分 $\phi$，满足$\|\phi\|_{\infty,\ h} = 1$。近似极小化概率律的能量测度可能出现的极限，恰好是满足以下条件的正测度 $\nu$

$$\nu(X) = \gamma_X(u), \qquad \operatorname{supp}\nu \subset Z_\phi := \{|\phi|_h = 1\}, \qquad u = \int_{Z_\phi} e_X(p, a_\phi(p))\, d\nu(p), \tag{2}$$

其中 $e_X$ 是余切点值，且 $a_\phi = \varphi/|\varphi|_{\text{。}}$ 每个这样的测度都可由具有精确二次响应的光滑单一方向得到（定理3.2）。

凸化的单位振幅响应体定义了 $J_X$。对于 $\gamma_X(u) = 1$，其超额满足$\lambda + \kappa_X\lambda^3 \leq J_X(\lambda u) \leq \lambda + C_{X,\ u}\lambda^2$。若某个支撑 $\phi$ 仅有非退化极大值，则

$$\liminf_{\lambda\downarrow 0} \frac{J_X(\lambda u) - \lambda}{\lambda^2} \geq \left(4\pi \sum_{p\in Z_\phi} \left(\det \mathrm{Hess}_h(1 - |\phi|_h)(p)\right)^{-1/2}\right)^{-1}. \tag{3}$$

非退化全局最大值出现在 $\mathcal{Q}(X)\setminus\{0\}$ 的开稠密子集上$X$。这是关于余切微分的一个一般性陈述；对于给定的切向方向，当其某个支撑微分具有所述性质时，该估计成立。(3)中的系数是二次超额的一个显式下界（定理3.8 和3.9以及命题3.10）。

**精确重心实现与恢复。** 令 $\tau_X$ 为归一化 Bers 坐标图，并令 $\mathcal{I}_X(t;\,r)$ 和 $\mathcal{K}_X(t;\,r)$ 分别表示在具有精确重心输出 $t$且垂直振幅不超过 $r$ 的中心化律中，最小垂直能量和最小积分庞加莱离散度。在每个固定的 $X$ 下，对于内部可行的 $x$，

$$\frac{\mathcal{I}_X(\tau_X^{-1}(r^2x);\,r)}{r^2}\longrightarrow J_X(x),\tag{4}$$

在 $x$ 中局部一致。对于固定的 $u\neq 0$，以及正的 $r_j,\ \delta_j\to 0$，当且仅当 $\delta_j=o(r_j^2)$ 时，才能以精确输出 $t_j=\tau_X^{-1}(\delta_j u)$ 渐近地达到尖锐的构造。在此尺度下，

$$\frac{\mathcal{I}_X(t_j;r_j)}{\delta_j}\to\gamma_X(u),\qquad \frac{\mathcal{K}_X(t_j;r_j)}{4\delta_j}\to\gamma_X(u).\tag{5}$$

支撑在$\{\Phi(v_j)\ \Phi(-v_j)\}$ 上的等权对可精确实现指定的非线性输出，并趋近这些下确界。对于中心化的精确输出概率律，相对于完整局部纤维图 $\Phi(U_X)$，弗雷歇能量的最小超额满足

$$\Delta_X(\Pi)=4\delta^2\|u\|_{\mathrm{WP}}^2(1+O_X(r^2)).\tag{6}$$

因此，即使针对同一个精确对，两种主导代价也源自不同的范数（定理 3.7和 4.8、推论 4.9以及命题 4.12）。依赖于最短闭测地线长度的图像、概率律和局部化估计，在定理 5.3 和推论 5.4给出的充分范围内，可沿退化族构造精确对。$(r^2)$ 的固定曲面必要条件与依赖于最短闭测地线长度的充分范围分别列出。

**校准范数的边界几何。** 同一范数在边界处具有确定的极限。设带标记曲面 $X_j$ 通过挤压 $k$ 条互不相交的曲线收敛到有限面积带 puncture 曲面 $\Sigma$，并将领圈微分按 $b_0^i(\chi_{i,\ j})=\ell_{i,\ j}^2$进行归一化。在所得的持久坐标和领圈对偶坐标（$u_0,\ c$）中，

$$\gamma_{X_j}(u_j)\longrightarrow\gamma_\Sigma(u_0)+\frac{1}{4\pi^2}\sum_{i=1}^{k}|c_i|.\tag{7}$$

长长度度量 $d_\gamma$ 与魏尔–彼得森度量具有相同的柯西序列，其完备化是带标记增广 Teichmüller 空间。对于固定的挤压多曲线 $\Gamma$，只要其余的芬切尔–尼尔森数据保持在远离进一步退化的紧集内，

$$d_\gamma(X,D_\Gamma)=\frac{\pi}{2}\sum_i\ell_i+O\left(\left(\sum_i\ell_i\right)^2\right).\tag{8}$$

将角扭转归一化为具有德恩周期 $2\pi$后，其坐标向量的 $\gamma$-范数渐近于 $\ell_i^2/(4\pi)$。领圈极限、带标记完备化以及径向距离定律分别在定理 6.2、6.7和6.9 以及推论 6.3中得到证明。

## 1.2 与早期工作的关系

Bridgeman–Bromberg–Vargas Pallete 引入了双曲 $L^p$ 余切范数及其对偶切度量 [8, §2]。该范数 $\gamma$ 就是其 $p=\infty$ 切度量。曲率

最小化给出了其纤维几何刻画，而严格校准和精确的局部化响应则确定了近极小元的能量测度以及约束非线性代价。可加领圈公式、带标记完备化和挤压距离系数是关于其诱导长度度量的全局几何的论述。其证明结合了校准范数、退化余切基和全局长度函数估计。

仿射贝尔特拉米模型及其无穷小商空间是经典理论 [2, 18, 21, 26, 32]。由商几何和魏尔–彼得森度量产生的联络见[17, 40, 42]。Miyachi 研究了二阶切结构与余切结构，以及余切 $L^1$ 范数与特希缪勒范数之间的无穷小对偶性 [30, 第 8–11]章。这里，固定仿射纤维提供二次法向响应，其垂直能量校准双曲余切上确界范数。

非线性估计在集中过程中保留两个 $L^2$ 因子。它们运用平方可积贝尔特拉米理论 [12, 39], 、伯斯变分 [23], 和伯林预解算子 [6]。互不相交的局部场给出坐标平方映射；其度提供精确修正项 [13, 5]。在边界处，持久性估计和领圈估计来自 [37, 22]。长度微分与裤子几何 [20, 44, 4, 10] 提供全局校准和带标记紧性。Wolpert 的分层距离展开给出了与魏尔–彼得森距离平方的比较 [43]。阿尔福斯–魏尔反射控制一致非线性范围 [3, 31]。

Huang–Ohshika–Pan–Papadopoulos 将地震变换正向 FD 完备化及其对称化的完备化与增广 Teichmüller 空间对应起来 [25, 定理1.21和10。27]他们的论证还使用了裤子长度和带标记横截线。他们的范数将层状长度赋予无穷小地震变换；其到完整边界的距离渐近于 $2\ell_{\mathrm{sys}}\log(1/\ell_{\mathrm{sys}})$ [25, 定理1.29和注1。30]。本文考察的对称范数是双曲余切上确界的对偶，并且到固定挤压分层的距离为线性的（8）。

弗雷歇均值和黎曼均值构成了逐点重心理论 [1, 19, 27, 38] 以及局部展开 [7, 33, 34]。在共形基点处，重心与仿射均值在二阶意义下相一致，因此主导响应由纤维海森矩阵决定；庞加莱模型规定了确切的非线性聚合及其损失。重心拟共形构造见于 [14, 16]。Lin 研究了相对于边界的特希缪勒类中的能量极小化，以及二进随机拼接下的抵消 [28]；我们的约束规定了闭曲面上代表元逐点聚合的输出。

### 1.3 结构安排

第 2 节推导曲率恒等式、精确标定和点响应。第 3 节讨论集中性、有界振幅和非退化支撑微分。第4 节证明精确实现与恢复。第 5 节确立一致精确实现。第6节随后推导加性边界范数，识别带标记完备化，并计算到夹缩分层的距离。附录包含非线性贝尔斯估计、一致图像及局部化证明。

## 2 纤维曲率与精确标定

仿射纤维的二次法向响应决定了其最小生成能量。我们从双曲曲率推导出该响应，并以余切点值进行校准，

并精确实现每个求值映射原子。

## 2.1 Beltrami 系数与归一化

固定一个亏格为 $g \geq 2$、配备双曲度量 $ds_X^2 = \rho_X^2 |dz|^2$ 且面积为 $dA_X = \rho_X^2 dx\, dy$的闭黎曼曲面 $X$。记

$$\mathcal{B}(X) = L^\infty(X, \overline{K}_X \otimes K_X^{-1}), \qquad \mathrm{Bel}(X) = \{\mu \in \mathcal{B}(X) : \|\mu\|_\infty < 1\}.$$

归一化的 Beltrami 方程定义了全纯分裂浸没 $\pi :$ Bel$(X) \to \mathcal{T}(X)$，其中 $\pi(0) = [X]$ 以及局部全纯截面 [2, 21, 26, 32]。

**无穷小商** 对于 $\phi = \varphi dz^2 \in \mathcal{Q}(X)$ 和 $\mu = \mu(z)d\bar{z}/dz$，固定坐标不变的配对

$$\langle \mu, \phi \rangle = \int_X \mu\varphi \, dx\, dy = \frac{i}{2} \int_X \mu\varphi \, dz \wedge d\bar{z}. \tag{9}$$

无穷小等价定理确定了

$$V := \ker D\pi_0, \tag{10}$$

$$V = \mathcal{Q}(X)^\perp = \{v \in \mathcal{B}(X) : \langle v, \phi \rangle = 0 \text{ for every } \phi \in \mathcal{Q}(X)\}. \tag{11}$$

因此 $T_{[X]}\mathcal{T}(X) \simeq \mathcal{B}(X)/V$，$T^*_{[X]}\mathcal{T}(X) \simeq \mathcal{Q}(X)$，且 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}(X) = 3g - 3$，其诱导配对为

$$\langle D\pi_0[\mu], \phi \rangle_T = \langle \mu, \phi \rangle. \tag{12}$$

**调和代表元** $\phi = \varphi dz^2$ 的调和代表元为

$$h_\phi = \frac{\overline{\varphi}}{\rho_X^2} \frac{d\bar{z}}{dz}. \tag{13}$$

对于 $H = \{h_\phi : \phi \in \mathcal{Q}(X)\}$，（9）的非退化性给出

$$\mathcal{B}(X) = V \oplus H, \qquad \dim_{\mathbb{C}} H = 3g - 3. \tag{14}$$

在 $\langle \mu, \nu \rangle_2 = \int_X \mu\nu \, d\underline{A}_X$下，恒等映射 $\langle v, h_\phi \rangle_2 = \langle v, \phi \rangle = 0$ 给出

$$V \perp_{L^2} H. \tag{15}$$

我们的 Weil–Petersson 归一化为 [21, 41, 42]

$$\|D\pi_0[h]\|_{\mathrm{WP}} = \|h\|_{L^2(dA_X)}, \qquad h \in H. \tag{16}$$

代价计算和边界计算中使用的约定汇总于表 1。小噪声参数 $\varepsilon$ 为实数。

## 2.2 局部纤维及其二次响应

设 $\mathcal{F}_0 = \pi^{-1}([X])$。聚合的二阶响应由该纤维在仿射贝尔特拉米空间中的曲率决定。其第二基本形式由 $\pi$ 的垂直海森矩阵表示；调和补空间为每个法类选取一个代表元。

表 1：范数与扭转约定。中的张量约定 [22] 涉及复二次张量。扭转导数保持长度及其他芬歇尔–尼尔森坐标不变。

| 量 | 约定 |
|---|---|
| 余切范数 | $\|\phi\|_{\mathrm{WP},*}=\int_X \lvert\varphi\rvert^2\rho_X^{-4}\,dA_X,\quad \|\phi\|_{\infty,h}=\text{最大值}_X\,\lvert\varphi\rvert\rho_X^{-2}$。 |
| 度量变分 | $\dot g=\mathrm{Re}(v\,dz^2)$ 对应于 $h=v/(2\rho_X^2)$。 |
| 复张量范数 | $\|\phi\|^2_{\mathrm{tensor},2}=4\|\phi\|^2_{\mathrm{WP},*}$. |
| 实扭转 $s_i$ | 正向 Dehn 扭转会增加 $\ell_i$。 |
| 角扭转 $\theta_i$ | $\theta_i=2\pi s_i/\ell_i$；正 Dehn 扭转会加上 $2\pi$，而 $\partial_{\theta_i}=\ell_i\partial_{s_i}/(2\pi)$。 |

**垂直 Teichmüller 海森矩阵** 对于无限维垂直空间 $V$，$\mathrm{Sym}^2(V)$ 表示代数对称平方；等价地，下面的张量也可以理解为定义在 $V\times V$ 上的连续对称复双线性映射。

对于以 $[X]$ 为中心的全纯坐标图 $\tau$，设 $C=\tau\circ\pi$。

**定义 2.1**（垂直 Teichmüller 海森矩阵）。对于 $v,\ w\in V$，定义

$$\mathbf{S}_0(v,w):=(D\tau_{[X]})^{-1}D^2(\tau\circ\pi)_0[v,w]\in T_{[X]}\mathcal{T}(X). \tag{17}$$

这里的二阶导数是在$\mathcal{B}(X)$ 的典范仿射坐标中取的。限制到垂直方向后，目标链式法则中依赖于坐标的二次项便消失。

垂直限制使 (17) 与目标坐标图无关：在二阶链式法则中，附加项因 $D\pi_0 v=D\pi_0 w=0$ 而消失。

**纤维的局部解析图像** 调和分解给出一个同构 $DC_0|_H:H\to\mathbb{C}^{3g-3}$。因此，全纯隐函数定理将纤维表示为 $V$ 上的图像。

**命题 2.2**（局部解析纤维图像）。存在邻域 $0\in U_V\subset V$、$0\in U_H\subset H$ 以及全纯映射 $\Psi:U_V\to U_H$，满足 $\Psi(0)=D\Psi_0=0$，使得

$$\mathcal{F}_0\cap(U_V\oplus U_H)=\{\Phi(v):=v+\Psi(v):v\in U_V\}. \tag{18}$$

记 $B=D^2\Psi_0:\mathrm{Sym}^2(V)\to H$，在更小的 $U_V$ 上有

$$\Psi(v)=\tfrac12 B(v,v)+R_\Psi(v),\qquad \|R_\Psi(v)\|_\infty\le C\|v\|_\infty^3. \tag{19}$$

证明。全纯隐函数定理 [26, 附录 A。5] 适用于 $(v,\ h)\mapsto C(v+h)$，因为 $DC_0|_H$ 是可逆的。对 $C(v+\Psi(v))=0$ 在零点处求导得到 $D\Psi_0=0$；在更小的球上进行 Banach 全纯泰勒展开得到（19）。□

这两个二阶对象通过对纤维恒等式求导而关联起来。

**命题 2.3**（二次图恒等式）。对于所有 $v,\ w\in V$，

$$D\pi_0[B(v,w)]=-\mathbf{S}_0(v,w). \tag{20}$$

证明。对纤维恒等式求两次导数，得到 $DC_0[B(v,w)]+D^2C_0[v,w]=0$。应用 $(D\tau_{[X]})^{-1}$。□

在仿射系数空间中，商值第二基本形式为 $\mathrm{II}_0(v,w) = [B(v,w)]$ 模 $V$。在商同构 $D\pi_0$下，(20) 表示为

$$\overline{D\pi}_0(\mathrm{II}_0(v,w)) = -\mathbf{S}_0(v,w). \tag{21}$$

调和补空间选取该正规类的代表 $B(v,\ w)$ s.

## 2.3 局部化响应

我们通过在坐标圆盘上局部化垂直方向，确定二次纤维响应能够产生的位移。紧支撑自同伦将该响应与切余配对联系起来。不相交的支撑集进而使其在切空间基下呈对角形式。

**引理 2.4 (紧支撑同伦响应)。** 设 $U \Subset X$ 是一个坐标圆盘，且$W \in C_c^\infty(U,\mathbb{C})$。对于较小的实数 $t$，坐标扰动 $F_t(z) = z + tW(z)$延拓为恒等映射后，是一个与恒等映射同伦的保定向微分同胚。将系数以零延拓，令

$$v = W_{\bar z}\frac{d\bar z}{dz}, \qquad A_W = W_z W_{\bar z}\frac{d\bar z}{dz}.$$

于是 $v \in V$和

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{S}_0(v,v) = D\pi_0[A_W]. \tag{22}$$

证明。 对于较小的 $|t|$，每个 $F_{st}$, $0 \le s \le 1$都是度为一的局部微分同胚，因而是整体微分同胚；这条路径给出了该同伦。其系数为

$$\mu_t = \frac{tW_{\bar z}}{1 + tW_z} = tv - t^2 A_W + O_{L^\infty}(t^3).$$

对于 $\phi = \varphi dz^2$，由紧支撑和全纯性可得$\langle v, \phi\rangle = -\int_U W\partial_{\bar z}\varphi\, dx\, dy = 0$，因此$v \in V$。由于 $\pi(\mu_t) = [X]$，$C(\mu_t) = 0$的二次项为 $D^2C_0[v,v] = 2DC_0[A_W]$，从而证明了（22）。

□

对于实值 $W$，引理 $W_zW_{\bar z}$ 中的系数2.4 是非负密度 $|W_z|^2$。我们利用这一观察将切余配对局部化。

**引理 2.5**（局部化张成响应）。设 $n = 3g-3$。在任意给定的非空开集 $O \subset X$ 中，存在两两不相交的坐标圆盘 $U_i \Subset O$ 以及实函数 $W_i \in C_c^\infty(U_i)$，使得

$$v_i = (W_i)_{\bar z_i}\frac{d\bar z_i}{dz_i} \in V, \qquad Q_i = \tfrac{1}{2}\mathbf{S}_0(v_i,v_i), \qquad 1 \le i \le n,$$

并且 $Q_1$、…、$Q_n$构成 $T_{[X]}\mathcal{T}(X)$ 的复基。

证明。 选取互不相同的点 $p_i \in O$，使得在$\mathcal{Q}(X)$ 上的求值映射构成同构。可通过归纳选取这些点：早先各求值映射的公共核中任一非零微分，依据恒等定理，在 $O$ 中的某处非零；在该处求值会使核维数减少一。选取互不相交的圆盘 $U_i \Subset O$，满足 $z_i(p_i) = 0$，以及$\mathcal{Q}(X)$ 的一组基 $q_j = \varphi_j^{(i)}dz_i^2$。矩阵 $(\varphi_j^{(i)}(0))$ 可逆。

固定一个非常值实 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{D})$，令 $W_{i,r} = r\chi(z_i/r)$，并将 $A_{i,r} = |(W_{i,r})_{z_i}|^2 d\bar{z}_i/dz_i$延拓为零。重新缩放得到

$$r^{-2}\langle A_{i,r}, q_j\rangle \longrightarrow c_\chi \varphi_j^{(i)}(0), \qquad c_\chi = \int_{\mathbb{D}} |\chi_\zeta|^2 \, dA > 0. \tag{23}$$

因此，对于足够小的 $r$，配对矩阵可逆。取这样一个 $r$，并取 $W_i = W_{i,\,r}$。由引理 2.4，$Q_i = D\pi_0[A_{i,r}]$，所以（12）证明了该断言。 □

**定理 2.6**（完整二次值域）。映射

$$Q_0 : V \to T_{[X]}\mathcal{T}(X), \qquad Q_0(v) = \tfrac{1}{2}\mathbf{S}_0(v, v), \tag{24}$$

在引理 $n$ 维复空间 $E_0 =$张成空间$\mathbb{C}\{v_1, \ldots, v_n\}$ 上已经是满射2.5。诱导的线性映射 $\mathbf{S}_0 : \mathrm{Sym}^2(E_0) \to T_{[X]}\mathcal{T}(X)$ 也具有满射性。

证明。对于 $W = \sum_i c_i W_i$，不相交支撑集给出 $W_z W_{\bar{z}} = \sum_i c_i^2 (W_i)_z (W_i)_{\bar{z}}$。因此，同痕响应给出

$$Q_0\left(\sum_i c_i v_i\right) = \sum_i c_i^2 Q_i. \tag{25}$$

给定 $u = \sum_i \alpha_i Q_i$，取 $c_i^2 = \alpha_i$。这证明了两个满射性结论。 □

记 $T_X = T_{[X]}\mathcal{T}(X)$、$n = 3g - 3$，以及

$$q_X(v) = -\tfrac{1}{2}\mathbf{S}_0(v, v) = -Q_0(v), \qquad V_2 = H^{\perp_{L^2}} \subset L^2(X; dA_X).$$

符号来自（20）。响应首先定义在 $V$上；以下恒等式将其延拓至 $V_2$。

## 2.4 曲率恒等式

对于 $\phi = \varphi dz^2 \in \mathcal{Q}(X)$，令

$$\|\phi\|_{\infty,h} = \max_{p \in X} \frac{|\varphi(p)|}{\rho_X(p)^2}. \tag{26}$$

这是在 $L^p$ 族中的双曲 $L^\infty$ 余切范数，该族在 [8, §2]中有所描述。在以下公式中记 $\rho = \rho_X$、$dA = dA_X$。

对于局部复系数为 $W$ 的光滑向量场，记

$$v = \bar{\partial} W = W_{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dz}, \qquad NW = W_z + 2(\log \rho)_z W.$$

标量 $NW$ 在全纯坐标变换下保持不变。定义

$$\|W\|_h^2 = \int_X \rho^2 |W|^2 \, dA.$$

¯切空间的调和代表描述 [26, §7.7] 将 $\partial$的像识别为 $V_2$。更明确地说，算子 $\bar{\partial} : H^1(TX) \to V_2$ 是一个同构。其核由全纯向量场构成；对于 $g \geq 2$，这些向量场均为零。其椭圆值域是闭的。伴随方程在局部为 $\partial_z(\rho^2 a) = 0$，因此其核是调和贝尔特拉米空间 $H$。由此，每个 $v \in V_2$ 都有唯一的 $H^1$ 势函数 $W$。

**引理 2.7 (协变响应与曲率恒等式)。** 对于 $v = \partial W$，

$$\|NW\|_2^2 + \tfrac{1}{2}\|W\|_h^2 = \|v\|_2^2. \tag{27}$$

对于每个 $\phi = \varphi dz^2 \in Q(X)$，

$$\langle q_X(v), \phi\rangle = -\int_X \varphi\left((NW)v + \tfrac{1}{4}\rho^2 W^2\right) dx\, dy. \tag{28}$$

这两个公式可从光滑场延拓到 $H^1(TX)$，其中 (28) 右侧定义了延拓后的二次响应。

证明。令 $\sigma = \log\rho$。曲率 $-1$ 给出 $\sigma_{z\bar z} = \rho^2/4$。源内积以 $\rho^4\,dx\,dy$ 加权，两个导数目标内积均以 $\rho^2\,dx\,dy$加权，分部积分得

$$N^* f = -\rho^{-2} f_{\bar z}, \qquad \bar\partial^* a = -\rho^{-2}(a_z + 2\sigma_z a).$$

因此，

$$N^*NW - \bar\partial^*\bar\partial W = -2\rho^{-2}\sigma_{z\bar z} W = -\tfrac{1}{2}W.$$

与 $W$ 配对即可证明 (27)。

对于响应公式，令 $F_t(x) = \exp_x(tW_x)$。当实数 $t$足够小时，这是一个与恒等映射同伦的微分同胚。在共形坐标中，其展开式为

$$F_t(z) = z + tW - t^2\sigma_z W^2 + O(t^3),$$

因为测地线方程为 $\ddot z + 2\sigma_z \dot z^2 = 0$。因此，其贝尔特拉米系数为

$$\mu_t = tv - t^2\left((NW)v + \sigma_{z\bar z} W^2\right) + O(t^3).$$

二阶系数是一个全局贝尔特拉米微分。由于 $\pi(\mu_t) = [X]$，比较二次项可得

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{S}_0(v,v) = D\pi_0\left[(NW)v + \tfrac{1}{4}\rho^2 W^2\right].$$

这就证明了 (28)，适用于光滑垂直向量场。为了将其与定义在整个 $V$上的原始海森矩阵对应起来，对 $v$ 进行光滑化，并减去其调和投影。这得到光滑的 $v_j \in V$，在 $L^\infty$ 中一致有界，并且几乎处处收敛到 $v$，且在 $L^2$中也收敛。其提升 $v_j^\sharp$ 在$\mathbb{D}$之外延拓为零后，在欧氏 $L^2(\mathbb{C})$ 范数下收敛，由控制收敛定理可知。

令 $\mathscr{H}$ 表示 Beurling 变换，$M_j$ 表示乘以 $v_j^\sharp$。选取 $R \ge 1$，使其界定所有 $\|v_j\|_\infty$ 和 $\|v\|_\infty$。在共同参数圆盘 $|t| < (2R)^{-1}$ 上，主解密度具有 Beurling-预解式表示 [6,§§4.5.2, 5.3, 5.7]

$$\omega_j(t) = (I - tM_j\mathscr{H})^{-1}(tv_j^\sharp), \qquad \|(I - tM_j\mathscr{H})^{-1}\|_{2\to 2} \le 2. \tag{29}$$

算子 $M_j$ 在 $L^2(\mathbb{C})$ 上强收敛。因此，由预解式恒等式可知，$\omega_j(t)$ 强收敛到 $tv$的稠密性。它们的柯西变换及导数在 $\mathbb{D}$之外局部收敛，因此 $tv_j$ 的贝尔斯投影收敛到 $tv$的贝尔斯投影。全纯依赖性和共同的贝尔斯界保证了在 $t$ [2]中的局部一致收敛。现在由柯西公式得到 $q_X(v_j) \to q_X(v)$。

椭圆反演还给出了势函数在 $H^1$中的收敛性，因此 (28) 的右侧具有相同的极限。于是，该公式对 $V$上的原始响应成立。光滑逼近和柯西–施瓦茨不等式将其延拓至 $V_2$。

□

**定理 2.8** （$L^2$-tamesecond fundamental form）。 存在一个常数 $C_X < \infty$，其仅取决于基曲面，使得

$$\|\mathbf{S}_0(v,w)\|_{\mathrm{WP}} \le C_X \|v\|_{L^2(dA_X)} \|w\|_{L^2(dA_X)}, \qquad v,w \in V. \tag{30}$$

$Co$因此，$\mathbf{S}_0$ 唯一地延拓为一个连续的对称复双线性映射 $p$

$$\mathbf{S}_0^{(2)} : V_2 \times V_2 \longrightarrow T_{[X]}\mathcal{T}(X). \tag{31}$$

¯证明。 对 $\partial$ 进行椭圆反演并利用（27），可将（28）中的两个导数因子和势项均界定为 $C_X\|v\|_2^2$。余切对偶和极化给出（30）。更明确地说，若对角二次型由 $C_X\|v\|_2^2$界定，则恒等式

$$4b(v,w) = q_X(v+w) - q_X(v-w), \qquad b(v,w) = -\tfrac{1}{2}\mathbf{S}_0(v,w),$$

以及重新缩放 $v$， $w$给出其对称双线性形式的一个 $C_X\|v\|_2\|w\|_2$界。 $V$中的光滑场在 $V_2$中稠密：从任意光滑的 $L^2$ 逼近中减去调和投影即可。这就证明了唯一延拓。

□

## 2.5 创造范数

**定义 2.9** （方向二次代价）。 对于 $u \in T_X$，定义

$$\gamma_X(u) := \inf\left\{ \mathbb{E}\|\xi\|_2^2 : \ \mathbb{E}\xi = 0,\ \mathbb{E}q_X(\xi) = u \right\}. \tag{32}$$

这些随机变量在 $V$中强可测且本质有界。在这个二次问题中，对 $\|\xi\|_\infty$ 没有预设界。

定义响应体

$$\mathcal{A}_X := \{ q_X(v) : v \in V,\ \|v\|_2 \le 1 \}, \qquad \mathcal{B}_X := \overline{\mathrm{conv}}\,\mathcal{A}_X. \tag{33}$$

凸包取自 $T_X$ 所对应的实空间。其规范是一个原子范数 [11]。

**命题 2.10** （响应范数与余切对偶）。 函数 $\gamma_X$ 是一个复范数，其单位球为 $\mathcal{B}_X$，且 $\gamma_X(u) \asymp_X \|u\|_{\mathrm{WP}}$。将 （32）中的下确界改为在强可测、中心化且具有有限二阶矩的 $V_2$值概率律上取值，所得数值不变。对于 $\lambda \in T_X^*$,

$$\gamma_X^*(\lambda) = \sup_{\substack{v \in V_2 \\ \|v\|_2 \le 1}} |\lambda(q_X(v))|, \tag{34}$$

*and*

$$\gamma_X(u) = \max_{\gamma_X^*(\lambda) \le 1} \mathrm{Re}\,\lambda(u). \tag{35}$$

证明。 双线性界使$\mathcal{A}_X$有界。由于 $q_X(\sqrt{\alpha}\,v) = \alpha q_X(v)$，该集合是平衡的；局部化响应张成空间 $T_X$，因此它包含一个零点邻域。其规范 $g_X$ 是一个复范数。对于能量为 $M > 0$ 的概率律，用 $\|\xi\|_2^2/M$ 加权可得

$$\frac{\mathbb{E}q_X(\xi)}{M} = \mathbb{E}_{\mathrm{weighted}} q_X\left(\frac{\xi}{\|\xi\|_2}\right) \in \mathcal{B}_X,$$

省略零样本。 $V$ 在 $V_2$ 中的稠密性使这对两类概率律都成立，因此$g_X(u) \le M$。

若 $t > g_X(u)$，则 $u/t$位于 $\mathcal{B}_X$的内部，因此属于 凸包 $\mathcal{A}_X$ [35,定理 6。3]。一个有限凸表示

$$u/t = \sum_k p_k q_X(a_k), \qquad \|a_k\|_2 \le 1,$$

给出一种中心化概率律，其将概率 $p_k/2$ 赋予 $\pm\sqrt{t}\,a_k$。其输出为 $u$ ，能量至多为 $t$。令 $t \downarrow g_X(u)$，即可证明 $\gamma_X = g_X$ 及希尔伯特空间断言。零概率律处理 $u = 0$。

极性给出（35）。对 $v$ 进行相位旋转会使 $q_X(v)$ 旋转两倍相位，因此支撑函数为（34）。 □

**定理 2.11** (精确余切标定)。 对于每个 $\phi \in \mathcal{Q}(X)$,

$$\gamma_X^*(\phi) = \|\phi\|_{\infty,h}. \tag{36}$$

若 $\phi \neq 0$ 且 $v \in V_2 \setminus \{0\}$，则

$$|\langle q_X(v), \phi\rangle| < \|\phi\|_{\infty,h}\|v\|_2^2. \tag{37}$$

$P$证明。 设$C = \|\phi\|_{\infty,\ h}$、 $M = \|v\|_2^2$和 $T = \|W\|_h^2$。响应公式给出 s

$$\begin{aligned} |\langle q_X(v), \phi\rangle| &\le C\left(\|NW\|_2\|v\|_2 + \tfrac{1}{4}T\right) \\ &= CM\left(\sqrt{1-x} + \tfrac{1}{2}x\right), \qquad x = \frac{T}{2M} \in [0,1]. \end{aligned}$$

对于 $v \neq 0$，椭圆反演给出 $T > 0$。由于 $\sqrt{1-x} + x/2 < 1$ 对于 $x > 0$，这就证明了（37）以及（36）中的上界。

对于反向界，选取一个以 $p \in X$为中心的坐标，以及一个非恒定的实$\chi \in C_c^\infty(\mathbb{D})$。令

$$W_\varepsilon(z) = \varepsilon\chi(z/\varepsilon), \qquad v_\varepsilon = (W_\varepsilon)_{\bar{z}}.$$

将该场以零延拓。引理2.4 中的局部同伦响应给出

$$\langle q_X(v_\varepsilon), \phi\rangle = -\int_X \varphi|(W_\varepsilon)_z|^2\, dx\, dy.$$

由于 $W_\varepsilon$ 为实数， $|(W_\varepsilon)_z| = |(W_\varepsilon)_{\bar{z}}|$。重新缩放得到

$$\frac{\langle q_X(v_\varepsilon), \phi\rangle}{\|v_\varepsilon\|_2^2} \longrightarrow -\frac{\varphi(p)}{\rho(p)^2}.$$

根据（34），取 $|\varphi|/\rho^2$ 达到极大值的点即可证明反向界。将 $v_\varepsilon$乘以一个相位可以得到该极限响应的所有相位。 □

对于一个点 $p \in X$ 以及在 $p$处的单位贝尔特拉米系数 $a$，定义 $e_X(p,\ a) \in T_X = \mathcal{Q}(X)^*$ 为

$$\langle e_X(p,a), \varphi dz^2\rangle = a\frac{\varphi(p)}{\rho_X(p)^2}.$$

$a$ 的贝尔特拉米变换规则使得该定义坐标无关。原子由贝尔特拉米线丛的单位圆丛参数化；该圆丛是一个紧致实三维流形。

**推论 2.12** （几何响应体）。 .....的单位球 $\gamma_X$ 是

$$\mathcal{B}_X = \operatorname{conv}\{e_X(p,a) : p \in X,\ |a| = 1\}. \tag{38}$$

它不是严格凸的。特别地， $\gamma_X$ 不可能由任何实内积诱导，也不可能是 *Weil–Petersson* 范数的倍数。

证明。 右侧（38）中紧凸集的支撑函数为$\|\phi\|_{\infty,\ h}$。校准定理和有限维极性将其确定为 $\mathcal{B}_X$。

根据 Carathéodory 定理 [35, 定理 17.1]，紧集的凸包的每个极点都属于该集。光滑像 $\{e_X(p,\ a)\}$ 的 Hausdorff 维数至多为三。如果 $\mathcal{B}_X$ 是严格凸的，则每个边界点都是极点。因此，其边界将包含于该像中。具有内部点的凸体的边界在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中与单位球面径向双 Lipschitz等价，其 Hausdorff 维数为 $2n-1 \geq 5$。这是不可能的。内积单位球是严格凸的，从而得到最后的断言。 □

## 2.6 精确点响应

径向位移场给出精确的点值响应。其能量趋近于相应原子的质量，误差关于支撑半径呈二次阶。

**引理 2.13** (径向点响应)。 固定 $p \in X$ 以及在 $p$处的单位贝尔特拉米系数 $a$ 。存在 $\varepsilon_p > 0$ 和 $C_p < \infty$ ，使得对每个 $m > 0$ 和 $0 < \varepsilon < \varepsilon_p$，都有一个光滑垂直方向$v_{m,\ \varepsilon}$，其支撑在 $p$周围的坐标圆盘内，并满足

$$q_X(v_{m,\varepsilon}) = m e_X(p,a), \tag{39}$$

$$m \leq \|v_{m,\varepsilon}\|_2^2 \leq m(1 + C_p\varepsilon^2), \tag{40}$$

$$\|v_{m,\varepsilon}\|_\infty \leq C_p\sqrt{m}/\varepsilon. \tag{41}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，支撑圆盘收缩至 $p$ 。

证明。 选取以 $p$ 为中心的圆盘一致化，使其限制为一个嵌入坐标圆盘，且

$$z(p) = 0, \qquad \rho(z) = \frac{2}{1-|z|^2}.$$

固定一个非常值径向实函数 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{D})$，并令

$$K_\chi = \int_{\mathbb{D}} |\chi_z|^2\, dx\, dy = \int_{\mathbb{D}} |\chi_{\bar z}|^2\, dx\, dy > 0.$$

取 $b \in \mathbb{C}$ 使得 $b^2 = -ma/(4K_\chi)$，并将 $W(z) = b\chi(z/\varepsilon)$ 延拓为零。令 $v_{m,\ \varepsilon} = \bar\partial W$。对于 $\phi = \varphi dz^2$，局部同伦公式给出

$$\langle q_X(v_{m,\varepsilon}), \phi\rangle = -\frac{b^2}{\varepsilon^2}\int \varphi(z)|\chi_z(z/\varepsilon)|^2\, dx\, dy.$$

该权函数是径向的。对于 $\varphi$ ，圆周平均值恒等式使得该积分等于 $\varepsilon^2 K_\chi \varphi$（0）。由于 $\rho$（0）$^2 = 4$, 结果为 $ma\varphi$（0）/4，从而证明了（39）。

重新缩放后，

$$\|v_{m,\varepsilon}\|_2^2 = \frac{m}{K_\chi}\int_{\mathbb{D}} \frac{|\chi_{\bar z}(\zeta)|^2}{(1-\varepsilon^2|\zeta|^2)^2}\, dA_{\mathrm{e}}(\zeta).$$

权重 $(1-\varepsilon^2|\zeta|^2)^{-2}$ 在固定的较小坐标圆盘上介于 1 和 $1+C\varepsilon^2$ 之间。这证明了 (40)。对 $W$ 求导41)。 □

**定理 2.14** （单方向代价）。 对于 $u \in T_X$，

$$\inf\{\|v\|_2^2 : v \in V,\ q_X(v) = u\} = \gamma_X(u). \tag{42}$$

对于每个 $\eta > 0$，都存在一个光滑垂直方向 $v = \partial W$，其支撑集包含于有限个互不相交的坐标圆盘中，且这些圆盘的开补集非空，使得

$$q_X(v) = u, \qquad \|v\|_2^2 \le \gamma_X(u) + \eta.$$

对于 $u \neq 0$，下确界无法取到。

证明。 在 $\{v, -v\}$ 上的对称概率律给出下界。对于 $u \neq 0$，将推论2.12给出的最优原子表示写为

$$u = \sum_{j=1}^{N} m_j e_X(p_j, a_j), \qquad m_j > 0, \quad \sum_j m_j = \gamma_X(u).$$

取一个归一化支撑微分 $\phi$ ，对应于 $u$。支撑不等式中的等号迫使该表示中的每个原子都满足 $\mathrm{Re}\langle e_X(p_j,\ a_j)\ \phi\rangle = 1$。在每个固定点上，其相位因而唯一，所以可以合并重复的点。

在所得的各个不同点周围选取互不相交的小圆盘。在每个圆盘上应用引理 2.13 并将这些场相加。不相交的支撑使二次响应和能量都具有可加性。所得结果恰为 $u$，而（40）使能量趋于 $\sum_j m_j$。这些圆盘可以选取得使开补集非空。零场处理 $u = 0$，严格校准则给出当 $u \neq 0$ 时无法取到下确界。 □

严格校准还排除了由输出非零的中心化平方可积分布取得最优值的可能性。将该输出与归一化支撑微分配对后，对每个非零样本都有 $\|v\|_2^2 - \mathrm{Re}\langle q_X(v)\ \phi\rangle$ 严格为正，因此其期望不可能为零。

**推论 2.15** (局部化二次代价)。 若将 (32) 中的概率律限制在 $E_0$，则其代价为

$$\gamma_{X,E_0}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q_i\right) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\,\|v_i\|_2^2. \tag{43}$$

对称二点垂直分布可取得这一受限二次代价。对于 $u \neq 0$，有$\gamma_X(u) < \gamma_{X,\ E_0}(u)$。

证明。 对于 $\xi = \sum_i c_i v_i$，不相交支撑给出

$$\mathbb{E} q_X(\xi) = -\sum_i \mathbb{E} c_i^2 Q_i, \qquad \mathbb{E}\|\xi\|_2^2 = \sum_i \mathbb{E}|c_i|^2 \|v_i\|_2^2.$$

输出 $\sum_i \alpha_i Q_i$ 需要 $\mathbb{E} c_i^2 = -\alpha_i$，因此 $\mathbb{E}|c_i|^2 \ge |\alpha_i|$。选择平方根 $c_i^2 = -\alpha_i$ 以及 $\{\sum_i c_i v_i,\ -\sum_i c_i v_i\}$ 上的概率律，即可得到等式。对于非零的 $u$，该实现方向也非零。相对于归一化支撑余切向量的严格校准给出 $\gamma_X(u) < \|\sum_i c_i v_i\|_2^2 = \gamma_{X,\ E_0}(u)$。

□

# 3 集中性与有界振幅的生成

严格校准使二次下确界无法达到。我们描述所有近极小化序列的能量测度，然后在有限维变分问题中保留振幅约束。当支撑微分具有非退化极大值时，径向点响应给出相匹配的二次超额。

## 3.1 校准亏损

固定 $\phi = \varphi dz^2$，其中 $\|\phi\|_{\infty,\ h} = 1$，并记

$$f = \varphi/\rho^2, \qquad c = |f|, \qquad D_\phi(v) = \|v\|_2^2 - \mathrm{Re}\langle q_X(v), \phi\rangle.$$

以下包含 $f$ 的表达式均使用共形坐标中的局部系数；每个显示的被积函数在坐标变换下保持不变。

**命题 3.1**（校准亏损）。对于 $v = \partial W \in V_2$,

$$D_\phi(v) = \frac{1}{2}\|NW + \overline{f}\,\overline{v}\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_X (1-c^2)|v|^2\,dA + \frac{1}{4}\int_X \rho^2\big(|W|^2 + \mathrm{Re}(fW^2)\big)\,dA. \tag{44}$$

这三项均为非负。对于一个平方可积的 $V_2$ 值概率律，令

$$M = \mathbb{E}\|v\|_2^2, \qquad D = M - \mathrm{Re}\langle \mathbb{E}q_X(v), \phi\rangle, \qquad d\nu = \mathbb{E}|v|^2\,dA.$$

*Then*

$$\int_X (1-c^2)\,d\nu \le 2D, \tag{45}$$

$$\mathbb{E}\|W\|_h^2 \le \sqrt{32MD}. \tag{46}$$

定义 $E\phi(\nu) \in T_X$ 为

$$\langle \mathcal{E}_\phi(\nu), \psi\rangle = \int_X \overline{f}\,\frac{\psi}{\rho^2}\,d\nu, \qquad \psi \in \mathcal{Q}(X),$$

其中，$\psi/\rho^2$ 表示其局部系数除以 $\rho^2$。有

$$\gamma_X\big(\mathbb{E}q_X(v) - \mathcal{E}_\phi(\nu)\big) \le 2\sqrt{2MD}. \tag{47}$$

证明。展开 (44) 中的第一项，并使用 $\|NW\|_2^2 = \|v\|_2^2 - \frac{1}{2}\|W\|_h^2$。响应公式 (28) 给出该恒等映射。最后一个被积函数非负，因为 $|f| \le 1$。在$H^1(TX)$ 中的逼近证明了 $V_2$上的恒等映射，而积分则证明了 (45)。

对于单个非零样本，令 $M_v = \|v\|_2^2$, $T_v = \|W\|_h^2$，并令 $x = T_v/(2M_v)$。定理 2.11的证明以及

$$1 - \sqrt{1-x} - x/2 \ge x^2/8, \qquad 0 \le x \le 1,$$

给出 $D_\phi(v) \ge T_v^2/(32M_v)$。取期望后应用柯西–施瓦茨不等式可得 (46)；零样本的贡献为零。

令 $R = NW + \overline{f}\,\overline{v}$。对于$\|\psi\|_{\infty,h} \le 1$，从协变响应公式中减去 $\mathcal{E}\phi(\nu)$ 的定义。柯西–施瓦茨不等式将结果界定为

$$\big(\mathbb{E}\|R\|_2^2\big)^{1/2} M^{1/2} + \tfrac{1}{4}\mathbb{E}\|W\|_h^2 \le \sqrt{2MD} + \tfrac{1}{4}\sqrt{32MD}.$$

取余切上确界可得（47）。 □

### 3.2 近极小元的能量测度

**定理 3.2**（完整的能量测度描述）。 固定 $u \neq 0$，并令 $\phi$ 满足

$$\|\phi\|_{\infty,h} = 1, \qquad \mathrm{Re}\langle u, \phi\rangle = \gamma_X(u).$$

设平方可积的 $V_2$ 值概率律满足 $\mathbb{E}q_X(v_j) = u$，且满足 $\mathbb{E}\|v_j\|_2^2 \to \gamma_X(u)$。它们的能量测度的每个弱极限 $\nu$ 都满足

$$\nu(X) = \gamma_X(u), \qquad \operatorname{supp}\nu \subset Z_\phi, \qquad u = \int_{Z_\phi} e_X\left(p, \frac{\overline{\varphi(p)}}{|\varphi(p)|}\right) d\nu(p), \tag{48}$$

其中 $Z_\phi = \{|\phi|_h = 1\}$。

反之，每个满足 (48) 的正测度，都是 $|v_j|^2 dA$ 在满足以下条件的光滑垂直方向下的弱极限：

$$q_X(v_j) = u, \qquad \|v_j\|_2^2 \longrightarrow \gamma_X(u).$$

因此，从任意中心化概率律和对称的两点概率律得到的极限测度集合相同。

证明。 对于给定的概率律，亏损量趋于零。紧性 $X$ 以及有界的总质量保证存在弱收敛子列。方程（45）和（47）给出了支撑集和矩条件。总质量收敛于 $\gamma_X(u)$。在 $Z_\phi$，$f = \varphi/|\varphi|$，这将该矩与（48）中的原子对应起来。

反之，选择支撑在 $Z_\phi$ 上、质量为 $\gamma_X(u)$ 的有限正原子测度 $\nu_j$，使其弱收敛于 $\nu$。它们的原子矩 $u_j$ 收敛于 $u$。集合 $Z_\phi$ 的内部为空：在非零点处，$\Delta_h \log|\phi|_h = -2$，因此 $|\phi|_h$ 不可能在某个开集上恒等于 1。预留一个坐标圆盘 $O$，使其闭包避开 $Z_\phi$。

应用引理 2.13 于$\nu_j$的有限多个原子，合并重复点，并在 $O$之外选取两两不相交的圆盘。其半径可以取得足够小，使得总和 $v_j^0$ 恰好等于 $u_j$，能量 $\gamma_X(u) + o(1)$，且能量测度趋于 $\nu$。为明确作出最后的选择，取一个在有界测度上诱导弱收敛的度量，并要求它与 $\nu_j$ 之间的距离小于 $1/j$。

一次性选定一个支撑在 $O$中的对角响应基，使用引理 2.5 和定理 2.6。坐标平方根在其张成空间中给出 $w_j$，且

$$q_X(w_j) = u - u_j, \qquad \|w_j\|_2^2 \le C_X\|u - u_j\|_{\mathrm{WP}} \longrightarrow 0.$$

不相交支撑使 $v_j = v_j^0 + w_j$ 成为一个精确的实现方向。其修正项的能量为零，因此不会改变极限能量测度。$\{v_j,\ -v_j\}$上的对称概率律以零为中心，且具有相同的测度。

□

### 3.3 支撑半径与集中性间隙

定理 3.2 中的最大值集受双曲曲率约束。这为有界概率律给出了定量间隙，并确定了尖锐实现可能达到的尺度。

**引理 3.3 (余切最大值附近的面积).** 设 $0 \neq \phi = \varphi dz^2 \in Q(X)$，经归一化后满足$\|\phi\|_{\infty,\ h} = 1$，并令

$$c_\phi = |\varphi|/\rho^2, \qquad Z_\phi = \{c_\phi = 1\}.$$

集合 $Z_\phi$ 的双曲面积为零。存在 $D_X$、$s_X>0$，对所有归一化的 $\phi$ 均一致，使得

$$\mathrm{Area}\{1-c_\phi<s\}\le D_X\sqrt{s},\qquad 0<s\le s_X. \tag{49}$$

如果每个极大值都是非退化的，那么面积至多为 $D_\phi s$（对于 $0<s\le s_\phi$），其中常数取决于 $\phi$。

证明。使用拉普拉斯算子 $\Delta_h=\rho^{-2}(\partial_x^2+\partial_y^2)$。在 $\phi$ 的零点之外，由全纯性和曲率 $-1$ 可得

$$\Delta_h \log c_\phi = -2.$$

在 $Z_\phi$ 的一个点处，有 $c_\phi=1$ 和 $dc_\phi=0$。因此，$f=1-c_\phi$ 的海森矩阵是半正定的，且满足 $\Delta_h f=2$。在经过适当旋转的共形坐标中，该点处有 $f_{xx}>0$。选取一个坐标矩形，使得其中 $f_{xx}\ge a>0$。对于每个固定的 $y$，若 $f(x_1,\,y)\;f(x_2,\,y)<s$，则由强凸性和 $f\ge 0$ 可得

$$0\le f((x_1+x_2)/2,y)\le s-\frac{a}{8}(x_1-x_2)^2.$$

因此，该水平线上的次水平集长度至多为 $\sqrt{8s/a}$。矩形上的面积密度有界。有限个这样的矩形覆盖紧集 $Z_\phi$，且在它们的并集之外，$f$ 有一个正的最小值。积分可得固定 $\phi$ 时的面积估计。为使估计一致，考虑紧关联集

$$\{(\phi,p):\|\phi\|_{\infty,h}=1,\;c_\phi(p)=1\}.$$

在此集合附近，$c_\phi$ 光滑地依赖于 $\phi$ 和 $p$。上述矩形和正的二阶导数界在乘积邻域中仍然成立。选取一个有限积覆盖。紧性给出 $s_X>0$，使得任意一对满足 $1-c_\phi(p)<s_X$ 都属于该覆盖。对于每个 $\phi$，将其活跃矩形上的面积估计求和。它们的有限数量和一致有界性给出（49）。令 $s\downarrow 0$ 即可证明零点集面积为零的断言。

如果所有极大值点都是非退化的，那么它们彼此孤立，因而数量有限。在每个极大值点附近，$f$有界于坐标距离的平方的某个正倍数。相应的次水平集面积为 $O(s)$。

□

**命题 3.4** (有界振幅校准间隙)。存在 $\kappa_X>0$，使得对于每个归一化的非零 $\phi\in Q(X)$，任何满足 $\|v\|_{L^\infty(X\times\Omega)}\le r$、$r>0$ 和 $M=\mathbb{E}\|v\|_2^2$ 的有界垂直律都满足

$$M-\mathrm{Re}\langle \mathbb{E}q_X(v),\phi\rangle \ge \kappa_X\frac{M^3}{r^4}. \tag{50}$$

特别是，

$$\gamma_X(\mathbb{E}q_X(v))\le M-\kappa_X\frac{M^3}{r^4}. \tag{51}$$

如果 $|\phi|_h$ 的每个极大值都是非退化的，那么对于某个 $\kappa_\phi>0$，

$$M-\mathrm{Re}\langle \mathbb{E}q_X(v),\phi\rangle \ge \kappa_\phi\frac{M^2}{r^2}. \tag{52}$$

这些不等式不需要中心化。

证明。 命题 3.1，结合 $1-c_\phi^2 \ge 1-c_\phi$，可得

$$M - \mathrm{Re}\langle \mathbb{E}q_X(v), \phi\rangle \ge \frac{1}{2}\int_X (1-c_\phi) a\, dA, \qquad a = \mathbb{E}|v|^2 \le r^2. \tag{53}$$

情形 $M = 0$ 显然成立。否则，令 $m = M/r^2 \le$ 面积$(X)$。增大引理 $D_X$ 中的 3.3，使得 $s = (m/(2D_X))^2 \le s_X$ 对每个这样的 $m$都成立。至多一半的 $a\,dA$质量位于 $\{1-c_\phi < s\}$中，因为

$$\int_{\{1-c_\phi<s\}} a\, dA \le r^2 D_X \sqrt{s} = M/2.$$

因此，

$$\int_X (1-c_\phi) a\, dA \ge sM/2 = \frac{M^3}{8D_X^2 r^4}.$$

这就证明了（50）。为 $\mathbb{E}q_X(v)$ 选取一个支撑二次微分，得到（51）；零输出情形可由同一不等式以及任意一个归一化的 $\phi$推出。在非退化假设下，使用面积界 $D_\phi s$，增大 $D_\phi$，使得 $s = m/(2D_\phi) \le s_\phi$，然后重复上述论证。由此得到（52）。

□

### 3.4 有界振幅响应体

范数 $\gamma_X$ 是在未指定振幅的情况下对垂直方向进行优化。保留这一约束便得到一个凸响应-能量集。令

$$\mathscr{C}_X = \overline{\mathrm{conv}}\{(q_X(w), \|w\|_2^2) : w \in V,\ \|w\|_\infty \le 1\}, \qquad \mathscr{D}_X = \mathrm{pr}_{T_X}\mathscr{C}_X, \tag{54}$$

并定义扩展实值函数

$$J_X(x) = \min\{m : (x,m) \in \mathscr{C}_X\}, \qquad x \in \mathscr{D}_X, \tag{55}$$

其中 $J_X = +\infty$ 位于 $\mathscr{D}_X$之外。凸包取于底层实向量空间 e.

**命题 3.5** （有界振幅值函数）。 集合 $\mathscr{C}_X$ 是紧的，而 $\mathscr{D}_X$包含一个零点邻域。函数 $J_X$ 是适当的、凸的且下半连续，在 内部 $\mathscr{D}_X$上连续，并满足

$$\gamma_X(x) \le J_X(x) \le \mathrm{Area}(X), \qquad x \in \mathscr{D}_X.$$

其凸共轭取切余配对的实部，为

$$J_X^*(\phi) = \sup_{\substack{w\in V\\ \|w\|_\infty\le 1}} \left(\mathrm{Re}\langle q_X(w), \phi\rangle - \|w\|_2^2\right). \tag{56}$$

证明。 校准给出 $\gamma_X(q_X(w)) \le \|w\|_2^2 \le$ 面积$(X)$。因此，(54) 中的集合在有限维空间中有界，其闭凸包是紧的。坐标平方响应基在其输出投影中给出了一个零点邻域。在紧纤维上取最小值可证明下半连续性，而凸性则可通过组合 $\mathscr{C}_X$ 中的点得到。有限凸函数在其定义域的内部连续 [35, 定理 10。1]。范数下界可传递到闭凸组合。最后，在闭凸包上最大化线性泛函即可得到 (56)。

□

闭包包含极限响应–能量对，这些对受有限维输出变量和能量变量中的紧性所控制。

**引理 3.6** (具有内部输出的有限混合)。 对于 $x \in$ 内部 $\mathscr{D}_X$ 和 $\eta > 0$，存在方向 $w_1$、…、$w_N \in V$，满足 $\|w_i\|_\infty \le 1$，以及正权重 $p_i$，使得

$$\sum_i p_i = 1, \qquad \sum_i p_i q_X(w_i) = x, \qquad \sum_i p_i \|w_i\|_2^2 \le J_X(x) + \eta. \tag{57}$$

向量 $q_X$（$w_i$）仿射张成 $T_X$。

证明。 令 $A = \{q_X$（$w$）： $\|w\|_\infty \le 1\}$。 conv$A$ 的内部点属于conv $A$[35, 定理 6。3]。选择 $A$ 的一个有限子集，使其凸包包含 $x$的一个邻域。在更小的邻域上，每个点都是这些权重均为正的点的凸组合。它们的能量受 面积$(X)$的界约束。

选择 $\alpha > 0$ 足够小，使得加入这种凸组合的 $\alpha$ 比例后，能量的变化小于 $\eta/2$。根据 $\mathscr{C}_X$的定义，一个有限凸组合的输出为 $x'$，可以任意接近 $x$，且能量至多为 $J_X(x) + \eta/2$。取其足够接近，使得

$$z = \frac{x - (1-\alpha)x'}{\alpha}$$

属于前面较小的邻域。将其与实现 $z$的正组合按 $1-\alpha$ 和 $\alpha$的比例混合。输出恰为 $x$，能量满足所需的界，新增的响应列则提供仿射张成空间。

□

精确代价$\mathcal{I}_X$、$\mathcal{K}_X$ 在第4.3节中定义。其可容许律的中心化垂直参数的上确界范数至多为 $r$，并具有指定的精确重心输出。

**定理 3.7** （有限半径生成极限）。对于每个紧 $K \subset$ int $\mathscr{D}_X$，

$$\sup_{x \in K} \left| \frac{\mathcal{I}_X(\tau_X^{-1}(r^2 x); r)}{r^2} - J_X(x) \right| \longrightarrow 0, \qquad r \downarrow 0. \tag{58}$$

以$K_X/(4r^2)$ 替代$I_X/r^2$时，同样的结论仍成立。恢复律可以选为对称两点参数律的有限混合。

证明。设一个中心化可容许律具有精确输出 $r^2 x$，并令 $w = v/r$, $m = \mathbb{E}\|w\|_2^2$。则 $m \le$ 面积$(X)$,

$$(\mathbb{E} q_X(w), m) \in \mathscr{C}_X, \qquad x = \mathbb{E} q_X(w) + O_{\mathrm{WP}}(rm),$$

根据命题4.7。若 $r_j \to 0$ 且 $x_j \to x \in K$，则 $\mathscr{C}_X$ 的紧性使得每个极限能量$m$ 都满足$(x,\ m)$ $\in \mathscr{C}_X$，因此 $m \ge J_X(x)$。由 $J_X$ 在 $K$ 上的连续性可得一致下界。

为便于恢复，固定 $x$ 和 $\eta > 0$，并选择引理 3.6中的数据。对于接近这些数据的权重 $p$，分别赋予权重 $p_i/2$ 给 $\Phi(rw_i)$和 $\Phi(-rw_i)$。将归一化的 Bers 输出记为 $Y(r,p)$。点态 Karcher 方程在零点处关于重心变量的导数可逆，这表明 $Y$关于 $(r,p)$ 是实解析的，且取值于 $T_X$。在投影之前，该断言同样成立：有限个有界系数场仍处于某个共同的小球内，并且点态解析级数在那里具有一致有界。

该概率律在 $r \mapsto -r$ 作用下保持不变。因此，其展开式为

$$Y(r,p) = r^2 \sum_i p_i q_X(w_i) + O(r^4),$$

对附近的权重一致成立。因此， $F(r,\ p) = Y(r,\ p)/r^2$ 可实解析地延拓到 $r = 0$，其中 $F(0,\ p) = \sum_i p_i q_X(w_i)$。仿射张成条件使其在 $\sum_i \dot{p}_i = 0$上的导数满射。限制到一个实 $2n$维的右逆子空间，并应用隐函数定理。由此得到正权重 $p(r,\ x')$，它们对足够小的 $r$ 以及 $x'$ 接近 $x$时有定义，并且其输出恰好为 $r^2 x'$。它们的参数概率律以中心为中心，半径至多为 $r$。

在 $(0,\ x)$ 处，缩放后的能量至多为 $J_X(x) + \eta$。权重的连续性以及 $J_X$将其界定为 $J_X(x') + 2\eta$，在一个更小的邻域内对所有充分小的 $r$均成立。用有限个这样的邻域覆盖 $K$。这就证明了统一上界；随后令 $\eta \downarrow 0$。最后，(88)给出

$$4\mathcal{I}_X(t;r) \le \mathcal{K}_X(t;r) \le 4(1 + C_X r^2)\mathcal{I}_X(t;r),$$

这就证明了色散陈述。 □

### 3.5 超出切范数的部分

记

$$J_X^{(2)}(x) = \inf\{\|w\|_2^2 : q_X(w) = x,\ w \in V,\ \|w\|_\infty \le 1\}. \tag{59}$$

这是带有振幅界的单方向二次代价。凸化值满足 $J_X \le J_X^{(2)}$。

**定理 3.8** (有界振幅下的小输出超额)。 固定 $\gamma_X(u) = 1$。存在$\lambda_0$、$C_{X,\ u} > 0$ 使得，对于 $0 < \lambda \le \lambda_0$，

$$\lambda + \kappa_X \lambda^3 \le J_X(\lambda u) \le J_X^{(2)}(\lambda u) \le \lambda + C_{X,u}\lambda^2. \tag{60}$$

上界由一个光滑方向达到，其上确界范数至多为 $1/2$，并且支撑在互不相交的圆盘上，这些圆盘具有一个固定的非空开补集。

如果归一化支撑微分 $\phi$ *for* $u$ 的 $|\phi|_h$仅有非退化极大值，那么对于某个 $c_{X,\ u,\ \phi} > 0$，

$$c_{X,u,\phi}\lambda^2 \le J_X(\lambda u) - \lambda \le J_X^{(2)}(\lambda u) - \lambda \le C_{X,u}\lambda^2. \tag{61}$$

证明。 取一个固定的最优原子表示

$$u = \sum_{j=1}^{N} p_j e_X(p_j', a_j), \qquad p_j > 0, \quad \sum_j p_j = 1.$$

如定理2.14中所述，合并重复的点，并在剩余点周围选择互不相交的坐标圆盘，同时在它们之外留出一个固定的开圆盘 $O$。应用引理2.13，取质量$m_j = \lambda p_j$ 和半径 $\varepsilon_j = L\sqrt{\lambda p_j}$。选择 $L$ 足够大，使得（41）将每个振幅界定为$1/2$，然后取 $\lambda_0$ 足够小，使所有支撑圆盘都保持在所选坐标圆盘内。它们的和 $w_\lambda$ 具有精确输出 $\lambda u$，并且

$$\|w_\lambda\|_2^2 \le \sum_j \lambda p_j (1 + C_j L^2 \lambda p_j) \le \lambda + C_{X,u}\lambda^2.$$

对于振幅至多为一的任意方向有限混合，命题3.4 给出，相对于一个支撑 $\phi$，

$$m - \operatorname{Re}\langle x, \phi\rangle \geq \kappa_X m^3,$$

并且在非退化假设下，它给出下界 $\kappa_\phi m^2$。这些不等式在响应–能量对的极限下保持不变。将它们应用于 $(\lambda u,\ J_X(\lambda u)) \in \mathscr{C}_X$ 并使用 $J_X(\lambda u) \geq \lambda$。对于单方向下确界，同样的下界也成立。 □

### 3.6 非退化支撑微分

在其零因子之外，厄米线丛的全纯截面的范数恰好在其陈协变导数消失处取临界值。Douglas–Shiffman–Zelditch 发展了相应的喷射与海森描述 [15, §§2,4]。将这一框架应用于带有双曲厄米度量的 $K_X^2$，可得到二次超额定律中所使用的非退化条件。我们验证了该条件在每个闭曲面上的一般性，并分别处理亏格二魏尔斯特拉斯点，同时确定由此产生的接触面。

**定理 3.9**（非退化余切极大值点）。对于每个亏格至少为二的闭双曲曲面 $X$，集合

$$\mathcal{G}_X = \{0 \neq \phi \in \mathcal{Q}(X) : \textit{every global maximum of } |\phi|_h \textit{ is nondegenerate}\}$$

在 $Q(X) \setminus \{0\}$ 中既开又稠密。对于归一化的 $\phi \in G_X$，极大值点集合 $Z_\phi$ 是有限的，而暴露面

$$\{u : \gamma_X(u) = \operatorname{Re}\langle u, \phi\rangle = 1\} = \operatorname{conv}\{e_X(p, a_\phi(p)) : p \in Z_\phi\}, \qquad a_\phi = \overline{\varphi}/|\varphi|. \tag{62}$$

该面上正锥中的每个方向都有一个具有非退化极大值的支撑微分。

在以归一化极大值 $p$ 为中心的圆盘一致化中，记 $\phi = \varphi(z)dz^2$ 和 $\rho(z) = 2/(1-|z|^2)$。则 $\varphi'(0) = 0$，而 $1 - |\phi|_h$ 在 $p$ 处的双曲海塞矩阵的特征值为

$$1 \pm \frac{1}{4}\left|\frac{\varphi''(0)}{\varphi(0)}\right|. \tag{63}$$

特别地，当且仅当 $|\varphi''(0)| < 4|\varphi(0)|$ 时，该极大值是非退化的。

证明。我们使用附录 A.9– A.11] 中回顾的 Serre 对偶和黎曼–罗赫定理形式。首先设 $g \geq 3$。从 $H^0(X, K_X^2)$ 到其在任意 $p$ 处的一阶喷射的映射是满射的。事实上，障碍群为

$$H^1(X, K_X^2(-2p)) \simeq H^0(X, K_X^{-1}(2p))^* = 0,$$

因为后一个线丛的度为 $4 - 2g < 0$。二阶喷射评价同样是满射的：其障碍为 $H^1(X, K_X^2(-3p)) \simeq H^0(X, K_X^{-1}(3p))^* = 0$，这是因为 $\deg K_X^{-1}(3p) = 5 - 2g < 0$。因此，$K_X^2$ 在此亏格范围内满足 [15, 定义 4.1]的喷射生成假设。在点对 $(\phi, p)$ 满足 $\phi(p) \neq 0$ 的开集上，考虑截面 $F(\phi, p) = d_p \log |\phi|_h$（$X$ 的拉回的实余切丛的截面）。它在 $\phi$ 中沿 $\psi$ 的变分为

$$D_\phi F[\psi] = \operatorname{Re} d(\psi/\phi).$$

一阶喷射满射性使我们能够令 $\psi(p)=0$ 并任意指定其导数。因此， $F$ 与零截面横截。在此开集中的可数个乘积邻域上应用参数横截性，可得到一个稠密剩余的微分集合，使得远离零因子的每个临界点都是非退化的 [24, 第3章，定理2。7]。全局最大值取正值，因此这证明了 $\mathcal{G}_X$的稠密性。

对于 $g=2$，除六个魏尔斯特拉斯点外，同样的论证均适用：零次丛 $K_X^{-1}(2p)$ 存在截面，当且仅当 $2p$ 是规范的。在这样的点处，超椭圆 involution 的局部形式为 $z\mapsto -z$，保持双曲度量不变，并且在 $H^0(X,K_X^2)$ 上平凡作用。最后一个断言由 $H^0(X,K_X^2)=\mathrm{Sym}^2 H^0(X,K_X)$ 得出，因为这两个空间的维数均为三。因此，在该点处不为零的每个微分都是临界的。系统 $K_X^2$ 没有基点，所以取 $\phi_0(p)\neq 0$。黎曼–罗赫定理给出

$$h^0(K_X^2(-2p))=2,\qquad h^0(K_X^2(-3p))=1.$$

因此存在一个在 $p$ 处恰好二阶消失的 $\psi$。在族 $\phi_0+t\psi,\, t\in\mathbb{C}$ 中， $p$ 处的值是固定的，而 $\log\phi$ 的复二阶导数可以自由变化。$\log|\phi|_h$ 的实海塞矩阵的迹由曲率决定，而其无迹部分遍历所有无迹对称矩阵。因此，在 $\{\phi(p)\neq 0\}$ 上，其行列式是微分的一个非零实解析函数。条件 $\phi(p)=0$ 以及在这些有限个点处的退化性，都可以在一个开稠密集上同时避免。与横截曲线在其补集上得到的余集相交，便证明了在二阶时稠密性同样成立。

非退化极大值是孤立的，因此 $Z_\phi$ 是有限的。选取它们互不相交的小邻域，使海森矩阵在其上负定。在这些邻域之外，该范数严格低于其最大值。这两个性质在 $\phi$的小扰动下仍然成立；隐函数定理将每个邻域中唯一的临界极大值延拓下去。邻近微分的每一个全局最大值都落在这些点之中。这就证明了开性。

对于（63），在归一化最大值处展开：

$$\log|\phi|_h=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\!\left(\frac{\varphi''(0)}{\varphi(0)}z^2\right)-2|z|^2+O(|z|^3).$$

双曲海塞矩阵是零点处欧几里得海塞矩阵的四分之一。对所显示的二次项取负即得（63）。最后，与 $\phi$ 在原子单位球（38）中的等式迫使每个原子位于相位为$a_\phi$的极大值处。这就证明了（62）以及关于其正锥的断言。

□

### 3.7 超额系数的曲率界

设 $\phi\in\mathcal{G}_X$ 已归一化，并令

$$g_\phi=\tfrac{1}{2}(1-|\phi|_h^2),\qquad H_p=\mathrm{Hess}_h\, g_\phi(p),\qquad A_\phi=2\pi\sum_{p\in Z_\phi}(\det H_p)^{-1/2}.$$

行列式使用双曲标准正交标架。在极大值处， $H_p$ 等于式（63）中的海森矩阵。定义

$$B_\phi(m)=\int_0^{1/2}\bigl(m-\mathrm{Area}\{g_\phi\le s\}\bigr)_+\,ds,\qquad 0\le m\le \mathrm{Area}(X).\tag{64}$$

**命题 3.10**（显式下方超额系数）。 函数 $B_\phi$ 连续且凸，并且

$$B_\phi(m) = \frac{m^2}{2A_\phi} + o(m^2), \qquad m \downarrow 0. \tag{65}$$

对于每个 $x \in \mathscr{D}_X$，

$$J_X(x) - \mathrm{Re}\langle x, \phi\rangle \geq B_\phi(J_X(x)). \tag{66}$$

如果 $\gamma_X(u) = \mathrm{Re}\langle u, \phi\rangle = 1$，那么

$$\liminf_{\lambda\downarrow 0} \frac{J_X(\lambda u) - \lambda}{\lambda^2} \geq \frac{1}{2A_\phi} = \frac{1}{4\pi \sum_{p\in Z_\phi} (\det H_p)^{-1/2}}. \tag{67}$$

用 $J_X^{(2)}$ 代替 $J_X$，同一下界仍然成立。

证明。(64) 中的积分是 $m$的连续凸函数。对于振幅至多为一的概率律，令 $a = \mathbb{E}|w|^2$，$m = \int_X a\, dA$，并令 $x = \mathbb{E}q_X(w)$。亏损恒等式给出

$$m - \mathrm{Re}\langle x, \phi\rangle \geq \int_X g_\phi a\, dA.$$

由于 $0 \leq a \leq 1$，层蛋糕公式给出

$$\int_X g_\phi a\, dA = \int_0^{1/2} \int_{\{g_\phi > s\}} a\, dA\, ds \geq \int_0^{1/2} \big(m - \mathrm{Area}\{g_\phi \leq s\}\big)_+ ds.$$

此不等式对每个有限混合都成立。由 $B_\phi$ 的连续性可将其推广到闭的响应–能量集 $\mathscr{C}_X$；取其最小能量点即可证明 (66)。

在每个 $p \in Z_\phi$ 处的双曲正规坐标中，

$$g_\phi(\xi) = \tfrac{1}{2}\langle H_p\xi, \xi\rangle + O(|\xi|^3), \qquad dA = (1 + O(|\xi|^2))\, d\xi.$$

对这些有限个极小值进行椭圆缩放，得到面积$\{g_\phi \leq s\} = A_\phi s + o(s)$。对于每个$\varepsilon > 0$，当 $s$ 足够小时，将该次水平集面积限制在 $(A_\phi - \varepsilon)s$ 和 $(A_\phi + \varepsilon)s$ 之间。在 (64) 中进行积分，然后应用 $\varepsilon \downarrow 0$，即可证明 (65)。由定理 3.8，$J_X(\lambda u) = \lambda + O(\lambda^2)$。代入 (66) 即可证明 (67)。不等式 $J_X^{(2)} \geq J_X$ 给出了最终结论。 □

(67) 中的系数是由接触集的局部曲率决定的下界。亏损恒等式中的其余项以及向量输出约束也会影响完整的超额最小化。

# 4 精确实现与两种代价

我们从二次响应转向精确重心输出。局部平方型在不交支集上提供非线性修正，而能量加权余项保留了主导生成代价。随后，直接根据完整局部纤维图上的精确输出估计恢复。

### 4.1 逐点聚合

**随机Beltrami场** 随机Beltrami场是在概率空间（$\Omega$ $\mathscr{F}$， $\mathbb{P}$）上定义的联合可测映射 $\mu$： $X\times\Omega\to\mathbb{D}$，并且 $\mu_\omega\in$Bel($X$)几乎处处成立。我们假设一致椭圆性界

$$\|\mu\|_{L^\infty(X\times\Omega)}\le\kappa<1. \tag{68}$$

记 $\Pi$为该概率模型。对于向量值期望，垂直参数$\xi$： $\Omega\to V$是强可测且本质有界的，因此其Bochner期望属于闭子空间 $V$。

**双曲系数重心** 上的Poincaré距离 $\mathbb{D}$ 为

$$d_{\mathbb{H}}(a,b)=2\,\mathrm{arctanh}\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|. \tag{69}$$

由于($\mathbb{D}$， $d_{\mathbb{H}}$) 是一个Hadamard流形，因此每个具有有限二阶矩的概率测度都存在唯一的Fréchet重心 [38,命题4。3]。

**定义4.1 (**环境双曲代表**)**。 对于满足（68）的随机Beltrami场，定义

$$\beta_\Pi(z):=\arg\min_{b\in\mathbb{D}}\mathbb{E}\big[d_{\mathbb{H}}(b,\mu(z,\cdot))^2\big]. \tag{70}$$

我们将 $\beta_\Pi$ 称为 $\Pi$的环境双曲Fréchet代表。

**命题 4.2** （可测性与可容许性）。 在 （68）下，映射 $z\mapsto\beta_\Pi$（$z$） 是可测的，并且满足

$$\|\beta_\Pi\|_\infty\le\kappa<1.$$

因此 $\beta_\Pi\in$Bel($X$)。

证明。 令 $K_\kappa=\{|w|\le\kappa\}$。 $\mu$($z$， ·) 的逐点分布构成一个映射，该映射可测地取值于紧双曲圆盘 $K_\kappa$上的概率测度空间。在此空间上， $L^1$-Wasserstein 度量诱导弱收敛。重心映射关于该度量是连续的 [38,定理 6。3], 因此，它与分布映射的复合是可测的。由于 $K_\kappa$ 是双曲凸的，并且包含每个逐点支集，所以它也包含重心 [38, 命题 6。1]。

□

源坐标的共形变换通过对 $\mathbb{D}$进行旋转作用于系数，而这些旋转是庞加莱等距变换。因此，唯一性使得 $\beta_\Pi$ 成为一个全局贝尔特拉米微分。聚合使用仿射系数模型以及 $X$的双曲面积。

**积分Fréchet几何** 定义

$$\mathscr{D}_2(\mu,\nu)^2:=\int_X d_{\mathbb{H}}(\mu(z),\nu(z))^2\,dA_X(z). \tag{71}$$

Fubini定理将 $\mathbb{E}\mathscr{D}_2$($\nu$， $\mu$)$^2$ 与逐点损失的积分联系起来。因此， $\beta_\Pi$使积分泛函达到最小值：

$$\mathscr{E}_\Pi(\nu):=\mathbb{E}\mathscr{D}_2(\nu,\mu)^2,\qquad \mathscr{E}_\Pi(\beta_\Pi)=\inf_\nu\mathscr{E}_\Pi(\nu). \tag{72}$$

相应的离散度为

$$\mathcal{U}_2(\Pi)^2 := \mathscr{E}_\Pi(\beta_\Pi). \tag{73}$$

其在给定输出处的下确界就是内在创建成本。

**引理 4.3** (一致二阶矩界)。 存在 $\rho_0 > 0$ 和 $C < \infty$，使得对于任意满足 $\|\mu\|_\infty \le \rho \le \rho_0$的随机系数场，其逐点重心 $\beta$ 满足

$$\|\beta\|_2^2 \le C\mathbb{E}\|\mu\|_2^2, \tag{74}$$

$$\|\beta - \mathbb{E}\mu\|_1 \le C\rho\mathbb{E}\|\mu\|_2^2. \tag{75}$$

这里， $\|\cdot\|_1$ 是双曲 $L^1(X)$ 范数。

证明。 CAT(0) 方差不等式 [38, 命题 4.4], 以零点为比较点逐点应用，得到

$$d_{\mathbb{H}}(0,\beta)^2 \le \mathbb{E}d_{\mathbb{H}}(0,\mu)^2.$$

在半径为 $\rho_0$的圆盘上， $2|a| \le d_{\mathbb{H}}(0,a) \le C|a|$。因此 $|\beta|^2 \le C\mathbb{E}|\mu|^2$，积分后即得 (74)。

令 $\phi_b(a) = (a-b)/(1-ba)$。对于 $|a|$， $|b| \le \rho$，一致地有

$$\frac{\operatorname{arctanh}|\phi_b(a)|}{|\phi_b(a)|}\phi_b(a) = (a-b) + O(\rho(|a|^2+|b|^2)).$$

Karcher 方程 [27]和逐点二阶矩界因此给出

$$|\beta - \mathbb{E}\mu| \le C\rho\mathbb{E}|\mu|^2.$$

积分证明了（75）。 □

**在共形基点处聚合** 在零点处，庞加莱重心在二阶意义上与仿射期望一致。

**引理 4.4** （共形基点处的二阶聚合）。 假设 $e$

$$Y_\varepsilon = \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + R_\varepsilon,$$

其中 $X_1$、 $X_2$ 是一致有界的随机场，并且

$$\|R_\varepsilon\|_{L^\infty(X\times\Omega)} \le C|\varepsilon|^3.$$

若 $b_\varepsilon$ 是 $Y_\varepsilon$的逐点双曲重心，则

$$b_\varepsilon = \varepsilon\mathbb{E}X_1 + \varepsilon^2\mathbb{E}X_2 + O_{L^\infty}(\varepsilon^3). \tag{76}$$

证明。 假设的一致有界性给出 $\|Y_\varepsilon\|_\infty = O(|\varepsilon|)$。逐点而言，引理 4.3的证明给出

$$|b_\varepsilon - \mathbb{E}Y_\varepsilon| \le C\|Y_\varepsilon\|_\infty\mathbb{E}|Y_\varepsilon|^2 = O(|\varepsilon|^3),$$

在 $X$上一致。对假设的展开式取期望，即可证明（76）。 □

**命题 4.5**（逐点聚合的二次输出）。设 $\xi$ 是一个有界的强可测 $V$ 值概率律，并令 $m=\mathbb{E}\xi$。任何满足以下条件的 *Beltrami* 值逐点聚合规则

$$\mathcal{M}(Y_\varepsilon)=\mathbb{E}Y_\varepsilon+O_{L^\infty}(\varepsilon^3)$$

对于一致有界展开 $Y_\varepsilon=\varepsilon X_1+\varepsilon^2X_2+O_{L^\infty}(\varepsilon^3)$，在纤维样本 $\Phi(\varepsilon\xi)$ 上，其输出为

$$\tau\big(\pi(\mathcal{M}(\Phi(\varepsilon\xi)))\big)=\varepsilon^2D\tau_{[X]}[\mathbb{E}q_X(\xi-m)]+O(\varepsilon^3)$$

在任意坐标图 $\tau$ 中，满足 $\tau([X])=0$。仿射平均和庞加莱重心都满足这一假设。

证明。图展开给出 $\mathsf{M}(\Phi(\varepsilon\xi))=\varepsilon m+\frac12\varepsilon^2\mathbb{E}B(\xi,\xi)+O(\varepsilon^3)$。对 $\tau\circ\pi$ 作泰勒展开，再结合 (20)，得到 $\frac12D\tau[\mathsf{S}_0(m,m)-\mathbb{E}\mathsf{S}_0(\xi,\xi)]$,，这恰好等于所述中心化响应。引理 4.4 验证了庞加莱情形。

□

## 4.2 贝尔斯坐标与精确输出

固定一个余紧一致化 $X\simeq\mathbb{D}/\Gamma$，并记 $\mathbb{D}^*=\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$。令 $\mathfrak{P}=\mathfrak{b}\circ\pi$ 为相应的贝尔斯投影，经 $\mathfrak{P}(0)=0$归一化，取值于 $\mathbb{D}^*$ 上的 $\Gamma^*$-自守全纯二次微分空间。这里，$\Gamma^*$ 是作用在 $\mathbb{D}^*$ 上的反射作用。我们使用贝尔斯范数

$$\|\varphi\|_B:=\sup_{z\in\mathbb{D}^*}(|z|^2-1)^2|\varphi(z)|.$$

无穷远处的范数按球面坐标解释。Beurling 变换和 Beltrami 方程的 Neumann 级数解的 $L^p$ 界是经典结果，见 [6, 第 4.5.2、5.3 和 5.7]节。我们在以下估计中保留紧商空间的双曲 $L^2$ 因子。

设 $\mathfrak{b}$ 为上文固定的 Bers 嵌入。由于其目标自守空间的复维数为 $n=3g-3$，导数 $D\mathfrak{b}_{[X]}$ 是线性同构。定义归一化坐标图

$$\tau_X(t):=(D\mathfrak{b}_{[X]})^{-1}[\mathfrak{b}(t)]\in T_{[X]}\mathcal{T}(X).\tag{77}$$

则 $\tau_X([X])=0$、$(D\tau_X)_{[X]}=\mathrm{id}$，并且在 $[X]$的某个固定邻域内，

$$\|\tau_X(t)\|_{\mathrm{WP}}\asymp_X d_{\mathrm{WP}}([X],t).\tag{78}$$

对于图域中的 $v$ 和 $-v$，令

$$\Pi_v:=\tfrac12\delta_{\Phi(v)}+\tfrac12\delta_{\Phi(-v)},\qquad \beta_v:=\mathrm{bar}_{\mathbb{H}}(\Pi_v),\qquad G_X(v):=\tau_X(\pi(\beta_v)).\tag{79}$$

因此，两个样本都具有 $[X]$类，而 $G_X(v)$记录了它们逐点中点所产生的类。

## 4.3 居中概率律与精确生成成本

选取充分小的 $r_X>0$，使得 $\Phi\{v:\ \|v\|_\infty\le r_X\}$ 始终处于引理 4.3 和命题 A.1中所用的系数球内。对于 $0<r\le r_X$，考虑所有强可测的 $V$值随机参数，满足

$$\mathbb{E}v=0,\qquad \|v\|_{L^\infty(X\times\Omega)}\le r,\qquad \mu=\Phi(v).\tag{80}$$

对于它们的系数律 $\Pi$，定义

$$\mathcal{I}_X(t;r) := \inf\{\mathbb{E}\|v\|_2^2 : (80),\ \pi(\beta_\Pi) = t\}, \tag{81}$$

$$\mathcal{K}_X(t;r) := \inf\{\mathcal{U}_2(\Pi)^2 : (80),\ \pi(\beta_\Pi) = t\}. \tag{82}$$

下确界取遍任意概率空间和满足所述界的中心化律。

## 4.4 精确局部可达性

**定理 4.6**（精确局部可达性）。设 $E_0$ 为定理 *2.6*中的子空间。在 $V$的某个固定零点邻域上，映射 $G_X$ 是偶实解析的，并且满足

$$G_X(v) = -Q_0(v) + O(\|v\|_\infty^4). \tag{83}$$

限制在 $E_0$ 上，零点是孤立零点，其局部布劳威尔度（定义域和目标空间取复定向）为 $2^n$。

存在 $r_X$、$a_X$、$C_X > 0$，使得对每个 $0 < r \le r_X$，

$$\{y : \|y\|_{\mathrm{WP}} \le a_X r^2\} \subset G_X\{v \in E_0 : \|v\|_\infty < r\}. \tag{84}$$

对于每个这样的 $y$，都可以选择一个实现该结果的参数，使得

$$G_X(v) = y, \qquad \|v\|_\infty \le C_X\|y\|_{\mathrm{WP}}^{1/2}, \qquad \|v\|_2^2 \le C_X\|y\|_{\mathrm{WP}}. \tag{85}$$

证明。庞加莱圆盘中两点的中点在 (0,0)附近是实解析的。其收敛幂级数在固定的 $L^\infty$ 球上具有一致性，因此与解析图及投影复合后，使得 $G_X$实解析。交换两个样本可得 $G_X(-v) = G_X(v)$。由引理 4.4 和命题2.3,

$$\beta_v = \tfrac{1}{2}B(v,v) + O_{L^\infty}(\|v\|_\infty^3), \qquad G_X(v) = -Q_0(v) + O(\|v\|_\infty^3).$$

偶性消去了两个实泰勒展开中的三次项，从而得到（83）以及

$$\beta_v = \tfrac{1}{2}B(v,v) + O_{L^\infty}(\|v\|_\infty^4). \tag{86}$$

记 $v = \sum_i c_i v_i$。方程（25）给出

$$q(v) := -Q_0(v) = -\sum_i c_i^2 Q_i.$$

这是坐标平方映射后接一个复线性同构。它只有一个零点 $v = 0$，其局部实度为 $2^n$：任取一个坐标均非零且充分小的正则值，它有 $2^n$ 个原像，每个原像的实定向均为正。此处用到的有限维度性质回顾于 [13, 第 1]章；偶映射且二次项为首项的情形也可参见 [5] 。

$E_0$ 单位球面的紧性给出 $a > 0$，其中

$$\|q(v)\|_{\mathrm{WP}} \ge a\|v\|_\infty^2.$$

选择 $r_X$，使得（83）中的余项至多为（$a/4$）$\|v\|_\infty^2$ 对于 $\|v\|_\infty \le r_X$。然后零点仍保持孤立，并且对于 $\|y\|_{\mathrm{WP}} \le ar^2/4$，同伦

$$q + s(G_X - q) - y, \qquad 0 \le s \le 1,$$

在 $D_r = \{v \in E_0 : \|v\|_\infty < r\}$ 的边界上没有零点。同伦不变性以及目标值在此球内的变分给出

$$\deg(G_X - y, D_r, 0) = \deg(q, D_r, 0) = 2^n.$$

非零度给出一个原像，并证明（84），其中 $a_X = a/4$。此外，

$$\|G_X(v)\|_{\mathrm{WP}} \geq \tfrac{3a}{4}\|v\|_\infty^2$$

在整个该邻域内。因而， $D_r$ 中的每个实现参数都满足（85）中的第一个大小界。在 $E_0$ 上的范数等价性给出了第二个界。 □

### 4.5 中心化律的一致二阶输出

下一个估计在余项中保留二阶矩。其常数与样本数量、样本概率及其空间集中性均无关。

**命题 4.7**（一致测度展开）。 将 $r_X$化简后，（80）中每个满足$0 < r \leq r_X$ 和 $M = \mathbb{E}\|v\|_2^2$ 的中心化概率律都满足

$$\tau_X(\pi(\beta_\Pi)) = -\mathbb{E}Q_0(v) + R_\Pi, \qquad \|R_\Pi\|_{\mathrm{WP}} \leq C_X r M. \tag{87}$$

其积分色散满足

$$4M \leq \mathcal{U}_2(\Pi)^2 \leq 4(1 + C_X r^2)M. \tag{88}$$

证明。 记 $\mu = \Phi(v)$、 $\beta = \beta_\Pi$ 和 $\rho = \|\mu\|_{L^\infty(X\times\Omega)} \leq C_X r$。由三次纤维估计可得

$$\mathbb{E}\mu = \mathbb{E}\Psi(v) = \tfrac{1}{2}\mathbb{E}B(v,v) + e, \qquad \|e\|_2 \leq C_X r M, \qquad \|\mathbb{E}\mu\|_2 \leq C_X M.$$

由正交性和图估计可得

$$\mathbb{E}\|\mu\|_2^2 = M + \mathbb{E}\|\Psi(v)\|_2^2 \leq C_X M, \qquad \|\mathbb{E}\Psi(v)\|_2 \leq C_X M. \tag{89}$$

引理 4.3证明中的逐点估计为

$$|\beta - \mathbb{E}\mu| \leq C\rho\,\mathbb{E}|\mu|^2.$$

结合（89），可得

$$\begin{aligned}
&\|\beta - \mathbb{E}\mu\|_1 \leq C_X r M,\\
&\|\beta - \mathbb{E}\mu\|_2^2 \leq C\rho^2 \int_X (\mathbb{E}|\mu|^2)^2\, dA_X \leq C\rho^4 \mathbb{E}\|\mu\|_2^2 \leq C_X r^4 M.
\end{aligned}$$

由于 $M \leq$面积$(X) r^2$,

$$\|\beta\|_2^2 \leq C_X(M^2 + r^4 M) \leq C_X r^2 M.$$

调和投影的值域光滑且有限维，因此它是从 $L^1(X)$到$H$的有界映射。由于线性贝尔斯投影可分解为经过该投影,

$$\|D\mathfrak{P}_0[\eta]\|_B \leq C_X\|\eta\|_1. \tag{90}$$

将此应用于均值展开，然后使用（151）在 $\beta$。恒等映射

$$(D\mathfrak{b}_{[X]})^{-1}D\mathfrak{P}_0[\tfrac{1}{2}B(v,v)] = -Q_0(v)$$

证明（87）。

（88）中的下界由 $d_{\mathbb{H}}(a,\ b) \geq 2|a-b|$、欧几里得方差恒等式以及 $V \perp H$得出。对于上界，将最小化系数 $\beta$ 与仿射均值$\mathbb{E}\mu$进行比较。圆盘中两点之间的线段，其圆盘半径为 $\rho$，且庞加莱长度至多为 $2|a-b|/(1-\rho^2)$。因此

$$\mathcal{U}_2(\Pi)^2 \leq 4(1+C\rho^2)\mathbb{E}\|\mu - \mathbb{E}\mu\|_2^2.$$

正交性给出

$$\mathbb{E}\|\mu - \mathbb{E}\mu\|_2^2 = M + \mathbb{E}\|\Psi(v) - \mathbb{E}\Psi(v)\|_2^2 \leq M + C_X\mathbb{E}\|v\|_2^4 \leq (1+C_Xr^2)M.$$

这就证明了上界。 □

### 4.6 精确实现的尖锐成本

**定理 4.8**（精确实现的尖锐成本）。设 $u \in T_X$，$0 < r_j \leq r_X$，$r_j \to 0$，以及 $\delta_j > 0$满足

$$\delta_j/r_j^2 \longrightarrow 0. \tag{91}$$

对于 $t_j = \tau_X^{-1}(\delta_j u)$，

$$\frac{\mathcal{I}_X(t_j;r_j)}{\delta_j} \longrightarrow \gamma_X(u), \qquad \frac{\mathcal{K}_X(t_j;r_j)}{4\delta_j} \longrightarrow \gamma_X(u). \tag{92}$$

当允许的系数律限制为等权对 $\Pi_v$ 于 (79)时，两个极限均保持不变。如果要求所有垂直样本都位于 $E_0$中，则极限等于$\gamma_{X,\ E_0}(u)$ 中的(43)，同样采用两点概率律。

证明。零概率律处理 $u=0$。对于支撑半径为 $r$、能量为 $M$的中心化概率律，命题 4.7 给出

$$y := \tau_X(\pi(\beta_\Pi)) = \mathbb{E}q_X(v) + R, \qquad \|R\|_{\mathrm{WP}} \leq C_X r M.$$

范数界 $\gamma_X(\mathbb{E}q_X(v)) \leq M$意味着

$$\gamma_X(y) \leq (1+C_Xr)M, \qquad \mathcal{I}_X(t_j;r_j) \geq \frac{\delta_j\gamma_X(u)}{1+C_Xr_j}.$$

离散度比较给出 $\mathcal{K}_X \geq 4\mathcal{I}_X$。

对于上界，固定 $\eta > 0$。根据定理 2.14，选取一个光滑且具有紧支撑的位移场，使其垂直方向 $v_0$ 满足

$$q_X(v_0) = u, \qquad \|v_0\|_2^2 \leq \gamma_X(u) + \eta,$$

且其支撑集留下一个非空开补集。在该补集中选取一个局部化对角响应子空间 $E$。不相交支撑给出

$$q_X(\sqrt{\delta}\,v_0 + w) = \delta u + q_X(w), \qquad v_0 \perp_{L^2} E.$$

$E$ 上的平方型给出常数 $a$， $A>0$ ，满足

$$\|q_X(w)\|_{\mathrm{WP}} \geq a\|w\|_\infty^2, \qquad \|w\|_2^2 \leq A\|w\|_\infty^2.$$

由（83），

$$G_X(\sqrt{\delta}\, v_0 + w) - \delta u = q_X(w) + R_\delta(w)$$

余项有界于 $C\|\sqrt{\delta}\,\bar{v_0} + w\|_\infty^4$。令 $C_0 = C(\|v_0\|_\infty + 1)^4$, 取 $K$，使得 $aK^2 > C_0$，然后取足够小的 $\delta$，使得 $K\sqrt{\delta} \leq 1$。在闭球 $\|w\|_\infty \leq K\delta$ 上，

$$\|R_\delta(w)\|_{\mathrm{WP}} \leq C_0\delta^2.$$

二次项在边界上严格大于此界。同伦 $q_X(w) + sR_\delta(w)$， $0 \leq s \leq 1$，保持坐标平方度 $2^n$。因此，存在满足以下条件的某个 $w_\delta \in E$

$$G_X(\sqrt{\delta}\, v_0 + w_\delta) = \delta u, \qquad \|w_\delta\|_\infty \leq K\delta.$$

令 $v_j = \sqrt{\delta_j}\, v_0 + w_{\delta_j}$。条件（91）给出 $\|v_j\|_\infty \leq r_j$ 当 $j$充分大时，而正交性给出 s

$$\|v_j\|_2^2 \leq \delta_j(\gamma_X(u) + \eta) + AK^2\delta_j^2.$$

概率律 $\Pi_{v_j}$ 精确实现了 $t_j$。其离散度至多为 $4(1 + C_X r_j^2)\|v_j\|_2^2$。令 $j \to \infty$，则 $\eta \downarrow 0$，即可用两个样本得到这两个上界。

对于其中的概率律 $E_0$， 下界使用 $\gamma_{X,\ E_0}$。定理 4.6 所提供的参数满足 y

$$G_X(v_j) = \delta_j u, \qquad \|v_j\|_\infty = O(\sqrt{\delta_j}), \qquad q_X(v_j) = \delta_j u + O(\delta_j^2).$$

不交支集和（43）给出

$$\|v_j\|_2^2 = \gamma_{X,E_0}(q_X(v_j)) = \delta_j\gamma_{X,E_0}(u) + O(\delta_j^2).$$

支撑集和离散度的界给出了两个受限极限。 □

**推论 4.9** （必要且充分的精确成本尺度）。 固定 $u \neq 0$ 和一个支撑二次微分 $\phi$，使得

$$\|\phi\|_{\infty,h} = 1, \qquad \mathrm{Re}\langle u, \phi\rangle = \gamma_X(u).$$

每个半径为 $r$、能量为 $M$且足够小的中心化概率律，具有精确输出 $\tau_X$（$\pi$（$\beta_\Pi$）） $=\delta u$，满足

$$\delta\gamma_X(u) \leq (1 + C_X r)M - \kappa_X\frac{M^3}{r^4}. \tag{93}$$

因此，

$$\frac{\mathcal{I}_X(\tau_X^{-1}(\delta u); r)}{\delta} \geq \frac{\gamma_X(u)}{1 + C_X r} + \frac{\kappa_X\gamma_X(u)^3}{(1 + C_X r)^4}\left(\frac{\delta}{r^2}\right)^2. \tag{94}$$

设 $r_j \to 0$ 和 $\delta_j \to 0$ 均为正数。存在半径至多为 $r_j$ 的中心化概率律，对于所有充分大的 $j$，都能精确实现 $t_j = \tau_X^{-1}(\delta_j u)$ ，且

$$\mathbb{E}\|v_j\|_2^2/\delta_j \longrightarrow \gamma_X(u), \tag{95}$$

当且仅当 $\delta_j/r_j^2 \to 0$。在这种情况下，可以将概率律选为等权对。用$\mathcal{U}_2$（$\Pi_j$）$^2$/（$4\delta_j$）$\to \gamma_X$（$u$）替代（95）时，同样的等价关系也成立。

证明。 将（87）与 $\phi$ 配对，并应用命题3.4。由于$\|\phi\|_{\mathrm{WP},\,*} \le \sqrt{\text{面积}(X)}$，配对后的非线性余项至多为 $C_X r M$。这就证明了（93）。首先舍去其最后一项，得到$M \ge \delta\gamma_X$（$u$）/（$1 + C_X r$）。将这个下界代入该项，并取下确界，得到（94）。

对于满足（95）的序列，将该不等式除以 $\delta_j$:

$$\gamma_X(u) \le (1 + C_X r_j)\frac{M_j}{\delta_j} - \kappa_X \left(\frac{M_j}{\delta_j}\right)^3 \left(\frac{\delta_j}{r_j^2}\right)^2 .$$

第一项趋于 $\gamma_X$（$u$）$> 0$。最后一项必须趋于零，由此得到必要尺度。充分性由定理4.8中的两点上界推出：选取一个精确等权对，使其与受限垂直能量下确界相差不超过 $\delta_j/j$ 。该下确界除以 $\delta_j$ 趋于 $\gamma_X$（$u$），因此所选等权对满足（95）。最后，由（88）可根据能量极限得到尖锐色散极限。反过来，尖锐色散序列满足 $M_j \le \mathcal{U}_2$（$\Pi_j$）$^2/4$，而精确输出下界给出 $M_j \ge \delta_j\gamma_X$（$u$）/（$1 + C_X r_j$）。这两个界迫使尖锐能量极限成立。

□

### 4.7 定量尖锐成本机制

有界振幅超额也给出了精确非线性实现的收敛速率。记$\mathcal{I}_X^{(2)}$ 和$\mathcal{K}_X^{(2)}$ 分别为限制在等权对 $\Pi_v$ 上的相应下确界。

**定理 4.10** (定量精确生成)。 固定 $\gamma_X$（$u$）$= 1$。对于所有充分小的 $r$、$\lambda > 0$，令 $\delta = r^2\lambda$ 且令 $t = \tau_X^{-1}$（$\delta u$）。则

$$\frac{\mathcal{I}_X(t; r)}{\delta} \le \frac{\mathcal{I}_X^{(2)}(t; r)}{\delta} \le 1 + C_{X,u}\left(\lambda + \frac{r^2}{\lambda}\right). \tag{96}$$

如果 $u$ 的归一化支撑微分只有非退化极大值，那么

$$\frac{\mathcal{I}_X(t; r)}{\delta} \ge \frac{1}{1 + C_X r} + \frac{c_{X,u}\lambda}{(1 + C_X r)^3}. \tag{97}$$

因此，在满足 $r_j = o$（$\lambda_j$）的 $r_j$、$\lambda_j \to 0$ 上，以下四个量

$$\frac{\mathcal{I}_X(t_j; r_j)}{\delta_j} - 1, \quad \frac{\mathcal{I}_X^{(2)}(t_j; r_j)}{\delta_j} - 1, \quad \frac{\mathcal{K}_X(t_j; r_j)}{4\delta_j} - 1, \quad \frac{\mathcal{K}_X^{(2)}(t_j; r_j)}{4\delta_j} - 1$$

都被 $\lambda_j$的正数倍上下界所界定。

证明。 使用 $w_\lambda$ 在定理 3.8中的方向，其振幅至多为 $1/2$，并保留其固定的开补集 $O$。在 $O$中选择一个对角响应基，其张成空间为 $E$，使得

$$\|q_X(z)\|_{\mathrm{WP}} \ge a\|z\|_\infty^2, \qquad \|z\|_2^2 \le A\|z\|_\infty^2, \qquad z \in E.$$

不相交支撑和（83）给出

$$G_X(rw_\lambda + z) - r^2\lambda u = q_X(z) + R_{r,\lambda}(z).$$

在 $\|z\|_\infty \le Kr^2$上，对于固定的 $K$ 和足够小的 $r$，总参数的范数至多为 $r$，且$\|R_{r,\ \lambda}(z)\|_{\mathrm{WP}} \le C_X r^4$，且在 $\lambda$上是一致的。取 $K$使得 $aK^2 > C_X$。边界上的二次项支配余项，因此定理4.6的度数论证给出$z_{r,\ \lambda}$，从而得到精确输出和 $\|z_{r,\ \lambda}\|_2^2 \le AK^2 r^4$。支集正交性给出

$$\|rw_\lambda + z_{r,\lambda}\|_2^2 \le r^2(\lambda + C_{X,u}\lambda^2) + AK^2 r^4,$$

证明（96）。

对于下界，结合一致测度展开与命题 3.4 的非退化部分。精确能量律 $M$ 满足

$$\delta \le (1 + C_X r)M - c_{X,u}M^2/r^2.$$

首先使用 $M \ge \delta/(1 + C_X r)$，然后将该界代入最后一项。这就证明了（97）。若$r = o(\lambda)$，下方误差为 $o(\lambda)$，并且 $r^2/\lambda = o(\lambda)$。离散度比较（88）证明了剩余的两个断言。

□

## 4.8 在整个局部纤维上的恢复

取一个足够小的凸 $L^\infty$-球 $U \subset V$，使命题 A.3成立，并令$\mathcal{F}_{\mathrm{loc}} = \Phi(U)$。对于系数律，定义

$$\Delta_X(\Pi) = \inf_{\nu \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}} \big(\mathscr{E}_\Pi(\nu) - \mathscr{E}_\Pi(\beta_\Pi)\big). \tag{98}$$

H　　阿达马方差不等式 [38,命题 4.4] 对每个系数 $\nu$给出，

$$\mathscr{E}_\Pi(\nu) - \mathscr{E}_\Pi(\beta_\Pi) \ge \mathscr{D}_2(\nu, \beta_\Pi)^2 \ge 4\|\nu - \beta_\Pi\|_2^2. \tag{99}$$

我们还需要损失的局部 Hessian。

**引理 4.11**（局部损失估计）。当 $|a| + |b|$ 充分小时，

$$d_{\mathbb{H}}(a,b)^2 = 4|a-b|^2 + R_4(a,b), \qquad |D_a^j R_4(a,b)| \le C(|a| + |b|)^{4-j}, \quad 0 \le j \le 2. \tag{100}$$

积分损失在系数球上二阶实 *Fréchet* 可微。如果其样本和求值映射点在 $O(r)$ 上确界范数下，则

$$D^2\mathscr{E}_\Pi(\nu)[h,h] = 8\|h\|_2^2 + O(r^2)\|h\|_2^2, \tag{101}$$

关于有界方向 $h$ 一致成立。

证明。公式（69）在对角线附近平方后是实解析的，并且其二次项为$4|a-b|^2$，没有三次项。其余项及前两阶导数具有所述界。在紧系数圆盘上，逐点导数有界；控制收敛允许在期望和积分号下求导。对二阶导数估计进行积分即可证明（101）。

□

以下估计是相对于精确输出而言的。其常数对于中心化律、它们的能量及其集中性均是一致的。

**命题 4.12 (**精确输出下的完整局部纤维恢复**)。** 对于每个充分小的$r > 0$ 以及每个满足 (80) 的中心化概率律，令 $y = \tau_X(\pi(\beta_\Pi))$。则

$$\left|\Delta_X(\Pi) - 4\|y\|_{\mathrm{WP}}^2\right| \le C_X r^2 \|y\|_{\mathrm{WP}}^2. \tag{102}$$

等价地， $\Delta_X(\Pi) = 4d_{\mathrm{WP}}([X], \pi(\beta_\Pi))^2(1 + O_X(r^2))$。这些常数与概率律及其能量无关。

证明。 记 $\mu = \Phi(v)$、 $\beta = \beta_\Pi$，并使用正交分解

$$b = P_V\beta, \qquad h = P_H\beta, \qquad \beta = b + h.$$

设 $M = \mathbb{E}\|v\|_2^2 \le$ 面积$(X)r^2$。中心化给出 $\mathbb{E}\mu = \mathbb{E}\Psi(v) \in H$。命题 4.7的证明中的估计给出

$$\|b\|_2 \le C_X r^2\sqrt{M} \le C_X r^3, \qquad \|\beta\|_2^2 \le C_X r^2 M \le C_X r^4. \tag{103}$$

逐点地， $|\beta - \mathbb{E}\mu| \le C_X r\mathbb{E}|\mu|^2 \le C_X r^3$，而 $\|\beta - \mathbb{E}\mu\|_1 \le C_X rM$。有限维调和投影从 $L^1$ 到 $H$ 在 $L^\infty$中有界。因此

$$\|b\|_\infty \le C_X(r^3 + rM) \le C_X r^3,$$

且当 $r$ 足够小时， $b \in U$。设

$$\nu_0 = \Phi(b), \qquad n = h - \Psi(b) \in H, \qquad \beta = \nu_0 + n.$$

图估计给出 $\|\nu_0\|_2 \le C_X r^3$。在线段 $\nu_0 + tn$ 上， $L^2$ 范数至多为 $C_X r^2$，且 $L^\infty$ 范数始终处于固定的 Bers 邻域内。

令 $h_y \in H$ 为 $y$的调和提升。由于 $\mathfrak{P}(\nu_0) = 0$，沿此线段积分导数估计式（152）。归一化 Bers 坐标给出

$$\|y - D\pi_0[n]\|_{\mathrm{WP}} \le C_X r^2 \|n\|_2.$$

限制映射 $D\pi_0|_H$ 对 Weil–Petersson 范数是等距的。先吸收右端项可得到 $\|n\|_2 \le C_X\|y\|_{\mathrm{WP}}$ 的界，进而得到

$$\|n - h_y\|_2 \le C_X r^2 \|y\|_{\mathrm{WP}}. \tag{104}$$

若 $y = 0$，则必有 $n = 0$，因此 $\beta = \nu_0$ 属于该纤维，并且 $\Delta_X(\Pi) = 0$。以下设$\delta = \|y\|_{\mathrm{WP}} > 0$。由命题4.7 和定理2.8， $\delta \le C_X M \le C_X r^2$。

样本 $\nu_0$、 $\beta$ 和 $O(r)$ 位于 $L^\infty$中。由于 $\beta$ 使环境损失达到最小， 引理4.11给出

$$\mathscr{E}_\Pi(\nu_0) - \mathscr{E}_\Pi(\beta) = 4\|n\|_2^2 + O_X(r^2\|n\|_2^2) = 4\delta^2 + O_X(r^2\delta^2).$$

这就证明了上界。

在完整局部图上选取一个 $\delta^4$-近极小元 $\nu = \Phi(w)$。方差不等式（99）给出

$$\|\nu - \beta\|_2 \le C_X\delta, \qquad \|w - b\|_2 \le C_X\delta, \qquad \|w\|_2 \le C_X(r^3 + \delta).$$

固定参数邻域 $U$是凸的。因此，(168)适用于 $w, b \in U$，得到

$$\|\Psi(w) - \Psi(b)\|_2 \le C_X\delta(r^3 + \delta) \le C_X r^2\delta.$$

的调和分量 $\nu-\beta$ 为 $-n+\Psi(w)-\Psi(b)$。方程 (104)、正交性和方差不等式给出

$$\mathscr{E}_\Pi(\nu)-\mathscr{E}_\Pi(\beta)\geq 4\|P_H(\nu-\beta)\|_2^2\geq 4\delta^2-C_X r^2\delta^2.$$

近极小误差满足 $\delta^4\leq C_X r^2\delta^2$，并且已被吸收到此界中。最后，将 $\tau_X$（其在 $[X]$ 处的导数为恒等映射）表示为 Weil–Petersson正规坐标，得到 $d_{\mathrm{WP}}([X],\ \tau_X^{-1}(y))^2=\|y\|_{\mathrm{WP}}^2+O_X(\|y\|_{\mathrm{WP}}^3)$。由于 $\|y\|_{\mathrm{WP}}\leq C_X r^2$，这就证明了距离表述。

□

## 4.9 同时创造与恢复

**推论 4.13**（具有尖锐创造与恢复的精确对）。设 $u\neq 0$、$r_j\to 0$ 和 $\delta_j/r_j^2\to 0$，且有 $r_j$、$\delta_j>0$。对于所有充分大的 $j$，存在 $v_j\in V$ 使得

$$\|v_j\|_\infty\leq r_j,\qquad \Pi_j=\tfrac{1}{2}\delta_{\Phi(v_j)}+\tfrac{1}{2}\delta_{\Phi(-v_j)},\qquad \pi(\beta_{\Pi_j})=\tau_X^{-1}(\delta_j u),$$

并且这一列精确两点律满足

$$\frac{\|v_j\|_2^2}{\delta_j}\longrightarrow\gamma_X(u),\qquad \frac{\mathcal{U}_2(\Pi_j)^2}{4\delta_j}\longrightarrow\gamma_X(u),\qquad \frac{\Delta_X(\Pi_j)}{4\delta_j^2}\longrightarrow\|u\|_{\mathrm{WP}}^2. \tag{105}$$

每一列半径至多为 $r_j$ 的中心化精确输出律都具有相同的恢复极限。反之，对于非零 $u$，同时实现尖锐创造与恢复要求 $\delta_j/r_j^2\to 0$。

证明。选取推论 4.9所提供的精确等权对，其中 $\|v_j\|_2^2/\delta_j\to\gamma_X(u)$。离散度估计（88）给出了第二个极限。将命题 4.12 应用于这些相同的概率律，得到第三个极限，并为每个中心化的精确输出序列给出所述的恢复极限。必要尺度再次由推论4.9给出。

□

## 4.10 二成本比与退化

对于尖锐地　构造对，精确输出恢复估计定义了一个方向比　　o

$$\mathcal{R}_X(u):=\frac{\|u\|_{\mathrm{WP}}^2}{4\gamma_X(u)^2}=\lim_{j\to\infty}\frac{\Delta_X(\Pi_j)}{\mathcal{U}_2(\Pi_j)^4},\qquad u\neq 0, \tag{106}$$

对于推论 4.13中的概率律。该比值将纤维问题与Weil–Petersson余切空间中的点值联系起来。

**推论 4.14**（极值比与二次Bergman核）。设 $\phi_1$、…、$\phi_n$ 是 $Q(X)$ 的*Weil–Petersson*标准正交基，并令

$$\mathcal{B}_X(p):=\sum_{k=1}^{n}|\phi_k(p)|_h^2$$

是其双曲二次伯格曼核。于是

$$\sup_{u\neq 0}\mathcal{R}_X(u)=\frac{1}{4}\sup_{\phi\neq 0}\frac{\|\phi\|_{\infty,h}^2}{\|\phi\|_{\mathrm{WP},*}^2}=\frac{1}{4}\max_{p\in X}\mathcal{B}_X(p). \tag{107}$$

上确界由在使 $B_X$ 最大的点处的空间评价原子实现。对于固定亏格的闭曲面，存在 $c_g$、$C_g$、$\ell_g > 0$，使得

$$\frac{c_g}{\ell_{\mathrm{sys}}(X)} \le \sup_{u\neq 0} \mathcal{R}_X(u) \le \frac{C_g}{\ell_{\mathrm{sys}}(X)}, \qquad \ell_{\mathrm{sys}}(X) \le \ell_g. \tag{108}$$

对于每一个满足 $\ell_{\mathrm{sys}}(X) \to 0$ 的固定亏格序列，

$$\ell_{\mathrm{sys}}(X) \sup_{u\neq 0} \mathcal{R}_X(u) \longrightarrow \frac{1}{2\pi}. \tag{109}$$

因此，不存在仅依赖于亏格的常数，能够沿着所有急剧构造精确两点序列的情形，用平方离散度来界定恢复能量。

证明。 对偶性与定理2.11 给出

$$\sup_{\gamma_X(u)\le 1} \|u\|_{\mathrm{WP}} = \sup_{\|\phi\|_{\mathrm{WP},*}\le 1} \gamma_X^*(\phi) = \sup_{\|\phi\|_{\mathrm{WP},*}\le 1} \|\phi\|_{\infty,h}.$$

对于固定的 $p$，$\mathcal{Q}(X)$ 上点值的平方范数为 $\mathcal{B}_X(p)$。对 $p$取上确界即证明（107）。

选取使 $\mathcal{B}_X$ 达到最大的 $p$，并令 $\phi_p$ 为在该处达到求值映射范数的单位 Weil–Petersson 余切向量。标准正交基中的柯西–施瓦茨不等式给出

$$|\phi_p(z)|_h \le \sqrt{\mathcal{B}_X(z)} \le \sqrt{\mathcal{B}_X(p)} = |\phi_p(p)|_h.$$

选取推论 2.12 中原子 $e_X(p,a)$ 的相位，使其与 $\phi_p$ 的配对为正。该原子位于 $\gamma_X$-单位球中，且 $\phi_p/\|\phi_p\|_{\infty,h}$ 与之配对得到 1。因此其成本范数为一，而其 Weil–Petersson 范数为 $\sqrt{\mathcal{B}_X(p)}$。它实现了所断言的极值比。

对于短柄界，令 $\ell = \ell_{\mathrm{sys}}(X)$。 [36,引理 2.6]，中的领圈集中微分归一化为满足 $\|\Omega\|_{\mathrm{WP},\,*} = 1$，则有

$$\Omega = b_0 dz^2 + e \quad \text{on the collar}, \qquad \|e\|_{\infty,h} \le C_g\sqrt{\ell}, \qquad |b_0|\|dz^2\|_{2,\mathrm{collar}} = 1 + O_g(\sqrt{\ell}).$$

在共形领圈坐标中，$\rho(s) = \ell/(2\pi双曲余弦(\ell s/(2\pi)))$。因此 $\|dz^2\|_{2,\ \mathrm{collar}} \asymp \ell^{-3/2}$，并且在中心测地线上 $|dz^2|_h = (2\pi/\ell)^2$。更准确地说，按照本文的范数约定，

$$\|dz^2\|_{2,\mathrm{collar}}^2 = 2\pi \int_{-S_\ell}^{S_\ell} \rho(s)^{-2}\, ds = \frac{8\pi^5}{\ell^3}(1 + O(\ell^3)),$$

其中 $S_\ell = (2\pi/\ell)(\pi/2 - 反正切\ 双曲正弦(\ell/2))$。由此可得

$$\liminf_{\ell\to 0} \ell \sup_{\phi\neq 0} \frac{\|\phi\|_{\infty,h}^2}{\|\phi\|_{\mathrm{WP},*}^2} \ge \frac{2}{\pi}.$$

对于上界， [9, 定理 3.7] 给出的精确逐点估计表明，对于每个 $\eta > 0$，以及所有短柄足够小的曲面，

$$\|\phi\|_{\infty,h} \le (1+\eta)\sqrt{\frac{2}{\pi\ell_{\mathrm{sys}}(X)}}\, \|\phi\|_{\mathrm{WP},*}.$$

取上极限，然后 $\eta \downarrow 0$。方程 (107) 给出 (109)，从而得到 (108)。

最后，在一列退化曲面上分别选取使值最大的方向，并在每个曲面上分别应用推论 4.13 。方程 (106) 和 (108) 中的下界使极限比值无界。不同曲面的局部实现尺度可以分别选取。

□

精确比较按 $(2\pi\ell_{\mathrm{sys}})^{-1}$ 增长。接下来，我们将证明对短柄一致的非线性估计，然后研究creation范数本身的退化。

# 5 一致非线性实现

令 $\sigma_X = \min\{1, \ell_{\mathrm{sys}}(X)\}$。我们给出一个定量的实现范围，其常数仅依赖于亏格，并将 $\gamma_X(u) = 1$ 归一化。对于一般的非零方向，将 $u$ 替换为 $u/\gamma_X(u)$，并将 $\delta$ 替换为 $\delta\gamma_X(u)$。本节中，恢复下确界取遍 $\Phi(U_X)$，其中$U_X$ 是命题 5.1 中固定的依赖短闭测地线长度的图邻域。

## 5.1 一致图像与概率律估计

**命题 5.1**（非线性误差的短闭测地线长度界）。 对于每个闭亏格-$g$ 曲面，都存在通用的 $\varepsilon_0 > 0$ 和$\rho_g$、 $C_g^{\mathrm{an}} > 0$ ，并具有以下性质。对于 $\|v\|_\infty < \varepsilon_0$ ，纤维图存在且满足

$$\|\Psi(v)\|_\infty \le C_g^{\mathrm{an}} \|v\|_\infty^2, \qquad \|G_X(v) - q_X(v)\|_{\gamma_X} \le C_g^{\mathrm{an}} \|v\|_\infty^4. \tag{110}$$

在 $U_X = \{v \in V : \ \|v\|_\infty < \rho_g \sigma_X^2\}$上，二次图和图导数界 （164）–（165）以常数 $C_g^{\mathrm{an}}\sigma_X^{-2}$成立，且三次界 （166）–（167）以常数 $C_g^{\mathrm{an}}\sigma_X^{-4}$成立。

对于任意具有垂直半径 $r \le \rho_g \sigma_X^4$ 的中心化概率律，令 $M = \mathbb{E}\|v\|_2^2$和 $y = \tau_X$（$\pi$（$\beta_\Pi$））。则

$$\gamma_X\big(y - \mathbb{E}q_X(v)\big) \le C_g^{\mathrm{an}} \sigma_X^{-4} r M, \tag{111}$$

$$4M \le \mathcal{U}_2(\Pi)^2 \le 4(1 + C_g^{\mathrm{an}} \sigma_X^{-4} r^2) M, \tag{112}$$

$$\Big|\Delta_X(\Pi) - 4\|y\|_{\mathrm{WP}}^2\Big| \le C_g^{\mathrm{an}} \sigma_X^{-4} r^2 \|y\|_{\mathrm{WP}}^2. \tag{113}$$

这里，恢复下确界取遍完整图 $\Phi$（$U_X$）。

证明。 参见附录 B。 □

## 5.2 定量集中性与不相交响应基

**引理 5.2** (一致局部化实现)。 存在依赖亏格的常数 $\eta_g$、 $A_g > 0$ 以及固定的响应界 $\kappa_g = 1/2$ ，满足以下性质。对于 $\gamma_X$（$u$） $= 1$ 和 $0 < h \le \eta_g \sigma_X$，存在一个光滑垂直方向 $v_0$，其支撑集包含于有限个互不相交的圆盘中，使得

$$q_X(v_0) = u, \qquad \|v_0\|_2^2 \le 1 + A_g h, \qquad \|v_0\|_\infty \le A_g/h. \tag{114}$$

在该支撑集之外的互不相交的圆盘上还有 $n = 3g - 3$ 方向 $a_i$ ，其中$\|a_i\|_2 = 1$、$\|a_i\|_\infty \le A_g/h$，以及

$$q_X\left(\sum_i z_i a_i\right) = \sum_i z_i^2 q_X(a_i), \qquad \gamma_X\left(\sum_i z_i^2 q_X(a_i)\right) \ge \kappa_g \max_i |z_i|^2. \tag{115}$$

证明。 见附录B.2。 □

### 5.3 一个显式的实现范围

**定理 5.3** （一致精确两点实现）。 存在 $c_g$、 $C_g > 0$ ， 使得对于每个闭的$g$ 亏格曲面、每个满足 $\gamma_X$ （$u$） $= 1$的 $u$ ， 以及参数

$$0 < r \le c_g \sigma_X^4, \qquad 0 < h \le c_g \sigma_X, \qquad 0 < \delta \le c_g \min\{r^2 h^2, h^4\}, \tag{116}$$

在 $X$ 上方的纤维中存在一个等权对 $\Pi_v$ ， 满足 $\|v\|_\infty \le r$ ， 且精确输出为 $\tau_X^{-1}$（$\delta u$）。它满足

$$\frac{1}{1 + C_g \sigma_X^{-4} r} \le \frac{\mathcal{I}_X(\tau_X^{-1}(\delta u); r)}{\delta} \le \frac{\|v\|_2^2}{\delta} \le 1 + C_g \left( h + \frac{\delta}{h^4} \right), \tag{117}$$

$$1 - C_g \sigma_X^{-4} r \le \frac{\mathcal{K}_X(\tau_X^{-1}(\delta u); r)}{4\delta} \le \frac{\mathcal{U}_2(\Pi_v)^2}{4\delta} \le 1 + C_g \left( h + \frac{\delta}{h^4} + \sigma_X^{-4} r^2 \right). \tag{118}$$

每个半径至多为 $r$ 且具有该精确输出的中心化概率律都满足

$$\left| \frac{\Delta_X(\Pi)}{4\delta^2 \|u\|_{\mathrm{WP}}^2} - 1 \right| \le C_g \sigma_X^{-4} r^2. \tag{119}$$

证明。 我们首先固定度数论证中涉及的常数。令 $A_g$、$\eta_g$、$\kappa_g$ 如引理 5.2 中所述，并令 $Q_g = C_g^{\mathrm{an}}$界定（110）中的四次中点余项。将 $A_g$ 增大至至少为一，并选择

$$K_g^2 = 1 + \frac{2 Q_g A_g^4}{\kappa_g}. \tag{120}$$

只有在固定这些常数之后，才选择实现阈值，使得

$$0 < c_g \le \min\left\{ \rho_g/2, \eta_g, K_g^{-2}, A_g^{-2}, 1 \right\}. \tag{121}$$

前两个界限定了解析范围和局部化范围；第三个界控制修正幅度，第四个界则限定了指定的垂直半径。响应下界$\kappa_g$ 不受此选择影响。

取 $v_0$， $a_i$ 来自引理 5.2。对于 $w = \sum_i z_i a_i$，考虑多圆盘 $\max_i |z_i| \le K_g \delta / h^2$。由于 $\delta/h^4 \le c_g \le K_g^{-2}$,

$$\|w\|_\infty \le A_g K_g \delta / h^3 \le A_g \sqrt{\delta}/h.$$

不交支集、 $\delta \le c_g r^2 h^2$和 $c_g \le A_g^{-2}$在此多圆盘内处处成立,

$$\|\sqrt{\delta}\, v_0 + w\|_\infty \le A_g \sqrt{\delta}/h \le r \le c_g \sigma_X^4 \le \tfrac{1}{2} \rho_g \sigma_X^4.$$

因此，在形成同伦之前，整个参数区域都处于命题5.1 的解析范围内。中点展开给出

$$G_X(\sqrt{\delta}\, v_0 + w) - \delta u = q_X(w) + R_\delta(w), \qquad \gamma_X(R_\delta(w)) \le Q_g A_g^4 \delta^2 / h^4.$$

在边界上，(115) 得出

$$\gamma_X(q_X(w)) \ge \kappa_g K_g^2 \delta^2 / h^4 > Q_g A_g^4 \delta^2 / h^4.$$

同伦 $q_X(w) + sR_\delta(w)$ 没有边界零点。其坐标平方度 $2^n$ 给出一个零点 $w_\delta$，其中

$$\|w_\delta\|_2^2 = \sum_i |z_i|^2 \le nK_g^2\delta^2/h^4.$$

因此， $v = \sqrt{\delta}\, v_0 + w_\delta$ 具有精确输出 $\delta u$，并且

$$\|v\|_2^2 \le \delta(1 + A_g h) + nK_g^2\delta^2/h^4.$$

前述多圆盘界给出 $\|v\|_\infty \le r$。

对于具有该精确输出的任意中心化概率律，（111）给出 $\delta \le (1 + C_g^{\mathrm{an}}\sigma_X^{-4} r)\, M$。将其与（112）以及所构造等权对的能量结合起来，即可得到两个成本不等式。固定最终上界常数 $C_g$ 使其大于解析常数、能量常数和离散度常数；这不会改变前面的任何选择。方程（113）证明了恢复估计。

□

**推论 5.4**（退化曲面上的预设尺度）。设 $X_j$ 为闭的亏格-$g$ 曲面，令 $\gamma_{X_j}(u_j) = 1$，并设 $\sigma_j = \sigma_{X_j}$。对于满足以下条件的正参数 $r_j$、$\delta_j$，

$$\frac{r_j}{\sigma_j^4} \longrightarrow 0, \qquad \frac{\delta_j}{r_j^2\sigma_j^2} \longrightarrow 0, \tag{122}$$

存在对所有充分大的 $j$定义的精确等权对，其半径至多为 $r_j$，且输出为 $\tau_{X_j}^{-1}(\delta_j u_j)$，满足

$$\frac{\|v_j\|_2^2}{\delta_j} \to 1, \qquad \frac{\mathcal{U}_2(\Pi_j)^2}{4\delta_j} \to 1, \qquad \frac{\Delta_{X_j}(\Pi_j)}{4\delta_j^2\|u_j\|_{\mathrm{WP}}^2} \to 1. \tag{123}$$

特别是，对于 $0 < \eta < c_g$，显式选择

$$r = c_g\eta\sigma_X^4, \qquad \delta = c_g^6\eta^6\sigma_X^{10} \tag{124}$$

给出创建率和归一化离散度 $1 + O_g(\eta)$，以及恢复比率 $1 + O_g(\eta^2\sigma_X^4)$。

证明。令 $\lambda_j = \delta_j/(r_j^2\sigma_j^2)$，并选择 $h_j = c_g\sigma_j\lambda_j^{1/4}$。则

$$\frac{\delta_j}{r_j^2 h_j^2} = c_g^{-2}\lambda_j^{1/2} \to 0, \qquad \frac{\delta_j}{h_j^4} = c_g^{-4}\frac{r_j^2}{\sigma_j^2} \to 0, \qquad h_j \to 0.$$

定理 5.3 对所有充分大的 $j$ 均适用，并证明了（123）。对于（124），使用 $h = c_g\eta\sigma_X$。则

$$\frac{\delta}{r^2h^2} = c_g^2\eta^2, \qquad \frac{\delta}{h^4} = c_g^2\eta^2\sigma_X^6.$$

由于 $c_g \le 1$ 且 $0 < \eta < c_g$，两个比率都至多为 $c_g$，因此已选定的常数满足（116）。将其代入三个误差界，即得所述估计。

□

（124）中的幂在整个模空间上给出了充分的实现范围。在每个固定曲面上的尖锐代价区域仍为 $\delta = o(r^2)$，如推论4.9所证明。

# 6 creationmetric 的边界几何

余切标定决定了整个creation范数的退化。该极限将带 puncture 的分支上持续存在的二次微分，与每个节点处的一个复主部区分开来。由此得到的切范数在这些部分之间具有可加性。

设 $X_j$ 为亏格 $g$的闭双曲曲面， pinch 不相交的曲线 $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ 后收敛到有限面积带 puncture 曲面$\Sigma$。记 $\ell_{i,j}=\ell_{\alpha_i}(X_j)\to 0$和 $C_{i,j}$为它们的标准领域。在领域坐标 $z=s+i\vartheta$中，令 $\vartheta\in\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, 并设

$$\rho_{i,j}(s)=\frac{\ell_{i,j}}{2\pi\cos(\ell_{i,j}s/(2\pi))},\qquad \phi=\sum_{m\in\mathbb{Z}} b_m^{i,j}(\phi)e^{mz}dz^2.$$

定义持久子空间

$$W_j:=\{\phi\in\mathcal{Q}(X_j):b_0^{i,j}(\phi)=0,\ 1\le i\le k\}. \tag{125}$$

在 $\Sigma$上，令 $\mathcal{Q}(\Sigma)$ 表示可积全纯二次微分构成的空间，等价地说，这些微分在 puncture 处至多有简单极点。它们的双曲点态范数在每个尖点处趋于零。记 $\gamma_\Sigma$ 为 $\mathcal{Q}(\Sigma)^*$ 上与 $\|\cdot\|_{\infty,h}$对偶的范数。

领圈归一化由如下直接积分确定

$$\begin{aligned}\|dz^2\|_{2,C_{i,j}}^2&=2\pi\int_{-S_{\ell_{i,j}}}^{S_{\ell_{i,j}}}\rho_{i,j}(s)^{-2}\,ds\\&=\frac{16\pi^4}{\ell_{i,j}^3}\left(\frac{\pi}{2}-x_{i,j}+\frac{1}{2}\sin(2x_{i,j})\right)=\frac{8\pi^5}{\ell_{i,j}^3}(1+O(\ell_{i,j}^3)),\end{aligned} \tag{126}$$

其中 $x_{i,j}=\operatorname{arctan}\sinh(\ell_{i,j}/2)$，且 $S_\ell=(2\pi/\ell)(\pi/2-\operatorname{arctan}\sinh(\ell/2))$。因此，按$L^2$归一化的首项主系数为 $\ell^{3/2}$量级，而所选主系数 $\ell^2$ 的中心圆双曲范数恰为 $4\pi^2$。以下所有领圈系数均采用此归一化。

**引理 6.1** (归一化领圈微分)。 对于所有充分大的 $j$，存在复线性同构 $L_j:\ Q(\Sigma)\to W_j$，保持 *Weil–Petersson*余切内积不变；在退化识别下，它们的值局部光滑地收敛于其自变量。存在唯一的 $\chi_{i,j}\in W^{\perp_{\mathrm{WP}},j}$，使得

$$b_0^{m,j}(\chi_{i,j})=\delta_{im}\ell_{i,j}^2. \tag{127}$$

它们满足

$$\|\chi_{i,j}\|_{\infty,h;X_j\setminus C_{i,j}}+\|\chi_{i,j}-\ell_{i,j}^2dz^2\|_{\infty,h;C_{i,j}}\le C\ell_{i,j}^2. \tag{128}$$

对于每个固定的 $\varepsilon>0$，它们在 $\varepsilon$-厚部上的范数趋于零。此外，

$$\|L_jw\|_{\infty,h;\varepsilon\text{-thin}(X_j)}\le C\varepsilon^{-2}e^{-\pi/\varepsilon}\|w\|_{\mathrm{WP},*}, \tag{129}$$

对于所有充分小的 $\varepsilon$ 和充分大的 $j$。

证明。 持久空间的收敛性和薄部衰减由 [37, 引理 2.4(i)、(iii)]得到。选取相互收敛的正交归一基，并通过它们之间的对应关系定义 $L_j$。固定一个足够小的 $\bar\eta>0$，使得对所有充分大的 $j$，夹断曲线恰好是长度不超过 $2\bar\eta$的简单闭测地线。于是 [22, 引理 2.1, （2.11）–（2.12）] 可应用于

与 $j$无关的常数，并且 $W_j^{\perp}$上的主部映射是一个同构。它给出了单位微分 $\Omega_{i,\,j}$ 其在领圈 $i$上的主系数为正$b_{i,\,j}$ 在其他夹逼领圈上的主系数为零，并且

$$\|\Omega_{i,j}\|_{\infty,h;X_j\setminus C_{i,j}} + \|\Omega_{i,j} - b_{i,j}dz^2\|_{\infty,h;C_{i,j}} \le C\ell_{i,j}^{3/2}, \qquad b_{i,j}\|dz^2\|_{2,C_{i,j}} = 1 + O(\ell_{i,j}^3).$$

The 推论 4.14 的证明中计算的领圈积分给出 $b_{i,\,j} \asymp \ell_i^{3/2}$ ，$j$ 。因此

$$\chi_{i,j} = \frac{\ell_{i,j}^2}{b_{i,j}}\Omega_{i,j}$$

具有所需的主部，并满足（128）。在固定的厚部上，$\rho_{i,\,j}$ 有一个正下界，因此主项$\ell_{i,\,j}^2\rho_i^{-2}$，$_j$ 也趋于零。这就证明了剩余的断言。

□

Set

$$T_j(w,a) := L_j w + \sum_{i=1}^{k} a_i\chi_{i,j}, \qquad (w,a) \in \mathcal{Q}(\Sigma)\oplus\mathbb{C}^k. \tag{130}$$

对于 $u_0 \in\mathcal{Q}(\Sigma)^*$ 和 $c\in\mathbb{C}^k$，定义 $u_j \in T_{[X_j]}\mathcal{T}$如下：

$$\langle u_j, T_j(w,a)\rangle_T = \langle u_0, w\rangle + \sum_{i=1}^{k} c_i a_i. \tag{131}$$

**定理 6.2**（创建代价的加性退化）。 在$\mathcal{Q}(\Sigma)\oplus\mathbb{C}^k$的有界子集上，一致地成立。

$$\|T_j(w,a)\|_{\infty,h} \longrightarrow N_0(w,a) := \max\{\|w\|_{\infty,h},\ 4\pi^2\max_i|a_i|\}. \tag{132}$$

在（131）条件下，在 $(u_0,\ c)$ 的有界集上一致地成立。

$$\gamma_{X_j}(u_j) \longrightarrow \gamma_\Sigma(u_0) + \frac{1}{4\pi^2}\sum_{i=1}^{k}|c_i|. \tag{133}$$

如果 $\Sigma$有分量 $\Sigma_\nu$和 $u_0 = (u_\nu)_\nu$，那么 $\gamma_\Sigma(u_0) = \sum_\nu \gamma_{\Sigma_\nu}(u_\nu)$ 。

证明。 固定 $(w,\ a)$。在 $\Sigma$ 的每个紧子集上， $T_j(w,\ a)$ 收敛到 $w$，因此

$$\liminf_j \|T_j(w,a)\|_{\infty,h} \ge \|w\|_{\infty,h}.$$

在$C_{i,\,j}$的中心圆上，平均傅里叶系数恰为 $a_i\ell_{i,\,j}^2$，共形因子为 $\ell_{i,\,j}/(2\pi)$。对该圆取平均，得到进一步的下界

$$\|T_j(w,a)\|_{\infty,h} \ge 4\pi^2|a_i|.$$

对于上界，固定一个足够小的 $\varepsilon>0$。在 $\varepsilon$-厚部上，引理 6.1 和光滑局部收敛给出其上极限不超过$\|w\|_{\infty,\,h}$。在 $\varepsilon$-薄部 $C_{i上,\,j}$，持久项由（129）给出有界性，其余领圈微分一致趋于零，并且

$$|\ell_{i,j}^2 dz^2|_h = 4\pi^2\cos^2(\ell_{i,j}s/(2\pi)) \le 4\pi^2.$$

因此，

$$\limsup_{j} \|T_j(w,a)\|_{\infty,h} \le \max\{\|w\|_{\infty,h},\ 4\pi^2 \max_i |a_i|\} + C\varepsilon^{-2} e^{-\pi/\varepsilon}\|w\|_{\mathrm{WP},*}.$$

设 $\varepsilon \downarrow 0$。相同的估计在固定的有限维参数空间上一致地界定了 $T_j$ 的算子范数。因此，有限网论证将逐点收敛提升为有界集上的一致收敛。

在 $N_0$单位球面上的一致收敛给出数值 $\eta_j \to 0$，使得

$$(1-\eta_j)N_0 \le \|T_j(\cdot)\|_{\infty,h} \le (1+\eta_j)N_0.$$

根据定理 2.11，$\gamma_{X_j}(u_j)$ 是中间范数的对偶。最大范数 $N_0$的对偶是

$$N_0^*(u_0,c) = \gamma_\Sigma(u_0) + \frac{1}{4\pi^2}\sum_i |c_i| :$$

的选择以及 $a_i$ 的相位选择在其乘积单位球中彼此独立。取极集即可证明（133）。对 $\Sigma$ 的各个分量应用相同的论证，即可证明最后一个断言。 □

## 6.1 长度和角扭转

选择一个包含夹断曲线的裤子分解。采用表1中的角扭转约定：$\theta_i = 2\pi s_i/\ell_i$，德恩周期为 $2\pi$。下文中的偏导数均固定其他所有芬歇尔–尼尔森坐标。令 $u_j^0$ 表示由以下内容指定的持续对偶提升

$$\langle u_j^0, T_j(w,a)\rangle_T = \langle u_0, w\rangle.$$

**推论 6.3**（法坐标尺度）。 假设其余芬切尔–尼尔森数据保持在远离进一步退化的紧集内。对于固定的 $s$、$t \in \mathbb{R}^k$，

$$\gamma_{X_j}\left(u_j^0 + \sum_i \left(s_i\partial_{\ell_i} + \frac{t_i}{\ell_{i,j}^2}\partial_{\theta_i}\right)\right) \longrightarrow \gamma_\Sigma(u_0) + \sum_i \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}s_i\right)^2 + \left(\frac{t_i}{4\pi}\right)^2}. \tag{134}$$

该收敛在 $u_0$、$s$、$t$) 的有界集上一致。特别地，

$$\gamma_{X_j}(\partial_{\ell_i}) \longrightarrow \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\gamma_{X_j}(\partial_{\theta_i})}{\ell_{i,j}^2} \longrightarrow \frac{1}{4\pi}. \tag{135}$$

在每个闭曲面上，对于每条裤曲线，

$$\gamma_X(\partial_{\theta_i}) \le \frac{\ell_i^2}{4\pi}. \tag{136}$$

证明。 根据表 1，水平变分 $\mathrm{Re}(\Upsilon)$ 与 $\phi$ 的配对为 $\tfrac{1}{2}\langle\phi,\ \Upsilon\rangle_{\mathrm{WP}_\tau,*}$，其中余切内积对其第一个自变量是线性的。

令 $\Psi_i^{\mathrm{FN}}$ 为表示 $\theta_i$ 中度量导数的二次微分。角扭转恒等式 [22, (2.35)] 是针对厄米张量内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{tensor}} = 4\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{WP},*}$ 给出的。由于实张量配对是其取实部后的一半，而与变分 $\mathrm{Re}(\Upsilon)$ 的泰希米勒余切配对为 $\tfrac{1}{2}\langle\phi, \Upsilon\rangle_{\mathrm{WP},*}$，因此得到

$$\langle\partial_{\theta_i}, \phi\rangle_T = i\pi b_0^i(\phi). \tag{137}$$

由此可知 $\ell_i^{-2}{}_{,j}\,\partial_{\theta_i}$ 恰好具有对偶坐标 $(0, i\pi e_i)$ 位于 (131) 中。中心圆上的平均傅里叶系数满足

$$|b_0^i(\phi)| \le \frac{\ell_i^2}{4\pi^2}\|\phi\|_{\infty,h}.$$

这证明了（136）。

对于长度导数，[22, 命题1.1和定理1.2]，（尤其是其中的(1.7)、(1.13)和(1.14)）给出了其度量微分 $\Lambda_i^{\mathrm{FN}}$的形式：

$$\Lambda_i^{\mathrm{FN}} = -\frac{\ell_i}{2\pi^2}dz^2 + R_i \quad \text{on } C_i, \qquad \|R_i\|_{\infty,h;C_i} + \|\Lambda_i^{\mathrm{FN}}\|_{\infty,h;X\setminus C_i} \le C\ell_i.$$

Fou纤维正交性和领圈积分于是对所有 $\phi \in \mathcal{Q}$(X一致地给出 ),

$$\langle \partial_{\ell_i}, \phi\rangle_T = -\frac{2\pi^3}{\ell_i^2}b_0^i(\phi) + O(\ell_i\|\phi\|_{\infty,h}). \tag{138}$$

事实上，主积分为 $-\ell_i b_0^i(\phi)\|dz^2\|_{2,\ C_i}^2/(4\pi^2)$，而剩余的配对由$C\ell_i\|\phi\|_{1,\ h}$控制。由于总面积固定，后者至多为$C\ell_i\|\phi\|_{\infty,\ h}$。领圈积分中的 $O(\ell_i^3)$相对误差可利用 $b_0^i(\phi)$的中心圆界吸收。

将（138）代入 $T_j(w,\ a)$ 可知 $\partial_{\ell_i}$ 的极限对偶坐标为$(0,\ -2\pi^3 e_i)$。因此，方程（137）和（133）推出（134），因为

$$\frac{|-2\pi^3 s_i + i\pi t_i|}{4\pi^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}s_i\right)^2 + \left(\frac{t_i}{4\pi}\right)^2}.$$

这些一致估计证明了在有界集上一致收敛。 □

### 6.2 到夹断层的距离

范数 $\gamma$ 定义了一个长度度量

$$d_\gamma(X,Y) := \inf_{c:X\to Y}\int \gamma_{c(t)}(\dot c(t))\,dt.$$

$\widehat{\ }$记$\mathcal{T}_\gamma$ 为其度量完备化。余切范数比较给出

$$\gamma_X(u) \le \sqrt{4\pi(g-1)}\,\|u\|_{\mathrm{WP}}, \qquad d_\gamma \le \sqrt{4\pi(g-1)}\,d_{\mathrm{WP}}. \tag{139}$$

因此，恒等映射延拓为一个Lipschitz映射

$$\iota : \overline{\mathcal{T}}^{\mathrm{WP}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{T}}_\gamma.$$

这里$\mathcal{T}^{\mathrm{WP}}$ 是增广 Teichmüller 空间。Masur 建立了魏尔–彼得森度量 [29]在边界上的延拓；其完备化和分层结构见 [43]。对于多重曲线 $\Gamma$，令 $D_\Gamma$ 为其闭合压缩分层在 $\iota$ 下的像，其中包括进一步的退化。

**引理 6.4**（短长度函数的一致校准）。 存在 $\ell_g, C_g > 0$，使得对于每个亏格为 $g$的闭曲面，测地长度 $\ell_\alpha < \ell_g$ 的实微分可由余切向量 $\kappa_\alpha$表示：

$$d\ell_\alpha(u) = \mathrm{Re}\langle u, \kappa_\alpha\rangle_T.$$

对于任意一组两两不相交的此类曲线及复数 $\lambda_i$，

$$\left\|\sum_i \lambda_i \kappa_{\alpha_i}\right\|_{\infty,h} \le \frac{2}{\pi}\max_i|\lambda_i| + C_g\sum_i |\lambda_i|\ell_{\alpha_i}^2. \tag{140}$$

证明。 取一个包含所有足够短曲线的裤子分解，其裤长由亏格决定的常数控制；相关的扩张与界记录于 [22, 注2。11]。长度变分恒等式 [22, (2.8)],与（137）结合可得

$$\kappa_{\alpha_i} = -\frac{2\pi i}{\ell_i}\Psi_i^{\mathrm{FN}}.$$

例如，度量变分 $\mathrm{Re}(\Upsilon)$ 与此微分配对，得到 $-2\pi^2\,\mathrm{Re}\,b_0^i(\Upsilon)/\ell_i$，即 $\ell_i$ 的导数。

[22, 命题1.1 和定理 1.3]，中的归一化扭转估计，其逐点张量范数是我们的两倍，由此可得

$$\kappa_{\alpha_i} = -\frac{\ell_i^2}{2\pi^3}(1+O_g(\ell_i^3))dz^2 + E_i \quad \text{on } C_i, \qquad \|E_i\|_{\infty,h;C_i} + \|\kappa_{\alpha_i}\|_{\infty,h;X\setminus C_i} \le C_g\ell_i^2.$$

为检验误差，单位领圈微分的衰减部分为 $O_g(\ell_i^{3/2})$，而扭转微分在余切空间 $L^2$ 中的大小为 $O_g(\ell_i^{3/2})$。定理 1.3 中其他基系数为 $O_g(\ell_i^{3/2}\ell_m^{3/2})$；乘以 $\ell_i^{-1}$ 后，它们逐点的贡献为 $O_g(\ell_i^2\ell_m)$。裤子长度有界，因此这些贡献满足所述界。主系数由$\|dz^2\|_{2,\,C_i}^2 = 8\pi^5\ell_i^{-3}(1+O(\ell_i^3))$ 得出。

主项具有不相交支撑，并且逐点取最大值 $2/\pi + O_g(\ell_i^3)$。对误差求和即可证明（140）。 □

### 6.3 度量完备化的识别

短长度校准控制着趋近一个层的法向方式。对于完备化问题，我们还需要保留分支上的长度函数。

**引理 6.5**（有界长度校准）。存在一个普适常数 $C_0$，使得对于每一条简单闭曲线 $\alpha$，其长度微分满足

$$\|d\ell_\alpha\|_{\gamma,*} \le C_0 e^L \qquad \textit{whenever } \ell_\alpha \le L. \tag{141}$$

因此 $f_{\alpha,\,L} := \min\{\ell_\alpha, L\}$ 对于 $d_\gamma$ 在整个 $T$ 上是 $C_0e^L$-利普希茨的。

证明。 将上半平面中的单值化群共轭化，使得 $\alpha$ 的轴为 $i\mathbb{R}_+$。Gardiner 的变分公式 [20], 在 [44, §23], 中记录的归一化下，将 $d\ell_\alpha$ 表示为该二次微分的实部

$$\kappa_\alpha = \frac{2}{\pi}\sum_{B\in\langle A\rangle\backslash\Gamma} B^*\left(\frac{dz}{z}\right)^2.$$

被加项在 $p$ 处的双曲点态范数为 $\operatorname{sech}^2 d(p,\ B^{-1}(i\mathbb{R}_+))$。一条简单测地线的提升具有互不相交的、宽度为

$$w(\ell_\alpha) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\sinh(\ell_\alpha/2)}\right);$$

见 [10, 第 4]。令 $a =$ 最小值$\{1, w(L)/2\}$。以不同轴线上最近的点为中心、半径为 $a$ 的圆盘两两不相交。根据与双曲圆盘面积的比较，距离 $R$ 于 $p$ 以内的这些圆心数量至多为 $Ca^{-2}e^R$。对各层$m \le d < m+1$ 求和可得

$$\sum_B \operatorname{sech}^2 d(p, B^{-1}(i\mathbb{R}_+)) \le Ca^{-2} \sum_{m\ge 0} e^{-m} \le Ce^L.$$

最后一个不等式由领圈宽度公式得出，其中对 $L \le 1$取较大的通用常数。这就证明了（141）。在截断层处应用绝对连续性链式法则进行积分，即可证明利普希茨性质。

□

**引理 6.6** (短横截线与带标记紧性)。 固定一个带标记的裤子分解$P$、一个子多重曲线 $\Gamma \subset P$，以及 $0 < a \le B$。假设

$$\ell_\alpha \le B \quad (\alpha \in P), \qquad a \le \ell_\alpha \quad (\alpha \in P \setminus \Gamma).$$

选择实 *Fenchel–Nielsen* 扭转 $s_\alpha$ 的缝合线原点，扭转以长度为单位度量，使得一次正向 *Dehn* 扭转增加 $\ell_\alpha$。存在参考横截线 $\beta_\alpha$，它们与 $P \mid \{\alpha\}$ 不相交；此外还存在仅依赖于 $a$、$B$ 的常数 $L$、$C$，并满足以下性质。

*1.* 对于每个 $\alpha \in P \mid \Gamma$，某个整数扭转 $T_\alpha^k \beta_\alpha$ 的长度至多为 $L$。当任意相邻边界的长度趋于零时，该界仍是一致的。

*2.* 如果 $m_\alpha = i(\alpha,\ \beta_\alpha) \in \{1、2\}$，那么

$$|s_\alpha - k\ell_\alpha| \le \frac{\ell_{T_\alpha^k \beta_\alpha}}{m_\alpha} + C. \tag{142}$$

*3.* 假设 $X_j$ 满足上述长度界，$\ell_\gamma(X_j) \to 0$ 对 $\gamma \in \Gamma$成立，并且对于每个 $\alpha \in P \mid \Gamma$，某条固定的标记横截曲线 $T_\alpha^{k_\alpha}\beta_\alpha$ 具有有界长度。那么，保留下来的标记芬歇尔–尼尔森坐标落在一个紧集内，且 $X_j$ 有一个子序列在增广 *Teichmüller* 空间中收敛到 $\Gamma$-层。

证明。 沿除 $\alpha$之外的所有裤带切开。其相邻部分是一个单孔环面或一个四孔球面，并允许存在尖点边界分支。缝标记分别提供了一条长度为$m_\alpha = 1$ 或 2 的横截曲线。记 $t = s_\alpha - k\ell_\alpha$。初等移动长度公式具有如下形式

$$\cosh\frac{\ell_{T_\alpha^k\beta_\alpha}}{2} = \begin{cases} U\cosh(t/2), & m_\alpha = 1, \\ U\cosh t + V, & m_\alpha = 2. \end{cases} \tag{143}$$

这里，$U > 0$ 和 $V \ge 0$ 随裤带长度和外部边界长度连续变化，包括外部长度为零的情形；参见 [4, 命题 3.1 和 4.1]。例如，在环面情形中

$$U = \frac{\sqrt{(\cosh\ell_\alpha + \cosh(\ell_0/2))/2}}{\sinh(\ell_\alpha/2)}.$$

四孔球面系数是两个正平方根的乘积除以 $\sinh^2(\ell_\alpha/2)$。由于 $\ell_\alpha \in [a, B]$ 和外部长度属于 $[0, B]$，这个参数盒的紧性给出

$$0 < U_- \le U \le U_+, \qquad 0 \le V \le V_+,$$

其界仅取决于 $a$，$B$。即使将切割所得部分的外部裤腰与曲面其他位置的部分识别，这些界仍然成立。

选择 $k$ 使得 $|t| \le \ell_\alpha/2 \le B/2$。方程（143）给出了 $L$ 的统一上界，从而证明了（i）。反之，

$$\frac{U_-}{2} e^{m_\alpha |t|/2} \le \cosh \frac{\ell_{T_\alpha^k \beta_\alpha}}{2} \le e^{\ell_{T_\alpha^k \beta_\alpha}/2}.$$

取对数即可证明（ii），其中 $C = 2\max\{0,\ \log(2/U_-)\}$。另一种固定的缝合约定会使 $s_\alpha$ 增加 $\ell_\alpha$ 的有界倍数，并扩大 $C$。

对于（iii），整数 $k_\alpha$ 是固定的。因此，方程（142）为每个保留的实扭转提供了界。相应的长度属于 $[a, B]$，因此这些坐标落在一个紧参数盒中。在该参数盒中抽取一个收敛子列。其他长度趋于零，而在增广拓扑中，它们的扭转会被遗忘 [43]。因此，该子列收敛，并且保留了每个保留分支上的标记。 □

裤曲线和横截曲线的使用方式与 [25, 引理 10.15] 的地震度量完备化论证相同。在此，全局校准的截断长度函数为这些固定的带标记曲线提供了柯西控制。

**定理 6.7**（creation 度量的完备化）。*$T$ 的恒等映射延拓为一个与映射类群作用等变的同胚映射*

$$\iota : \overline{\mathcal{T}}^{\mathrm{WP}} \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathcal{T}}_\gamma. \tag{144}$$

*中的一个序列$\mathcal{T}$是 $d_\gamma$-柯西序列，当且仅当它是 $d_{\mathrm{WP}}$-柯西序列，并且其极限带有标记恒等。根据（144），边界点恰好是带标记节点曲面；每个保留分支上的标记都得以保留。特别地，$D_\Gamma$ 是闭的 $\Gamma$-夹断层。*

证明。延拓 $\iota$ 根据（139）是利普希茨的。每个 $f_{\alpha,\ L}$ 都可根据引理 6.5延拓到 $\gamma$-完备化。它在增广 Teichmüller 空间上的值为 $\min\{\ell_\alpha,\ L\}$，其中延拓后的长度在节点处为零，在保留分支上为通常长度；如果 $\alpha$穿过节点，则为无穷大。这是增广拓扑的长度函数描述；见 [43, 44]。

这些函数可以区分增广点。不同的节点集可由属于其中一个节点集而不属于另一个节点集的曲线加以区分。在节点集固定的情况下，各分支上的带标记长度谱决定其芬歇尔–尼尔森坐标：裤长决定各个部分，而横截曲线的长度及其扭转决定粘合参数 [10,第 3 章和 6]。因此 $\iota$ 是单射的。

设 $(X_j)$ 是 $d_\gamma$-柯西列。取小于领圈阈值的 $\varepsilon > 0$，使得所有长度小于 $2\varepsilon$ 的曲线彼此不相交。取一个依赖亏格的裤分解界 $B_g$，用于扩充这样的短多曲线 [10, 22]。选取 $N$，使尾部 $j \ge N$ 的直径小于

$$\min\left\{ \frac{\varepsilon}{2C_0 e^{2\varepsilon}},\ \frac{1}{C_0 e^{B_g+1}} \right\},$$

并令 $\Gamma$ 为 $X_N$ 上长度小于 $\varepsilon$ 的曲线。$f_{\alpha,\varepsilon}$ 和 $f_{\alpha,2\varepsilon}$ 的 Lipschitz界均独立于 $\alpha$，因此这一选择对每条曲线同时给出，

$$\ell_\alpha(X_j) \geq \varepsilon/2 \quad (\alpha \notin \Gamma), \qquad \ell_\alpha(X_j) < 2\varepsilon \quad (\alpha \in \Gamma), \qquad j \geq N. \tag{145}$$

例如，从至少 $\varepsilon$ 降至低于 $\varepsilon/2$，需要至少 $\varepsilon/(2C_0e^{\varepsilon})$ 的 $d_\gamma$-距离。因此，只有固定的有限多重曲线 $\Gamma$ 会在尾部退化。

将 $\Gamma$ 扩充为裤子分解 $P$，使得在 $X_N$ 处的长度有界于 $B_g$。第二个直径界和 $f_{\alpha,\,B_g+1}$ 确保每个裤长都小于 $B_g+1$。$\Gamma$ 中的长度收敛，因为它们在 $2\varepsilon$ 处与其截断值相等。将极限为零的那些长度记为 $\Gamma_0 \subset \Gamma$。于是，在某个较晚的尾部上，$P \setminus \Gamma_0$ 中的所有长度都属于 $[a, B_g+1]$，其中 $a>0$。

应用引理 6.6(i)，取 $B = B_g+1$。固定 $L = L(a,\ B_g+1)$，并选取一个较晚的项 $X_{N'}$，使得其后的柯西直径小于 $(C_0e^{L+1})^{-1}$。在 $X_{N'}$ 处，为 $\Gamma_0$ 之外的每条裤带选取一条长度至多为 $L$ 的横截曲线 $\beta'_\alpha = T_\alpha^{k_\alpha}\beta_\alpha$。这些现在都是固定的带标记曲线。$f_{\beta'_\alpha,\ L+1}$ 的利普希茨界给出

$$\ell_{\beta'_\alpha}(X_j) < L+1, \qquad j \geq N'.$$

事实上，达到截断水平会使该函数至少变化 1。第 (ii) 部分在整数 $k_\alpha$ 固定时，对未消失的实扭转参数作出界定。随后，第 (iii) 部分给出一个子序列，它在 $d_{\mathrm{WP}}$ 中收敛到一个带标记的节点曲面 $Z$，其中恰好是 $\Gamma_0$ 中的曲线被 pinched。

每个子序列都存在一个具有这种形式的进一步子序列，并且使用相同的裤子分解和横截曲线。所有得到的增广极限对每个$f_\alpha$、$L$都具有相同的取值，因为这些函数在原序列上是柯西的。分离性保证极限 $Z$相同。因此，整个序列在 $d_{\mathrm{WP}}$中收敛。其 $\gamma$极限为 $\iota(Z)$，从而证明了满射性和柯西等价性。该等价性的反向蕴含可直接由（139）得出。

最后，若 $\iota(Z_j) \to \iota(Z)$，取内部点 $Y_j$，使得 $d_{\mathrm{WP}}(Y_j,\ Z_j) < 1/j$。它们是 $d_\gamma$-柯西的，因此根据前面的论证在 $d_{\mathrm{WP}}$ 中收敛。单射性将它们的极限确定为 $Z$，故 $Z_j \to Z$。这证明了逆映射的连续性。等变性则由定义 $\gamma$ 的不变余切范数得出。

□

**推论6.8**（对偶度量的完备化 $L^p$）。对于 $2 \leq p \leq \infty$，令 $\gamma_{p,X}$ 为与双曲 $L^p$ 余切范数对偶的切范数，并令 $d_p$ 为其长度度量。所有 $d_p$ 都具有相同的柯西序列和相同的带标记完备化，且该完备化与增广 *Teichmüller* 空间规范同胚。

证明。对于 $A = 4\pi(g-1)$，由 Hölder 不等式可得

$$A^{-1/p}\gamma_X(u) \leq \gamma_{p,X}(u) \leq A^{1/2-1/p}\|u\|_{\mathrm{WP}}, \qquad A^{-1/p}d_\gamma \leq d_p \leq A^{1/2-1/p}d_{\mathrm{WP}}.$$

定理 6.7 确定了两端的柯西序列。相同的不等式还给出了完备化之间两个方向上的连续性。

□

**定理 6.9** (到钳缩分层的线性距离)。设 $\Gamma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ 是一个非空多重曲线。在其余数据保持在远离进一步退化的某个紧集内的 *Fenchel–Nielsen* 族中，令 $S(X) = \sum_{i=1}^k \ell_{\alpha_i}(X)$。当所有这些长度趋于零时，

$$d_\gamma(X, D_\Gamma) = \frac{\pi}{2}S(X) + O(S(X)^2). \tag{146}$$

在本文采用的 *Weil–Petersson* 归一化下，可得

$$\frac{d_\gamma(X, D_\Gamma)}{d_{\mathrm{WP}}(X, \overline{\mathcal{T}}_\Gamma^{\mathrm{WP}})^2} \longrightarrow \frac{1}{4}. \tag{147}$$

在长度和其他坐标固定时，角向扭转满足

$$d_\gamma(X(\theta), X(\theta')) \le \frac{1}{4\pi} \sum_i \ell_i^2 |\theta_i' - \theta_i|. \tag{148}$$

证明。 我们为任意连接路径建立一个下界。固定 $0 < \ell_0 < \ell_g$，并在整个 Teichmüller 空间上定义

$$S_0(X) := \sum_i \min\{\ell_{\alpha_i}(X), \ell_0\}, \qquad F(X) := \int_0^{S_0(X)} \frac{ds}{2/\pi + C_g s^2}.$$

在可微点处，只有短于 $\ell_0$ 的曲线才会对 $dS_0$有贡献。它们彼此不相交，而引理6.4 将其对偶范数界定为

$$\|dS_0\|_{\gamma,*} \le \frac{2}{\pi} + C_g \sum_{\ell_{\alpha_i} < \ell_0} \ell_{\alpha_i}^2 \le \frac{2}{\pi} + C_g S_0^2.$$

因此，根据沿分段光滑路径积分以及穿越水平集时的绝对连续链式法则， $F$ 关于 $d_\gamma$是 1-Lipschitz。它可延拓至$\mathcal{T}_\gamma$ ，并在 $D_\Gamma$上取零。对于所有足够小的钳缩长度，

$$d_\gamma(X, D_\Gamma) \ge F(X) = \frac{\pi}{2} S(X) - O_g(S(X)^3). \tag{149}$$

对于上界，沿着 $\ell_i(t) = t\ell_i(X)$减小 $\ell_i$ ，同时保持所有其他坐标不变，其中 $0 < t \le 1$。这条路径在增广 Teichmüller 空间中趋近于 $\Gamma$-层上的一点。中心圆系数界与式（138）给出

$$\gamma_X\left(\sum_i s_i \partial_{\ell_i}\right) \le \frac{\pi}{2} \sum_i |s_i| + C \sum_i \ell_i |s_i|.$$

沿钳缩路径，在所述紧性假设下，该常数是一致的。因此，其$\gamma$-长度至多为

$$\int_0^1 \left( \frac{\pi}{2} \sum_i \ell_i(X) + Ct \sum_i \ell_i(X)^2 \right) dt = \frac{\pi}{2} S(X) + O(S(X)^2).$$

结合（149），即可证明（146）。Weil–Petersson 层距离展开 [43,推论 21] 为 $d_{\mathrm{WP}}（X，\mathcal{T}_{\mathrm{WP}\,\Gamma}）= \sqrt{2\pi} S（X）+ O（S（X）^2）$；它给出了（147）。最后，沿连续的角坐标线段对（136）积分，得到（148）。 □

径向和角向估计描述了 creation 度量中的有限距离箍缩。下界使用了一个全局 Lipschitz 函数，因此偏离坐标族的 excursions 不会改变其主导径向系数。

### 6.4 退化族上的精确规律

**推论 6.10** （极限加性代价的实现）。 设 $u_j$ 具有坐标（$u_0$， $c$） $\neq 0$ 在 （131）中，并令

$$G_0 = \gamma_\Sigma(u_0) + \frac{1}{4\pi^2}\sum_i |c_i|, \qquad \sigma_j = \min\{1, \ell_{\mathrm{sys}}(X_j)\}.$$

对于任意给定的满足以下条件的正尺度

$$r_j/\sigma_j^4 \to 0, \qquad \delta_j/(r_j^2\sigma_j^2) \to 0,$$

对于所有充分大的 $j$ ，在位于 $X_j$上方的纤维中，都存在垂直半径不超过 $r_j$、精确输出为 $\tau_{X_j}^{-1}$（$\delta_j u_j$） 的等权对，使得

$$\frac{\|v_j\|_{2,X_j}^2}{\delta_j} \to G_0, \qquad \frac{\mathcal{U}_{2,X_j}(\Pi_j)^2}{4\delta_j} \to G_0, \qquad \frac{\Delta_{X_j}(\Pi_j)}{4\delta_j^2\|u_j\|_{\mathrm{WP},X_j}^2} \to 1. \tag{150}$$

证明。 由定理 6.2， $\gamma_{X_j}(u_j) \to G_0 > 0$。将推论 5.4 应用于 $u_j/\gamma_{X_j}(u_j)$ ，位移参数为 $\delta_j\gamma_{X_j}(u_j)$ 。这些假设在有界因子意义下保持不变，而（123）给出了三个极限。 □

## 7 进一步的问题

非退化余切最大值的海森矩阵给出了显式的下系数（67）。要确定完整的二次超额系数，需要在向量输出约束下，将校准亏损中的另外两项一并最小化。暴露面描述（62）规定了可能的接触质量，但仅凭支撑余切微分的一个一般性结论，并不能确定它们在切向方向中的普遍程度。

有限半径极限在可行体内部局部一致。边界输出可能需要不同的恢复构造，因为定理 3.7 中使用的正权修正项会失去其内部余量。此外，受约束的单方向取值 $J_X^{(2)}$ 是否与其凸化 $J_X$一致，也仍有待确定。

边界范数具有线性径向代价，而角向代价为 $\ell^2$阶。同时考虑长度与扭转变分的距离模型，需要对实际的标记 Fenchel–Nielsen 速度给出估计，并建立控制所有连接路径的下界。一致实现定理中的短曲线幂给出了充分的范围。对于集中在短测地线附近的方向，领圈适配场或许能扩大这些范围。

## 非线性 Bers 与纤维估计

精确输出估计在每个非线性余项中使用了两个双曲 $L^2$ 因子。我们通过将 Bers 求值映射的外部点移至无穷远处来证明这些估计。

**命题 A.1** (非线性 $L^2$贝尔斯投影的温和性)。 存在常数 $\delta_X > 0$和 $C_X < \infty$ ，使得每当

$$\|\mu\|_\infty \le \delta_X, \qquad h \in \mathcal{B}(X),$$

成立

$$\|\mathfrak{P}(\mu)-D\mathfrak{P}_0[\mu]\|_B \le C_X\|\mu\|_2^2, \tag{151}$$
$$\|D\mathfrak{P}_\mu[h]-D\mathfrak{P}_0[h]\|_B \le C_X\|\mu\|_2\|h\|_2. \tag{152}$$

二次项之后的余项满足

$$\|\mathfrak{P}(\mu)-D\mathfrak{P}_0[\mu]-\tfrac{1}{2}D^2\mathfrak{P}_0[\mu,\mu]\|_B \le C_X\|\mu\|_\infty\|\mu\|_2^2, \tag{153}$$
$$\|D\mathfrak{P}_\mu[h]-D\mathfrak{P}_0[h]-D^2\mathfrak{P}_0[\mu,h]\|_B \le C_X\|\mu\|_\infty\|\mu\|_2\|h\|_2. \tag{154}$$

这里 $\mathfrak{P}$ 是与上文所用固定一致化相关联的贝尔斯投影。可以取$\delta_X = a_0 > 0$ 为通用常数，并令 $C_X = C$ 最小值$\{1, \ell_{\mathrm{sys}}(X)\}^{-2}$。

**引理 A.2** （一致提升界）。对于 $\sigma_X =$ 最小值$\{1, \ell_{\mathrm{sys}}(X)\}$，每个圆盘一致化以及每个提升的贝尔特拉米微分都满足

$$\|\nu^\sharp\|_{2,\mathrm{e}}^2 \le C\sigma_X^{-2}\|\nu\|_{2,X}^2. \tag{155}$$

该常数与圆盘原点的位置无关。

证明。 利用商空间上的双曲面积，将欧几里得积分展开到一个基本域上。在提升点 $z$ 处得到的核为

$$K(z) = \frac{1}{4}\sum_{\gamma\in\Gamma}(1-|\gamma z|^2)^2.$$

这些轨道点在双曲度量下彼此至少相距 $\sigma_X$。它们的半径为 $\sigma_X/4$ 的圆盘互不相交。在每个圆盘上，函数 $(1-|\zeta|^2)^2/4$ 与其中心处的值相当，且常数是通用的。对各圆盘上的积分求和可得

$$K(z) \le C\sigma_X^{-2}\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^2}{4}\, dA_{\mathbb{D}}(\zeta) = C\pi\sigma_X^{-2}.$$

无论如何改变圆盘原点，轨道分离性都成立。现在展开即可证明（155）。 □

命题 *A.1* 的证明。 将系数提升到 $\mathbb{D}$，再以零延拓，并在最后一步之前使用欧几里得$L^p$ 范数。令

$$\mathscr{T}f(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dA_{\mathrm{e}}(\zeta), \qquad \mathscr{H}f(z) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\!\int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\, dA_{\mathrm{e}}(\zeta).$$

这些是 [23, §2、定理 2–3] 中使用的柯西规范化和贝尔林规范化。主解为 $F_\mu = z + \mathscr{T}\omega$，其中 $\omega$ 如下。令

$$A_\mu = M_\mu\mathscr{H}, \qquad R_\mu = (I - A_\mu)^{-1}, \qquad \omega = R_\mu\mu.$$

选择一个通用的 $a_0 > 0$，使其满足

$$a_0 \max\{\Lambda_2, \Lambda_4, \Lambda_{4/3}\} < \tfrac{1}{2},$$

其中 $\Lambda_p$ 是 $L^p$ Beurling 范数，而 $\Lambda_2 = 1$。于是，三个预解式均可由 2 [6,§4.52]界定。记 $a = \|\mu\|_\infty \le a_0$。预解方程给出

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{2,\mathrm{e}} &\le 2\|\mu\|_{2,\mathrm{e}}, \\ \|\omega-\mu\|_{1,\mathrm{e}} \le 2\|\mu\|_{2,\mathrm{e}}^2, &\qquad \|\omega-\mu\|_{2,\mathrm{e}} \le 2a\|\mu\|_{2,\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

三次系数余项为

$$\kappa = \omega - \mu - \mu\mathscr{H}\mu = \mu\mathscr{H}(\omega-\mu), \qquad \|\kappa\|_{1,\mathrm{e}} \le 2a\|\mu\|_{2,\mathrm{e}}^2.$$

对预解方程求导可得

$$\dot\omega - h = R_\mu(\mu\mathscr{H}h) + R_\mu(h\mathscr{H}\omega), \qquad \dot\omega = D\omega_\mu[h].$$

对于第一个级数，将最外层的 $\mu$置于 $L^2$ 中，并将其余所有系数因子置于 $L^\infty$中：

$$\|A_\mu^m(\mu\mathscr{H}h)\|_{1,\mathrm{e}} \le a^m\|\mu\|_{2,\mathrm{e}}\|h\|_{2,\mathrm{e}}, \qquad m \ge 0.$$

第二个级数的零阶项满足 $\|h\mathscr{H}\omega\|_{1,\ \mathrm{e}} \le 2\|h\|_{2,\ \mathrm{e}}\|\mu\|_{2,\ \mathrm{e}}$。对于每个更高阶项，利用指数为 4 和 $4/3$ 的 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} \|A_\mu^m(h\mathscr{H}\omega)\|_{1,\mathrm{e}} &\le \Lambda_{4/3}\|\mu\|_{4,\mathrm{e}}(a\Lambda_{4/3})^{m-1}\|h\mathscr{H}\omega\|_{4/3,\mathrm{e}} \\ &\le C(a\Lambda_{4/3})^{m-1}\|\mu\|_{4,\mathrm{e}}\|h\|_{2,\mathrm{e}}\|\omega\|_{4,\mathrm{e}} \\ &\le Ca(a\Lambda_{4/3})^{m-1}\|\mu\|_{2,\mathrm{e}}\|h\|_{2,\mathrm{e}}, \qquad m \ge 1. \end{aligned} \tag{156}$$

最后一步用到了 $\|\omega\|_{4,\ \mathrm{e}} \le 2\|\mu\|_{4,\ \mathrm{e}}$ 以及 $\|\mu\|_{4,\ \mathrm{e}}^2 \le a\|\mu\|_{2,\ \mathrm{e}}$。因此

$$\|\dot\omega - h\|_{1,\mathrm{e}} \le C\|\mu\|_{2,\mathrm{e}}\|h\|_{2,\mathrm{e}}.$$

将两个二次变分项相减，恰好得到三个尾项：

$$D\kappa_\mu[h] = \underbrace{\sum_{m\ge1} A_\mu^m(\mu\mathscr{H}h)}_{T_1} + \underbrace{h\mathscr{H}(\omega-\mu)}_{T_2} + \underbrace{\sum_{m\ge1} A_\mu^m(h\mathscr{H}\omega)}_{T_3}. \tag{157}$$

它们的界为

$$\begin{aligned} \|T_1\|_{1,\mathrm{e}} &\le \frac{a}{1-a}\|\mu\|_{2,\mathrm{e}}\|h\|_{2,\mathrm{e}}, \\ \|T_2\|_{1,\mathrm{e}} &\le 2a\|\mu\|_{2,\mathrm{e}}\|h\|_{2,\mathrm{e}}, \\ \|T_3\|_{1,\mathrm{e}} &\le \frac{Ca}{1-a\Lambda_{4/3}}\|\mu\|_{2,\mathrm{e}}\|h\|_{2,\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

第一项是 $L^2$ 几何尾项；第二项使用所示的 $L^2$ 界来估计 $\omega-\mu$；第三项由对（156）求和得到。特别地，

$$\|D\kappa_\mu[h]\|_{1,\mathrm{e}} \le Ca\|\mu\|_{2,\mathrm{e}}\|h\|_{2,\mathrm{e}}. \tag{158}$$

现在我们将外部求值点 $p$ 移至无穷远处。对于有限的 $|p|>1$，令 $q = 1/\bar p$，并且

$$A_p(z) = \frac{z-q}{1-\bar q z}, \qquad B_p = A_p^{-1}.$$

该圆盘自同构满足 $A_p(p) = \infty$；当 $p = \infty$ 时使用恒等映射。在坐标 $w = A_p(z)$ 中，系数及其变分变为

$$\mu_p(w) = \mu(B_p(w))\frac{\overline{B_p'(w)}}{B_p'(w)}, \qquad h_p(w) = h(B_p(w))\frac{\overline{B_p'(w)}}{B_p'(w)}. \tag{159}$$

它们仍支撑在 $\mathbb{D}$中，且上确界范数保持不变。经过莫比乌斯归一化后， $F_\mu \circ B_p$ 是 $\mu_p$的归一化解。施瓦茨导数链式法则给出

$$\mathfrak{P}(\mu_p)(w) = \mathfrak{P}(\mu)(B_p(w))B_p'(w)^2. \tag{160}$$

由于 $p$ 固定且与 $\mu$无关，对这个恒等式求导，得到 $D\mathfrak{P}_\mu[h]$ 和 $D^2\mathfrak{P}_0[\mu, h]$的同一拉回公式。因此，该公式同时适用于两个余项及其一阶变分。贝尔斯权满足精确恒等式

$$(|w|^2 - 1)^2|\phi(B_p(w))B_p'(w)^2| = (|B_p(w)|^2 - 1)^2|\phi(B_p(w))|. \tag{161}$$

因此， $p$ 处的加权值等于新的一致化中无穷远处 $w^{-4}$ 系数的绝对值。

对于它的主解，柯西表示给出

$$F_{\mu_p}(w) = w + \frac{c_p}{w} + O(w^{-2}), \qquad c_p = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \omega_p(\zeta)\, d\xi\, d\eta, \qquad \omega_p = R_{\mu_p}\mu_p.$$

施瓦茨导数中的乘积项为 $O(w^{-6})$，因此

$$\lim_{w\to\infty} w^4\mathfrak{P}(\mu_p)(w) = -\frac{6}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \omega_p(\zeta)\, d\xi\, d\eta. \tag{162}$$

线性系数和二次系数分别将 $\omega_p$ 替换为 $\mu_p$ 和 $\mu_p\mathscr{H}\mu_p$。因此，上述四个$L^1$ 估计控制了 $p$处的二次余项、其导数、三次余项及其导数。

共轭圆盘一致化表示相同的商空间，因此$\|\mu_p\|_{2,\,X} = \|\mu\|_{2,\,X}$以及$\|h_p\|_{2,\,X} = \|h\|_{2,\,X}$。将引理 A.2 应用于每个新一致化中的两个因子，并对 $p$取上确界。命题 A.1中的四个估计均可由此得到：

$$C_X = C\sigma_X^{-2}, \qquad \delta_X = a_0. \tag{163}$$

□

## A.1 局部纤维的非线性控制

贝尔斯估计还可以控制固定的小 $L^\infty$-邻域内的图像 $\Psi$ 。这是比较四次恢复问题中所有局部纤维竞争者所需的依据。

**命题 A.3** （非线性 $L^2$-温和纤维图）。 在缩小命题 *2.2*中的图邻域后，存在常数 $C_X$ 使得

$$\|\Psi(v)\|_2 \le C_X\|v\|_2^2, \tag{164}$$

$$\|D\Psi_v[h]\|_2 \le C_X\|v\|_2\|h\|_2, \qquad h \in V. \tag{165}$$

对于二次图项 $B = D^2\Psi_0$，

$$\|\Psi(v) - \tfrac{1}{2}B(v,v)\|_2 \le C_X\|v\|_\infty\|v\|_2^2, \tag{166}$$
$$\|D\Psi_v[h] - B(v,h)\|_2 \le C_X\|v\|_\infty\|v\|_2\|h\|_2. \tag{167}$$

因此，只要从 $u$ 到 $v$ 的线段始终处于该邻域内，

$$\|\Psi(v) - \Psi(u)\|_2 \le C_X(\|u\|_2 + \|v\|_2)\|v-u\|_2. \tag{168}$$

证明。令 $\mu = \Phi(v) = v + \Psi(v)$。由于 $\mathfrak{P}(\mu) = 0$，$D\mathfrak{P}_0[v] = 0$，并且 $D\mathfrak{P}_0|_H$ 是到 Bers像的切空间上的同构映射，（151）给出

$$\|\Psi(v)\|_2 \le C_X\|\mu\|_2^2 = C_X(\|v\|_2^2 + \|\Psi(v)\|_2^2).$$

最后一个等式利用了 $V \perp_{L^2} H$。对于充分小的图邻域，$\|\Psi(v)\|_2$ 中的二次项可被吸收，从而证明了（164）。

沿方向 $h \in V$对恒等映射 $\mathfrak{P}(\Phi(v)) = 0$ 求导：

$$D\mathfrak{P}_\mu[h + D\Psi_v[h]] = 0. \tag{169}$$

由于 $D\mathfrak{P}_0[h] = 0$，命题 A.1 和（164）给出

$$\|D\mathfrak{P}_\mu[h]\|_B \le C_X\|\mu\|_2\|h\|_2 \le C_X\|v\|_2\|h\|_2.$$

有限维算子 $D\mathfrak{P}_\mu|_H$ 在 $\mu$ 原点的充分小$L^\infty$-邻域内仍保持一致可逆。由于 $D\Psi_v[h] \in H$，方程（169）证明了（165）。沿线段 $u + t(v-u)$ 对（165）积分得到（168）。

在 $\mu = ta$ 处的一阶变分估计，除以 $|t|$ 并取极限，得到

$$\|D^2\mathfrak{P}_0[a,b]\|_B \le C_X\|a\|_2\|b\|_2$$

对所有有界贝尔特拉米微分 $a$，$b$ 均成立。令 $\psi = \Psi(v)$。纤维恒等式和 $D\mathfrak{P}_0[B(v,v)] = -D^2\mathfrak{P}_0[v,v]$ 推出

$$D\mathfrak{P}_0[\psi - \tfrac{1}{2}B(v,v)] = -D^2\mathfrak{P}_0[v,\psi] - \tfrac{1}{2}D^2\mathfrak{P}_0[\psi,\psi] - R_3(\mu),$$

其中 $\|R_3(\mu)\|_B \le C_X\|\mu\|_\infty\|\mu\|_2^2$。由于 $\|\mu\|_2 \le C_X\|v\|_2$，$\|\mu\|_\infty \le C_X\|v\|_\infty$，且 $\|v\|_2 \le C_X\|v\|_\infty$，对 $D\mathfrak{P}_0|_H$ 求逆即可证明（166）。

对于导数，代入

$$D\mathfrak{P}_\mu[k] = D\mathfrak{P}_0[k] + D^2\mathfrak{P}_0[\mu,k] + R_3'(\mu)[k]$$

into（169），其中 $k = h + D\Psi_v[h]$。恒等式 $D\mathfrak{P}_0[B(v,h)] = -D^2\mathfrak{P}_0[v,h]$ 给出

$$D\mathfrak{P}_0[D\Psi_v[h] - B(v,h)] = -D^2\mathfrak{P}_0[\psi,h] - D^2\mathfrak{P}_0[\mu, D\Psi_v[h]] - R_3'(\mu)[k].$$

双线性估计（165）和（154）将右侧界定为 $C_X\|v\|_\infty\|v\|_2\|h\|_2$。在 $H$ 上求逆即可证明（167）。

□

# B 一致图与局部化估计

## B.1 一致图界

我们证明命题5.1。

证明。 记 $L_X = D\mathfrak{P}_0$。在圆盘坐标下，Ahlfors–Weill反射逆 [3, 31] 为

$$(S_X\phi)(z) = -\frac{(1-|z|^2)^2}{2\bar z^4}\phi(1/\bar z), \qquad z\in\mathbb{D},$$

其在零点处的值通过延拓定义。 $\phi$ 的自守性使得 $S_X\phi$ 成为 $X$上的调和Beltrami微分。Bers再生公式给出 $L_XS_X = \mathrm{id}$ [31]。由于 $(|1/\bar z|^2-1)^2 = (1-|z|^2)^2/|z|^4$，

$$\|S_X\phi\|_\infty = \tfrac12\|\phi\|_B, \qquad P_H = S_XL_X, \qquad \|P_H\|_{\infty\to\infty}\le 3.$$

最后一个估计由 $\|L_X\|_{\infty\to B}\le 6$推出，这是对万有Bers界 $\|\mathfrak{P}(\mu)\|_B\le 6$ 在零点处求导得到的。

固定 $\eta = 1/2$并令 $N_X(\mu) = \mathfrak{P}(\mu) - L_X\mu$。在更大的万有系数球上应用全纯Cauchy估计，可得一个万有 $C_0\ge 1$ ，使得对于 $\|\mu\|_\infty\le\eta$，

$$\|N_X(\mu)\|_B\le C_0\|\mu\|_\infty^2, \qquad \|DN_X(\mu)[k]\|_B\le C_0\|\mu\|_\infty\|k\|_\infty.$$

对于 $v\in V$，令 $a=\|v\|_\infty$。由于 $L_Xv=0$，纤维方程等价于不动点方程

$$\psi = T_{X,v}(\psi) := -S_XN_X(v+\psi), \qquad \psi\in H.$$

取 $0<\varepsilon_0\le\min\{\eta/2,(4C_0)^{-1}\}$。如果 $a\le\varepsilon_0$和 $\|\psi\|_\infty\le 2C_0a^2$，那么 $\|v+\psi\|_\infty\le 2a\le\eta$，并且

$$\|T_{X,v}(\psi)\|_\infty\le 2C_0a^2, \qquad \mathrm{Lip}(T_{X,v})\le C_0a\le\tfrac14.$$

收缩保证存在唯一的不动点 $\Psi(v)$ 位于此调和球中，且关于 $v$全纯，并且$\|\Psi(v)\|_\infty\le 2C_0\|v\|_\infty^2$。这证明了一致图半径以及（110）中的第一个界。

圆盘中点的显式公式为

$$w=\frac{b-a}{1-\bar ab}, \qquad t=\frac{w}{1+\sqrt{1-|w|^2}}, \qquad \mathfrak{m}(a,b)=\frac{a+t}{1+\bar at}. \tag{170}$$

对于 $|a|$, $|b|\le 1/4$，其至四阶的实导数均有万有界：分母和平方根内的表达式始终与零保持一致的正距离。逐点映射在 $L^\infty$ 上也满足相同的界。在较小的万有图球上，收缩球上的柯西估计给出 $D^j\Psi$ 关于 $1\le j\le 4$ 的界；较大系数球上的万有贝尔斯界则给出$D^j\mathfrak{P}$在该处的界。因此，链式法则给出一个万有 $C_4$ ，使得调和提升

$$\widehat G_X(v) = S_X\mathfrak{P}(\mathfrak{m}(\Phi(v),\Phi(-v))), \qquad D\pi_0[\widehat G_X(v)] = G_X(v),$$

在该球上满足 $\|D^4\widehat G_X(v)\|_{\infty\to\infty}\le C_4$ 。其偶性消除了奇次Taylor项，而命题 2.3 将二次项确定为 $q_X$ 的调和提升。Taylor积分余项以及 $\gamma_X(D\pi_0[h])\le 4\pi(g-1)\|h\|_\infty$证明了（110）中的第二个界。取由此得到的万有 $\varepsilon_0$，并进一步缩小它，使其满足 $2\varepsilon_0\le a_0$，即附录 A中的系数半径。

附录 A 证明了命题 A.1 中的全部四个贝尔斯估计，其常数为 $C\sigma_X^{-2}$，且适用于万有系数球。反射逆算子从贝尔斯范数到调和 $L^2$ 的范数至多为 $\sqrt{4\pi(g-1)}/2$。取 $D_g \geq 1$，使其大于反射二次项常数、一阶变分常数，以及由图上确界估计得出的面积界。在吸收之前，

$$\|\Psi(v)\|_2 \leq D_g\sigma_X^{-2}(\|v\|_2^2 + \|\Psi(v)\|_2^2), \qquad \|\Psi(v)\|_2 \leq D_g\|v\|_\infty^2.$$

设定 $E_g = \sqrt{4\pi(g-1)} + D_g$ 并选择一个初步的图阈值

$$0 < \rho_g^{(0)} \leq \min\{\varepsilon_0/8, 1, (4D_g)^{-1}, (4D_gE_g)^{-1}\}.$$

对于 $\|v\|_\infty \leq \rho_g^{(0)}\sigma_X^2$，$D_g\sigma_X^{-2}\|\Psi(v)\|_2 \leq D_g^2(\rho_g^{(0)})^2 \leq 1/16$。因此，二次图项被吸收，得到

$$\|\Psi(v)\|_2 \leq 2D_g\sigma_X^{-2}\|v\|_2^2, \qquad \|\mu\|_2 \leq 2\|v\|_2, \qquad \|\mu\|_2 \leq E_g\rho_g^{(0)}\sigma_X^2.$$

调和逆算子可直接在 $L^2$ 中得到控制。对于 $A_{X,\ \mu} = S_X(D\mathfrak{P}_\mu - L_X)|_H$，反射一阶变分估计给出

$$\|A_{X,\mu}\|_{2\to2} \leq D_g\sigma_X^{-2}\|\mu\|_2 \leq D_gE_g\rho_g^{(0)} \leq \tfrac{1}{4}, \qquad \|(I_H + A_{X,\mu})^{-1}\|_{2\to2} \leq \tfrac{4}{3}. \tag{171}$$

对于 $J = D\Psi_v[k]$，对纤维方程求导并使用 $L_Xk = 0$:

$$(I_H + A_{X,\mu})J = -S_X(D\mathfrak{P}_\mu - L_X)k, \qquad \|J\|_2 \leq \tfrac{8}{3}D_g\sigma_X^{-2}\|v\|_2\|k\|_2.$$

这就证明了二次导数界。

令 $\psi = \Psi(v)$，并令 $R_3$ 为 Bers 三次余项。两个图恒等式为

$$\begin{aligned}\psi - \tfrac{1}{2}B(v,v) &= -S_X\big(D^2\mathfrak{P}_0[v,\psi] + \tfrac{1}{2}D^2\mathfrak{P}_0[\psi,\psi] + R_3(\mu)\big),\\ J - B(v,k) &= -S_X\big(D^2\mathfrak{P}_0[\psi,k] + D^2\mathfrak{P}_0[\mu,J] + DR_3(\mu)[k+J]\big).\end{aligned}$$

反射双线性界贡献了 $D_g\sigma_X^{-2}$，而 $\psi$，$J$ 的界又贡献了 $C_g\sigma_X^{-2}$。利用 $\|v\|_2 \leq \sqrt{4\pi(g-1)}\,\|v\|_\infty$ 界分别将混合项界定为 $C_g\sigma_X^{-4}\|v\|_\infty\|v\|_2^2$ 和 $C_g\sigma_X^{-4}\|v\|_\infty\|v\|_2\|k\|_2$。纯三次余项具有较小的因子 $C_g\sigma_X^{-2}$。这些就证明了所断言的三次界。

半径为 $\sigma_X/4$ 的嵌入圆盘、平均值估计和调和对偶性给出

$$\|P_Ha\|_2 \leq C_g^{\mathrm{an}}\sigma_X^{-1}\|a\|_1. \tag{172}$$

事实上，单位 $L^2$-范数的余切向量在该圆盘上的逐点范数至多为 $C\sigma_X^{-1}$。对于$\mu = \Phi(v)$，正交性和图界给出

$$\mathbb{E}\|\mu\|_2^2 \leq (1 + C_g^{\mathrm{an}}\sigma_X^{-4}r^2)M, \qquad \|\mathbb{E}\mu\|_2 \leq C_g^{\mathrm{an}}\sigma_X^{-2}M.$$

逐点重心估计具有一个普适常数，并给出

$$\|\beta - \mathbb{E}\mu\|_1 \leq C_g^{\mathrm{an}}rM, \qquad \|\beta - \mathbb{E}\mu\|_2^2 \leq C_g^{\mathrm{an}}r^4M, \qquad \|\beta\|_2^2 \leq C_g^{\mathrm{an}}\sigma_X^{-4}r^2M.$$

平均图余项的界为 $C_g^{\mathrm{an}}\sigma_X^{-4}rM$，其中 $L^2$。投影后，利用（172），线性重心修正的界为 $C_g^{\mathrm{an}}\sigma_X^{-1}rM$。对于非线性 Bers 余项，这两个因子明确为

$$\|\mathfrak{P}(\beta) - L_X\beta\|_B \leq C\sigma_X^{-2}\|\beta\|_2^2 \leq C_g^{\mathrm{an}}\sigma_X^{-6}r^2M.$$

第一因子 $\sigma_X^{-2}$来自引理 A.2 中应用于两个 $L^2$ 输入的提升估计，剩余的 $\sigma_X^{-4}$则来自关于 $\|\beta\|_2^2$ 的前述界。由于 $r \le \rho_g \sigma_X^4$ 和 $0 < \sigma_X \le 1$，该余项至多为 $C_g^{\mathrm{an}} \sigma_X^{-4} r M$。另外两个误差也满足相同的最终界。比较式 $\gamma_X \le \sqrt{4\pi(g-1)}\,\|\cdot\|_{\mathrm{WP}}$ 证明了（111）。欧几里得方差和圆盘度量比较给出（112）。

对于恢复，使用 $b = P_V \beta$、 $h = P_H \beta$、 $\nu_0 = \Phi(b)$ 以及 $n = h - \Psi(b)$，如命题4.12所示。由于 $P_V \mathbb{E}\mu = 0$ 且 $\|P_V\|_{\infty \to \infty} \le 4$,

$$\|b\|_\infty + \|b\|_2 \le C_g^{\mathrm{an}} r^3, \qquad \|\beta\|_2 + \|n\|_2 \le C_g^{\mathrm{an}} \sigma_X^{-2} r^2.$$

因此 $b \in U_X$。沿着 $\nu_0 + tn$ 对 Bers 导数进行积分可得

$$\|y - D\pi_0[n]\|_{\mathrm{WP}} \le C_g^{\mathrm{an}} \sigma_X^{-4} r^2 \|n\|_2.$$

吸收将 $n$ 与 $y$ 的调和提升识别为相对误差 $C_g^{\mathrm{an}} \sigma_X^{-4} r^2$。在 $\nu_0$处的损失给出（113）中的上界。近极小元 $\Phi(w)$ 根据方差不等式满足

$$\|w - b\|_2 \le C_g^{\mathrm{an}} \|y\|_{\mathrm{WP}}, \qquad \|w\|_2 \le C_g^{\mathrm{an}} (r^3 + \|y\|_{\mathrm{WP}}), \qquad \|y\|_{\mathrm{WP}} \le C_g^{\mathrm{an}} \sigma_X^{-2} r^2.$$

因此，图的 Lipschitz 界给出

$$\|\Psi(w) - \Psi(b)\|_2 \le C_g^{\mathrm{an}} \sigma_X^{-4} r^2 \|y\|_{\mathrm{WP}}.$$

正交性和方差不等式在整个图 $\Phi(U_X)$ 上给出相应的下界。

上述得到的所有图像和概率律常数均受一个依赖亏格的 $L_g^{\mathrm{an}}$控制，且与 $X$无关。概率律和恢复估计中的吸收只要求$L_g^{\mathrm{an}} \sigma_X^{-4} r^2 \le 1/4$，以及初始图范围。固定

$$0 < \rho_g \le \min\{\rho_g^{(0)}, (4L_g^{\mathrm{an}})^{-1/2}, 1\}, \qquad C_g^{\mathrm{an}} \ge \max\{D_g, L_g^{\mathrm{an}}\}.$$

由于 $r \le \rho_g \sigma_X^4$，这些选择满足所有吸收条件。此后的本节中，常数均固定不变。

□

## B.2 不相交的局部化方向

我们证明引理5.2。

证明。 令 $n = 3g-3$。推论 2.12 中的响应体 $u$ 可表示为至多 $2n+1$ 个求值原子的凸组合。对 $n$ 个点求值列的绝对行列式取最大值，并在其中心使用单位 Beltrami 标架。最大值为正，因为点求值张成 $\mathcal{Q}(X)^*$。若 $e_i$ 是最大化列，且 $\phi_i$ 是它们的对偶二次微分，则将第 $i$列替换为任意求值原子，可得

$$\|\phi_i\|_{\infty,h} \le 1, \qquad |\langle z, \phi_i \rangle| \le \gamma_X(z).$$

因此，对于 $E(c) = \sum_i c_i e_i$,

$$\|E^{-1} z\|_\infty \le \gamma_X(z). \tag{173}$$

在万能覆盖上，具有单位双曲上确界范数的二次微分，在固定半径圆盘上的一阶导数具有一致有界性。将实鼓包位移归一化

半径 $h$，使其垂直导数 $a$ 具有 $\|a\|_2 = 1$。局部同伦公式（22）随后经过相位旋转，得到

$$\|a\|_\infty \le C/h, \qquad \gamma_X(q_X(a) - e_X(p,b)) \le Ch. \tag{174}$$

其响应是局部余切系数相对于 $|W_z|^2$的加权平均；其能量使用 $\rho^2|W_{\bar z}|^2$。对于实值鼓包函数，这些导数的大小一致。在圆盘上对系数和稠密性进行变分，可得到 $O(h)$误差，并且对所有上确界范数为单位的余切向量，该误差均一致成立。

我们至多需要 $N_g = 4n+1$ 个圆盘： $2n+1$ 用于凸表示，以及原子基的两份副本。固定 $R_g > 1$，使得双曲面积比较允许 $N_g$ 个中心依次选取，每个中心均位于其指定中心的 $R_g h$ 以内，并且与此前各中心的距离至少为 $2h$。这一选择仅取决于 $N_g$。要求 $(R_g+1)h < \sigma_X/4$，从而构造中使用的圆盘彼此嵌入。移动中心并应用（174）会使每个响应列的变化至多为 $L_g h$，其中 $\gamma_X$为现已固定的、依赖亏格的 $L_g$。

对于得到的任一基 $F(c) = \sum_i c_i q_X(b_i)$，(173) 给出

$$\|E^{-1}(F - E)\|_{\ell^\infty \to \ell^\infty} \le n L_g h.$$

一次性选定

$$0 < \eta_g \le \min\left\{1, \frac{1}{8(R_g+1)}, \frac{1}{2nL_g}\right\}. \tag{175}$$

于是两个基矩阵均可逆，且

$$\|F^{-1}z\|_\infty \le 2\gamma_X(z), \qquad \gamma_X(F(c)) \ge \tfrac{1}{2}\|c\|_\infty.$$

这就确定了 $\kappa_g = 1/2$，不受之后任何小量阈值的影响。

令 $v_A$ 为凸表示鼓包函数之和，其系数取为对应权重的平方根。不交支集给出

$$\|v_A\|_2^2 = 1, \qquad \gamma_X(q_X(v_A) - u) \le L_g h.$$

利用第一个扰动基写成 $u - q_X(v_A) = \sum_i c_i q_X(b_i)$，其中 $\sum_i |c_i| \le 2nL_g h \le 1$。选取 $z_i^2 = c_i$ 并令 $v_0 = v_A + \sum_i z_i b_i$。不交支集使得 $q_X(v_0) = u$，其能量至多增加$2nL_g h$，并将其上确界范数限制为 $C/h$。选取 $A_g$，使其大于这些能量和上确界常数。第二个扰动基给出 $a_i$ 以及 (115)。 □

# 参考文献


[1] Bijan Afsari，黎曼 $L^p$ 质心：存在性、唯一性与凸性，《美国数学学会会刊》**139**(2011)，第2期，655–673。[2] Lars Ahlfors 和 Lipman Bers，变度量下的黎曼映射定理，《数学年刊》**72** (1960)，第2期，385–404。[3] Lars Ahlfors 和 G. Weill，*Beltrami* 方程的唯一性定理，《美国数学学会会刊》**13** (1962)，第6期，975–978。[4] Daniele Alessandrini、Lixin Liu、Athanase Papadopoulos 和 Weixu Su，裤子分解改变时芬歇尔–尼尔森距离的变化，《数学分析与几何通讯》**20**(2012)，第2期，369–395。

[5] Aram Vladimirovich Arutyunov 和 Sergey Evgenevich Zhukovskiy，满射实二次映射的性质，《数学文集》207 (2016)，第9期，1187–1214。[6] Kari Astala、Tadeusz Iwaniec 和 Gaven Martin，平面上的椭圆偏微分方程与拟共形映射，普林斯顿数学丛书，第48卷，普林斯顿大学出版社，2009。[7] Rabi Bhattacharya 和 Vic Patrangenaru，流形上内在与外在样本均值的大样本理论，《统计年刊》31 (2003)，第1期，1–29。[8] Martin Bridgeman、Kenneth Bromberg 和 Franco Vargas Pallete，重整化体积的梯度流收敛至具有全测地边界的凸核，《数学汇刊》159 (2023)，第4期，830–859。[9] Martin Bridgeman 和 Yunhui Wu，调和贝尔特拉米微分与魏尔–彼得森曲率的一致有界，《纯粹与应用数学杂志》770 (2021)，159–181。[10] Peter Buser，紧黎曼曲面的几何与谱，现代比克霍伊泽经典丛书，Birkhäuser，2010，1992年原版重印。[11] Venkat Chandrasekaran、Benjamin Recht、Pablo A. Parrilo 和 Alan S. Willsky，线性逆问题的凸几何，《计算数学基础》12 (2012)，第6期，805–849。[12] Guizhen Cui，圆上的可积渐近仿射同胚与特希米勒空间，《中国科学：数学》43 (2000)，第3期，267–279。[13] Klaus Deimling，非线性泛函分析，施普林格科学与商业媒体，2013。[14] Adrien Douady 和 Clifford J. Earle，圆上同胚的共形自然延拓，《数学学报》157 (1986)，23–48。[15] Michael R. Douglas、Bernard Shiffman 和 Steve Zelditch，临界点与超对称真空 I，《数学物理通讯》252 (2004)，第1–3期，325–358。[16] Clifford J. Earle、Vladimir Markovic 和 Dragomir Šarić，渐近特希米勒空间的重心延拓与贝尔斯嵌入，《复流形与双曲几何》，当代数学，第311卷，美国数学会，2002，第87–105页。[17] Arthur E. Fischer 和 Anthony J. Tromba，近复主丛与 Teichmüller 空间上的复结构，《纯粹与应用数学杂志》352 (1984)，151–160。[18] Alastair Fletcher 和 Vladimir Markovic，拟共形映射与 Teichmüller 理论，牛津大学出版社，2006。[19] Maurice Fréchet，度量空间中任意性质的随机元素，《亨利·庞加莱研究所年刊》10 (1948)，第4期，215–310。[20] Frederick P. Gardiner，Schiffer 内部变分与拟共形映射，《杜克数学杂志》42 (1975)，第2期，371–380。[21] Frederick P. Gardiner 和 Nikola Lakic，拟共形特希米勒理论，数学调查与专著，第76卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000。[22] Nadine Große 和 Melanie Rupflin，与芬歇尔–尼尔森坐标对偶的全纯二次微分，《全球分析与几何年刊》55 (2019)，第3期，479–507。[23] Hui Guo，测地线唯一性与贝尔斯投影的导数，《澳大利亚数学会通报》67 (2003)，第1期，145–162。

[24] Morris W. Hirsch，《微分拓扑》，数学研究生教材第33卷，Springer-Verlag，纽约，1976年。[25] Yi Huang、Ken’ichi Ohshika、Huiping Pan 和 Athanase Papadopoulos，《Teichmüller 空间上的地震度量》，2024，arXiv预印本 arXiv:2404.19515。[26] John H. Hubbard，《Teichmüller理论及其在几何学、拓扑学和动力学中的应用》第1卷：Teichmüller理论，Matrix Editions，2006。[27] Hermann Karcher，《黎曼质心与磨光子平滑》，《纯粹与应用数学通讯》30（1977），第5期，509–541。[28] Peter Lin，《贝尔特拉米系数的二进消去》，2023，预印本。[29] Howard Masur，《Weil–Petersson度量向Teichmüller 空间边界的延拓》，《杜克数学杂志》43（1976），第3期，623–635。[30] Hideki Miyachi，《Teichmüller 空间的 $L^1$–$L^\infty$几何——二阶无穷小结构》，2024，arXiv预印本 arXiv:2406.07776。[31] Subhashis Nag，《共形自然的Ahlfors-Weill截面与Bers重现公式》，《澳大利亚数学会通报》36（1987），第2期，187–196。[32] ，《Teichmüller 空间的复解析理论》，加拿大数学会专著与高级教材丛书，John Wiley & Sons，1988。[33] Xavier Pennec，《黎曼流形上的内蕴统计：几何测量的基本工具》，《数学成像与视觉杂志》25（2006），第1期，127–154。[34] ，《曲率对黎曼流形和仿射流形上经验均值的影响：小样本区域中的非渐近高集中性展开》，2019，arXiv预印本 arXiv:1906.07418。[35] R. Tyrrell Rockafellar，《凸分析》，普林斯顿数学经典丛书，普林斯顿大学出版社，1997年，1970年原版重印。[36] Melanie Rupflin 和 Peter Topping，《闭曲面上二次微分的一致Poincaré估计》，《变分法与偏微分方程》53（2015），第3–4期，587–604。[37] Melanie Rupflin、Peter M. Topping 和 Miaomiao Zhu，《Teichmüller调和映射流的渐近行为》，《数学进展》244（2013），874–893。[38] Karl-Theodor Sturm，《非正曲率度量空间上的概率测度》，《流形、图和度量空间上的热核与分析》，当代数学第338卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2003年，第357–390页。[39] Leon Armenovich Takhtajan 和 Lee-Peng Teo，《泛Teichmüller空间上的Weil–Petersson度量》，《美国数学会回忆录》183（2006），第861期，1–119。[40] Anthony J. Tromba，《几乎复结构空间上的一种自然代数仿射联络，以及Teichmüller 空间相对于其Weil–Petersson度量的曲率》，《数学手稿》56（1986），第4期，475–497。[41] Michael Wolf，《Teichmüller 空间上长度函数的Weil-Petersson Hessian》，《微分几何杂志》91（2012），第1期，129–169。[42] Scott A. Wolpert，《曲线模空间的Chern形式与黎曼张量》，《数学发明》85（1986），第1期，119–145。[43] ，《Teichmüller 空间的Weil–Petersson完备化的几何》，《微分几何调查》8（2003），357–393。[44] ，《Teichmüller 空间上测地线长度函数的行为》，《微分几何杂志》79（2008），第2期，277–334。