极小内射分解末项的底 II

Zhaoyong Huang 和 Tiwei Zhao*

摘要。设 R 是一个左右自内射维数为 n的 Gorenstein环。我们证明， ${}_RR$ 的极小内射分解的末项具有本质底。这回答了 Iwanaga 和 Sato 提出的一个未决问题。由此可得，对于任意内射维数为 n的左R-模 M，其极小内射分解的末项M 也具有本质底。

arXiv:2611.32486v1 [math.RA] 24 Nov 2026

1. 引言

设 R 是任意结合环。对于左 R-模 M，我们用

$$0 \to M \to E^0(M) \to E^1(M) \to \cdots \to E^i(M) \to \cdots$$

表示 M的极小内射分解，并对任意 $i \geq 0$，记 $\Omega^{-i}(M) := \mathrm{Ker}(E^i(M) \to E^{i+1}(M))$。我们将 M 与其在 $E^0(M)$中的像视为相同，因此 $\Omega^0(M) = M$。在这个极小分解中，每个 $E^i(M)$都是 $\Omega^{-i}(M)$的内射包；特别地， $E^0(M)$是 M的内射包。回顾一下，若左右诺特环 R 的左右自内射维数均有限，则称其为$Gorenstein$ 环。

设 R 为交换Noether环。则 R 的素理想与不可分解内射 R-模的同构类之间存在一一对应，由 $P \leftrightarrow E^0(R/P)$ 给出，其中 P 是 R [12, 的一个素理想。命题 3.1]。设 R 为交换Gorenstein环，其自内射维数为 n。则 R 的 Krull维数为 n，且 [1] 中的基本定理指出：当 P 是 R 的一个素理想时，不可分解内射 R-模 $E^0(R/P)$ 嵌入 $E^i(R)$ 当且仅当 P 的高度为 i。因此，最后一项 $E^n(R)$ 具有本质底。由此自然会提出这样的问题：这一结果在非交换情形下是否仍然成立。

问题 1.1。 ([10, 第 62 页，问题]) 设 R 为 Gorenstein环，其左、右自内射维数均为 n。$E^n(R)$ 的底是否非零？此外，该底在 $E^n(R)$ 中是否是本质的?

显然，第二个问题若有肯定答案，则第一个问题也有肯定答案。对于第一个问题，在满足以下任一条件时，答案是肯定的:

(1) R 的左右自内射维数至多为二（[5, 定理 4.5]）；
(2) R 是一个 Auslander–Gorenstein环（[3, 命题 1.1]）；**(3)** R 的全局维数为 n，或者 R 是完全有界的（[10, 命题 8]）；**(4)** R 是一个 Auslander $(n-2)$-Gorenstein环（[7, 推论 3.2]）。

对于第二个问题，如果 R 是一个 Auslander–Gorenstein环，则答案是肯定的（[10,定理 6]）。这一结果的模版本如下：对于一个 Auslander–Gorenstein
环 R 的左右自内射维数为 n。如果 M 是一个左 R-模，且内射维数为 n，那么 $E^n(M)$具有本质底（[9, 定理 2]）。此外，对于一个在交换Noether环上模有限的代数R，如果 M 是一个非零有限生成左 R-模，且内射维数为 n，那么 $E^n(M)$具有本质底（[4,

2020 数学主题分类。16E10, 16E30, 16E65.关键词和短语。Gorenstein环，极小内射分解，（本质的）底，投射维数。

*通讯作者。

推论 3.5(2)]）。设 R 是一个左诺特环，且设 M 是一个 Wakamatsu tilting 左R-模，其中 $S := \mathrm{End}({}_RM)^{op}$ 是一个右诺特环。如果 M 是一个 Gorenstein模，具有左 R-右 S-内射维数 n，那么 $E^n(M)$具有本质底（[13, 定义 3.6 和推论 3.10]）。

本文证明以下结果。

定理 1.2. (定理 3.2 和 3.3) 设 R 是一个左右自内射维数均为 n的 *Gorenstein*环。那么有:

(1) $E^n(R)$有本质底。(2) $E^n(M)$ 对于任意非零左 R-模 M，只要其内射维数为 n, 就有本质底。

在此定理中，断言 (1) 对问题 1.1 中的第二个问题（进而也对第一个问题）给出了肯定回答, 而断言 (2) 是 (1) 的模版本。

2. 预备知识

在全文中，R 是一个带单位元的结合环，所有模都是幺模，$\mathrm{Mod}\, R$ 表示左 R-模范畴。设 M是 $\mathrm{Mod}\ R$中的一个模。我们分别用 $\mathrm{pd}_R M$和 $\mathrm{id}_R M$ 表示 M的投射维数和内射维数。底Soc(M)是 M的所有简单子模之和。回忆一下，若 L 是 M 的一个子模，则称其为本质的，如果对于 M 的任意非零子模 M，都有 $M\prime \cap L \neq 0\prime$。因此，当且仅当 M 的任意非零子模都包含一个简单子模时，Soc(M)才是M 中的本质子模。

引理 2.1. 设

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3$$

是 $\mathrm{Mod}\, R$中的一个序列。如果 f_1 是满射，则 $\mathrm{Ker}\, f_2 = f_1(\mathrm{Ker}\, f_2 f_1)$。

证明。显然，f_1(Ker f_2f_1) $\subseteq$ Ker f_2。现在设 $x_2 \in$ Ker f_2。由于 f_1 是满射，存在 $x_1 \in M_1$ 使得 $x_2 = f_1(x_1)$。因此，$f_2f_1(x_1) = f_2(x_2) = 0$，从而 $x_1 \in$ Ker f_2f_1。于是 $x_2 = f_1(x_1) \in f_1$(Ker f_2f_1)，因此 Ker $f_2 \subseteq f_1$(Ker f_2f_1)。证明完毕。□

对于 模 $Y \in \mathrm{Mod}\, R$ 的子模 X，我们用 $\lambda_Y^X\colon\ X\prime \to Y$ 表示包含映射。

引理 2.2。若 $\mathrm{id}_R R = n$，则对于模 $Y \in \mathrm{Mod}\, R$ 的任意子模 X，在 $\mathrm{Mod}\, R^{op}$ 中的同态 $\mathrm{Ext}^n_R(\lambda_Y^X, R)$ 是满射。

证明。正合序列

$$0 \to X \xrightarrow{\lambda_Y^X} Y \to Y/X \to 0$$

在 $\mathrm{Mod}\, R$ 中诱导出一个正合序列

$$\mathrm{Ext}^n_R(Y,R) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^n_R(\lambda_Y^X,R)} \mathrm{Ext}^n_R(X,R) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_R(Y/X,R)$$

在 Mod R^{op} 中。由于 $\mathrm{id}_R R = n$，我们有 $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(Y/X, R) = 0$，断言得证。□

我们需要以下结果。

引理 2.3。设 $0 \neq M \in$ 模 R 和 $n \geq 0$。则有

(1) $\mathrm{Ext}^n_R(K, M) \neq 0$对于 $\Omega^{-n}(M)$ 的任意非零子模 K；(2) 若 $\mathrm{id}_R M = n$，则 $\mathrm{Ext}^n_R(K, M) \neq 0$ 对于 $E^n(M)$ 的任意非零子模 K。

证明。（1）设 K 是 $\Omega^{-n}(M)$ 的一个非零子模。若 $n = 0$，则包含映射 $\lambda_M^K : K\prime \to M$是 $\mathrm{Hom}_R(K, M) = \mathrm{Ext}^0_R(K, M)$ 的一个非零元素，因为 $\Omega^0(M) = M$。因此,

此情形下断言成立。现在假设 $n \geq 1$。考虑下面这个行正合图:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & K & & \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \lambda^K_{\Omega^{-n}(M)}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^{-(n-1)}(M) & \longrightarrow & E^{n-1}(M) & \xrightarrow{\pi^n} & \Omega^{-n}(M) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

我们断言，不存在同态 $f\colon K \to E^{n-1}(M)$ 使得 $\lambda^K_{\Omega^{-n}(M)} = \pi^n f$。否则，若存在同态 $f\colon K \to E^{n-1}(M)$ 使得 $\lambda^K_{\Omega^{-n}(M)} = \pi^n f$，则 f 是单射，因此 $\operatorname{Im} f \cong K \neq 0$。于是 $\operatorname{Im} f \cap \Omega^{-(n-1)}(M) \neq 0$，因为 $\Omega^{-(n-1)}(M)$ 在 $E^{n-1}(M)$ 中是本质的。因此存在 $x \in K$ 使得 $0 \neq f(x) \in \Omega^{-(n-1)}(M)$，从而

$$0 \neq x = \lambda^K_{\Omega^{-n}(M)}(x) = \pi^n f(x) = 0,$$

这与结论矛盾。断言得证。由此可知，$\operatorname{Hom}_R(K, \pi^n)$ 不是满射。因此，下面的正合序列

$$\begin{aligned} &0 \to \operatorname{Hom}_R(K, \Omega^{-(n-1)}(M)) \to \operatorname{Hom}_R(K, E^{n-1}(M)) \\ &\xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(K,\pi^n)} \operatorname{Hom}_R(K, \Omega^{-n}(M)) \to \operatorname{Ext}^1_R(K, \Omega^{-(n-1)}(M)) \to 0 \end{aligned}$$

给出 $\operatorname{Ext}^1_R(K, \Omega^{-(n-1)}(M)) \neq 0$。因此，根据维数平移，$\operatorname{Ext}^n_R(K, M) \cong \operatorname{Ext}^1_R(K, \Omega^{-(n-1)}(M)) \neq 0$。

(2) 如果 $\operatorname{id}_R M = n$，那么 $\Omega^{-n}(M) = E^n(M)$。现在由 (1) 可得该断言。 □

3. 主要结果

下面的结果在后续内容中很有用。

命题 3.1. 设 $N \in$ 模 R^{op} 满足 $\operatorname{pd}_{R^{\mathrm{op}}} N = n \geq 0$。那么对于任意 $M \in$ 模 R 以及 M 的任意子模族 $\{M_i \mid i \in I\}$，包含诱导映射 $\operatorname{Tor}^R_n(N, M_i) \to \operatorname{Tor}^R_n(N, M)$ 均为单射，并且

$$\operatorname{Tor}^R_n(N, \cap_{i\in I} M_i) = \cap_{i\in I} \operatorname{Tor}^R_n(N, M_i) \tag{3.1}$$

作为 $\operatorname{Tor}^R_n(N, M)$ 的子群。

证明。设 $P \in \operatorname{Mod}\ R^{op}$ 为投射模。那么对于 M 的任意子模 X，同态

$$1_P \otimes \lambda^X_M : P \otimes_R X \longrightarrow P \otimes_R M$$

阿贝尔群的映射是单射。我们将 $P \otimes_R X$ 与其在 $P \otimes_R M$ 中的像等同。

我们断言

$$P \otimes_R (\cap_{i\in I} M_i) = \cap_{i\in I}(P \otimes_R M_i)$$

作为 $P \otimes_R M$ 的子群。对于任意以 J 为集合的自由右模 $R^{(J)}$，有 $R^{(J)} \otimes_R X \cong X^{(J)}$。此外，通过直接验证可得 $(\cap_{i\in I} M_i)^{(J)} = \cap_{i\in I} M_{(J)i}$。因此

$$R^{(J)} \otimes_R (\cap_{i\in I} M_i) \cong (\cap_{i\in I} M_i)^{(J)} = \cap_{i\in I} M_i^{(J)} \cong \cap_{i\in I}(R^{(J)} \otimes_R M_i). \tag{3.2}$$

现在选取一个投射右模 $P\prime$，使得 $P \oplus P' = R^{(J)}$，其中 J 为集合。对于 M 的任意子模 X，有

$$R^{(J)} \otimes_R X = (P \otimes_R X) \oplus (P\prime \otimes_R X) \text{ 和 } (P \otimes_R M) \cap (R^{(J)} \otimes_R X) = P \otimes_R X \tag{3.3}$$

作为 $R^{(J)} \otimes_R M$ 的子群。因此

$$\begin{aligned} P \otimes_R (\cap_{i\in I} M_i) &= (P \otimes_R M) \cap (R^{(J)} \otimes_R (\cap_{i\in I} M_i)) \quad \text{(by (3.3))} \\ &= (P \otimes_R M) \cap (\cap_{i\in I}(R^{(J)} \otimes_R M_i)) \quad \text{(by (3.2))} \\ &= \cap_{i\in I}((P \otimes_R M) \cap (R^{(J)} \otimes_R M_i)) \\ &= \cap_{i\in I}(P \otimes_R M_i). \quad \text{(by (3.3))} \end{aligned}$$

该断言得证。

设 X 是 M 的任意子模。由于 $\mathrm{pd}_{R^{\mathrm{op}}} N = n$，不难看出，$\mathrm{Tor}_n^R(N, \lambda_M^X) : \mathrm{Tor}_n^R(N, X) \to \mathrm{Tor}_n^R(N, M)$ 是单射。因此，对于任意 $i \in I$，包含诱导映射 $\mathrm{Tor}_n^R(N, \lambda_M^{M_i}) : \mathrm{Tor}_n^R(N, M_i) \to \mathrm{Tor}_n^R(N, M)$ 都是单射。

下面我们证明等式 (3.1) 成立。$n = 0$ 的情形由上述断言可得。现在设 $n \geq 1$ 并且

$$0 \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to N \to 0$$

是 $\mathrm{Mod}\ R^{op}$ 中 N 的一个投射分解。我们将 $\mathrm{Tor}_n^R(N, X)$ 与 $\mathrm{Im}\,\mathrm{Tor}_n^R(N, \lambda_M^X)$ 视为相同。考虑如下具有正合行的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_n^R(N,X) & \longrightarrow & P_n \otimes_R X & \xrightarrow{d_n\otimes 1_X} & P_{n-1}\otimes_R X \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tor}_n^R(N,\lambda_M^X)} & & \downarrow{\scriptstyle 1_{P_n}\otimes\lambda_M^X} & & \downarrow{\scriptstyle 1_{P_{n-1}}\otimes\lambda_M^X} \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_n^R(N,M) & \longrightarrow & P_n \otimes_R M & \xrightarrow{d_n\otimes 1_M} & P_{n-1}\otimes_R M.
\end{array}$$

对于任意 $z \in P_n \otimes_R X$，我们有

$$\begin{aligned}
& z = (1_{P_n} \otimes \lambda_M^X)(z) \in \mathrm{Tor}_n^R(N, M) \\
\Longleftrightarrow & (1_{P_{n-1}} \otimes \lambda_M^X)(d_n \otimes 1_X)(z) = (d_n \otimes 1_M)(1_{P_n} \otimes \lambda_M^X)(z) = 0 \\
\Longleftrightarrow & (d_n \otimes 1_X)(z) = 0 \\
\Longleftrightarrow & z \in \mathrm{Tor}_n^R(N, X).
\end{aligned}$$

因此，我们得出

$$\mathrm{Tor}_n^R(N, X) = \mathrm{Tor}_n^R(N, M) \cap (P_n \otimes_R X) \tag{3.4}$$

作为 $P_n \otimes_R M$ 的子群。由此可得

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Tor}_n^R(N, \cap_{i\in I} M_i) \\
= & \mathrm{Tor}_n^R(N, M) \cap (P_n \otimes_R (\cap_{i\in I} M_i)) \quad (\text{by (3.4)}) \\
= & \mathrm{Tor}_n^R(N, M) \cap (\cap_{i\in I} (P_n \otimes_R M_i)) \quad (\text{by the above claim}) \\
= & \cap_{i\in I} (\mathrm{Tor}_n^R(N, M) \cap (P_n \otimes_R M_i)) \\
= & \cap_{i\in I} \mathrm{Tor}_n^R(N, M_i) \quad (\text{by (3.4)})
\end{aligned}$$

作为 $\mathrm{Tor}_n^R(N, M)$ 的子群。 □

现在我们可以证明主要结果。

定理 3.2。设 R 是一个 *Gorenstein*环，满足 $\mathrm{id}_R R = \mathrm{id}_{R^{op}} R = n$。则 $E^n(R)$ 具有本质底。

证明。设 W 是 $E^n(R)$ 的一个非零有限生成子模。考虑集合

$$\mathcal{C} := \{\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_R^n(\lambda_W^V, R) \mid V \text{ is a non-zero submodule of } W\}.$$

它是 $\mathrm{Ext}_R^n(W, R)$ 的子模组成的非空族。注意，根据 [6, 引理 2]，，$\mathrm{Ext}_R^n(W, R)$ 是一个诺特右 R-模，因此 $\mathcal{C}$ 具有一个极大元，记为 $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_R^n(\lambda_W^{V_0}, R)$。

设 U 是 V_0的一个非零子模。则 $\lambda_W^U = \lambda_W^{V_0}\lambda_{V_0}^U$，因此

$$\mathrm{Ext}_R^n(\lambda_W^U, R) = \mathrm{Ext}_R^n(\lambda_{V_0}^U, R)\,\mathrm{Ext}_R^n(\lambda_W^{V_0}, R). \tag{3.5}$$

这意味着 $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_R^n(\lambda_W^{V_0}, R) \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_R^n(\lambda_W^U, R)$。由 $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_R^n(\lambda_W^{V_0}, R)$ 的极大性可知，我们有

$$\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_R^n(\lambda_W^{V_0}, R) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_R^n(\lambda_W^U, R). \tag{3.6}$$

由引理 2.2，我们有 $\mathrm{Ext}^n_R(\lambda^{V_0}_W,\ R)$ 是满射。因此，

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ker}\operatorname{Ext}^n_R(\lambda^U_{V_0},R)\\
=&\operatorname{Ext}^n_R(\lambda^{V_0}_W,R)(\operatorname{Ker}(\operatorname{Ext}^n_R(\lambda^U_{V_0},R)\operatorname{Ext}^n_R(\lambda^{V_0}_W,R)))\quad\text{(by Lemma 2.1)}\\
=&\operatorname{Ext}^n_R(\lambda^{V_0}_W,R)(\operatorname{Ker}\operatorname{Ext}^n_R(\lambda^U_W,R))\quad\text{(by (3.5))}\\
=&\operatorname{Ext}^n_R(\lambda^{V_0}_W,R)(\operatorname{Ker}\operatorname{Ext}^n_R(\lambda^{V_0}_W,R))=0.\quad\text{(by (3.6))}
\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{Ext}^n_R(\lambda^U_{V_0},\ R)$ 是单射的，由引理 2.2 可知它是一个同构。

令 Q 为 $\mathrm{Mod}\,R^{op}$ 的内射余生成元。根据 [2, 定理 3.2.13], 我们有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Tor}^R_n(Q,U) & \xrightarrow{\operatorname{Tor}^R_n(Q,\lambda^U_{V_0})} & \operatorname{Tor}^R_n(Q,V_0)\\
\cong\downarrow & & \downarrow\cong\\
\operatorname{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(\operatorname{Ext}^n_R(U,R),Q) & \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(\operatorname{Ext}^n_R(\lambda^U_{V_0},R),Q)} & \operatorname{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(\operatorname{Ext}^n_R(V_0,R),Q).
\end{array}$$

由于 $\mathrm{Ext}^n_R(\lambda^U_{V_0},\ R)$ 是一个同构，我们有 $\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Ext}^n_R(\lambda^U_{V_0},\ R),\ Q)$ 也是一个同构，因此 $\mathrm{Tor}^R_n(Q,\ \lambda^U_{V_0})$ 也是如此。将 $\mathrm{Tor}^R_n(Q,\ U)$ 与其在 $\mathrm{Tor}^R_n(Q,\ V_0)$ 中的像等同，即我们有

$$\operatorname{Tor}^R_n(Q,U)=\operatorname{Tor}^R_n(Q,V_0)\tag{3.7}$$

对于任意非零子模 U of V_0。

Set

$$\mathcal{U}:=\{\text{all non-zero submodules of } V_0\}\quad\text{and}\quad S:=\bigcap_{U\in\mathcal{U}}U.$$

根据 [8, 命题 1 和定理 2], , 我们有 $\mathrm{pd}_{R^{\mathrm{op}}}Q=n$。于是

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tor}^R_n(Q,S)&=\operatorname{Tor}^R_n(Q,\cap_{U\in\mathcal{U}}U)\\
&=\cap_{U\in\mathcal{U}}\operatorname{Tor}^R_n(Q,U)\quad\text{(by Proposition 3.1)}\\
&=\operatorname{Tor}^R_n(Q,V_0)\quad\text{(by (3.7))}\\
&\cong\operatorname{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(\operatorname{Ext}^n_R(V_0,R),Q)\neq0,\quad\text{(by Lemma 2.3(2))}
\end{aligned}$$

因此 $S\neq0$。设 T 是 S 的一个非零子模。那么 $T\in\mathcal{U}$, 因此

$$S=\cap_{U\in\mathcal{U}}U\subseteq T\subseteq S.$$

因此 $T=S$, 这意味着 S 是单的。由此我们得出结论: $E^n(R)$ 的任意非零有限生成子模都包含一个简单子模。

现在设 N 是 $E^n(R)$ 的任意非零子模。取 $0\neq x\in N$ 并令 $U:=Rx$。那么 U 包含一个简单子模 S。由于 $0\neq S\subseteq U\subseteq N$ 且 $S\subseteq\mathrm{Soc}(E^n(R))$, 我们有

$$0\neq S\subseteq N\cap\operatorname{Soc}(E^n(R)).$$

由此可知，$\mathrm{Soc}(E^n(R))$ 是 $E^n(R)$ 的本质子模。 □

作为定理 3.2 的一个应用，我们得到它的模版本。

定理 3.3。 设 R 是一个 *Gorenstein*环，且 $\mathrm{id}_R\,R=\mathrm{id}_{R^{op}}\,R=n$。那么，对于任意满足 $\mathrm{id}_R\,M=n$ 的 $0\neq M\in$ 模 R， $E^n(M)$ 都有本质底。

证明。 设 M 是一个非零左 R-模，且 $\mathrm{id}_R\,M=n$。根据 [12, 定理 2.5], , 我们可以写成

$$E^n(M)=\oplus_{i\in I}E_i,$$

其中每个 E_i 都是非零不可分解的内射左 R-模。由 [9,定理 1] 可知，每个 E_i 都同构于 $E^n(R)$的一个直和项。将 E_i 认作这样的直和项，我们有

$$0 \neq E_i \cap \mathrm{Soc}(E^n(R)) = \mathrm{Soc}(E_i)$$

根据 [11, 第242页，练习12(3)], ，因此 E_i 由定理 3.2 可知含有一个简单子模 S_i 。由于E_i 不可分解，我们有 $E_i = E^0(S_i)$，从而

$$E^n(M) = \oplus_{i\in I} E^0(S_i).$$

于是有

$$\begin{aligned}\mathrm{Soc}\, E^n(M) &= \mathrm{Soc} \oplus_{i\in I} E^0(S_i)\\ &= \oplus_{i\in I} \mathrm{Soc}\, E^0(S_i) \quad (\text{by } [11, \text{ p.242, Exercise } 12(6)])\\ &= \oplus_{i\in I} S_i.\end{aligned}$$

由于每个 S_i 都是 $E^0(S_i)$ 中的本质的子模，根据 [11, 例 3.38] 可知， $\oplus_{i\in I} S_i$ 是 $E^n(M)$ 中的本质的子模。□

致谢

本研究得到国家自然科学基金（批准号：12371038、12471036）和湖北省自然科学基金（批准号：2026AFA094）的部分资助。

参考文献

[1] H. Bass，论 Gorenstein环的普遍存在性，Math. Z. 82(1) (1963), 8–28. [2] E. E. Enochs 和 O. M. G. Jenda，《相对同调代数》，第1卷，第二次修订扩充版，de Gruyter数学论著丛书 30，Walter de Gruyter GmbH & Co. KG，柏林，2011. [3] K.R. Fuller 和 Y. Iwanaga，论 n-Gorenstein环和内射维数较低的 Auslander环，载于《代数表示论》（加拿大安大略省渥太华，1992），CMS Conf. Proc. 14，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1993，第175–183页。[4] S. Goto 和 K. Nishida，迈向 Bass数理论及其在 Gorenstein代数中的应用，Colloq. Math. 91(2) (2002), 191–253. [5] M. Hoshino，自内射维数为二的 Noether环，Comm. Algebra 21(4) (1993), 1071–1094. [6] Z.Y. Huang 和 F.C. Cheng，论非交换环上单模的同调维数，Comm. Algebra 24(10) (1996), 3259–3264. [7] Z.Y. Huang 和 Y. Wang，极小内射分解末项的底座，Sci. China Math. 53(7) (2010), 1715–1721. [8] Y. Iwanaga，论具有有限自内射维数的环 II，Tsukuba J. Math. 4(1) (1980), 107–113. [9] Y. Iwanaga 和 J.-I. Miyachi，Gorenstein环上具有最高同调维数的模，载于《有限维代数表示论趋势》（美国华盛顿州西雅图，1997），Contemp. Math. 229，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998，第193–199页。[10] Y. Iwanaga 和 H. Sato，论 Auslander 的 n-Gorenstein环，J. Pure Appl. Algebra 106(1) (1996), 61–76.[11] T.Y. Lam，《模与环讲义》，Grad. Texts in Math. 189，Springer-Verlag，纽约，1999. [12] E. Matlis，Noether环上的内射模，Pacific J. Math. 8(3) (1958), 511–528. [13] W.L. Song、X.J. Zhang 和 Z.Y. Huang，Gorenstein模的极小内射分解末项的底座，Osaka J. Math. 56(1) (2019), 123–132.

(Z. HUANG) 南京大学数学系，中华人民共和国江苏省南京市 210093电子邮件地址：huangzy@nju.edu.cn

(T. ZHAO) 江汉大学人工智能学院，中华人民共和国湖北省武汉市 430056电子邮件地址：tiweizhao@jhun.edu.cn