HA带漂移的拉普拉斯算子的 Hardy 空间与 BMO 空间 T

The Anh Bui 与 FU KEN LY

Abstract. 我们研究与带漂移的拉普拉斯算子相关的 Hardy 空间与 BMO 空间。我们定义了一个原子 Hardy 空间 H^1，其中原子在垂直于漂移方向上满足对常数和线性函数的消去条件。我们证明了 John–Nirenberg 不等式、Hardy–BMO 对偶性、有限原子范数与无限原子范数的等价性，以及插值定理。我们证明，Riesz变换及其伴随算子是有界的，从 H^1 到 L^1，以及从 L^∞ 到 BMO。此外，我们证明消去条件是最优的，但 Riesz变换不能刻画 H^1。我们还根据局部BMO刻画了其交换子 $1 < p < \infty$的 L^p 有界性。

arXiv:2611.32470v1 [math.CA] 24 Nov 2026

Contents

1. 引言 1 2. 原子 Hardy 空间与 BMO 空间 4 2.1. 原子 Hardy 空间 8 2.2. John–Nirenberg 不等式 13 2.3. Hardy–BMO 对偶性 15 2.4. 插值定理 20 3. Hardy 空间与 BMO 空间上的 Riesz变换 25 4. 局部BMO函数与 Riesz变换的交换子 33 4.1. Hardy空间对偶BMO的一个反例 33 4.2. 通过交换子刻画 34 5. 带漂移的一般拉普拉斯算子 40 致谢 43 参考文献 43

1. Introduction

漂移项出现在许多偏微分方程和微分算子中。对于漂移-扩散方程，Caffarelli 和 Vasseur [3] 在准地转方程的启发下，建立了正则性结果。相关漂移-扩散方程的 Hölder 连续性和势估计在 [18, 17]中得到了研究。对于带漂移的二阶微分算子，D' Ancona、Maheux 和 Pierfelice [7] 得到了对数Sobolev不等式及相关的热核估计。本文中，对于 $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$，我们考虑带常漂移的拉普拉斯算子

$$\mathcal{L}_v = -\Delta - 2v \cdot \nabla, \qquad d\mu_v(x) = e^{2\langle v,x\rangle}\, dx, \tag{1.1}$$

2020 数学主题分类。 主要分类 42B30；次要分类 42B20、42B35。关键词和短语。 带漂移的拉普拉斯算子、非倍增测度、Hardy 空间、BMO空间、Riesz变换、交换子。

作用于 $L^2(\mu_v)$ 上。众所周知， $\mathcal{L}_v$ 在 $L^2(\mu_v)$ 上是非负且自伴的。与 $\mathcal{L}_v$ 相关的 Riesz变换定义为

$$R_{v,j} = \partial_j \mathcal{L}_v^{-1/2}, \qquad 1 \le j \le n.$$

设 $\alpha = |v|$ ，并选取正交映射 O ，使得 $O(v/|v|) = e_1$。通过变量替换 $z = \alpha O x$，我们有

$$\langle v, x\rangle = z_1, \qquad d\mu_v(x) = \alpha^{-n} e^{2z_1}\, dz,$$

and

$$\mathcal{L}_v = \alpha^2(-\Delta_z - 2\partial_{z_1}).$$

因此，通过旋转与伸缩，我们归结为规范化的带漂移的拉普拉斯算子

$$\mathcal{L} = -\Delta - 2\partial_1, \qquad d\mu(x) = e^{2x_1}\, dx. \tag{1.2}$$

与其研究$R_{v,j}$，只需考虑

$$R_j = \partial_j \mathcal{L}^{-1/2}, \qquad 1 \le j \le n.$$

事实上，与 $\mathcal{L}_v$ 相关联的Riesz变换是经过旋转和伸缩后与 $\mathcal{L}$ 相关联的那些变换的线性组合。

对于 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，我们有

$$\mathcal{L}f = -e^{-2x_1}\,\mathrm{div}(e^{2x_1}\nabla f), \qquad \langle \mathcal{L}f, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2\, d\mu,$$

其中 $\langle f,\ g\rangle = \int f g\, d\mu$ 是 $L^2(\mu)$ 配对。由于

$$\partial_j^* = -\partial_j - 2\delta_{1j}, \qquad \mathcal{L} = \sum_{j=1}^n \partial_j^* \partial_j,$$

我们得到

$$\sum_{j=1}^n \|R_j f\|_{L^2(\mu)}^2 = \|f\|_{L^2(\mu)}^2, \qquad \|R_j\|_{L^2(\mu)\to L^2(\mu)} \le 1, \qquad \|R_j^*\|_{L^2(\mu)\to L^2(\mu)} \le 1. \tag{1.3}$$

带漂移的拉普拉斯算子所对应的 Riesz 变换已得到研究 [11, 10, 9, 15], ，其中包括 L^p 估计和端点结果。关于流形上的 Riesz 变换，参见 Coulhon 和 Duong [6] 以及 Auscher、Coulhon、Duong 和 Hofmann [2]。

非倍增情形下的调和分析受到广泛关注。极大算子也已得到研究 [1, 8], ，其中包括旋转不变测度的情形。关于非倍增空间上的奇异积分，参见 [16, 22]。高斯测度上的 Hardy 空间与 BMO 空间已在 [13, 14], 中得到研究，其中包括 Hardy–BMO 对偶性以及 Riesz 变换的端点估计。在 [4], 中，相关研究发展了局部倍增空间上的 Hardy 空间与 BMO 空间理论，包括原子分解、Hardy–BMO 对偶性和插值定理。对于指数增长李群，Sj¨ogren 和 Vallarino [19, 20] 研究了 Hardy 空间以及 Riesz 变换的端点估计，其中包括 Riesz 变换无法刻画原子 Hardy 空间这一结果。对于满足多项式增长条件的非倍增测度， [12, 21]研究了 Hardy 和 BMO 型空间。

本文的主要目标是建立与带漂移的拉普拉斯算子相关的 Hardy 空间与 BMO 空间理论。我们还研究了 Riesz变换及其交换子在这些空间上的有界性。我们首先考虑归一化算子 (1.2)，然后将结果推广到一般算子 (1.1)。

困难之一是测度 μ 不满足倍增性。事实上， μ 在有界半径球上满足倍增性，但沿漂移方向呈指数增长。尽管

Riesz变换在 $L^p(\mu)$上对 $1 < p < \infty$有界，但从 Hardy 空间到 $L^1(\mu)$的有界性所需的消去条件比经典情形更多。

回顾经典 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{R}^n)$，一个原子 a 只需满足消去条件

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,dx = 0.$$

然而，在我们的情形下，这一条件并不充分。更确切地说，我们要求原子满足

$$\int a\,d\mu = 0, \qquad \int x_k a(x)\,d\mu(x) = 0, \quad 2 \le k \le n.$$

因此，我们不再要求原子与常数作消去，而是要求其与空间作消去

$$\mathcal{P} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{1, x_2, \dots, x_n\}.$$

关于原子的精确定义，请参见定义 2.5。

额外的消去条件对于控制原子支撑之外的 Riesz变换是必要的。利用这些原子，我们通过原子分解定义 Hardy 空间 $H^1(\mu)$。我们证明，对于 $1 \le j \le n$,

$$\|R_j f\|_{L^1(\mu)} + \|R_j^* f\|_{L^1(\mu)} \lesssim \|f\|_{H^1(\mu)}. \tag{1.4}$$

见定理 3.3。

更重要的是，这些消去条件是最优的。在定理 3.6 中，我们证明，若将 $\{1, x_2, \dots, x_n\}$ 替换为任意真子集，则 R_1 不再是从相应的原子 Hardy 空间到 $L^1(\mu)$的有界算子。

我们还为 $H^1(\mu)$建立了插值定理。特别地，若次线性算子T 从 $H^1(\mu)$到 $L^1(\mu)$有界，且在 $L^2(\mu)$上有界，则对每个$1 < p < 2$, T 在 $L^p(\mu)$上有界。见定理 2.18。

另一方面，Riesz变换不能刻画 $H^1(\mu)$。事实上，定理 3.5 表明，存在 $f \notin H^1(\mu)$，使得

$$f,\ R_j f,\ R_j^* f \in L^1(\mu), \qquad 1 \le j \le n.$$

这与经典的 $H^1(\mathbb{R}^n$ 的 Riesz 变换刻画形成对比).

接下来，我们研究相应的 BMO空间。由于我们的原子满足关于 $\mathcal{P}$的消去条件，我们通过用 $\mathcal{P}$中的元素进行局部逼近来定义 BMO空间。更确切地说，对于一个球 B, 令 Π_B 为 $L^2(B,\ \mu)$ 到 $\mathcal{P}|_B$上的正交投影，并定义

$$\|g\|_{\mathrm{BMO}(\mu)} = \sup_{r_B \le 1} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g - \Pi_B g|\,d\mu.$$

我们证明 John–Nirenberg 不等式和 Hardy–BMO 对偶性

$$(H^1(\mu))^* \simeq \mathrm{BMO}(\mu)/\mathcal{P}.$$

参见定理2.11和2.13。我们还证明有限原子范数与无限原子范数的等价性，并建立插值定理。

作为 Hardy–BMO 对偶性的推论，我们得到

$$\|R_j g\|_{\mathrm{BMO}(\mu)} + \|R_j^* g\|_{\mathrm{BMO}(\mu)} \lesssim \|g\|_{L^\infty(\mu)}.$$

结合插值结果，这为 $1 < p < \infty$ 上 Riesz变换的 $L^p(\mu)$ 有界性提供了另一种证明。

最后，我们考虑 Riesz变换的交换子。有趣的是，BMO(μ) 并不是适用于交换子的空间。事实上，当 $n \ge 2$ 时，我们证明 $x_2^2 \in$ BMO(μ)，但 $[x_2^2, R_2]$ 在 $L^2(\mu)$ 上并不有界。参见命题 4.1。

相反，我们考虑如下定义的局部 BMO 空间：

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)} = \sup_{r_B \le 1} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |b - b_{B,\mu}| \, d\mu.$$

我们证明，对于任意 $1 < p < \infty$ 和 $1 \le j \le n$,

$$\|[b, R_j]\|_{L^p(\mu) \to L^p(\mu)} \simeq \|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)},$$

R_j^*也有相同的结论。见定理 4.4。

特别地，只需一个 Riesz变换即可刻画 $\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)$。在经典情形 [5]中也有类似结果。然而，对于 $n \ge 2$，空间 $\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ 与 $\mathrm{BMO}(\mu)$ 不同。因此，与交换子相关的 BMO 空间不同于 $H^1(\mu)$ 的对偶空间。

本文结构安排如下。第 2 节研究 Hardy 空间与 BMO 空间，包括原子分解、对偶性和插值。第 3 节专门讨论 Riesz变换。第 4 节研究 Riesz变换的交换子。最后，第 5 节讨论带漂移的一般拉普拉斯算子。

全文中，$A \lesssim B$ 表示 $A \le CB$，其中 C 与所考虑的变量无关。若 $A \lesssim B$ 和 $B \lesssim A$ 均成立，则记为 $A \simeq B$。

2. Atomic Hardy spaces and BMO spaces

对于任意固定的 $b > 0$ 和 $0 < r \le b$,

$$C_b^{-1} e^{2x_1} r^n \le \mu(B(x,r)) \le C_b e^{2x_1} r^n. \tag{2.1}$$

因此，μ 是局部倍增的。更确切地说，对于任意 $b > 0$，存在 $C_b > 0$，使得对于 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $\lambda > 1$,

$$\mu(B(x, \lambda r)) \le C_b \lambda^n \mu(B(x,r)), \quad 0 < r < \lambda r < b. \tag{2.2}$$

注记 2.1。估计式 (2.1) 和 (2.2) 对立方体同样成立，只需将球替换为立方体。

下文将始终使用以下多项式空间：

$$\mathcal{P} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{1, x_2, \dots, x_n\}.$$

显然，对于所有 $p \in \mathcal{P}$，$\mathcal{L}p = 0$。

令 E 为球或立方体。对于 $f \in L^1(E,\ \mu)$，定义 $\Pi_E f$ 为 $\mathcal{P}$ 中满足以下条件的唯一元素

$$\int_E (f - \Pi_E f) p \, d\mu = 0, \qquad p \in \mathcal{P}. \tag{2.3}$$

若 $f \in L^2(E,\ \mu)$，则 $\Pi_E f$ 是以下问题的唯一极小元

$$p \longmapsto \int_E |f - p|^2 \, d\mu, \qquad p \in \mathcal{P}.$$

为证明 $\Pi_E f$ 存在且唯一，令 $p_0 = 1$，并对 $1 \le j \le n-1$ 取 $p_j = x_{j+1}$。假设

$$\Pi_E f = \sum_{k=0}^{n-1} c_k p_k.$$

由 (2.3)，可得

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_E p_j p_k \, d\mu \right) c_k = \int_E f p_j \, d\mu, \quad 0 \le j \le n-1.$$

我们可以将上述方程改写为

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b}, \tag{2.4}$$

其中$\mathbf{c} = (c_0, \ c_1, \ \ldots\ldots, \ c_{n-1})^t$, $\mathbf{b} = \Big(\int_E f p_0 \, d\mu, \ldots, \int_E f p_{n-1} \, d\mu \Big)^t$ 以及

$$A = (a_{jk})_{j,k} = \Big(\int_E p_j p_k \, d\mu \Big)_{j,k}.$$

由于 A 是正定的，即对于每个 $0 \neq \xi \in \mathbb{C}^n$都有 $\xi^* A \xi > 0$ ，因此 A 是非奇异的。由此可知，方程（2.4）总有唯一解$\mathbf{c}$。这保证了多项式 $\Pi_E f$的存在。

引理 2.2。 设 $b > 0$, 令 E 为一个以 c 为中心、半径（或边长）为 $0 < r \leq b$的球（或立方体）。定义

$$p_0(x) = 1, \qquad p_j(x) = \frac{x_{j+1} - c_{j+1}}{r}, \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

and

$$G_{jk} = \frac{1}{\mu(E)} \int_E p_j p_k \, d\mu, \qquad 0 \leq j, k \leq n-1.$$

于是存在 $c_{b,\ n} > 0$ 使得

$$\sum_{j,k=0}^{n-1} \overline{\xi_j} G_{jk} \xi_k \geq c_{b,n} \sum_{j=0}^{n-1} |\xi_j|^2$$

对于所有 $\xi = \ (\xi_j)_{\ j}$均成立；因此，$\|G^{-1}\| \leq c_{b\ n}^{-1}$ 。。

证明。 我们给出球情形的证明。立方体情形的证明类似。

假设 $E = B(c, r)$。容易看出，对于所有 $x \in E$ 和 $1 \leq j \leq n-1, \ \ |p_j(x)| \leq 1$ 。令

$$G_{jk} = \frac{1}{\mu(E)} \int_E p_j p_k \, d\mu, \qquad 0 \leq j, k \leq n-1.$$

利用变量代换 $x = c + rz$,

$$G_{jk} = \frac{\displaystyle\int_{E_0} \phi_j(z) \phi_k(z) e^{2rz_1} \, dz}{\displaystyle\int_{E_0} e^{2rz_1} \, dz}, \quad \phi_0 = 1, \quad \phi_j(z) = z_{j+1},$$

其中 $E_0 = B(0,1)$ 是一个单位球。

注意， $e^{2rz_1} \simeq_b 1$ 和 $\displaystyle\int_{E_0} e^{2rz_1} \, dz \simeq_{n,b} 1$。因此,

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=0}^{n-1} \overline{\xi_j} G_{jk} \xi_k &= \Big[\int_{E_0} e^{2rz_1} \, dz \Big]^{-1} \int_{E_0} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \phi_j \right|^2 e^{2rz_1} \, dz \\ &\gtrsim_{b,n} \int_{E_0} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \phi_j \right|^2 dz. \end{aligned}$$

这一点与 $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}$ 在 E_0 上线性无关这一事实结合起来，意味着存在 $c_{b,n} > 0$ ，使得

$$\sum_{j,k=0}^{n-1} \overline{\xi_j} G_{jk} \xi_k \geq c_{b,n} \sum_{j=0}^{n-1} |\xi_j|^2.$$

因此 $\|G^{-1}\| \le c_{b\,n}^{-1}$,一致地。

这就完成了证明。 □

引理 2.3。令 $b>0$ 为固定值。若 E 是半径至多为 b 的球，或边长至多为 b 的立方体，则对于 $1 \le q \le \infty$，有

$$\|\Pi_E f\|_{L^q(E,\mu)} \le C_{b,q}\|f\|_{L^q(E,\mu)} \tag{2.5}$$

and

$$\|\Pi_E f\|_{L^\infty(E,\mu)} \le C_b\mu(E)^{-1}\|f\|_{L^1(E,\mu)}. \tag{2.6}$$

此外，

$$\|f-\Pi_E f\|_{L^q(E,\mu)} \simeq \inf_{p\in\mathcal{P}}\|f-p\|_{L^q(E,\mu)}, \tag{2.7}$$

其中常数仅依赖于 b、n、q。

证明。考虑基

$$p_0(x)=1, \qquad p_j(x)=\frac{x_{j+1}-c_{j+1}}{r}, \quad 1\le j\le n-1,$$

对于 $\mathcal{P}$。令 $G=(G_{jk})$ 为引理 2.2 中定义的矩阵。

记 $\Pi_E f=\sum_{k=0}^{n-1} a_k p_k$ 并令

$$d_j=\frac{1}{\mu(E)}\int_E f p_j\,d\mu, \quad 0\le j\le n-1.$$

于是有

$$Ga=d,$$

其中 $a=(a_k)_k$ 且 $d=(d_j)_j$。

由于 $|p_j|\le 1$ 在 E 上，

$$|d_j|\le \mu(E)^{-1}\|f\|_{L^1(E,\mu)}, \qquad |a_k|\le C_{b,n}\mu(E)^{-1}\|f\|_{L^1(E,\mu)}.$$

Thus

$$\|\Pi_E f\|_{L^\infty(E,\mu)} \le C_{b,n}\mu(E)^{-1}\|f\|_{L^1(E,\mu)}. \tag{2.8}$$

对于 $1\le q\le\infty$，利用 H¨older 不等式，

$$\|f\|_{L^1(E,\mu)}\le \mu(E)^{1-1/q}\|f\|_{L^q(E,\mu)}.$$

将（2.8）乘以 $\mu(E)^{1/q}$，得到

$$\|\Pi_E f\|_{L^q(E,\mu)} \le C_{b,n}\|f\|_{L^q(E,\mu)}.$$

最后，对于每个 $p\in\mathcal{P}$, $\Pi_E p=p$。因此，

$$\|f-\Pi_E f\|_{L^q(E,\mu)}=\|(f-p)-\Pi_E(f-p)\|_{L^q(E,\mu)}\le (1+C_{b,n})\|f-p\|_{L^q(E,\mu)}.$$

对 $p\in\mathcal{P}$ 取下确界可得（2.7）中的一个不等式；反向不等式由$\Pi_E f\in\mathcal{P}$得到。

证明至此完成。 □

下一个引理用于在一族有限的重叠球或立方体之间分配消去性。我们先介绍以下术语。设 E_1，……，E_N 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子集。$\{E_i\}_{i=1}^N$ 的重叠图是这样一个图：其顶点为 1，……，N；当且仅当 $E_i\cap E_j\ne\emptyset$ 时，i 与 j 之间有一条边。生成树 是一个包含所有顶点且不含环的连通子图。

引理 2.4。设 E_1，……，E_N 为半径（或边长）一致有界且彼此可比的球（或立方体）。假设重叠图是连通的，并且存在一棵生成树 T，使得对于 T 的每条边 $(i,\ j)$，交集 $E_i \cap E_j$ 包含一个球 B_{ij}，满足

$$r_{B_{ij}} \geq c \min\{\mathrm{diam} E_i, \mathrm{diam} E_j\},$$

其中 $c > 0$ 与 i 和 j无关。

设 $E = \bigcup_{i=1}^N E_i$。若 $u \in L^q(E, \mu)$，$1 < q \leq \infty$，满足

$$\int up \, d\mu = 0, \qquad p \in \mathcal{P},$$

则存在 u_i 使得

$$u = \sum_{i=1}^N u_i, \qquad \mathrm{supp}\, u_i \subset E_i, \qquad \int u_i p \, d\mu = 0 \quad for\ all\ p \in \mathcal{P}.$$

此外，对每个 $1 < q \leq \infty$，

$$\mu(E_i)^{1-1/q} \|u_i\|_{L^q(E_i,\mu)} \leq C\mu(E)^{1-1/q} \|u\|_{L^q(E,\mu)}, \qquad 1 \leq i \leq N. \tag{2.9}$$

该常数可能依赖于 N、半径（或边长）的界以及重叠参数，但与 u 或该族的位置无关。

证明。按照假设选择一棵生成树 T。不失一般性，假设 E_1 是根节点。对于每个顶点 $i \neq 1$，令 $\pi(i)$ 为它的父节点，也就是从 i 到根节点的路径上的下一个顶点。如果 $\pi(j) = i$，则称顶点 j 是 i 的子节点；没有子节点的顶点称为叶节点。

对于每个 k，定义

$$\chi_k(x) = \frac{\mathbf{1}_{E_k}(x)}{\sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{E_j}(x)}, \qquad x \in E,$$

并在 E之外设置 $\chi_k = 0$。令 $f_k = \chi_k u$。于是

$$u = \sum_{k=1}^N f_k, \qquad \mathrm{supp}\, f_k \subset E_k, \qquad \|f_k\|_{L^q(\mu)} \leq \|u\|_{L^q(E,\mu)}.$$

对于每个 $2 \leq i \leq N$，选择一个球 $D_i = B(c_i,\ r_i) \subset E_i \cap E_{\pi(i)}$，其半径与 E_i 和 $E_{\pi(i)}$ 的半径（或边长）相当。定义

$$p_{i,0}(x) = 1, \qquad p_{i,k}(x) = \frac{x_{k+1} - (c_i)_{k+1}}{r_i}, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

and

$$A^{(i)}_{\ell m} = \int_{D_i} p_{i,\ell} p_{i,m} \, d\mu, \qquad 0 \leq \ell, m \leq n-1.$$

根据引理 2.2，$A^{(i)}$ 可逆。令

$$\theta_{i,k} = \mathbf{1}_{D_i} \sum_{m=0}^{n-1} \left((A^{(i)})^{-1}\right)_{mk} p_{i,m}, \qquad 0 \leq k \leq n-1.$$

Then

$$\int \theta_{i,k} p_{i,\ell} \, d\mu = \delta_{k\ell}, \qquad 0 \leq k, \ell \leq n-1. \tag{2.10}$$

令 $i \neq 1$ 为当前树的任意叶节点。定义

$$h_i = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int f_i p_{i,k} \, d\mu \right) \theta_{i,k}, \qquad u_i = f_i - h_i.$$

由于 $\operatorname{supp} h_i \subset D_i \subset E_i \cap E_{\pi(i)}$，我们有 $\operatorname{supp} u_i \subset E_i$。此外，根据（2.10），

$$\int u_i p_{i,\ell}\, d\mu = \int f_i p_{i,\ell}\, d\mu - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int f_i p_{i,k}\, d\mu \right) \delta_{k\ell} = 0.$$

由于 $p_{i,\,0}$，……，$p_{i,\,n-1}$ 构成 $\mathcal{P}$ 的一组基，因此我们有

$$\int u_i p\, d\mu = 0 \qquad \text{for all } p \in \mathcal{P}.$$

现在我们将 $f_{\pi(i)}$ 替换为 $f_{\pi(i)} + h_i$，并从树中移除叶节点 i。对剩余树中的另一个叶节点重复相同的过程。经过 $N-1$ 步后，只剩下根节点。注意，根据引理 2.2,

$$\|\theta_{i,k}\|_{L^q(\mu)} \le C\mu(D_i)^{1/q-1}.$$

重叠假设和局部倍增性质 (2.2) 蕴含 $\mu(D_i) \simeq \mu(E_i)$，而 $|p_{i,\,k}(x)| \le C$ 对于 $x \in E_i$ 成立。因此，根据 H¨older 不等式,

$$\begin{aligned} \|h_i\|_{L^q(\mu)} &\le C\mu(D_i)^{1/q-1} \|f_i\|_{L^1(\mu)} \\ &\le C\mu(D_i)^{1/q-1} \mu(E_i)^{1-1/q} \|f_i\|_{L^q(\mu)} \\ &\le C\|f_i\|_{L^q(\mu)}. \end{aligned}$$

因此 $\|u_i\|_{L^q(\mu)} \le C\|f_i\|_{L^q(\mu)}$。在每一步中，唯一发生变化的剩余函数是 $f_{\pi(i)}$，它被 $f_{\pi(i)} + h_i$ 替换。由于步骤数至多为 $N-1$，由前面的估计可得

$$\|u_i\|_{L^q(\mu)} \le C\|u\|_{L^q(E,\mu)}, \qquad 2 \le i \le N,$$

并且，在根节点处剩余函数 f_1 也满足相同的界。

最后，令 $u_1 = f_1$。我们有

$$u = \sum_{i=1}^{N} u_i, \qquad \operatorname{supp} u_1 \subset E_1.$$

由于 u 和 $u_2, \ldots, u_N$ 关于 $\mathcal{P}$ 的矩为零，同样的结论也适用于 u_1。由于 $\mu(E_i) \le \mu(E)$，我们得到

$$\mu(E_i)^{1-1/q} \|u_i\|_{L^q(E_i,\mu)} \le C\mu(E)^{1-1/q} \|u\|_{L^q(E,\mu)}, \qquad 1 \le i \le N.$$

这就完成了我们的证明。 □

2.1. 原子哈代空间。

定义 2.5. 设 $1 < q \le \infty$ 和 $b > 0$。一个 $(1, q; \mathcal{P})_b$-原子是一个函数 a，其支集包含于球 $B = B(c, r)$，并且满足 $r \le b$，使得

$$\|a\|_{L^q(\mu)} \le \mu(B)^{1/q-1}$$

and

$$\int a(x) p(x)\, d\mu(x) = 0, \qquad p \in \mathcal{P}.$$

等价地,

$$\int a\, d\mu = 0, \qquad \int x_j a(x)\, d\mu(x) = 0, \quad 2 \le j \le n.$$

定义 2.6。 令 $1 < q \le \infty$ 和 $b > 0$。我们将 Hardy 空间 $H^{1,\,q}_{,\,b}(\mu)$ 定义为满足下列条件的所有函数 $f \in L^1(\mu)$ 的集合:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \quad \text{in } L^1(\mu), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty, \tag{2.11}$$

其中每个 a_k 都是一个 $(1,q;\mathcal{P})_b$-原子。我们还定义

$$\|f\|_{H_b^{1,q}(\mu)} = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k| : f = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_k\right\}.$$

每个 $(1,\ q;\mathcal{P})_b$ 原子的 $L^1(\mu)$ 范数至多为 1。因此，式 (2.11) 中的级数在 $L^1(\mu)$ 中绝对收敛，并且

$$\|f\|_{L^1(\mu)} \le \|f\|_{H_b^{1,q}(\mu)}.$$

引理 2.7。对于 $1 < q \le \infty$ 和 $b > 0$，*Hardy* 空间 $H^{1,\ q}_{\ b}(\mu)$ 是一个巴拿赫空间。

证明。证明是相当标准的，但为完整起见，我们将在此给出证明。

只需证明 $H^{1,\ q}_{\ b}(\mu)$ 是完备的。设 $\{f_j\}$ 是 $H^{1,\ q}_{\ b}(\mu)$ 中的一个柯西序列。不妨设

$$\|f_{j+1} - f_j\|_{H_b^{1,q}(\mu)} \le 2^{-j}, \qquad j \ge 1;$$

否则，我们取一个子序列。

令 $g_1 = f_1$ 和 $g_j = f_j - f_{j-1}$ 为 $j \ge 2$。则

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|g_j\|_{H_b^{1,q}(\mu)} < \infty.$$

对于每个 j，选取一个原子分解

$$g_j = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{j,k}a_{j,k}$$

使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_{j,k}| \le \|g_j\|_{H_b^{1,q}(\mu)} + 2^{-j}.$$

因此

$$\sum_{j,k}|\lambda_{j,k}| < \infty.$$

由于 $\|a_{j,\ k}\|_{L^1(\mu)} \le 1$ 对每个 j，k都成立，该级数

$$f = \sum_{j,k}\lambda_{j,k}a_{j,k}$$

在 $L^1(\mu)$ 中收敛，并定义了 $H^{1,\ q}_{\ b}(\mu)$ 中的一个元素。此外，

$$\|f - f_m\|_{H_b^{1,q}(\mu)} \le \sum_{j=m+1}^{\infty}\left(\|g_j\|_{H_b^{1,q}(\mu)} + 2^{-j}\right) \longrightarrow 0.$$

因此 $H^{1,\ q}_{\ b}(\mu)$ 是完备的。

证明至此完成。

□

命题 2.8。对于 $1 < q \le \infty$ 和 $b > 0$，我们有

$$H_b^{1,q}(\mu) = H_1^{1,\infty}(\mu)$$

具有等价范数。因此，我们将 $H^1(\mu)$ 定义为任意空间 $H^{1,\ q}_{\ b}(\mu)$，满足 $1 < q \le \infty$ 以及 $b > 0$。

证明。设 $0 < b_1 < b_2$。如果 a 是一个 $(1, q; \mathcal{P})_{b_1}$-原子，那么 a 也是一个 $(1, q; \mathcal{P})_{b_2}$-原子。因此，$H^{1,q}_{b_1}(\mu) \hookrightarrow H^{1,q}_{b_2}(\mu)$。

反之，若 a 是与 B 相关联且满足 $b_1 < r_B \le b_2$ 的 $(1, q; \mathcal{P})_{b_2}$-原子，则我们可以用球族 $\{B_i$ 覆盖 $B : i \in \mathcal{I}\}$，并满足以下性质：

(i) $r_{B_i} = b_1$ 和 $B_i \subset 2B$ 对所有 $i \in \mathcal{I}$ 均成立；(ii) 重叠图有一棵生成树 T，使得对于 T 的每条边 (i, j)，$B_i \cap B_j$ 都包含一个半径为 $b_1/10$ 的球；(iii) $\sharp\mathcal{I} \lesssim (b_2/b_1)^n$；(iv) $\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbf{1}_{B_i} \lesssim 1$。

根据 (2.9)，我们可以写成

$$a = \sum_{i\in\mathcal{I}} u_i,$$

其中 u_i 满足

$$\operatorname{supp} u_i \subset B_i, \qquad \int u_i p \, d\mu = 0 \quad \text{for all } p \in \mathcal{P},$$

and

$$\mu(B_i)^{1-1/q}\|u_i\|_{L^q(\mu)} \lesssim \mu(2B)^{1-1/q}\|a\|_{L^q(\mu)} \lesssim \mu(2B)^{1-1/q}\mu(B)^{1/q-1} \lesssim 1.$$

这意味着

$$\|u_i\|_{L^q(\mu)} \lesssim \mu(B_i)^{1/q-1}.$$

T也就是说，u_i 是一个 $(1, q; \mathcal{P})_{b_1}$ 原子的倍数。因此，$a \in H^{1,q}_{b_1}(\mu)$ 满足

$$\|a\|_{H^{1,q}_{b_1}(\mu)} \lesssim_{b_1,b_2,n} 1.$$

这意味着，对于 $1 < q \le \infty$

$$H^{1,q}_{b_1}(\mu) = H^{1,q}_{b_2}(\mu) \quad \text{for all } 0 < b_1 < b_2.$$

为了完成证明，我们需要证明对于 $1 < q < \infty$，$H^{1,q}_{1}(\mu) = H^{1,\infty}_{1}(\mu)$。固定 $1 < q < \infty$。由于

$$H^{1,q}_{b_1}(\mu) = H^{1,q}_{b_2}(\mu) \quad \text{for all } 0 < b_1 < b_2,$$

只需证明：若 a 是支集在立方体 Q 中的一个 $(1, q; \mathcal{P})$-原子，且 $\ell(Q) \le 1$ 和 $\|a\|_{L^q(\mu)} \le \mu(Q)^{1/q-1}$，则 $a \in H^{1,\infty}_{1}(\mu)$。令 $K > 0$ 为一个稍后确定的正大数。记满足以下条件的二进子立方体 $Q_i \subset Q$ 的族为 $\{Q_i\}$

$$\frac{1}{\mu(Q_i)} \int_{Q_i} |a|^q \, d\mu > \left(\frac{K}{\mu(Q)}\right)^q.$$

局部倍增性质 (2.2) 以及 Q_i 的极大性意味着

$$\frac{1}{\mu(Q_i)} \int_{Q_i} |a|^q \, d\mu \le C \left(\frac{K}{\mu(Q)}\right)^q, \qquad \sum_i \mu(Q_i) \le K^{-q}\mu(Q). \tag{2.12}$$

Set

$$b_i = (a - \Pi_{Q_i} a)\mathbf{1}_{Q_i}, \qquad g = a - \sum_i b_i.$$

由（2.3）可知，b_i 湮灭 $\mathcal{P}$，g 也是如此。也就是说，

$$\int b_i p \, d\mu = \int g p \, d\mu = 0 \quad \text{for all } p \in \mathcal{P}.$$

现在我们估计 $\|g\|_\infty$。根据 g 的定义，

$$g = a\mathbf{1}_{Q\setminus\cup_i Q_i} + \sum_i (\Pi_{Q_i} a)\mathbf{1}_{Q_i}$$

由 (2.2) 和二进勒贝格微分定理,

$$\left\| a\mathbf{1}_{Q\setminus\cup_i Q_i} \right\|_\infty \le \frac{CK}{\mu(Q)}.$$

此外，由 (2.6)、H¨older 不等式和 (2.12),

$$\begin{aligned}\left\| \sum_i (\Pi_{Q_i} a)\mathbf{1}_{Q_i} \right\|_\infty &\le \sup_i \|\Pi_{Q_i} a\|_\infty \\ &\le A_0 \sup_i \mu(Q_i)^{-1} \|a\|_{L^1(Q_i,\mu)} \\ &\le A_0 \sup_i \Big(\frac{1}{\mu(Q_i)} \int_{Q_i} |a|^q \, d\mu \Big)^{1/q} \\ &\le \frac{A_0 K}{\mu(Q)},\end{aligned}$$

其中 A_0 仅依赖于 n。

因此,

$$\|g\|_\infty \le \frac{CK}{\mu(Q)}.$$

于是， g是与立方体 Q相关的 $(1,\infty;\mathcal{P})_1$ 原子的 CK 倍。此外，由 H¨older 不等式、(2.5) 和 (2.12),

$$\begin{aligned}\sum_i \mu(Q_i)^{1-1/q} \|b_i\|_{L^q(\mu)} &\le C_0 \left(\sum_i \mu(Q_i) \right)^{1-1/q} \left(\sum_i \|a\|^q_{L^q(Q_i,\mu)} \right)^{1/q} \\ &\le C_0 \left(K^{-q} \mu(Q) \right)^{1-1/q} \|a\|_{L^q(Q,\mu)} \\ &\le C_0 K^{-(q-1)}.\end{aligned}$$

取足够大的 K ，使得 $C_0 K^{-(q-1)} \le 1/2$。那么我们有

$$\sum_i \mu(Q_i)^{1-1/q} \|b_i\|_{L^q(\mu)} \le \frac{1}{2}.$$

因此，经过归一化，我们可以写成

$$a = g + \sum_i \lambda_i a_i =: g_1 + f_1,$$

其中， $g_1 = g$是与 Q相关的一个 $(1,\infty;\mathcal{P})_1$-原子的倍数，每个 a_i 都是一个支集位于二进子立方体 Q_i中的 $(1,q;\mathcal{P})_1$-原子，并且

$$\|g_1\|_{H^{1,\infty}_1(\mu)} \le A_0 K, \qquad \sum_i |\lambda_i| \le \frac{1}{2}.$$

对每个 a_i重复这一构造，我们得到

$$a_i = \beta_i g_i + \sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j},$$

whe其中，每个 i 都对应一个 $(1,\infty,\mathcal{P})_1$ 原子， $a_{i,j}$ 对每个 i 都是一个 $(1,q;\ \mathcal{P})_1$-原子， j一个d

$$|\beta_i| \le A_0 K, \quad \sum_j |\lambda_{i,j}| \le \frac{1}{2}.$$

因此,

$$f_1 = \sum_i \lambda_i \beta_i g_i + \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_{i,j} a_{i,j} =: g_2 + f_2.$$

其中 g_i 对于每个 i, ∞, $\mathcal{P}$ 是一个 (1, ∞, $\mathcal{P}$)$_1$ 原子; 对于每个 i, j, $_j$ 是一个 (1, q; $\mathcal{P}$)$_1$-原子; 此外 n,

$$\|g_2\|_{H_1^{1,\infty}(\mu)} \le \sum_i |\lambda_i \beta_i| \le \frac{1}{2} A_0 K, \quad \text{and} \quad \|f_2\|_{H_1^{1,q}(\mu)} \le \sum_{i,j} |\lambda_i \lambda_{i,j}| \le \frac{1}{2^2}.$$

通过迭代, 我们有

$$\begin{aligned} a &= f_1 + g_1 \\ f_1 &= f_2 + g_2 \\ f_2 &= f_3 + g_3 \\ &\vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

其中

$$\|g_k\|_{H_1^{1,\infty}(\mu)} \le \frac{A_0 K}{2^{k-1}}, \quad \text{and} \quad \|f_k\|_{H_1^{1,q}(\mu)} \le \frac{1}{2^k}. \tag{2.13}$$

因此, 对于每个 k,

$$a = g_1 + \ldots + g_k + f_k := \mathbf{g}_k + f_k.$$

B由 (2.13) 和引理 2.7, $\lim \mathbf{g}_k = \mathbf{g} \in H^{1,}{}_1{}^{\infty}(\mu)$。此外, 根据 Fatou 引理 ma,

$$\|a - \mathbf{g}\|_{L^1(\mu)} \le \lim \|a - \mathbf{g}_k\|_{L^1(\mu)} = \lim \|f_k\|_{L^1(\mu)} \le \lim \|f_k\|_{H_1^{1,q}(\mu)} \le \lim \frac{1}{2^k} = 0.$$

这意味着 $a = \mathbf{g} \in H^{1,}{}_1{}^{\infty}(\mu)$, 从而证明完毕。 □

定义 2.9。 设 $1 \le q < \infty$ 和 $b > 0$。空间 $\mathrm{BMO}_b^q(\mu)$ 定义为所有满足以下条件的 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$所组成的集合:

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_b^q(\mu)} := \sup_{B: r_B \le b} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f - \Pi_B f|^q \, d\mu \right)^{1/q} < \infty.$$

命题 2.10。 设 b_1、$b_2 > 0$。半范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}_{b_1}^q(\mu)}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}_{b_2}^q(\mu)}$ 是等价的。如果在定义 *2.9* 中用立方体替代球, 也可得到相同的空间和一个等价的半范数。

证明。 设 $b_1 < b_2$。显然, $\|f\|_{\mathrm{BMO}_{b_1}^q(\mu)} \le \|f\|_{\mathrm{BMO}_{b_2}^q(\mu)}$。现在证明

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_{b_2}^q(\mu)} \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}_{b_1}^q(\mu)}.$$

设 B 是一个满足 $b_1 < r_B \le b_2$ 的球。那么我们可以用球族 $\{B_i$ 覆盖 $B: i \in \mathcal{I}\}$满足以下性质:

(i) 对所有 $i \in \mathcal{I}$, $r_{B_i} = b_1$ 和 $B_i \subset 2B$; (ii) 重叠图存在一棵生成树 T, 使得对于 T 的每条边 (i, j), $B_i \cap B_j$ 都包含一个半径为 $b_1/10$ 的球; (iii) $\sharp\mathcal{I} \lesssim (b_2/b_1)^n$; (iv) $\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbf{1}_{B_i} \lesssim 1$。

设 $p_i = \Pi_{B_i} f$。对于两个球 B_i, B_j 满足 $(i, j) \in T$, 设 $D_{ij} \subset B_i \cap B_j$ 为半径为 $b_1/10$的球。我们有

$$p_i - p_j = \Pi_{D_{ij}}(p_i - f) - \Pi_{D_{ij}}(p_j - f).$$

结合引理 2.3 和 (2.2)，可得

$$\begin{aligned}\|p_i - p_j\|_{L^\infty(D_{ij},\mu)} &\le \|\Pi_{D_{ij}}(p_i - f)\|_{L^\infty(D_{ij},\mu)} + \|\Pi_{D_{ij}}(p_j - f)\|_{L^\infty(D_{ij},\mu)} \\ &\lesssim \mu(D_{ij})^{-1}\|p_i - f\|_{L^1(D_{ij},\mu)} + \mu(D_{ij})^{-1}\|p_j - f\|_{L^1(D_{ij},\mu)} \\ &\lesssim \frac{1}{\mu(B_i)}\int_{B_i}|f - \Pi_{B_i}f|\,d\mu + \frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j}|f - \Pi_{B_j}f|\,d\mu \\ &\lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}^q_{b_1}(\mu)}.\end{aligned}$$

由于球族是连通的，上述不等式意味着

$$\|p_i - p_j\|_{L^\infty(D_{ij},\mu)} \lesssim_{b_1,b_2} \|f\|_{\mathrm{BMO}^q_{b_1}(\mu)} \quad \text{for all } i,j \in \mathcal{I}.$$

结合局部倍增性质 (2.2)，进一步可得

$$\|p_i - p_j\|_{L^\infty(B,\mu)} \lesssim_{b_1,b_2} \|f\|_{\mathrm{BMO}^q_{b_1}(\mu)} \quad \text{for all } i,j \in \mathcal{I}.$$

由此可知

$$\|p_i - \bar{p}\|_{L^\infty(B,\mu)} \lesssim_{b_1,b_2} \|f\|_{\mathrm{BMO}^q_{b_1}(\mu)}$$

其中 $\bar{p} = |\mathcal{I}|^{-1}\sum_{i\in\mathcal{I}} p_i \in \mathcal{P}_\circ$

因此，

$$\begin{aligned}\int_B |f - \bar{p}|^q\,d\mu &\lesssim_{b_1,b_2} \sum_i \big(\|f - p_i\|^q_{L^q(B_i,\mu)} + \mu(B_i)\|p_i - \bar{p}\|^q_{L^\infty(B_i,\mu)}\big) \\ &\lesssim_{b_1,b_2} \sum_i \big(\|f - p_i\|^q_{L^q(B_i,\mu)} + \mu(B_i)\|f\|^q_{\mathrm{BMO}^q_{b_1}(\mu)}\big) \\ &\le C\mu(B)\|f\|^q_{\mathrm{BMO}^q_{b_1}(\mu)}.\end{aligned}$$

结合 (2.7)，可得

$$\sup_{B:b_1<r_B\le b_2}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f - \Pi_B f|^q\,d\mu\right)^{1/q} \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}^q_{b_1}(\mu)}.$$

证明至此完成。

□

2.2. **John–Nirenberg 不等式。**

定理 2.11. 存在常数 $C, c > 0$，使得对于每个 $f \in \mathrm{BMO}^1_1(\mu)$ Q，每个满足 $\ell(Q) \le 1$ 的立方体，以及每个 $\lambda > 0$,

$$\mu\{x \in Q : |f(x) - \Pi_Q f(x)| > \lambda\} \le C\exp\left(-c\lambda/\|f\|_{\mathrm{BMO}^1_1(\mu)}\right)\mu(Q).$$

因此，对于每个 $1 \le q < \infty$,

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}^q_1(\mu)} \simeq_q \|f\|_{\mathrm{BMO}^1_1(\mu)}.$$

若 $\|f\|_{\mathrm{BMO}^1_1(\mu)} = 0$，则 $f \in \mathcal{P}$ 几乎处处。

证明。 根据命题 2.10，我们可以只考虑边长不超过 1 的立方体。设 Q 为一个满足 $\ell(Q) \le 1$ 的立方体。定义

$$\beta = \|f\|_{\mathrm{BMO}^1_1(\mu)}.$$

若 $\beta = 0$，则在每个满足 $r_B \le 1$ 的球 B 上，$f = \Pi_B f$ 几乎处处成立。由于这些多项式在重叠球上相同，$f \in \mathcal{P}$，因此结论显然成立。因此，我们可以假设 $\beta > 0$。由引理 2.3 和注记 2.1，我们得到

$$\frac{1}{\mu(S)}\int_S |f - \Pi_S f|\,d\mu \le A\beta$$

对每个二进子立方体 $S \subset Q$，其中 A 与 S 无关。

取 $T > 2$。令 $\{Q_i\}_i$ 为 Q 中满足以下条件的极大二进子立方体集合

$$\frac{1}{\mu(Q_i)} \int_{Q_i} |f - \Pi_Q f| \, d\mu > TA\beta. \tag{2.14}$$

那么，族 $\{Q_i\}_i$ 两两不相交，并且

$$\begin{aligned} \sum_i \mu(Q_i) &\le \frac{1}{TA\beta} \sum_i \int_{Q_i} |f - \Pi_Q f| \, d\mu \\ &\le \frac{1}{TA\beta} \int_Q |f - \Pi_Q f| \, d\mu \\ &\le T^{-1}\mu(Q). \end{aligned} \tag{2.15}$$

对于每个 Q_i，令 R_i 为其父立方体。由于 R_i 不满足停止条件 (2.14)，因此有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(Q_i)} \int_{Q_i} |f - \Pi_Q f| \, d\mu &\le \frac{\mu(R_i)}{\mu(Q_i)} \frac{1}{\mu(R_i)} \int_{R_i} |f - \Pi_Q f| \, d\mu \\ &\le C \frac{1}{\mu(R_i)} \int_{R_i} |f - \Pi_Q f| \, d\mu \\ &\le CTA\beta, \end{aligned} \tag{2.16}$$

其中，在第二个不等式中，我们对立方体使用了局部倍增性质 (2.2)。

因此，结合 $\Pi_{Q_i}\Pi_Q f = \Pi_Q f$ 和 (2.6)，可得

$$\begin{aligned} \|\Pi_{Q_i} f - \Pi_Q f\|_{L^\infty(Q_i,\mu)} &= \|\Pi_{Q_i}(f - \Pi_Q f)\|_{L^\infty(Q_i,\mu)} \\ &\le C\mu(Q_i)^{-1} \|f - \Pi_Q f\|_{L^1(Q_i,\mu)} \\ &\le CTA\beta. \end{aligned} \tag{2.17}$$

此外，二进勒贝格微分定理表明

$$|f - \Pi_Q f| \le TA\beta, \qquad \text{a.e. on } Q \setminus \bigcup_i Q_i.$$

对每个满足 $f - \Pi_{Q_i} f$ 的 Q_i 重复相同的构造，我们可以找到一族子立方体 $\{Q_{i,j}\}_{i,j}$，使得对每个 i,

$$\sum_j \mu(Q_{i,j}) \le T^{-1}\mu(Q_i) \tag{2.18}$$

and

$$|f - \Pi_{Q_i} f| \le TA\beta, \qquad \text{a.e. on } Q_i \setminus \bigcup_j Q_{i,j}. \tag{2.19}$$

由 (2.18) 和 (2.15) 可得

$$\sum_{i,j} \mu(Q_{i,j}) \le T^{-1} \sum_i \mu(Q_i) \le T^{-2}\mu(Q).$$

如果 $x \in Q \setminus \bigcup_i Q_i$，那么 $|f - \Pi_Q f| \le TA\beta$。

如果 $x \in \left(\bigcup_i Q_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i,j} Q_{i,j}\right) = \cup_i \left(Q_i \setminus \bigcup_j Q_{i,j}\right)$，那么对于某个 i，有 $x \in Q_i \setminus \bigcup_j Q_{i,j}$。对于这样的 i，利用 (2.19) 和 (2.17)，

$$|f - \Pi_Q f| \le |f - \Pi_{Q_i} f| + |\Pi_Q f - \Pi_{Q_i} f| \le TA\beta + CTA\beta \le 2CTA\beta$$

对于 $x \in Q_i \setminus \bigcup_j Q_{i,j}$。

因此，

$$|f - \Pi_Q f| \le 2CTA\beta \qquad \text{a.e. on } Q \setminus \bigcup_{i,j} Q_{i,j}.$$

重复相同的构造，经过 k 代后，我们将得到一个立方体族，为避免混淆，记作 $\{Q_j^k\}$，使得

$$\sum_i \mu(Q_i^k) \le T^{-k}\mu(Q)$$

and

$$|f - \Pi_Q f| \le CkTA\beta, \qquad \text{a.e. on } Q \setminus \bigcup_i Q_i^k.$$

因此

$$\mu\{x \in Q : |f - \Pi_Q f| > CkTA\beta\} \le T^{-k}\mu(Q).$$

对于 $\lambda \ge L\beta$，取 $k = \lfloor \lambda/(L\beta) \rfloor$。对于 $0 < \lambda < L\beta$，使用 $\mu(Q)$ 给出的平凡界。这对每个 $\lambda > 0$ 都成立，

$$\mu\{x \in Q : |f(x) - \Pi_Q f(x)| > \lambda\} \le T \exp\left(-\frac{(\log T)\lambda}{L\beta}\right)\mu(Q).$$

证明完毕。

□

我们将 $\mathrm{BMO}(\mu) = \mathrm{BMO}_1^1(\mu)$ 记作。根据定理 2.11，该半范数的零空间为$\mathcal{P}$。

2.3. **Hardy–BMO 对偶性**。

引理 2.12. 设 $g \in \mathrm{BMO}(\mu)$。存在 $p \in \mathcal{P}$ 以及函数 $g_m \in L^\infty(\mu)$ 使得

$$\sup_m \|g_m\|_{\mathrm{BMO}(\mu)} \le C\|g\|_{\mathrm{BMO}(\mu)}, \qquad g_m \longrightarrow g - p \quad in\ L^s_{\mathrm{loc}}(\mu), \quad 1 \le s < \infty.$$

证明。设 $\beta = \|g\|_{\mathrm{BMO}(\mu)}$。若 $\beta = 0$，则由定理 2.11 得 $g \in \mathcal{P}$；取 $p = g$ 和 $g_m = 0$。假设 $\beta > 0$。下文所用的所有卷积均相对于勒贝格测度进行。取一个非负径向函数 $\eta \in C_c^\infty(B(0, 1/8))$，满足 $\int \eta\, dx = 1$，并令 $G = \eta * g$ 和$h = g - G$。

由于 η 是径向的，对每个 j，都有 $\int z_j \eta(z)\, dz = 0$。因此，对于 $q \in \mathcal{P}$,

$$(\eta * q)(x) = \int \eta(z) q(x - z)\, dz = q(x).$$

为证明 h的局部估计，令 $p_c = \Pi_{B(c,2)} g$。由于 $p_c \in \mathcal{P}$，利用上面的恒等式，我们得到

$$h = (g - p_c) - \eta * (g - p_c).$$

使用 $d\mu(x) = e^{2z_1} d\mu(x - z)$,

$$\begin{aligned}
\int_{B(c,1)} |\eta * (g - p_c)|^2\, d\mu &\le \int_{|z|<1/8} \eta(z) e^{2z_1} \int_{B(c,1)-z} |g - p_c|^2\, d\mu\, dz \\
&\le C \int_{B(c,2)} |g - p_c|^2\, d\mu \\
&\le C\beta^2 \mu(B(c, 2)),
\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中我们使用了定理 2.11。

这意味着，对于 $c \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\mu(B(c,1))}\int_{B(c,1)}|h|^2\,d\mu\right)^{1/2} &\le \left(\frac{1}{\mu(B(c,1))}\int_{B(c,1)}|g-p_c|^2\,d\mu\right)^{1/2}\\ &\quad+\left(\frac{1}{\mu(B(c,1))}\int_{B(c,1)}|\eta*(g-p_c)|^2\,d\mu\right)^{1/2}\\ &\le C\beta.\end{aligned} \tag{2.20}$$

接下来，我们注意到，对于任意的 $p \in \mathcal{P}$,

$$(\partial_1\eta)*p=\partial_1 p=0,\qquad (\partial_j\partial_k\eta)*p=\partial_j\partial_k p=0,\qquad j,k\ge 2.$$

对于 $x \in \mathbb{R}^n$，设 $p_x = \Pi_{B(x,1)}g$。若 $K \in \{\partial_1\eta, \partial_j\partial_k\eta\colon\ j,\ k \ge 2\}$，则

$$\begin{aligned}|(K*g)(x)| &= \left|\int K(z)(g-p_x)(x-z)\,dz\right|\\ &\le C\int_{B(x,1)}|g-p_x|\,dy\\ &\le C\int_{B(x,1)}|g-p_x|\,e^{-2y_1}e^{2y_1}dy.\end{aligned}$$

由 (2.1)，可得

$$e^{-2y_1}=e^{-2x_1}e^{2(x_1-y_1)}\simeq e^{-2x_1}\simeq\mu(B(x,1))^{-1},\qquad\qquad y\in B(x,1).$$

这进一步意味着

$$\begin{aligned}|(K*g)(x)| &\le \frac{C}{\mu(B(x,1))}\int_{B(x,1)}|g-p_x|\,d\mu(y)\\ &\le C\beta.\end{aligned}$$

由此可知

$$\|\partial_1 G\|_\infty+\sum_{j,k=2}^{n}\|\partial_j\partial_k G\|_\infty\le C\beta. \tag{2.21}$$

令 $x=(t,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$，并设

$$p(y)=G(0,0)+\nabla_y G(0,0)\cdot y,\qquad F(t,y)=G(t,y)-p(y).$$

利用（2.21）和泰勒展开，我们得到

$$|F(t,y)-F(0,y)|\le C\beta|t|,\qquad\qquad |F(0,y)|\le C\beta|y|^2.$$

因此，$|F(t,y)|\le C\beta(|t|+|y|^2)$。为估计 $\nabla_y F$，令 $H(y)=F(t,y)-F(0,y)$。于是 $\|H\|_\infty\le C\beta|t|$。此外，由于 $D_y^2 p=0$，根据（2.21）可得，

$$\|D_y^2 H\|_\infty\le\|D_y^2 G(t,y)\|_\infty+\|D_y^2 G(0,y)\|_\infty\le C\beta.$$

由泰勒公式可得

$$|\partial_j H(y)|\le C\left(\frac{\|H\|_\infty}{s}+s\|\partial_j^2 H\|_\infty\right),\qquad s>0.$$

取 $s=\sqrt{|t|}$，我们有 $|\nabla_y H|\le C\beta\sqrt{|t|}$。另外，由于

$$F(0,y)=G(0,y)-G(0,0)-\nabla_y G(0,0)\cdot y$$

由中值定理和（2.21）可得

$$|\nabla_y F(0,y)|=|\nabla_y G(0,y)-\nabla_y G(0,0)|\le C|y|\beta.$$

Thus

$$|F(t,y)| \le C\beta(|t|+|y|^2), \qquad |\nabla_y F(t,y)| \le C\beta(|y|+\sqrt{|t|}). \tag{2.22}$$

选择在 $\mathbb{R}$ 上的紧支集光滑截断函数 χ_1 和在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上的 $\chi_\perp$，使其在原点附近恒等于 1。对于 $R \ge 1$，令

$$F_R(t,y) = \chi_1(t/R^2)\chi_\perp(y/R)F(t,y).$$

在截断函数的支集上，$|t| \le CR^2, |y| \le CR$。因此，由 (2.22) 可得

$$|F_R| \le C\beta R^2, \qquad |\nabla_y F_R| \le C\beta R$$

由乘积法则，结合 $|\partial_t \chi_1(t/R^2)| \le CR^{-2}, |\nabla_y \chi_\perp(y/R)| \le CR^{-1}, |D_y^2 \chi_\perp(y/R)| \le CR^{-2}$ 和 (2.21)，可得

$$\|\partial_1 F_R\|_\infty + \sum_{j,k=2}^{n} \|\partial_j \partial_k F_R\|_\infty \le C\beta, \tag{2.23}$$

关于 R 一致成立。

对于球 $B(c,r)$，$r \le 1$，令 $c_\perp = (c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$。由泰勒展开和 (2.23),

$$\sup_{x=(t,y)\in B(c,r)} \left|F_R(x) - F_R(c) - \nabla_y F_R(c)\cdot(y-c_\perp)\right| \le C\beta(r+r^2) \le C\beta.$$

这与 $F_R(c) + \nabla_y F_R(c)\cdot(y-c_\perp) \in \mathcal{P}$ 以及 (2.7) 这一事实一起，推出$\|F_R\|_{\mathrm{BMO}(\mu)} \le C\beta$。类似地，我们也得到 $\|G\|_{\mathrm{BMO}(\mu)} \le C\beta$。因此，由于 $h = g - G$，有 $\|h\|_{\mathrm{BMO}(\mu)} \le C\beta$。

对于 $0 < \varepsilon \le 1$，令 $\eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\eta(x/\varepsilon)$。对于带有 $r < 1$ 的 $B = B(c, r)$，我们有

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B |\eta_\varepsilon * h(x) - \Pi_B(\eta_\varepsilon * h)(x)|\, d\mu(x)$$
$$= \frac{1}{\mu(B)}\int_B \Big| \int_{|z|<\varepsilon/8} \eta_\varepsilon(z)\Big[h(x-z) - (\Pi_B h(\cdot - z))(x)\Big]\, dz\Big| d\mu(x).$$

利用 $\Pi_B[u(\cdot - z)](x) = (\Pi_{B-z}u)(x-z)$ 这一事实，我们进一步得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu(B)}\int_B |\eta_\varepsilon * h(x) - \Pi_B(\eta_\varepsilon * h)| d\mu(x)\\
&\quad= \frac{1}{\mu(B)}\int_B \Big| \int_{|z|<\varepsilon/8} \eta_\varepsilon(z)\Big[h(x-z) - (\Pi_{B-z}h)(x-z)\Big]\, dz\Big| d\mu(x)\\
&\quad\le \int_{|z|<\varepsilon/8} \eta_\varepsilon(z)\frac{1}{\mu(B)}\int_B \Big|\Big[h(x-z) - (\Pi_{B-z}h)(x-z)\Big]\Big| d\mu(x)\, dz\\
&\quad\le \int_{|z|<\varepsilon/8} \eta_\varepsilon(z)\frac{1}{\mu(B)}\int_{B-z} \Big|\Big[h(u) - (\Pi_{B-z}h)(u)\Big]\Big| e^{2z_1} d\mu(u)\, dz\\
&\quad\lesssim \|h\|_{\mathrm{BMO}(\mu)}\\
&\lesssim \beta.
\end{aligned}$$

此外，(2.20) 和 (2.1) 蕴含

$$\sup_c \int_{B(c,1)} |h(x)|\, dx \lesssim \sup_c \frac{1}{\mu(B(c,1))}\int_{B(c,1)} |h(x)|\, d\mu(x) \le C\beta.$$

因此，对固定的 $\varepsilon > 0$，$\|\eta_\varepsilon * h\|_\infty \le C\|\eta_\varepsilon\|_\infty \beta < \infty$。

最后，令 $g_m = F_m + \eta_{1/m} * h$。这些函数有界，且 BMO 半范数一致有界。根据定理 2.11，$h \in L^s_{\mathrm{loc}}$ 对每个有限的 s都成立；因此 $\eta_{1/m} * h \to h$属于 L^s_{loc}。截断函数在局部给出 $F_m \to F$，所以 $g_m \to F + h = g - p$ 属于 L^s_{loc}。

对于 $n=1$，不需要截断函数 $\chi_\perp$。
这就完成了证明。 □

定理 2.13. $H^1(\mu)$ 的对偶空间是$\mathrm{BMO}(\mu)/\mathcal{P}$。具体而言，每个 $g\in\mathrm{BMO}(\mu)$ 都定义了一个泛函

$$\Lambda_g(h)=\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\overline{g(x)}\,d\mu(x)$$

i最初定义在有限原子和上。该泛函可唯一延拓到 $H^1(\mu)$，并且

$$\|\Lambda_g\|_{(H^1(\mu))^*}\simeq\|g\|_{\mathrm{BMO}(\mu)}.$$

反过来， $H^1(\mu)$上的每个有界线性泛函都具有这种形式。表示函数在模去 $\mathcal{P}$ 的意义下唯一。

证明。设 $g\in$BMO(μ)，并取引理 2.12 中的 g_m 和 p。固定 $b>0$ 和 $1<q<\infty$。若 a 是一个支集在 B 中的 $(1,q;\mathcal{P})_b$-原子，则由 H¨older 不等式、命题 2.10 和定理 2.11 可得

$$\left|\int a\overline{g_m}\,d\mu\right|=\left|\int a\overline{(g_m-\Pi_B g_m)}\,d\mu\right|\le C_{b,q}\|g\|_{\mathrm{BMO}(\mu)}.$$

对于任意无限原子展开 $h=\sum_k\lambda_k a_k$ in $L^1(\mu)$，由于 $g_m\in L^\infty(\mu)$，积分是有依据的。对所有此类展开取下确界，得到

$$\left|\int h\overline{g_m}\,d\mu\right|\le C_{b,q}\|g\|_{\mathrm{BMO}(\mu)}\|h\|_{H_b^{1,q}(\mu)}.$$

若 h 是有限个 q-原子的和，则其支集有界，且属于 L^q。由引理 2.12 和 $\int hp\,d\mu=0$，可得

$$\left|\int h\overline{g}\,d\mu\right|=\left|\int h\,\overline{(g-p)}\,d\mu\right|=\lim_{m\to\infty}\left|\int h\overline{g}_m\,d\mu\right|\le C_{b,q}\|g\|_{\mathrm{BMO}(\mu)}\|h\|_{H_b^{1,q}(\mu)}. \tag{2.24}$$

这证明函数 Λ_g 在 $H^1(\mu)$ 上定义了一个有界线性泛函。

反过来，令 $\Lambda\in(H^1(\mu))^*$，并令整数 $R\ge1$对应 $B_R=B(0,\ R)$。令

$$V_R=\left\{u\in L^2(B_R,\mu):\int_{B_R}up\,d\mu=0\qquad\text{for all } p\in\mathcal{P}\right\}.$$

我们可以用 N_R 个半径固定且不超过 1 的重叠球覆盖 B_R。常数 C_R可能取决于 R（通过 N_R 及半径之比），但不取决于 u。于是

$$\|u\|_{H^1(\mu)}\le\mu(B_R)^{1/2}\|u\|_{L^2(B_R,\mu)}\le C_R\|u\|_{L^2(B_R,\mu)},\qquad u\in V_R.$$

由于 V_R 是 $L^2(B_R,\ \mu)$ 的闭子空间，Riesz表示定理给出$f_R\in L^2(B_R,\ \mu)$，使得

$$\Lambda(u)=\int_{B_R}u\overline{f_R}\,d\mu,\qquad u\in V_R.$$

此外， f_R 在相差一个 $\mathcal{P}$中的元素的意义下是唯一的，因为$V_R^\perp=\mathcal{P}|_{B_R}$。

现在，如果 $u\in V_R$，那么其零延拓属于 V_{R+1}。因此

$$\int_{B_R}u\overline{(f_{R+1}-f_R)}\,d\mu=0,\qquad u\in V_R.$$

由此可得，$f_{R+1}-f_R\in\mathcal{P}$ 在 B_R上。通过从 f_{R+1}中减去 $\mathcal{P}$ 的一个适当元素，我们可以假设 $f_{R+1}=f_R$ 在 B_R上。重复这一论证，我们得到一个函数$f\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$，使得对于每个 R，$f=f_R$ 在 B_R 上。因此，

$$\Lambda(u)=\int u\overline{f}\,d\mu$$

对于每个具有紧支集且 $\mathcal{P}$-矩消失的 $u\in L^2(\mu)$，以及由此对于每个 $(1,2;\mathcal{P})_1$-原子的有限线性组合。

设 B 是一个半径不超过 1 的球，并令 $g_B=f-\Pi_B f$。若 $g_B\neq 0$，则

$$a_B=\frac{g_B\mathbf{1}_B}{\mu(B)^{1/2}\|g_B\|_{L^2(B,\mu)}}$$

是一个 $(1,2;\mathcal{P})_1$-原子。因此，

$$\mu(B)^{-1/2}\|f-\Pi_B f\|_{L^2(B,\mu)}=|\Lambda(a_B)|\le\|\Lambda\|.$$

因此$\|f\|_{\mathrm{BMO}^2_1(\mu)}\le\|\Lambda\|$。第一部分中由 f 构造的有界泛函，在 $(1,2;\mathcal{P})_1$-原子的有限线性组合上与 Λ 一致，故由稠密性，在 $H^1(\mu)$ 上也一致。每个有限-q 原子分解的积分表达式由第一部分得出，而模 $\mathcal{P}$ 的唯一性则由局部振荡为零得出。

至此，证明完成。 □

我们还将 $H^{1,q}_{b,\mathrm{fin}}(\mu)$ 定义为 $(1,q;\mathcal{P})_b$ 原子的有限线性组合所构成的空间，并赋予其范数

$$\|f\|_{H^{1,q}_{b,\mathrm{fin}}(\mu)}=\inf\left\{\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|:f=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k a_k,\ N<\infty\right\},$$

其中，下确界取遍所有有限原子分解。

命题 2.14. 设 $b>0$ 和 $1<q<\infty$。对于每个 $f\in H^{1,q}_{b,\mathrm{fin}}(\mu)$，

$$\|f\|_{H^{1,q}_b(\mu)}\le\|f\|_{H^{1,q}_{b,\mathrm{fin}}(\mu)}\le C_{b,q,n}\|f\|_{H^{1,q}_b(\mu)}.$$

证明。第一个不等式显然；因此，我们只需证明第二个不等式。设 Λ 是 $H^{1,q}_{b,\mathrm{fin}}(\mu)$ 上的有界线性泛函。若 B 是半径不超过 b 的球，且 $u\in L^q(B,\mu)$ 湮灭 $\mathcal{P}$，则 u 是一个 $(1,q;\mathcal{P})_b$-原子的倍数。因此

$$|\Lambda(u)|\le\|\Lambda\|\mu(B)^{1/q'}\|u\|_{L^q(B,\mu)}. \tag{2.25}$$

对于 $R\ge 1$，令 $B_R=B(0,R)$。若 $u\in L^q(B_R,\mu)$ 湮灭 $\mathcal{P}$，通过采用半径为 b 的球进行覆盖论证，并应用与命题 2.8 中相同的引理 2.4，可得

$$\|u\|_{H^{1,q}_{b,\mathrm{fin}}(\mu)}\le C_{R,b,q}\|u\|_{L^q(B_R,\mu)}.$$

因此，Λ 在 $L^q(B_R,\mu)$ 的这个闭子空间上连续。$L^q(B_R,\mu)$ 与 $L^{q'}(B_R,\mu)$ 的对偶性给出了一个代表元 $g_R\in L^{q'}(B_R,\mu)$，其在模 $\mathcal{P}$ 的意义下唯一。与定理 2.13 的证明一样，存在 $g\in L^{q'}_{\text{局部}}$ 使得

$$\Lambda(f)=\int f\overline{g}\,d\mu$$

对每个 $f\in H^{1,q}_{b,\text{有限}}(\mu)$ 均成立。

由 (2.25) 及 $L^q(\mu)$–$L^{q'}(\mu)$ 对偶性可知，对于半径不超过 b 的每个球 B，

$$\inf_{p\in\mathcal{P}}\|g-p\|_{L^{q'}(B,\mu)}\le\|\Lambda\|\mu(B)^{1/q'}.$$

结合引理 2.3、命题 2.10 和定理 2.11，可得 $\|g\|_{\mathrm{BMO}(\mu)} \le C\|\Lambda\|$。与 (2.24) 类似，对于每个 $f \in H^{1,q}_{b,\mathrm{fin}}(\mu)$，我们有

$$|\Lambda(f)| = \left| \int f \overline{g}\, d\mu \right| \le C\|\Lambda\| \|f\|_{H^{1,q}_b(\mu)}.$$

根据 Hahn–Banach定理，将其应用于赋范向量空间 $H^{1,q}_{b,\mathrm{fin}}(\mu)$，

$$\|f\|_{H^{1,q}_{b,\mathrm{fin}}(\mu)} = \sup_{\|\Lambda\|\le 1} |\Lambda(f)| \le C\|f\|_{H^{1,q}_b(\mu)}.$$

这就完成了我们的证明。 □

2.4. **插值定理**。

一个辅助原子空间。令 $\mathcal{D}$ 为通过细分单位立方体 $k + [0,1)^n$, $k \in \mathbb{Z}^n$得到的二进格。辅助的（1，q）-原子属于以下两种类型之一：

（i）它支集于单位立方体的一个真二进子立方体 Q 中，满足 $\int a\, d\mu = 0$，且 $\|a\|_{L^q(\mu)} \le \mu(Q)^{1/q-1}$；（ii）它支集于一个单位二进立方体 Q中，不要求消去性，且$\|a\|_{L^q(\mu)} \le \mu(Q)^{1/q-1}$。

我们将空间 X^1_q 定义为所有满足下列条件的函数 $f \in L^1(\mu)$ 的集合

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \quad \text{in } L^1(\mu), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty,$$

其中每个 a_k 都是一个 $(1,q)$-原子。我们还定义

$$\|f\|_{X^1_q} = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| : f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \right\}.$$

引理 2.15. 空间 X^1_q、 $1 < q \le \infty$ 在等价范数下相同。因此，对于 $1 < q \le \infty$，我们将 X^1 定义为任一空间 X^1_q。

证明. 只需证明对所有 $1 < q < \infty$ 都有 $X^1_q = X^1_\infty$。固定 $1 < q < \infty$。由 H¨older 不等式，包含关系 $X^1_\infty \hookrightarrow X^1_q$ 显然成立。剩下只需证明 $X^1_q \hookrightarrow X^1_\infty$。设 a 是一个支集包含于二进立方体 Q 中的 $(1,q)$-原子，且 $\ell(Q) \le 1$。取 $K > 1$，并记满足下列条件的所有极大二进子立方体 $Q_i \subset Q$ 组成的集合为 $\{Q_i\}_{i\in\mathcal{I}}$

$$\frac{1}{\mu(Q_i)} \int_{Q_i} |a|^q\, d\mu > \left(\frac{K}{\mu(Q)} \right)^q,$$

这意味着

$$\sum_i \mu(Q_i) \le K^{-q} \mu(Q).$$

由于 Q_i 的父节点不满足停时条件，因此我们有

$$\frac{1}{\mu(Q_i)} \int_{Q_i} |a|^q\, d\mu \le C \left(\frac{K}{\mu(Q)} \right)^q.$$

对于每个 $i \in \mathcal{I}$，定义

$$b_i = (a - a_{Q_i})\mathbf{1}_{Q_i}, \qquad a_{Q_i} = \frac{1}{\mu(Q_i)} \int_{Q_i} a\, d\mu.$$

Set

$$g = a - \sum_i b_i.$$

不难看出

$$\int b_i \, d\mu = 0.$$

此外，

$$\begin{aligned}\sum_i \mu(Q_i)^{1-1/q}\|b_i\|_{L^q(\mu)} &\le \Big(\sum_i \mu(Q_i)\Big)^{1/q'}\Big(\sum_i \|b_i\|_{L^q(\mu)}^q\Big)^{1/q} \\ &\le 2K^{-(q-1)}\mu(Q)^{1/q'}\|a\|_{L^q(\mu)} \\ &\le 2K^{-(q-1)}.\end{aligned}$$

由二进勒贝格微分定理可知

$$\|g\|_\infty \le CK/\mu(Q).$$

这结合 $\operatorname{supp} g \subset Q$ 这一事实，意味着如果 $\ell(Q) < 1$，则 $g/(CK)$ 是一个 $(1,\infty)$ (i) 型原子；如果 $\ell(Q) = 1$，则它是一个 (ii) 型原子。因此，

$$\|g\|_{X^1_\infty} \le CK.$$

因此我们证明了，每个与立方体 Q 相关联的 $(1,q)$ 原子 a 都可以写成

$$a = g + \sum_i \lambda_i a_i,$$

其中 $g \in X^1_\infty$ 满足 $\|g\|_{X^1_\infty} \le CK$，每个 a_i 都是一个 $(1,q)$ (i) 型原子，并且

$$\sum_i |\lambda_i| \le \frac{1}{2}.$$

至此，仿照命题 2.8 的证明，即可完成证明。□

我们需要一个算子，将辅助的 $(1,q)$ 原子变为湮灭 $\mathcal{P}$ 的原子，同时不失去在 $L^p(\mu)$ 中恢复函数的能力，$p > 1$。沿漂移方向平移可同时满足这两个性质：选择适当的权重以保持 μ-密度后，恒等算子与向前平均之差对 $\mathcal{P}$ 的矩为零。同时，由于测度沿该方向增长，该平均算子在 $L^p(\mu)$ 上是严格压缩。

取一个非负径向函数 $\zeta \in C_c^\infty(B(0,1/8))$，使得 $\int \zeta(z)\,dz = 1$。定义

$$\mathcal{A}f(x) = \int \zeta(z)e^{-2(\frac{1}{2}+z_1)} f(x - \frac{1}{2}e_1 - z)\,dz, \qquad \text{and } \mathcal{S} = I - \mathcal{A}. \tag{2.26}$$

若 $F_f(x) = e^{2x_1} f(x)$，则

$$e^{2x_1}\mathcal{A}f(x) = (\zeta * F_f)(x - \frac{1}{2}e_1). \tag{2.27}$$

由于 $\int z_j \zeta(z)\,dz = 0$ 对 $j \ge 2$ 成立，利用富比尼定理可得

$$\int \mathcal{A}f \, d\mu = \int f \, d\mu, \qquad \int x_j \mathcal{A}f \, d\mu = \int x_j f \, d\mu, \quad j \ge 2. \tag{2.28}$$

因此，

$$\int \mathcal{S}f(x)p(x)\,d\mu(x) = 0 \qquad \text{for all } p \in \mathcal{P}.$$

引理 2.16. 算子 $\mathcal{S}$ 在 $L^1(\mu)$ 上有界，且其逆算子在 $L^p(\mu)$上有界，对任意 $1 < p < \infty$均成立。此外，

$$\mathcal{S} : X^1 \longrightarrow H^1(\mu)$$

有界。

证明。对于 $h_1 > 0$,

$$\|e^{-2h_1} f(\cdot - h)\|_{L^p(\mu)} = e^{-2h_1(1-1/p)} \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

在 ζ 的支集上，我们有 $\frac{1}{2} + z_{1-} \geq \frac{3}{8}$。由闵可夫斯基不等式，我们有 e

$$\|\mathcal{A}\|_{L^p(\mu)\to L^p(\mu)} \leq e^{-\frac{3}{4}(1-1/p)} < 1, \qquad 1 < p < \infty.$$

对于 $p = 1$, $\|\mathcal{A}\|_{L^p(\mu)\to L^p(\mu)} \leq 1$，因此 $\mathcal{S}$ 在 $L^1(\mu)$ 上有界。对于 $1 < p < \infty$，我们有 $\|\mathcal{A}\|_{L^p(\mu)\to L^p(\mu)} < 1$。因此，对于 $1 < p < \infty$,

$$\mathcal{S}^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{A}^m$$

在 $L^p(\mu)$上按算子范数收敛。

由于 $\mathcal{S}$ 在 $L^1(\mu)$ 上有界，由引理 2.15，只需证明

$$\|\mathcal{S}a\|_{H^1(\mu)} \leq C \tag{2.29}$$

对所有 (1,2)-原子均成立。

设 a 是一个支集包含于以 c 为中心的二进立方体 Q 中的 (1,2)-原子，且 $\ell(Q) \leq 1$。映射 $\tau_c f(x) = e^{2c_1} f(x + c)$ 保持 $L^1(\mu)$ 范数，并与 $\mathcal{A}$ 可交换。因此，我们不妨假设 $c = 0$。若 $\ell(Q) = 1$，即 a 是一个 (ii) 型 (1,2) 原子。由 (2.28),

$$\int \mathcal{S}a(x)p(x)\,d\mu(x) = \int a(x)p(x)\,d\mu(x) - \int \mathcal{A}a(x)p(x)\,d\mu(x) = 0 \quad \text{for all } p \in \mathcal{P}.$$

此外，由 (2.26) 可得 supp $\mathcal{S}a \subset B(0, 2\sqrt{n})$。由 $\mathcal{S}$在$L^2(\mu)$ 上的有界性,

$$\|\mathcal{S}a\|_{L^2(\mu)} \lesssim \|a\|_{L^2(\mu)} \lesssim \mu(B(0, 2\sqrt{n}))^{-1/2}.$$

因此， $\mathcal{S}a$ 是一个 $(1, 2; \mathcal{P})_{2\sqrt{n}}$ 原子的倍数。这与命题 2.8 一起意味着 $\|\mathcal{S}a\|_{H^1(\mu)} \leq C$。

设 a 是一个 (1,2) 型原子，即 $r := \ell(Q) < 1$。若 $r \geq 1/8$，仿照情形 $r = 1$ 的论证，我们也可得到 (2.29)。剩下只需证明 $r < 1/8$ 时的不等式。令

$$F_a = e^{2x_1} a(x), \qquad M_j = \int x_j a(x)\,d\mu(x), \quad 2 \leq j \leq n.$$

于是 $\int F_a\,dx = 0$, $\|F_a\|_{L^1(dx)} \leq 1$，并

且

$$|M| := \sum_{j=2}^{n} |M_j| \leq Cr. \tag{2.30}$$

由 (2.27) 和零均值条件,

$$|(\zeta * F_a)(u)| = \left| \int_Q [\zeta(u - y) - \zeta(u)] F_a(y)\,dy \right| \leq Cr.$$

由 (2.27) 以及 supp $F_a \subset B(0, \sqrt{n}\,r)$ 和 supp $\zeta \subset B(0, 1/8)$ 这些事实可知，supp $\mathcal{A}a \subset B(0, 2\sqrt{n})$。结合 (2.27) 和上述不等式，得到

$$\|\mathcal{A}a\|_{L^2(\mu)} \leq Cr. \tag{2.31}$$

取 $\varphi \in C_c^\infty(B(0,1))$，使得 $\int \varphi\,dx = 1$，并令 $\varphi_\rho(x) = \rho^{-n}\varphi(x/\rho)$。对于 $r \le \rho \le 1$，定义

$$h_\rho(x) = -e^{-2x_1}\sum_{j=2}^{n} M_j \partial_j \varphi_\rho(x).$$

于是，通过分部积分，

$$\int h_\rho\,d\mu = 0, \qquad \int x_j h_\rho\,d\mu = M_j, \quad 2 \le j \le n. \tag{2.32}$$

此外，

$$\|h_\rho\|_{L^2(\mu)} \le C\frac{|M|}{\rho}\mu(B(0,\rho))^{-1/2}. \tag{2.33}$$

令 $N \in \mathbb{N}$为满足 $2^N r \ge 1/2$的最小数，并对 $k = 0, \dots, N$，设 $\rho_k = 2^k r$。于是，我们写作

$$\mathcal{S}a = (a - h_r) + \sum_{k=0}^{N-1}(h_{\rho_k} - h_{\rho_{k+1}}) + (h_{\rho_N} - \mathcal{A}a). \tag{2.34}$$

(2.34) 右侧的每一项都因 (2.28) 和 (2.32) 而湮灭 $\mathcal{P}$。对于第一项 $a - h_r$，有 $\operatorname{supp}(a - h_r) \subset B(0, \sqrt{n}\,r)$；此外，由 (2.33) 和 (2.30),

$$\|a - h_r\|_{L^2(\mu)} \le \|a\|_{L^2(\mu)} + \|h_r\|_{L^2(\mu)} \lesssim (1 + \frac{|M|}{r})\mu(B(0,r))^{-1/2} \lesssim \mu(B(0,r))^{-1/2}.$$

因此，$a - h_r$ 是一个 (1,2) 原子的倍数，这意味着 $\|a - h_r\|_{X^1} \lesssim 1$。

对于每个 $k = 0, \dots, N-1$，我们有 $\operatorname{supp}(h_{\rho_k} - h_{\rho_{k+1}}) \subset B(0, 2^{k+1}r)$。此外，根据（2.33）、（2.30）和（2.2），

$$\|h_{\rho_k} - h_{\rho_{k+1}}\|_{L^2(\mu)} \lesssim \frac{|M|}{2^k r}\mu(B(0,2^{k+1}r))^{-1/2} \lesssim 2^{-k}\mu(B(0,2^{k+1}r))^{-1/2}.$$

由此可得

$$\|h_{\rho_k} - h_{\rho_{k+1}}\|_{X^1} \lesssim 2^{-k},$$

这意味着

$$\Big\|\sum_{k=0}^{N-1}(h_{\rho_k} - h_{\rho_{k+1}})\Big\|_{X^1} \lesssim 1.$$

最后一项 $h_{\rho_N} - \mathcal{A}a$ 支集在 $B(0, 2\sqrt{n})$ 中。此外，根据（2.31）、（2.33）和 (2.30) $r < 1/8$，我们有

$$\|h_{\rho_N} - \mathcal{A}a\|_{L^2(\mu)} \lesssim \frac{|M|}{\rho_N} + r \lesssim 1,$$

这意味着

$$\|h_{\rho_N} - \mathcal{A}a\|_{X^1} \lesssim 1.$$

证明完毕。 □

引理 2.17。设 T 是一个次线性算子，从 X^1 到 $L^1(\mu)$ 有界，且在 $L^2(\mu)$上有界。那么，对任意 $1 < p < 2$，T 在 $L^p(\mu)$ 上有界。

证明。固定 $1 < q < p < 2$。令 $\mathcal{M}_d$ 为如下定义的二进最大算子：

$$\mathcal{M}_d f(x) = \sup_{\substack{Q \ni x \\ Q \in \mathcal{D}}} \frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f(y)|d\mu(y), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

其中 上确界取遍所有二进立方体 Q，使得 $x \in Q$ 且 $\ell(Q) \le 1$.

由 (2.2) 可知， $\mathcal{M}_d$ 在 $L^r(\mu)$ 上有界，其中 $1 < r < \infty$。令 $\mathcal{M}_{d,q} f = (\mathcal{M}_d(|f|^q))^{1/q}$，则

$$\|\mathcal{M}_{d,q} f\|_{L^p(\mu)} \le C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

设 $f \in L^\infty(\mu)$ 具有紧支集。对于 $\lambda > 0$，令

$$\mathcal{D}_\lambda = \left\{ Q \in \mathcal{D} : \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f|^q \, d\mu > \lambda^q \right\}.$$

令 $\mathcal{Q}_\lambda$ 为 $\mathcal{D}_\lambda$ 中的极大立方体族，并令 $\Omega_\lambda = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_\lambda} Q$。如果 $\mathcal{D}_\lambda$ 为空，则 $\mathcal{Q}_\lambda$ 也为空，$\Omega_\lambda = \emptyset$。这些极大立方体两两不相交。显然，

$$\Omega_\lambda = \{x : \mathcal{M}_{d,q} f(x) > \lambda\}.$$

Set

$$b_\lambda = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_\lambda} b_Q, \qquad g_\lambda = f - b_\lambda, \qquad b_Q = \begin{cases} (f - f_Q)\mathbf{1}_Q, & \ell(Q) < 1, \\ f\mathbf{1}_Q, & \ell(Q) = 1, \end{cases}$$

其中 $f_Q = \mu(Q)^{-1} \int_Q f \, d\mu$。如果 $\mathcal{Q}_\lambda = \emptyset$，则令 $b_\lambda = 0$ 和 $g_\lambda = f$。

如果 $\ell(Q) < 1$，则其二进父立方体 Q 属于 $\mathcal{D}$，而不属于 $\mathcal{D}_\lambda$。根据局部倍增性质 (2.2)，

$$\begin{aligned} \|b_Q\|_{L^q(\mu)} &\le C \left(\int_Q |f|^q \, d\mu \right)^{1/q} \\ &\le C\mu(\widehat{Q})^{1/q} \left(\frac{1}{\mu(\widehat{Q})} \int_{\widehat{Q}} |f|^q \, d\mu \right)^{1/q} \\ &\le C\lambda \mu(Q)^{1/q} \\ &\le C\mu(Q)^{1/q} \inf_{x \in Q} \mathcal{M}_{d,q} f(x). \end{aligned}$$

此外， $\int_Q b_Q \, d\mu = 0$。因此，当 $\ell(Q) < 1$ 时， b_Q 是某个辅助 $(1, q)$-原子的倍数。如果 $\ell(Q) = 1$，则有

$$\begin{aligned} \|b_Q\|_{L^q(\mu)} &= \mu(Q)^{1/q} \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f|^q \, d\mu \right)^{1/q} \\ &\le \mu(Q)^{1/q} \inf_{x \in Q} \mathcal{M}_{d,q} f(x), \end{aligned}$$

这意味着，当 $\ell(Q) = 1$ 时， b_Q 是一个辅助 $(1, q)$-原子的倍数。因此，

$$\begin{aligned} \|b_Q\|_{X_q^1} &\le \mu(Q)^{1-1/q} \|b_Q\|_{L^q(\mu)} \\ &\le C\mu(Q) \inf_{x \in Q} \mathcal{M}_{d,q} f(x) \\ &\le C \int_Q \mathcal{M}_{d,q} f \, d\mu. \end{aligned}$$

由于这一族中的元素两两不相交，并且在 $\mathcal{Q}_\lambda$ 中的每个立方体上都有 $\mathcal{M}_{d,q} f > \lambda$，由引理 2.15 可得

$$\|b_\lambda\|_{X^1} \le C \sum_{Q \in \mathcal{Q}_\lambda} \int_Q \mathcal{M}_{d,q} f \, d\mu \le C \int_{\{\mathcal{M}_{d,q} f > \lambda\}} \mathcal{M}_{d,q} f \, d\mu.$$

此外，我们有 $g_\lambda = f$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_\lambda$ 上，而当 $Q \in \mathcal{Q}_\lambda, \ell(Q) < 1$ 时，$g_\lambda = f_Q$；并且 $g_\lambda = 0$ 在 $Q \in \mathcal{Q}_\lambda, \ell(Q) = 1$ 上。因此，

$$\|g_\lambda\|_{L^2(\mu)}^2 \le C\Big(\int_{\{\mathcal{M}_{d,q} f \le \lambda\}} [\mathcal{M}_{d,q} f]^2 \, d\mu + \sum_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_\lambda \\ \ell(Q)<1}} \int_Q |f_Q|^2 d\mu \Big).$$

对于 $\ell(Q) < 1$，其二进父立方体 Q 属于 $\mathcal{D}$，而不属于 $\mathcal{D}_\lambda$。由局部倍增性质 (2.2),

$$|f_Q| \le \Big(\frac{\mu(\widehat{Q})}{\mu(Q)}\Big)^{1/q} \Big(\frac{1}{\mu(\widehat{Q})} \int_{\widehat{Q}} |f|^q \, d\mu\Big)^{1/q} \le C\lambda.$$

这些不等式意味着

$$\|g_\lambda\|_{L^2(\mu)}^2 \le C \left(\int_{\{\mathcal{M}_{d,q} f \le \lambda\}} [\mathcal{M}_{d,q} f]^2 \, d\mu + \lambda^2 \mu\{\mathcal{M}_{d,q} f > \lambda\} \right).$$

X^1–$L^1(\mu)$ 有界性、$L^2(\mu)$-有界性以及 T 的次线性性给出

$$\begin{aligned} \mu\{|Tf| > 2\lambda\} &\le \frac{C}{\lambda} \|b_\lambda\|_{X^1} + \frac{C}{\lambda^2} \|g_\lambda\|_{L^2(\mu)}^2 \\ &\le C \left(\frac{1}{\lambda} \int_{\{\mathcal{M}_{d,q} f > \lambda\}} \mathcal{M}_{d,q} f \, d\mu + \frac{1}{\lambda^2} \int_{\{\mathcal{M}_{d,q} f \le \lambda\}} [\mathcal{M}_{d,q} f]^2 \, d\mu + \mu\{\mathcal{M}_{d,q} f > \lambda\} \right). \end{aligned}$$

两边乘以 λ^{p-1}，在 $(0, \infty)$ 上积分，并利用富比尼定理，可得

$$\|Tf\|_{L^p(\mu)}^p \le C_{p,q} \|\mathcal{M}_{d,q} f\|_{L^p(\mu)}^p \le C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mu)}^p.$$

证明完毕。 □

定理 2.18。设 T 为次线性，并且从 $H^1(\mu)$ 到 $L^1(\mu)$ 有界，且在 $L^2(\mu)$上有界。那么，对于每个 $1 < p < 2$，T 在 $L^p(\mu)$ 上有界。

证明。令 $\mathcal{S}$ 由（2.26）定义。由引理 2.16，$T\mathcal{S}$ 从 X^1 到 $L^1(\mu)$ 有界，并且在 $L^2(\mu)$ 上有界。引理 2.17 给出

$$\|T\mathcal{S}h\|_{L^p(\mu)} \le C_p \|h\|_{L^p(\mu)}, \qquad 1 < p < 2.$$

由于 $\mathcal{S}^{-1}$ 在 $L^p(\mu)$ 上有界，

$$\|Tf\|_{L^p(\mu)} \le C_p \|\mathcal{S}^{-1} f\|_{L^p(\mu)} \le C_p \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

证明完毕。 □

作为定理 2.18 和定理 2.13 的直接推论，我们有：

定理 2.19。设 T 在线性意义下定义，并且在 $L^2(\mu)$ 上有界。假设 $T: L^\infty(\mu) \to \mathrm{BMO}(\mu)/\mathcal{P}$有界，其端点作用与 T在 $L^2(\mu) \cap L^\infty(\mu)$上的作用一致。那么，对于每个 $2 < p < \infty$，T 在 $L^p(\mu)$ 上有界。

3. Riesz transforms on Hardy and BMO spaces

令 $Uf = e^{x_1} f$。那么 $U: L^2(\mu) \to L^2(dx)$ 是酉算子，且

$$U\mathcal{L}U^{-1} = -\Delta + 1. \tag{3.1}$$

因此，$e^{-t\mathcal{L}}$ 的热核定义为

$$e^{2x_1} p_t(x, y) = Q_t(x - y), \qquad Q_t(z) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|z - 2te_1|^2}{4t} \right). \tag{3.2}$$

Set

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-1/2} Q_t(z)\, dt. \tag{3.3}$$

令 $\Phi(z) = e^{z_1} G(z)$。则

$$G(z) = d_n \int_0^\infty t^{-(n+1)/2} e^{-t-|z|^2/(4t)}\, dt, \qquad d_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}(4\pi)^{n/2}}. \tag{3.4}$$

记 K_j 和 K_j^* 为相对于 $d\mu$ 的 R_j 和 R_j^* 的核。于是，我们有

$$e^{2x_1} K_j(x,y) = F_j(x-y), \qquad F_j = (\partial_j - 2\delta_{1j})\Phi, \tag{3.5}$$

and

$$e^{2x_1} K_j^*(x,y) = F_j^*(x-y), \qquad F_j^* = -\partial_j \Phi. \tag{3.6}$$

事实上，对 $e^{-2x_1}\Phi(x-y)$ 求导即可得到 (3.5)，而 (3.6) 则由 $R_j^* = -R_j - 2\delta_{1j}\mathcal{L}^{-1/2}$ 得到。

Riesz变换对 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数是良定义的，并且在 $L^2(\mu)$ 上有界。

引理 3.1。若 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，则

$$R_j\varphi,\ R_j^*\varphi \in L^\infty(\mu) \cap L^2(\mu), \qquad 1 \le j \le n.$$

证明。由 (1.3)，$R_j\varphi$ 和 $R_j^*\varphi$ 都属于 $L^2(\mu)$。因此只需证明 $R_j\varphi$，$R_j^*\varphi \in L^\infty(\mu)$。

回顾式（3.4）中定义的函数 G。取 $r = |z|$，由于

$$t + \frac{r^2}{4t} = r + \frac{(r-2t)^2}{4t},$$

我们可以写成 $G(z) = d_n e^{-r} J_0(r)$，其中

$$J_m(r) = \int_0^\infty t^{-(n+1)/2-m} \exp\left(-\frac{(r-2t)^2}{4t}\right) dt, \qquad m = 0, 1.$$

将积分拆分为 $0 < t < r/4$、$r/4 \le t \le r$ 和 $t > r$，可得，对于 $r \ge 1$，

$$J_m(r) \lesssim r^{-n/2-m}, \qquad m = 0, 1.$$

由此可得

$$|G(z)| \lesssim e^{-r} r^{-n/2}.$$

在积分号下求导可得

$$\partial_j G(z) = -\frac{d_n z_j}{2} \int_0^\infty t^{-(n+3)/2} e^{-t-r^2/(4t)}\, dt.$$

因此 $|\nabla G(z)| \lesssim r e^{-r} J_1(r) \lesssim e^{-r} r^{-n/2}$。于是，

$$|\partial^\alpha G(z)| \le C_\alpha e^{-|z|} |z|^{-n/2}, \qquad |z| \ge 1, \quad |\alpha| \le 1. \tag{3.7}$$

这与以下事实

$$F_j(z) = e^{z_1}(\partial_j G(z) - \delta_{1j} G(z)), \qquad F_j^*(z) = -e^{z_1}(\partial_j G(z) + \delta_{1j} G(z)),$$

蕴含

$$|F_j(z)| + |F_j^*(z)| \le C e^{z_1 - |z|} |z|^{-n/2}, \qquad |z| \ge 1. \tag{3.8}$$

设 $K=\operatorname{supp}\varphi$。对于满足 $\operatorname{dist}(x,K)\ge 1$ 的 $x\in\mathbb{R}^n$，利用 (3.5)、(3.6) 和 (3.8)，

$$\begin{aligned}|R_j\varphi(x)|+|R_j^*\varphi(x)| &\le C\int_K e^{-x_1+y_1-|x-y|}|x-y|^{-n/2}|\varphi(y)|\,dy\\ &\le C\int_K |\varphi(y)|\,dy,\end{aligned}$$

因为 $|x-y|\ge|x_1-y_1|$ 和 $|x-y|\ge 1$。

在紧集 $\{x$ 上：$\operatorname{dist}(x,\ K)\le 1\}$，回顾可知 $Uf=e^{x_1}f$。于是 $R_j=U^{-1}TU$和$R_j^*=U^{-1}T^*U$，其中 $T=(\partial_j-\delta_{1j})(-\Delta+1)^{-1/2}$的符号为 $m_j(\xi)=(i\xi_j-\delta_{1j})(1+|\xi|^2)^{-1/2}$，且 $|m_j|\le 1$。由于 $U\varphi\in C_c^\infty$，傅里叶反演得到

$$\|T(U\varphi)\|_\infty+\|T^*(U\varphi)\|_\infty\le(2\pi)^{-n}\big(\|\widehat{U\varphi}\|_1+\|\widehat{U\varphi}\|_1\big)<\infty,$$

且 $e^{\pm x_1}$ 在该紧集上有界，因此 $R_j\varphi$ 和 $R_j^*\varphi$ 有界。

证明完毕。 □

引理3.2。存在 $C>0$，使得对于 $0<|z|\le 4$,

$$|\nabla F_j(z)|+|\nabla F_j^*(z)|\le C|z|^{-n-1},\qquad 1\le j\le n. \tag{3.9}$$

此外,

$$\partial_1 F_1,\quad \partial_k\partial_\ell F_1\ (k,\ell\ge 2),\quad \nabla F_j\ (j\ge 2),\quad \nabla F_j^*\ (1\le j\le n) \tag{3.10}$$

属于 $L^1(\{|x|>1\},dx)$。

证明。根据（3.2），对于每个多重指标 α,

$$|\partial^\alpha Q_t(z)|\le C_\alpha t^{-(n+|\alpha|)/2}e^{-|z-2te_1|^2/(8t)},\qquad \|\partial^\alpha Q_t\|_{L^1(dx)}\le C_\alpha t^{-|\alpha|/2}. \tag{3.11}$$

由于

$$\frac{|z-2te_1|^2}{8t}=\frac{|z|^2}{8t}-\frac{z_1}{2}+\frac{t}{2},$$

我们有，对于 $|z|\le 4$,

$$|\partial^\alpha Q_t(z)|\le C_\alpha t^{-(n+|\alpha|)/2}e^{-|z-2te_1|^2/(8t)}\simeq C_\alpha t^{-(n+|\alpha|)/2}e^{-|z|^2/(8t)}e^{-t/2}.$$

这与（3.3）一起推出，对于 $|\alpha|=1$，2 和 $0<|z|\le 4$,

$$|\partial^\alpha\Phi(z)|\le C\int_0^\infty t^{-(n+|\alpha|+1)/2}e^{-|z|^2/(8t)-t/2}\,dt\le C|z|^{1-n-|\alpha|}.$$

这就证明了 (3.9)。

为了证明 (3.10)，我们首先有

$$|\partial^\alpha\Phi(z)|\lesssim\int_0^{1/8}t^{-1/2}|\partial^\alpha Q_t(z)|dt+\int_{1/8}^\infty t^{-1/2}|\partial^\alpha Q_t(z)|dt,$$

这意味着

$$\begin{aligned}\int_{|z|>1}|\partial^\alpha\Phi(z)|\,dz &\lesssim\int_{|z|>1}\int_0^{1/8}t^{-1/2}|\partial^\alpha Q_t(z)|dtdz+\int_{1/8}^\infty t^{-1/2}\|\partial^\alpha Q_t(z)\|_{L^1(dz)}dt\\ &=: E_1+E_2.\end{aligned}$$

由 (3.11)，对于所有 $|\alpha|\ge 2$，我们有 $E_2\lesssim 1$。

对于项 E_1，注意到对于 $0<t\le 1/8$, $|z|>1$，我们有 $|z-2te_1|\gtrsim|z|$。因此，由 (3.11) 可得,

$$|\partial^\alpha Q_t(z)|\le C_\alpha t^{-(n+|\alpha|)/2}e^{-|z|^2/(ct)}.$$

因此，对于 $|z|>1$,

$$\begin{aligned} E_1 &\lesssim \int_0^{1/8} t^{-(n+|\alpha|+1)/2} \int_{|z|>1} e^{-|z|^2/(ct)}\,dz\,dt \\ &\lesssim \int_0^{1/8} t^{-(|\alpha|+1)/2} e^{-c'/t}\,dt \lesssim 1. \end{aligned}$$

这表明，(3.10) 中除 $\partial_1 F_1$ 之外的所有导数都属于 $L^1(\{|z|>1\},\ dx)$。

最后，(3.2) 的热方程给出

$$\partial_t Q_t = \Delta Q_t - 2\partial_1 Q_t.$$

对 (3.3) 分部积分，对于 $z\neq 0$ ，我们得到

$$\partial_1 F_1(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-1/2} \partial_t Q_t(z)\,dt - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=2}^n \int_0^\infty t^{-1/2} \partial_k^2 Q_t(z)\,dt.$$

根据同样的论证，两项都属于 $L^1(\{|z|>1\},\ dx)$。

这就完成了我们的证明。 □

定理 3.3。对于每个 $1\le j\le n$,

$$\|R_j f\|_{L^1(\mu)} + \|R_j^* f\|_{L^1(\mu)} \le C\|f\|_{H^1(\mu)}.$$

因此，对于 $1<p<\infty$,

$$\|R_j f\|_{L^p(\mu)} + \|R_j^* f\|_{L^p(\mu)} \le C_p\|f\|_{L^p(\mu)}.$$

证明。对于 $1<p<2$，第二部分由 $H^1(\mu)$–$L^1(\mu)$ 有界性和定理 2.18 得出。情形 $2<p<\infty$ 由对偶性得出。因此，只需证明

$$\|R_j a\|_{L^1(\mu)} + \|R_j^* a\|_{L^1(\mu)} \le C$$

对于每个与球 $B=B(c,\ r)$ 相关的 $(1,\ 2;\ \mathcal{P})_1$ 原子，其中 $r\le 1$。

为此，我们写成

$$\|R_j a\|_{L^1(\mu)} + \|R_j^* a\|_{L^1(\mu)} \le \|R_j a\|_{L^1(2B,\mu)} + \|R_j^* a\|_{L^1(2B,\mu)} + \|R_j a\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus 2B,\mu)} + \|R_j^* a\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus 2B,\mu)}$$

根据 H¨older 不等式、 $L^2(\mu)$-有界性、 R_j 和 R_j^* ，以及局部倍增性质 (2.2),

$$\begin{aligned} \|R_j a\|_{L^1(2B,\mu)} + \|R_j^* a\|_{L^1(2B,\mu)} &\le \mu(2B)^{1/2}\Big[\|R_j a\|_{L^2(2B,\mu)} + \|R_j^* a\|_{L^2(2B,\mu)}\Big] \\ &\lesssim \mu(B)^{1/2}\|a\|_{L^2(\mu)} \\ &\lesssim 1. \end{aligned}$$

现在我们估计 $2B$ 外的积分。令 $E=\mathbb{R}^n\setminus 2B$。对于 $x\in E$，利用 (3.5)，可得

$$R_j a(x) = e^{-2x_1} \int_B F_j(x-y)a(y)\,d\mu(y).$$

因此，

$$\begin{aligned} \int_E |R_j a(x)|\,d\mu(x) &= \int_E \left|\int_B F_j(x-y)a(y)\,d\mu(y)\right| dx \\ &= \int_{E\cap B(c,3)} \left|\int_B F_j(x-y)a(y)\,d\mu(y)\right| dx \\ &\quad + \int_{E\setminus B(c,3)} \left|\int_B F_j(x-y)a(y)\,d\mu(y)\right| dx =: H_1 + H_2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

由于 $\int_B a\,d\mu = 0$，我们有

$$H_1 = \int_{E\cap B(c,3)} \left| \int_B \Big[F_j(x-y) - F_j(x-c)\Big] a(y)\,d\mu(y) \right| dx$$

如果 $x \in E \cap B(c,\ 3)$ 且 $y \in B$，那么 $|x-c| > 2r$ 和 $|x-c-t(y-c)| \geq |x-c|/2$ 对于$0 \leq t \leq 1$。根据中值定理和 (3.9),

$$\begin{aligned} H_1 &\leq C \int_B |a(y)|\,|y-c|\,d\mu(y) \int_{2r<|x-c|<3} |x-c|^{-n-1}\,dx \\ &\leq Cr\|a\|_{L^1(\mu)} \int_{2r}^{3} s^{-2}\,ds \leq C. \end{aligned}$$

根据 (3.6)，对 $R_j^* a$ 也有同样的估计。

对于 $|x-c| \geq 3$，如果 $j \geq 2$，则利用 a 的消去性,

$$H_2 \leq \int_B |a(y)| \int_{|x-c|\geq 3} |F_j(x-y) - F_j(x-c)|\,dx\,d\mu(y).$$

注意，从 $x-y$ 到 $x-c$ 的线段上所有点的范数都大于 2，且$\nabla F_j \in L^1(\{|z|>1\},\ dz)$。结合中值定理和引理3.2，可得

$$\begin{aligned} H_2 &\leq C \int_B |a(y)|\,|y-c|\,d\mu(y) \\ &\leq Cr\|a\|_{L^1(\mu)} \leq C. \end{aligned}$$

对于每个 $1 \leq j \leq n$，此论证同样适用于 F_j^*。

接下来需要估计 $R_1 a$ 在 $\{x$ 上：$|x-c| \geq 3\}$。由于 a 对 1、x_2、.....、x_n具有消去性,

$$R_1 a(x) = e^{-2x_1} \int_B \left[F_1(x-y) - F_1(x-c) + \sum_{k=2}^{n} (y_k - c_k)\partial_k F_1(x-c) \right] a(y)\,d\mu(y).$$

泰勒展开给出

$$\begin{aligned} &F_1(x-y) - F_1(x-c) + \sum_{k=2}^{n} (y_k - c_k)\partial_k F_1(x-c) \\ &= -(y_1 - c_1) \int_0^1 \partial_1 F_1\big(x - y + t(y_1 - c_1)e_1\big)\,dt \\ &\quad + \sum_{k,\ell=2}^{n} (y_k - c_k)(y_\ell - c_\ell) \int_0^1 (1-t)\,\partial_k \partial_\ell F_1\left(x - c - t\sum_{m=2}^{n} (y_m - c_m)e_m \right) dt. \end{aligned}$$

结合 (3.10)，得到

$$\begin{aligned} \int_{|x-c|\geq 3} |R_1 a(x)|\,d\mu(x) &\leq C \int_B \big(|y_1 - c_1| + |y-c|^2\big)|a(y)|\,d\mu(y) \\ &\leq C(r + r^2)\|a\|_{L^1(\mu)} \leq C. \end{aligned}$$

因此$\|R_j a\|_{L^1\ (\mu)} + \|R_j^* a\|_{L^1\ (\mu)} \leq C$。

至此，证明完成。 □

作为定理 3.3、2.13 和 2.19 的直接推论，我们有：

定理 3.4. 对于每个 $1 \le j \le n$,

$$\|R_j g\|_{\mathrm{BMO}(\mu)} + \|R_j^* g\|_{\mathrm{BMO}(\mu)} \le C\|g\|_{L^\infty(\mu)}.$$

此外，对于 $1 < p < \infty$,

$$\|R_j f\|_{L^p(\mu)} + \|R_j^* f\|_{L^p(\mu)} \le C_p\|f\|_{L^p(\mu)}.$$

下面的定理表明， $H^1(\mu)$ 不能通过 Riesz变换来刻画。

定理 3.5。 存在 $f \in L^1(\mu) \cap L^2(\mu)$ 使得

$$R_j f,\ R_j^* f \in L^1(\mu), \qquad 1 \le j \le n,$$

但是 $f \notin H^1(\mu)$。特别地， $H^1(\mu)$ 不能通过 *Riesz*变换来刻画 .

证明。 选取 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\int \varphi\, d\mu \ne 0$，并令 $f = \mathcal{L}^{1/2}\varphi$。半群$e^{-t\mathcal{L}}$ 在 $L^1(\mu)$ 上是压缩的。由于

$$\mathcal{L}^{1/2}\varphi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (\varphi - e^{-t\mathcal{L}}\varphi)\, \frac{dt}{t^{3/2}},$$

我们有

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^1(\mu)} &\le C\int_0^1 t^{-1/2}\|\mathcal{L}\varphi\|_{L^1(\mu)}\, dt + C\int_1^\infty t^{-3/2}\|\varphi\|_{L^1(\mu)}\, dt \\ &\le C\big(\|\mathcal{L}\varphi\|_{L^1(\mu)} + \|\varphi\|_{L^1(\mu)}\big) < \infty.\end{aligned}$$

此外， $f \in L^2(\mu)$，且由于 $\mathcal{L}$ 与 ∂_j 和 ∂_j^* 交换，我们得到

$$R_j f = \partial_j \varphi, \qquad R_j^* f = \partial_j^* \varphi = (-\partial_j - 2\delta_{1j})\varphi.$$

因此 $R_j f,\ R_j^* f \in L^1(\mu)$，其中 $1 \le j \le n$。

对于 $h \in L^1(\mu)$，定义

$$\widehat{h}_\mu(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) e^{-ix\cdot\xi}\, d\mu(x).$$

若 a 是一个支集包含于 $B(c,\ r)$ 中的 $(1,\ \infty; \mathcal{P})_1$ 原子， $r \le 1$，则 $\int a\, d\mu = 0$ 且 $\|a\|_{L^1(\mu)} \le 1$。因此

$$\begin{aligned}|\widehat{a}_\mu(te_1)| &= \left|\int_B \big(e^{-itx_1} - e^{-itc_1}\big) a(x)\, d\mu(x)\right| \\ &\le |t| r \|a\|_{L^1(\mu)} \le |t|.\end{aligned}$$

因此，对于每个 $h \in H^1(\mu)$，都有

$$|\widehat{h}_\mu(te_1)| \le |t|\|h\|_{H^1(\mu)}. \tag{3.13}$$

另一方面，利用 $e^{2x_1}\mathcal{L}e^{-2x_1} = -\Delta + 2\partial_1$，我们得到

$$\widehat{f}_\mu(\xi) = \big(|\xi|^2 + 2i\xi_1\big)^{1/2}\widehat{\varphi}_\mu(\xi).$$

事实上，这是由前述半群公式以及

$$\widehat{e^{-t\mathcal{L}}\varphi}_\mu(\xi) = e^{-t(|\xi|^2 + 2i\xi_1)}\widehat{\varphi}_\mu(\xi).$$

由于 $\widehat{\varphi}_\mu(0) = \int \varphi\, d\mu \ne 0$,

$$|\widehat{f}_\mu(te_1)| = |t^2 + 2it|^{1/2}|\widehat{\varphi}_\mu(te_1)| \simeq |t|^{1/2}, \qquad t \to 0.$$

这与 (3.13) 矛盾。

因此 $f \notin H^1(\mu)$。

这就完成了我们的证明。 □

定理 3.6. 设 $\mathcal{Q}$ 是 $\{1, x_2, \dots, x_n\}$的任意真子集。存在一个函数 a，其支集包含在半径小于1的球 B 中，且满足 $\|a\|_\infty \le \mu(B)^{-1}$ 并且

$$\int a(x)p(x)\,d\mu(x) = 0, \qquad p \in \mathcal{Q},$$

使得 $R_1 a \notin L^1(\mu)$。因此，如果要求定义 $H^1(\mu)$ 的原子只消去 $\mathcal{Q}$，则 ***Riesz*变换** R_1 不从该 ***Hardy*** 空间有界映射到 $L^1(\mu)$。

证明。取 $0 \le \varphi \in C_c^\infty(B(0,\ 1/4))$，其在 $B(0,\ 1/8)$ 上为正。由于 φ 在一个球上为正，以下形式

$$\langle p, q\rangle_\varphi = \int \varphi(y)p(y)q(y)\,dy$$

在 $\{1, x_2, \dots, x_n\}$的实线性张成空间上定义了一个内积。事实上，对于该空间中的任意非零实多项式 p，都有 $\int \varphi(y)p(y)^2\,dy > 0$。由于 $\mathcal{Q}$ 是真子集，存在一个非零实多项式 $\psi \in \mathcal{P}$，使得

$$\int \varphi(y)\psi(y)p(y)\,dy = 0, \qquad p \in \mathcal{Q}.$$

此外，由于 $\psi \ne 0$，我们有

$$\int \varphi(y)\psi(y)^2\,dy > 0.$$

因此，至少有一个矩 $\int \varphi(y)\psi(y)p(y)\ dy$、$p \in \{1, y_2, \dots, y_n\}$不为零。

当 $c > 0$ 充分小时，令 $a(y) = ce^{-2y_1}\varphi(y)\psi(y)$。于是，我们有

(i) $\operatorname{supp} a \subset B(0, 1/4)$; (ii) $\|a\|_{L^\infty(\mu)} \lesssim 1$; (iii) $\int a(x)p(x)d\mu(x) = 0$ 对所有 $p \in \mathcal{Q}$ 均成立。

因此，a 是一个 $(1,\infty;\mathcal{Q})_{1/4}$-原子的倍数。此外，

$$(M_0, M_2, \dots, M_n) = \left(\int a\,d\mu, \int y_2 a\,d\mu, \dots, \int y_n a\,d\mu\right) \ne 0.$$

回忆一下，$G(z) = g(|z|)$，其中

$$g(r) = d_n \int_0^\infty t^{-(n+1)/2} e^{-t-r^2/(4t)}\,dt, \qquad d_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}(4\pi)^{n/2}}.$$

令 $\nu = (n-1)/2$。则

$$g(r) = A_n r^{-\nu} K_\nu(r), \qquad A_n = 2^{\nu+1} d_n,$$

其中 K_ν 是由下式定义的第二类修正贝塞尔函数

$$K_\nu(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^\nu \int_0^\infty t^{-\nu-1} e^{-t-r^2/(4t)}\,dt, \qquad r > 0.$$

利用以下恒等式

$$\frac{d}{dr}\left(r^{-\nu}K_\nu(r)\right) = -r^{-\nu}K_{\nu+1}(r), \qquad K_\alpha'(r) = -K_{\alpha+1}(r) + \frac{\alpha}{r}K_\alpha(r),$$

我们得到

$$g'(r) = -A_n r^{-\nu} K_{\nu+1}(r),$$
$$g''(r) = A_n r^{-\nu}\left(K_{\nu+2}(r) - \frac{1}{r}K_{\nu+1}(r)\right).$$

对于每个固定的 $\alpha > 0$，标准渐近性质

$$K_\alpha(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{-r}\big(1 + O(r^{-1})\big), \qquad r \to \infty,$$

这意味着当 $r \to \infty$ 时，

$$\begin{aligned} g(r) &= c_n e^{-r} r^{-n/2}(1 + O(r^{-1})), \\ g'(r) &= -c_n e^{-r} r^{-n/2}(1 + O(r^{-1})), \qquad c_n = (2\pi)^{-n/2}. \\ g''(r) &= c_n e^{-r} r^{-n/2}(1 + O(r^{-1})), \end{aligned} \tag{3.14}$$

回顾一下，

$$F_1(z) = e^{z_1}\left(\frac{z_1}{|z|} g'(|z|) - g(|z|)\right).$$

对于 $n \geq 2$，记 $z = (z_1, z_\perp)$，其中 $z_\perp = (z_2, \dots, z_n)$，并定义 $\nabla_\perp = (\partial_2, \dots, \partial_n)$。因此，当 $r = |z|$ 时，我们有

$$\nabla_\perp F_1(z) = e^{z_1} \frac{z_\perp}{r}\left(\frac{z_1}{r} g''(r) - \frac{z_1}{r^2} g'(r) - g'(r)\right).$$

现在令 $z = (s, \sqrt{s}\, w)$，其中 $w \in \mathbb{R}^{n-1}$ 有界。由于 $s \to \infty$，我们有

$$\begin{aligned} r &= s + \frac{|w|^2}{2} + O(s^{-1}), \qquad \frac{s}{r} = 1 + O(s^{-1}), \\ e^{s-r} &= e^{-|w|^2/2}(1 + O(s^{-1})), \quad r^{-n/2} = s^{-n/2}(1 + O(s^{-1})). \end{aligned}$$

由 (3.14) 可知

$$\begin{aligned} F_1(s, \sqrt{s}\, w) &= -2c_n e^{-|w|^2/2} s^{-n/2}(1 + O(s^{-1})), \\ \nabla_\perp F_1(s, \sqrt{s}\, w) &= \big(2c_n w + O(s^{-1})\big) e^{-|w|^2/2} s^{-(n+1)/2}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

这两个估计在包含 w 的有界集上一致成立。当 $n = 1$ 时，省略第二个公式。

由 (3.5)，对于 $|x| > 3$，我们有

$$R_1 a(x) = \int K_1(x, y) a(y)\, d\mu(y) = e^{-2x_1} \int F_1(x - y) a(y)\, d\mu(y).$$

由于 $d\mu(x) = e^{2x_1}\, dx$，因此可得

$$\int_{|x|>3} |R_1 a(x)|\, d\mu(x) = \int_{|x|>3} \left| \int F_1(x - y) a(y)\, d\mu(y) \right| dx. \tag{3.16}$$

我们证明右侧的积分是无穷大的。

令 $M_\perp = (M_2, \dots, M_n)$，并且

$$H(x) = \int F_1(x - y) a(y)\, d\mu(y).$$

我们首先证明，对于 $|x| > 3$，

$$H(x) = M_0 F_1(x) - M_\perp \cdot \nabla_\perp F_1(x) + E(x), \qquad E \in L^1(\{|x| > 3\}, dx). \tag{3.17}$$

记作 $y = y_1 e_1 + y_\perp$，则有

$$F_1(x - y) - F_1(x - y_\perp) = -y_1 \int_0^1 \partial_1 F_1(x - y_\perp - t y_1 e_1)\, dt$$

and

$$F_1(x - y_\perp) = F_1(x) - \sum_{k=2}^n y_k \partial_k F_1(x) + \sum_{k,\ell=2}^n y_k y_\ell \int_0^1 (1 - t) \partial_k \partial_\ell F_1(x - t y_\perp)\, dt.$$

将这些恒等式结合起来，并对 $a(y)\,d\mu(y)$ 积分，可得 (3.17)，其中

$$E(x) = -\int a(y)y_1 \int_0^1 \partial_1 F_1(x - y_\perp - ty_1 e_1)\,dt\,d\mu(y) + \sum_{k,\ell=2}^{n} \int a(y)y_k y_\ell \int_0^1 (1-t)\partial_k\partial_\ell F_1(x - ty_\perp)\,dt\,d\mu(y).$$

由于 $|x - ty_\perp|$，$|x - y_\perp - ty_1 e_1| > 1$ 当 $|y| < 1/2$、$|x| \geq 3$ 以及 $t \in$（0，1）时，利用引理3.2和富比尼定理，

$$\int_{|x|>3} |E(x)|\,dx \leq C \int \big(|y_1| + |y_\perp|^2\big)|a(y)|\,d\mu(y) < \infty.$$

令 P（x）$= M_0 F_1$（x）$- M_\perp \cdot \nabla_\perp F_1$（$x$），若 $n \geq 2$，则对于 $x \equiv$（s，$\sqrt{s}\,w$），由（3.15）可得

$$P(s, \sqrt{s}\,w) = -2c_n e^{-|w|^2/2} M_0 s^{-n/2} + O\big(|M_0| s^{-n/2-1}\big) - 2c_n e^{-|w|^2/2}(M_\perp \cdot w) s^{-(n+1)/2} + O\big(|M_\perp| s^{-(n+3)/2}\big),$$

关于 w 一致。

若 $M_0 \neq 0$，则 $|P$（s，$\sqrt{s}\,w$）$| \geq c|M_0| s^{-n/2}$ 对 $|w| \leq 1$成立。利用 $dx = s^{(n-1)/2}\,ds\,dw$，我们得到

$$\int_{|x|>3} |P(x)|\,dx \geq c|M_0| \int_{s_0}^{\infty} s^{-1/2}\,ds = \infty.$$

若 $M_0 = 0$，则 $M_\perp \neq 0$。选取一个具有正测度的可测集 $A \subset \{|w| \leq 1\}$，使得在 A 上 $|M_\perp \cdot w| \geq c|M_\perp|$。当 s充分大时，$|P$（s，$\sqrt{s}\,w$）$| \geq c|M_\perp| s^{-(n+1)/2}$在 A上成立。因此

$$\int_{|x|>3} |P(x)|\,dx \geq c|M_\perp| \int_{s_0}^{\infty} s^{-1}\,ds = \infty.$$

若 $n = 1$，则我们有 $M_0 \neq 0$ 和 $P = M_0 F_1$。由于当$s \to \infty$时，$F_1(s) = -2c_1 s^{-1/2}(1 + O(s^{-1}))$，我们还有 $P \notin L^1(\{|x| > 3\},\ dx)$。

因此，在所有情况下都有 $P \notin L^1(\{|x| > 3\},\ dx)$。由于 $H = P + E$和 $E \in L^1(\{|x| > 3\},\ dx)$，可得 $H \notin L^1(\{|x| > 3\},\ dx)$。由 (3.16)，$R_1 a \notin L^1(\mu)$。

证明至此完成。

□

4. Commutators of local BMO functions and Riesz transforms

对于适当的函数 b，b与线性算子 T的交换子 $[b, T]$定义为 $[b, T] = bT - T(b\,\cdot)$。本节将说明，定义 2.9 中定义的 BMO空间并不能刻画 Riesz变换的交换子的有界性。

4.1. **Hardy空间对偶BMO的一个反例。**

命题 4.1. 设 $n \geq 2$ 且令 $b(x) = x_2^2$。则按照第 *2* 节的定义，$b \in \mathrm{BMO}(\mu)$，但 $[b, R_2]$ 在 $L^2(\mu)$上无界。

证明。对于 $B = B(c, r)$，$r \leq 1$，取 $P_B(x) = 2c_2 x_2 - c_2^2 \in \mathcal{P}$。于是

$$|b(x) - P_B(x)| = |x_2 - c_2|^2 \leq r^2 \qquad \text{for all } x \in B.$$

由此可得

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |b(x) - P_B(x)| d\mu(x) \lesssim 1$$

对所有满足 $r \leq 1$ 的 $B = B(c, r)$ 均成立。

结合 (2.7)，这意味着 $\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mu)} \leq C$。

使用 (3.1) 中的酉算子 $Uf = e^{x_1} f$。由于乘以 x_2 与 U 可交换,

$$U[b, R_2]U^{-1} = [x_2^2, T], \qquad T = \partial_2(-\Delta + 1)^{-1/2}.$$

T的乘子是 $m(\xi) = i\xi_2(1 + |\xi|^2)^{-1/2}$。因此, $[x_2, T]$ 是一个傅里叶乘子,其符号为

$$i\partial_{\xi_2} m(\xi) = -\frac{1 + \sum_{k\neq 2} \xi_k^2}{(1 + |\xi|^2)^{3/2}}.$$

令 $\tau_a f(x) = f(x - ae_2)$。 T的平移不变性给出

$$\tau_{-a}[x_2^2, T]\tau_a = [x_2^2, T] + 2a[x_2, T]. \tag{4.1}$$

取 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,使得 $[x_2, T]f \neq 0$。(4.1)中的反三角不等式给出

$$\|[x_2^2, T]\tau_a f\|_{L^2(dx)} \geq 2|a|\|[x_2, T]f\|_{L^2(dx)} - \|[x_2^2, T]f\|_{L^2(dx)}.$$

右侧趋于无穷大,而 $\|\tau_a f\|_{L^2(dx)} = \|f\|_{L^2(dx)}$。这证明了所需的无界性。

至此,证明完成。 □

4.2. **交换子刻画**。

定义 4.2. 空间 $\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ 是所有满足以下条件的局部可积函数 b 的集合:

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)} = \sup_{B:\, r_B \leq 1} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |b - b_{B,\mu}|\, d\mu, \qquad b_{B,\mu} = \frac{1}{\mu(B)} \int_B b\, d\mu.$$

我们要求 $\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)} < \infty$。相差一个常数的两个符号视为相同。

引理 4.3. 对于每个固定的 $a > 0$,半范数

$$\sup_{B:\, r_B \leq a} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |b - b_{B,\mu}|\, d\mu$$

等价于 $\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)}$。此外,对于所有 $1 \leq q < \infty$,

$$\sup_{B:\, r_B \leq a} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |b - b_{B,dx}|^q\, dx \right)^{1/q} \simeq_{a,q} \|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)}. \tag{4.2}$$

证明。对于 $a > 0$,令

$$\beta_a = \sup_{B:\, r_B \leq a} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |b - b_{B,\mu}|\, d\mu.$$

固定 $0 < a < A$。显然, $\beta_a \leq \beta_A$。令 $B = B(c, r)$,其中 $a < r \leq A$。于是,我们可以用球族 $\{B_i$ 覆盖 $B\colon\ i \in \mathcal{I}\}$ 满足以下性质:

(i) 对所有 $i \in \mathcal{I}$, $r_{B_i} = a$ 和 $B_i \subset 2B$; (ii) 重叠图具有一棵生成树 T,使得对于 T 的每条边 (i, j), $B_i \cap B_j$ 都包含一个半径为 $a/10$ 的球; (iii) $\sharp\mathcal{I} \lesssim (A/a)^n$; (iv) $\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbf{1}_{B_i} \lesssim 1$。

对于每一对 B_i, B_j 满足 $(i, j) \in T$的对象,选择一个半径为 $a/10$ 的球 $D_{ij} \subset B_i \cap B_j$。根据局部倍增性质 (2.2),

$$\begin{aligned} |b_{B_i,\mu} - b_{B_j,\mu}| &\leq \frac{1}{\mu(D_{ij})} \int_{D_{ij}} \big(|b - b_{B_i,\mu}| + |b - b_{B_j,\mu}| \big)\, d\mu \\ &\lesssim_a \beta_a. \end{aligned}$$

在此阶段，采用与命题 2.10 的证明类似的论证，我们得到 $\beta_A \lesssim_{a,\ A} \beta_a$，因此对于每个固定的 $A > a > 0$，都有 $\beta_a \simeq_{a,\ A} \beta_A$。

最后，如果 $B = B(c,\ r)$ 且 $r \le a$，则

$$e^{-2a}e^{2c_1} \le e^{2x_1} \le e^{2a}e^{2c_1}, \qquad x \in B.$$

因此，

$$\inf_{m\in\mathbb{C}} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |b-m|\,d\mu \simeq_a \inf_{m\in\mathbb{C}} \frac{1}{|B|} \int_B |b-m|\,dx.$$

由于

$$\inf_{m\in\mathbb{C}} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |b-m|\,d\mu \le \frac{1}{\mu(B)} \int_B |b-b_{B,\mu}|\,d\mu \le 2 \inf_{m\in\mathbb{C}} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |b-m|\,d\mu,$$

我们得到，对于任意固定的 $a > 0$,

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)} \simeq_a \sup_{B:\, r_B \le a} \inf_{c\in\mathbb{C}} \frac{1}{|B|} \int_B |b-c|\,dx.$$

这就证明了 $q = 1$ 的（4.2）。

$q > 1$ 的等价关系 (4.2) 可由有界立方体上 John–Nirenberg 不等式的标准二进制证明，再结合上述覆盖论证得出。因此，我们省略细节。

至此，证明完成。

□

下述定理证明，定义 4.2 中的 BMO 函数正是使 Riesz变换的交换子有界的合适函数空间。

定理 4.4. 设 $1 < p < \infty$、 $1 \le j \le n$ 和 $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$。则以下条件等价:

(i) $b \in \mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)$; (ii) $[b, R_j]$ 在 $L^p(\mu)$ 上有界; (iii) $[b, R_j^*]$ 在 $L^p(\mu)$ 上有界。

此外，存在 $C_{n,\ p} > 1$ 使得

$$C_{n,p}^{-1}\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)} \le \|[b, R_j]\|_{L^p(\mu)\to L^p(\mu)} \le C_{n,p}\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)}, \tag{4.3}$$

并且用 R_j^* 替换 R_j时，同样的双边估计也成立。

注意，对于 $1 < p < \infty$,

$$[b, R_j^*] = -[\bar{b}, R_j]^*, \qquad \|[b, R_j^*]\|_{L^p(\mu)\to L^p(\mu)} = \|[\bar{b}, R_j]\|_{L^{p'}(\mu)\to L^{p'}(\mu)}.$$

因此，(ii) 与 (iii) 等价。只需证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 以及 (ii) $\Rightarrow$ (i)，并证明 R_j。 (4.3)

我们首先利用 Coifman、Rochberg 和 Weiss 的交换子定理 [5] 证明充分性。然后通过在两个互相分离的球上进行测试来证明必要性。

引理 4.5。 固定单位立方体 $Q_k = k + [0,1)^n$, $k \in \mathbb{Z}^n$。对于 $b \in \mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)$，存在函数 $b_k \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n, dx)$ 使得

$$b_k = b - c_k \quad on\ Q_k + [-2,2]^n, \qquad \|b_k\|_{\mathrm{BMO}(dx)} \le C\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)},$$

其中 c_k 是常数，且 C 与 k无关。

证明。令 $\beta = \|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)}$。令 $Q_k^* = k + [-4,5]^n$，设 $c_k = |Q_k^*|^{-1}\int_{Q_k^*} b\,dx$，并选取 $\eta_k \in C_c^\infty(k+(-4,\ 5)^n)$，使其在 $k+[-2,3]^n$ 上等于 1，且其导数关于 k 一致有界。令 $b_k = \eta_k(b-c_k)$。

由 (2.2) 和 (4.2)，可得

$$\begin{aligned}\int_{Q_k^*}|b-c_k|\,dx &\simeq \frac{1}{|Q_k^*|}\int_{Q_k^*}|b-c_k|\,dx\\ &\le 2\frac{1}{|Q_k^*|}\int_{Q_k^*}|b-b_{B(k,10\sqrt{n}),dx}|\,dx\\ &\lesssim \frac{1}{|B(k,10\sqrt{n})|}\int_{B(k,10\sqrt{n})}|b-b_{B(k,10\sqrt{n}),dx}|\,dx\\ &\lesssim \beta.\end{aligned}\tag{4.4}$$

因此，若 B 是一个球，且其半径大于或等于 1，则由 (4.4)，

$$\frac{1}{|B|}\int_B |b_k|\,dx \le C\beta,$$

这意味着

$$\sup_{B:\ r_B\ge 1}\frac{1}{|B|}\int_B |b_k-(b_k)_{B,dx}|\,dx \le C\beta.$$

现在考虑小球上的估计。设 $B = B(x_B,r_B)$，其中 $r_B < 1$。若$B\cap \operatorname{supp}\eta_k = \emptyset$，则在 B 上有 $b_k = 0$。否则，选取 $m\ge 1$ 使得 $1\le 2^m r_B < 2$，并令 $B_j = B(x_B,2^j r_B)$，$0\le j\le m$。由 (4.2)，

$$\begin{aligned}|b_{B_j,dx}-b_{B_{j+1},dx}| &\le \frac{1}{|B_j|}\int_{B_j}|b-b_{B_{j+1},dx}|\,dy\\ &\le 2^n\frac{1}{|B_{j+1}|}\int_{B_{j+1}}|b-b_{B_{j+1},dx}|\,dy \le C\beta,\end{aligned}$$

对于 $0\le j<m$。由于 B 与 $\operatorname{supp}\eta_k$ 相交，且 $r_B<1$, $B_m\cup Q_k^*\subset D_k := B(k,10\sqrt{n})$。因此，再次利用 (4.2)，

$$\begin{aligned}|b_{B_m,dx}-c_k| &\le |b_{B_m,dx}-b_{D_k,dx}| + |b_{D_k,dx}-b_{Q_k^*,dx}|\\ &\le \left(\frac{|D_k|}{|B_m|}+\frac{|D_k|}{|Q_k^*|}\right)\frac{1}{|D_k|}\int_{D_k}|b-b_{D_k,dx}|\,dy \le C\beta.\end{aligned}$$

因此，

$$|b_{B,dx}-c_k| \le C(m+1)\beta \le C\beta\big(1+\log(1/r_B)\big).$$

令 $c = \eta_k(x_B)(b_{B,\ dx}-c_k)$。于是，对于 $y\in B$，

$$b_k(y)-c = \eta_k(y)(b(y)-b_{B,dx}) + \big(\eta_k(y)-\eta_k(x_B)\big)(b_{B,dx}-c_k).$$

由于 $\|\eta_k\|_\infty + \|\nabla\eta_k\|_\infty \le C$，我们得到

$$\begin{aligned}\inf_{c\in\mathbb{C}}\frac{1}{|B|}\int_B|b_k-c|\,dy &\le C\frac{1}{|B|}\int_B|b-b_{B,dx}|\,dy + Cr_B|b_{B,dx}-c_k|\\ &\le C\beta\big[1+r_B(1+\log(1/r_B))\big] \le C\beta.\end{aligned}$$

由此可得

$$\sup_{B:\ r_B<1}\frac{1}{|B|}\int_B|b_k-(b_k)_{B,dx}|\,dy \le C\beta.$$

我们的证明至此完成。 □

定理 4.4 的证明：$(i) \Rightarrow (ii)$。固定 $1 < p < \infty$、$1 \le j \le n$，并令 $V_p f(x) = e^{2x_1/p} f(x)$。则 V_p 是从 $L^p(\mu)$ 到 $L^p(dx)$ 的等距映射。利用 $\Phi(z) = e^{z_1} G(z)$ 和（3.5），我们发现 $V_p R_j V_p^{-1}$是一个核为

$$H(z) = e^{(2/p-1)z_1}(\partial_j G(z) - \delta_{1j} G(z)). \tag{4.5}$$

由于 $|2/p - 1| < 1$，按照引理 3.1 的证明进行类似推导，我们得到

$$\begin{aligned} |H(z)| + |z||\nabla H(z)| &\le C_p |z|^{-n}, \quad 0 < |z| \le 2, \\ |H(z)| + |\nabla H(z)| &\le C_p e^{-c_p|z|}, \quad |z| \ge 1. \end{aligned} \tag{4.6}$$

选取 $\chi \in C_c^\infty(B(0,2))$，使得 $\chi = 1$ 在 $B(0,1)$ 上成立，并记为 $H = H_{\mathrm{loc}} + H_{\mathrm{glo}}$，其中 $H_{\mathrm{loc}} = \chi H$。算子 $T_{\mathrm{loc}} f = H_{\mathrm{loc}} * f$ 是一个标准的 Calder´on–Zygmund 算子：它满足 (4.6) 中的局部大小估计和光滑性估计，并且在 $L^2(dx)$ 上有界。为了证明 $L^2(dx)$ 有界性，我们写出

$$H_{\mathrm{loc}} = \partial_j G + K,$$

其中

$$K(z) = \chi(z)(e^{(2/p-1)z_1} - 1)\partial_j G(z) - \delta_{1j}\chi(z) e^{(2/p-1)z_1} G(z) - (1 - \chi(z))\partial_j G(z).$$

我们证明 $K \in L^1(dx)$。由 G 的积分表示，对于 $0 < |z| \le 2$，我们有

$$|\nabla G(z)| \le C|z|^{-n}, \qquad |G(z)| \le C \begin{cases} |z|^{1-n}, & n \ge 2, \\ 1 + |\log|z||, & n = 1. \end{cases}$$

由于 $|e^{(2/p-1)z_1} - 1| \le C_p|z|$ 对于 $|z| \le 2$，因此

$$\begin{aligned} &\int_{|z|\le 2} |\chi(z)| \left(|e^{(2/p-1)z_1} - 1|\, |\partial_j G(z)| + e^{(2/p-1)z_1} |G(z)| \right) dz \\ &\qquad \le C_p \int_{|z|\le 2} (|z|^{1-n} + |G(z)|)\, dz < \infty. \end{aligned}$$

此外，$1 - \chi = 0$ 在 $B(0,1)$ 上。由 (3.7) 可得，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |1 - \chi(z)|\, |\partial_j G(z)|\, dz \le C \int_{|z|\ge 1} e^{-|z|} |z|^{-n/2}\, dz < \infty.$$

因此 $K \in L^1(dx)$。由 G 的傅里叶乘子公式可得，

$$\widehat{\partial_j G}(\xi) = i\xi_j (1 + |\xi|^2)^{-1/2}.$$

因此，由 Plancherel 定理和 Young 不等式可得

$$\|T_{\mathrm{loc}} f\|_{L^2(dx)} \le \|\partial_j G * f\|_{L^2(dx)} + \|K * f\|_{L^2(dx)} \le (1 + \|K\|_{L^1(dx)}) \|f\|_{L^2(dx)}.$$

令 $\beta = \|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)}$。对于每个 $k \in \mathbb{Z}^n$，令 $f_k = f\, \mathbf{1}_{Q_k + [-2,2]^n}$，并从引理 4.5 中选取 b_k。若 $x \in Q_k$，则 $T_{\mathrm{loc}} f(x) = T_{\mathrm{loc}} f_k(x)$，且 $b_k = b - c_k$ 在 $Q_k + [-2,2]^n$ 上。因此

$$[b, T_{\mathrm{loc}}] f(x) = [b_k, T_{\mathrm{loc}}] f_k(x), \qquad x \in Q_k.$$

在 [5], 中应用 Coifman–Rochberg–Weiss交换子估计，我们有

$$\begin{aligned} \|[b, T_{\mathrm{loc}}] f\|_{L^p(dx)}^p &\le \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|[b_k, T_{\mathrm{loc}}] f_k\|_{L^p(dx)}^p \\ &\le C_p \beta^p \sum_k \|f_k\|_{L^p(dx)}^p \le C_p \beta^p \|f\|_{L^p(dx)}^p. \end{aligned} \tag{4.7}$$

接下来估计整体部分。令 $m_k = |Q_k|^{-1}\int_{Q_k} b\,dx$。局部 John–Nirenberg 不等式 (4.2) 以及族 $\{Q_k\}$ 的连通性意味着，对每个 $1 \le q < \infty$,

$$\|b - m_k\|_{L^q(Q_k,dx)} \le C_q\beta, \qquad |m_k - m_\ell| \le C\beta(1 + |k-\ell|). \tag{4.8}$$

由 (4.6),

$$\sup_{x\in Q_k,\, y\in Q_\ell} |H_{\rm glo}(x-y)| \le C_p e^{-c_p|k-\ell|}.$$

分解

$$b(x) - b(y) = (b(x) - m_k) + (m_k - m_\ell) + (m_\ell - b(y)).$$

在两个单位立方体上使用 H¨older 不等式，并结合指数为 p 和 p' 的 (4.8)，可得

$$\left\| \int_{Q_\ell} H_{\rm glo}(\,\cdot - y)(b(\,\cdot) - b(y)) f(y)\,dy \right\|_{L^p(Q_k,dx)} \le C_p\beta(1 + |k-\ell|)e^{-c_p|k-\ell|}\|f\|_{L^p(Q_\ell,dx)}.$$

由于 $(1 + |k|)e^{-c_p|k|} \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$，离散 Young 不等式给出

$$\|[b, T_{\rm glo}]f\|_{L^p(dx)} \le C_p\beta\|f\|_{L^p(dx)}. \tag{4.9}$$

结合 (4.7) 和 (4.9)，可得

$$\|[b, T_{\rm loc}]f + [b, T_{\rm glo}]f\|_{L^p(dx)} \le C_p\beta\|f\|_{L^p(dx)}.$$

利用 (4.5)，我们得到

$$\begin{aligned} V_p[b, R_j]V_p^{-1}f &= b(V_pR_jV_p^{-1}f) - V_pR_jV_p^{-1}(bf) \\ &= b(T_{\rm loc} + T_{\rm glo})f - (T_{\rm loc} + T_{\rm glo})(bf) \\ &= [b, T_{\rm loc}]f + [b, T_{\rm glo}]f. \end{aligned}$$

因此，对于 $u = V_p^{-1}f$,

$$\begin{aligned} \|[b, R_j]u\|_{L^p(\mu)} &= \|V_p[b, R_j]V_p^{-1}f\|_{L^p(dx)} \\ &\le C_p\beta\|f\|_{L^p(dx)} = C_p\beta\|u\|_{L^p(\mu)}. \end{aligned}$$

这就完成了我们的证明。 □

必要性的证明。

引理 4.6. 对每个 $1 \le j \le n$，存在 $c > 0$ 使得

$$-F_j(z) \ge c|z|^{-n} \quad \textit{if } 0 < |z| \le 1 \textit{ and } z_j \ge \tfrac{1}{2}|z|.$$

这些常数与 j无关。

证明。 回忆一下， $\Phi(z) = e^{z_1}G(z)$，其中

$$G(z) = \frac{(4\pi)^{-n/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-(n+1)/2} e^{-t-|z|^2/(4t)}\,dt.$$

直接求导可得

$$-\partial_j G(z) = \frac{(4\pi)^{-n/2}}{2\sqrt{\pi}}\, z_j \int_0^\infty t^{-(n+3)/2} e^{-t-|z|^2/(4t)}\,dt.$$

如果 $|z| \le 1$ 且 $z_j \ge |z|/2$，那么

$$-\partial_j G(z) \gtrsim |z| \int_{|z|^2}^{2|z|^2} t^{-(n+3)/2}\,dt \gtrsim |z|^{-n}.$$

由于对于 $|z| \le 1$, $G(z) \ge 0$ 且 $e^{z_1} \ge e^{-1}$,

$$\begin{aligned} -F_j(z) &= e^{z_1}\big(-\partial_j G(z) + \delta_{1j} G(z)\big) \\ &\ge e^{z_1}(-\partial_j G(z)) \gtrsim |z|^{-n}. \end{aligned}$$

这就完成了我们的证明。 □

定理 *4.4* 的证明：$(ii) \Rightarrow (i)$。由于 R_j 具有实核，我们可以假设 b 是实值函数。令 $B = B(c,\ r)$ 满足 $0 < r \le 1/8$，并设

$$\widetilde{B} = B(c - 6re_j, r).$$

~对于 $x \in B$ 和 $y \in B$，我们有

$$4r \le (x-y)_j \le |x-y| \le 8r \le 1,$$

这意味着

$$(x-y)_j \ge \tfrac{1}{2}|x-y|.$$

由引理 4.6 和 (3.5),

$$-K_j(x,y) = -e^{-2x_1} F_j(x-y) \ge c e^{-2x_1} r^{-n}, \qquad (x,y) \in B \times \widetilde{B}.$$

此外，由（2.1）可得,

$$\mu(\widetilde{B}) \simeq \mu(B) \simeq e^{2c_1} r^n, \qquad e^{-2x_1} r^{-n} \mu(\widetilde{B}) \simeq 1 \quad (x \in B). \tag{4.10}$$

~令 m 为 b 在 B 上关于 μ的一个中位数。也就是说,

$$\mu\{y \in \widetilde{B} : b(y) > m\} \le \frac{1}{2}\mu(\widetilde{B}), \qquad \mu\{y \in \widetilde{B} : b(y) < m\} \le \frac{1}{2}\mu(\widetilde{B}).$$

定义

$$F_- = \{y \in \widetilde{B} : b(y) \le m\}, \qquad F_+ = \{y \in \widetilde{B} : b(y) \ge m\}.$$

~两个集合的测度都至少为 $\mu(B)/2$。如果 $x \in B$ 且 $b(x) \ge m$，则核的符号为常数，并且 $b(x) - b(y) \ge b(x) - m$ 对 $y \in F_-$成立。因此，对于满足 $b(x) \ge m$的 $x \in B$,

$$\begin{aligned} \big|[b, R_j]\mathbf{1}_{F_-}(x)\big| &= \left| \int_{F_-} (b(x) - b(y)) K_j(x,y)\, d\mu(y) \right| \\ &\ge c e^{-2x_1} r^{-n} \mu(F_-)(b(x) - m) \ge c(b(x) - m). \end{aligned} \tag{4.11}$$

类似地，对于满足 $b(x) \le m$的 $x \in B$,

$$\big|[b, R_j]\mathbf{1}_{F_+}(x)\big| \ge c(m - b(x)). \tag{4.12}$$

对于每个 $x \in B$，有

$$[b, R_j]\mathbf{1}_F(x) = \int_F (b(x) - b(y)) K_j(x,y)\, d\mu(y).$$

对（4.11）–（4.12）进行积分，并利用交换子的 $L^p(\mu)$有界性和（4.10），我们得出

$$\begin{aligned} \int_B |b-m|^p\, d\mu &\le C\left(\|[b, R_j]\mathbf{1}_{F_-}\|^p_{L^p(\mu)} + \|[b, R_j]\mathbf{1}_{F_+}\|^p_{L^p(\mu)} \right) \\ &\le C\|[b, R_j]\|^p_{L^p(\mu)\to L^p(\mu)} \mu(\widetilde{B}) \qquad (4.13) \\ &\le C\|[b, R_j]\|^p_{L^p(\mu)\to L^p(\mu)} \mu(B). \qquad (4.14) \end{aligned}$$

利用 H¨older 不等式和 $|b_{B,\ \mu} - m| \le \mu(B)^{-1} \int_B |b-m|\, d\mu$，我们得到

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |b - b_{B,\mu}|\, d\mu \le \frac{2}{\mu(B)} \int_B |b-m|\, d\mu \le C\|[b, R_j]\|_{L^p(\mu)\to L^p(\mu)}.$$

对于所有满足 $0 < r \le 1/8$ 的球 $B = B(c,\ r)$。因此，

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)} \le C\|[b, R_j]\|_{L^p(\mu)\to L^p(\mu)}.$$

(4.3) 中的下界估计得证。

这就完成了我们的证明。 □

5. General Laplacians with drift

现在，我们将结果应用于具有任意常漂移的拉普拉斯算子。令$v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 并定义

$$\mathcal{L}_v = -\Delta - 2v\cdot\nabla, \qquad d\mu_v(x) = e^{2\langle v,x\rangle}\,dx.$$

该算子在 $L^2(\mu_v)$ 上是非负且自伴的。令 $\alpha = |v|$，并选取一个正交矩阵 O，使得 $O(v/\alpha) = e_1$。使用以下变量替换

$$z = \alpha O(x), \qquad x = \alpha^{-1}O^T(z),$$

我们有

$$\langle v, x\rangle = z_1, \qquad d\mu_v(x) = \alpha^{-n}d\mu(z), \qquad \mathcal{L}_v = \alpha^2\mathcal{L}. \tag{5.1}$$

Set

$$\mathcal{P}_v = \{c + \ell\cdot x :\ c\in\mathbb{C},\ \ell\cdot v = 0\}.$$

设 $1 < q \le \infty$ 和 $b > 0$。一个 $(1,\ q;\ \mathcal{P}_v)_b$-原子是一个函数 a，其支集包含于球$B = B(c,\ r)$中，并且 $r \le b$，满足

$$\|a\|_{L^q(\mu_v)} \le \mu_v(B)^{1/q-1}, \qquad \text{and } \int_B a(x)p(x)\,d\mu_v(x) = 0, \quad p\in\mathcal{P}_v.$$

We 将 $H^1_v(\mu_v)$ 定义为所有函数 $f \in L^1(\mu_v)$ 构成的空间，这些函数可以写成

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_k \quad \text{in } L^1(\mu_v), \qquad \sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k| < \infty,$$

其中 a_k 是 $(1,\ q;\ \mathcal{P}_v)_b$-原子，其范数为

$$\|f\|_{H^1_v(\mu_v)} = \inf\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|.$$

与第 2 节类似，我们可以证明，该空间及其范数与$q \in (1,\ \infty]$ 和 $b > 0$ 无关。

对于 $B = B(c,\ r)$，取 $v^\perp = \{x\in\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基 $w_1,\ \ldots\ldots,\ w_{n-1}:\ \langle x,\ v\rangle = 0\}$并定义

$$q_0(x) = 1, \qquad q_k(x) = \frac{w_k\cdot(x-c)}{r}, \quad 1\le k\le n-1.$$

这些函数构成了 $\mathcal{P}_v$ 的一组基。对于 $f \in L^1(B,\ \mu_v)$，令 $\Pi_{B,\ v}f \in \mathcal{P}_v$ 满足

$$\int_B (f - \Pi_{B,v}f)\overline{p}\,d\mu_v = 0, \qquad p\in\mathcal{P}_v. \tag{5.2}$$

事实上，写作 $\Pi_{B,\ v}f = \sum_{k=0}^{n-1}a_k q_k$，我们有

$$G^v a = d^v, \quad G^v_{jk} = \frac{1}{\mu_v(B)}\int_B q_j q_k\,d\mu_v, \quad d^v_j = \frac{1}{\mu_v(B)}\int_B f q_j\,d\mu_v.$$

由于

$$\sum_{j,k=0}^{n-1}\xi_j G^v_{jk}\overline{\xi_k} = \frac{1}{\mu_v(B)}\int_B\Big|\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j q_j\Big|^2 d\mu_v > 0 \qquad (\xi\neq 0),$$

G^v 是可逆的。因此，$\Pi_{B,\ v}f$ 定义良好。我们定义

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_v(\mu_v)} = \sup_{r_B\le 1}\frac{1}{\mu_v(B)}\int_B |f-\Pi_{B,v}f|\,d\mu_v.$$

我们使用 $\mathrm{BMO}_v(\mu_v)/\mathcal{P}_v$，并定义

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc},v}(\mu_v)} = \sup_{r_B\le 1}\frac{1}{\mu_v(B)}\int_B |b-b_{B,\mu_v}|\,d\mu_v, \qquad b_{B,\mu_v}=\frac{1}{\mu_v(B)}\int_B b\,d\mu_v.$$

定理 5.1。对每个 $v\neq 0$，以下陈述均成立。

(i) $(H^1_v(\mu_v))^*\simeq \mathrm{BMO}_v(\mu_v)/\mathcal{P}_v$。***(ii)*** 空间 $\mathrm{BMO}_v(\mu_v)$ 在半径不超过1的球上满足 *John–Nirenberg* 不等式。

(iii) 对于 $1\le j\le n$，***Riesz***变换 $R_{v,j}=\partial_j\mathcal{L}_v^{-1/2}$ 和$R^*_{v,j}$ 满足

$$\|R_{v,j}f\|_{L^1(\mu_v)}+\|R^*_{v,j}f\|_{L^1(\mu_v)}\le C_v\|f\|_{H^1_v(\mu_v)},$$

and

$$\|R_{v,j}g\|_{\mathrm{BMO}_v(\mu_v)}+\|R^*_{v,j}g\|_{\mathrm{BMO}_v(\mu_v)}\le C_v\|g\|_{L^\infty(\mu_v)}.$$

(iv) Hardy 空间和 ***BMO*** 空间插值定理对 $H^1_v(\mu_v)$、$\mathrm{BMO}_v(\mu_v)$和 $L^p(\mu_v)$ 同样成立，而相应的归一化空间则由这些空间取代。

(v) 设 $1<p<\infty$ 和 $1\le j\le n$。对于 $b\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，交换子 $[b,R_{v,j}]$ 和$[b,R^*_{v,j}]$ 在 $L^p(\mu_v)$ 上有界，当且仅当 $b\in \mathrm{BMO}_{\mathrm{loc},v}(\mu_v)$。此外，

$$\|[b,R_{v,j}]\|_{L^p(\mu_v)\to L^p(\mu_v)}\simeq_{n,p,v}\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc},v}(\mu_v)},$$

对 $[b,R^*_{v,j}]$ 也有相同的等价关系。

证明。对于 $1\le p<\infty$，定义

$$(T_{v,p}f)(z)=\alpha^{-n/p}f(\alpha^{-1}O^T(z)).$$

由 (5.1),

$$\|T_{v,p}f\|^p_{L^p(\mu)}=\alpha^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(\alpha^{-1}O^T(z))|^p\,d\mu(z)=\|f\|^p_{L^p(\mu_v)}.$$

若 $B_z=\alpha O(B)$，则

$$\mu(B_z)=\alpha^n\mu_v(B),\qquad \mathrm{rad}(B_z)=\alpha r$$

对所有的球 $B=B(c,\ r)$。

特别地，对于一个支集包含于 B 中的 $(1,\ q;\mathcal{P}_v)_1$ 原子 a，

$$\|T_{v,1}a\|_{L^q(\mu)}=\alpha^{n(1/q-1)}\|a\|_{L^q(\mu_v)}\le\mu(B_z)^{1/q-1},$$

并且，对于 $p\in\mathcal{P}$,

$$\int_{B_z}(T_{v,1}a)(z)p(z)\,d\mu(z)=\int_B a(x)p(\alpha O(x))\,d\mu_v(x)=0.$$

映射 $p(z)\mapsto p(\alpha O(x))$ 将 $\mathcal{P}$ 映射到 $\mathcal{P}_v$ 上。因此

$$\|f\|_{H^1_v(\mu_v)}=\|T_{v,1}f\|_{H^1_\alpha(\mu)},$$

其中，$H^1_\alpha(\mu)$ 是通过在定义 2.5 中使用 $(1,\ q;\mathcal{P})_\alpha$ 原子定义的原子 Hardy 空间。对于 $b^\sharp(z)=b(\alpha^{-1}O^T(z))$，(5.2) 给出

$$(\Pi_{B,v}b)^\sharp=\Pi_{B_z}b^\sharp.$$

因此,

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}_v(\mu_v)}=\|b^\sharp\|_{\mathrm{BMO}_\alpha(\mu)},\qquad \|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc},v}(\mu_v)}=\|b^\sharp\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc},\alpha}(\mu)}.$$

这里，$\mathrm{BMO}_\alpha(\mu) = \mathrm{BMO}^1_\alpha(\mu)$，而 $\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc},\,\alpha}(\mu)$ 表示通过对半径不超过 α 的球取上确界而定义的局部 BMO 空间。结论 (i) 和 (ii) 可由第 2 节中的相应结果推出。

由 (5.1)，对于 $u_j = O(e_j)$，我们有

$$T_{v,p} R_{v,j} T_{v,p}^{-1} = \sum_{k=1}^n O_{kj} R_k = \partial_{u_j} \mathcal{L}^{-1/2}, \qquad T_{v,2} R^*_{v,j} T_{v,2}^{-1} = \sum_{k=1}^n O_{kj} R_k^*.$$

伴随算子的对应恒等式在其他算子有界的 L^p 空间上也成立。因此

$$\|R_{v,j} f\|_{L^1(\mu_v)} \le \sum_{k=1}^n |O_{kj}| \|R_k T_{v,1} f\|_{L^1(\mu)} \lesssim_\alpha \|f\|_{H^1_v(\mu_v)}.$$

伴随算子的界可用同样的方法得到。BMO 界由前述投影恒等式和定理 3.4 得出。这就证明了 (iii)。将 $T_{v,p}$ 应用于第 2 节的插值定理，即得 (iv)。

剩下证明 (v)。对于 $u = O(e_j)$，令 $R_u = \partial_u \mathcal{L}^{-1/2} = \sum_{k=1}^n u_k R_k$。由于 $T_{v,p}$在变量代换后与乘法算子可交换，

$$T_{v,p} [b, R_{v,j}] T_{v,p}^{-1} = [b^\sharp, R_u] = \sum_{k=1}^n u_k [b^\sharp, R_k].$$

充分性由定理 4.4 得出：

$$\|[b^\sharp, R_u]\|_{L^p(\mu) \to L^p(\mu)} \lesssim_{n,p} \|b^\sharp\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mu)}.$$

对于必要性，函数 $F_u = \sum_{k=1}^n u_k F_k$ 满足

$$F_u(z) = e^{z_1} (\partial_u G(z) - u_1 G(z)), \qquad \partial_u G(z) = -\frac{d_n (u \cdot z)}{2} \int_0^\infty t^{-(n+3)/2} e^{-t - |z|^2/(4t)}\, dt.$$

根据上述积分公式，当 $u \cdot z \ge |z|/2$时，

$$-\partial_u G(z) \gtrsim |z|^{-n}, \qquad G(z) = o(|z|^{-n}), \qquad |z| \to 0.$$

因此，对于某个与 $|u| = 1$无关的 $\varepsilon > 0$，

$$-F_u(z) \gtrsim |z|^{-n}, \qquad 0 < |z| \le \varepsilon, \quad u \cdot z \ge |z|/2.$$

~ ~对于带有 $r \le \varepsilon/8$的 $B = B(c,\ r)$，取 $B = B(c - 6ru,\ r)$。如果 $x \in B$ 且 $y \in B$，则

$$(x - y) \cdot u \ge 4r, \qquad 4r \le |x - y| \le 8r \le \varepsilon.$$

因此，R_u 的核具有同一符号，并且满足

$$-K_u(x, y) \gtrsim e^{-2x_1} r^{-n}, \qquad x \in B, \quad y \in \widetilde{B}.$$

仿照定理 4.4 的证明，我们有

$$\sup_{r_B \le \varepsilon/8} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |b^\sharp - (b^\sharp)_{B,\mu}|\, d\mu \lesssim_{n,p} \|[b^\sharp, R_u]\|_{L^p(\mu) \to L^p(\mu)}.$$

通过与引理 4.3 中类似的论证，我们得到

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc},v}(\mu_v)} \lesssim \|[b, R_{v,j}]\|_{L^p(\mu_v) \to L^p(\mu_v)}.$$

至此，我们完成了证明。 □

Acknowledgements

第一作者获得了澳大利亚研究理事会 Discovery项目DP260101083 的资助。在准备本稿件期间，作者使用 ChatGPT（OpenAI）协助进行语言润色、LaTeX 排版以及数学论证检查。作者根据需要审阅并编辑了相关内容，并对稿件内容承担全部责任。

References

[1] H. Aimar、L. Forzani 和 V. Naibo，关于旋转不变测度下圆扇形上的极大函数，Comment. Math. Univ. Carolin. 42 (2001)，第 2 期，311–318。[2] P. Auscher、T. Coulhon、X. T. Duong 和 S. Hofmann，流形上的 Riesz变换与热核正则性，Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er. (4) 37 (2004)，第 6 期，911–957。[3] L. A. Caffarelli 和 A. Vasseur，带分数阶扩散的漂移扩散方程与准地转方程，Ann. of Math. (2) 171 (2010)，第 3 期，1903–1930。[4] A. Carbonaro、G. Mauceri 和 S. Meda，H^1 以及某些局部倍增度量测度空间上的 BMO，Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 8 (2009)，543–582。[5] R. R. Coifman、R. Rochberg 和 G. Weiss，多变量 Hardy 空间的因子分解定理，Ann. of Math. (2) 103 (1976)，611–635。[6] T. Coulhon 和 X. T. Duong，$1 \le p \le 2$上的 Riesz变换，Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999)，第 3 期，1151–1169。[7] P. D'Ancona、P. Maheux 和 V. Pierfelice，半直积算子的对数Sobolev不等式及其应用，Math. Z. 283 (2016)，第 1–2 期，103–131。[8] J. Duoandikoetxea 和 V. Naibo，特殊函数类上的通用极大算子，Indiana Univ. Math. J. 54 (2005)，第 5 期，1351–1370。[9] H.-Q. Li 和 P. Sj¨ogren，欧几里得空间中与带漂移的拉普拉斯算子相关的某些算子的尖锐端点估计，Canad. J. Math. 73 (2021)，1278–1304。[10] H.-Q. Li、P. Sj¨ogren 和 Y.-R. Wu，与带漂移的拉普拉斯算子相关的某些算子的弱型 (1, 1) 性质，Math. Z. 282 (2016)，623–633。[11] N. Lohou´e 和 S. Mustapha，关于带漂移的拉普拉斯算子情形下的 Riesz变换，Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004)，2139–2147。[12] J. Mateu、P. Mattila、A. Nicolau 和 J. Orobitg，非倍增测度的 BMO，Duke Math. J. 102 (2000)，第 3 期，533–565。[13] G. Mauceri 和 S. Meda，Ornstein–Uhlenbeck算子的 BMO 和 H^1，J. Funct. Anal. 252 (2007)，278–313。[14] G. Mauceri、S. Meda 和 P. Sj¨ogren，与 Ornstein–Uhlenbeck算子相关的一阶Riesz变换的端点估计，Rev. Mat. Iberoam. 28 (2012)，77–91。[15] S. Mukherjee，常漂移下 Riesz变换的无维数弱型 (1, 1) 估计，arXiv:2609.21458，2026。[16] F. Nazarov、S. Treil 和 A. Volberg，非齐次空间上的 Tb定理，Acta Math. 190 (2003)，第 2 期，151–239。[17] Q.-H. Nguyen、S. Nowak、Y. Sire 和 M. Weidner，非局部漂移扩散方程的位势理论，Arch. Ration. Mech. Anal. 248 (2024)，文章 126。[18] Q.-H. Nguyen、Y. Sire 和 L. X. Truong，一类漂移扩散方程解的 H ¨older 连续性，Discrete Contin. Dyn. Syst. 43 (2023)，第 3–4 期，1657–1685。[19] P. Sj¨ogren 和 M. Vallarino，指数增长李群上 Riesz变换从 H^1 到 L^1 的有界性，Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 58 (2008)，1117–1151。[20] P. Sj¨ogren 和 M. Vallarino，指数增长李群上的 Hardy 空间与 Riesz变换，Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 68 (2025)，731–762。[21] X. Tolsa，非倍增测度的 BMO、H^1与 Calder ´on–Zygmund 算子，Math. Ann. 319 (2001)，89–149。[22] D. Yang 和 D. Yang，有限非倍增测度下 Calder ´on–Zygmund 算子的有界性，Front. Math. China 8 (2013)，第 4 期，961–971。

School of Mathematical and Physical Sciences, Macquarie University, NSW 2109,Australia电子邮箱地址：the.bui@mq.edu.au

School of Mathematics and Statistics, The Learning Hub, The University of Sydney, Sydney, NSW 2006, Australia电子邮箱地址：ken.ly@sydney.edu.au