arXiv:2611.32488v1 [q-fin.RM] 24 Nov 2026

基于分数阶随机占优准则的动态随机多属性群决策

Shuqin Wang[a]、*Wei Zou*[b*]、*Jiehua Xie*[a*]

[a]江西水利电力大学工商管理学院，江西*330099*，中国[b]*S*

*chool of S*科学，江西水利电力大学*f* 水资源与 *d El*电力，江西，中国 *330099* *China*

2026年11月25日

摘要

随机占优准则已被广泛应用于随机多属性决策，作为一种稳健工具，用于定量比较决策者对备选方案的偏好。现有研究主要依赖静态建模框架中的整数阶随机占优准则。然而，整数阶尺度往往过于粗略，而且现实中的决策通常发生在动态环境中，静态方法难以胜任。为克服这些局限，本文提出一种基于分数阶随机占优准则的新型动态随机多属性群决策模型。在该模型中，我们引入了分数阶随机占优下的优先度，该优先度不仅涵盖整数阶随机占优下的优先度，也适用于效用函数并非处处凹的决策者。因此，所提出的模型能够以更高的准确性和灵活性刻画备选方案之间的占优关系。此外，该模型允许在不同决策时期增删属性和备选方案，因而适用于任何动态决策过程。数值算例和比较分析表明，所提出方法有效且稳健，并凸显了其相较于传统方法更广泛的适用性。本研究丰富了动态随机多属性群决策的理论基础，有助于提高决策结果的可靠性和精确性。

关键词： 随机多属性群决策；动态多属性决策；分数阶随机占优准则。

1 引言

具有多个备选方案和多个属性的决策问题（多属性群体决策，多属性群决策）出现在供应链管理、工程项目评估和金融投资中 [1卷–5].

*通讯作者。电子邮箱： zouwei@juwp.edu.cn（Wei Zou）； jhxie@pku.edu.cn（Jiehua Xie）。

属性值已被建模为区间数、语言变量和 Z-数 [6–8]。然而，在许多情境下，部分或全部属性的评价本质上具有随机性，因此被建模为随机变量，即随机多属性群决策（SMAGDM） [9]。决策也会随时间推移而展开，而非仅发生在某一时点，因为环境变化和政策调整等因素会改变问题；这促使人们研究动态多属性群决策（DMAGDM） [10–12]。在这类问题中，备选方案和属性可能在任何时期被添加或移除，而不是预先固定。较早时期的结果也会影响当前决策。静态多属性群决策方法无法捕捉这些跨时期关系。动态随机多属性群决策（DSMAGDM）结合了这两个特点：多个决策者（DM）在多个时期对备选方案进行评价，且属性值具有随机性。这类问题见于管理和工程应用 [13]。

随机占优（SD）是多属性群决策的标准工具，它无需决策者明确说明效用函数即可对备选方案进行排序 [14]。Chen 等人 [15] 将决策者的心理偏好纳入混合随机多属性决策方法，并定义了随机占优度。该方法针对不同偏好定义随机占优度，并借鉴了均值和方差的经济学解释。

现有的随机多属性决策模型仅使用整数阶随机占优准则，例如一阶占优和二阶占优。Müller 等人 [16] 指出了这些准则的一个局限：其测量尺度较为粗糙，因为所有高于 1 的整数阶仅适用于风险厌恶型决策者。然而在实践中，个体往往同时表现出风险厌恶和风险偏好，例如购买保险的同时投资股票，因此其风险态度并非完全风险厌恶。Müller 等人 [16] 和 Huang 等人 [17] 研究了占优如何从一阶连续过渡到二阶，由此开启了分数阶随机占优的研究方向。此后，分数阶随机占优一直受到决策科学和风险管理领域的研究关注 [18, 19]。

传统随机占优准则无法确定某些备选方案对之间的占优关系。其结果要么是缺失占优关系，要么是排序模糊，导致某些备选方案无法排序，从而限制了实际应用。Leshno 和 Levy [20] 提出了近似随机占优来解决这一问题。此后，近似随机占优被用于量化备选方案之间的占优关系，并构建随机多属性决策模型。例如，Jiang 等人 [21], 将其与整数阶随机占优相结合，提出了一种随机多属性决策方法。然而，基于近似随机占优的方法并不适用于具有局部凹凸效用函数的决策者，而且对随机属性的定量比较仍较为粗略。

然而，现有大多数多属性决策研究都假设处于静态环境中。在实际操作中，这类问题会随时间展开，并且需要根据条件变化进行持续调整。Campanella 和 Ribeiro [22] 构建了一个动态多属性决策框架。该框架通过反馈回路连接连续时期，从而修订信息的关联与聚合方式。在该框架中，备选方案集

和属性并非固定不变：二者都可以在不同时期发生变化，也可以被添加或删除。对于动态SMADM，Hu和Yang [23] 借鉴了累积前景理论和集对分析，并通过一个风险投资示例阐释了其方法。

本研究提出了一种基于分数阶随机占优准则的 DSMAGDM 方法，并作出三项贡献。（1）将分数阶随机占优准则融入动态决策框架，以处理随时间变化的随机信息。（2）分数阶随机占优提高了整数阶准则的辨别力，能够更细致地区分备选方案。（3）将该方法与静态 SMAGDM 以及采用其他随机占优准则的方法进行比较。

本文其余部分安排如下。第2节回顾分数阶随机占优准则和优先度。第3节介绍 DSMAGDM 方法。第4节给出一个数值示例。第5节报告比较分析。第6节总结研究发现并展望未来工作。

2 分数阶随机占优与优先度

随机占优（SD）规则是识别决策者风险偏好行为最常用的理论工具之一，也是选择和定量比较风险集合的标准工具。尽管这些准则已得到广泛研究和应用，Müller 等人 [16] 指出，现有随机占优规则存在一个缺陷：整数阶准则相对粗略。例如，一阶随机占优（FSD）要求效用函数递增，而二阶随机占优（SSD）要求效用函数递增且凹。在实践中，大多数决策者可能在某些财富水平上风险厌恶，而在另一些水平上风险寻求，其效用函数还表现出局部凸性。因此，从 FSD 到 SSD 是一次显著的跨越，值得关注这两个阶次之间的偏好关系，即一系列连续的占优规则，而非离散式跃迁。为了刻画具有局部凸性的效用函数所对应分布排序中的共识，Müller 等人 [16]对 FSD 和 SSD 进行了插值。随后，Huang 等人 [17] 针对大于或等于 1 的阶数提出了一种新的分数阶随机占优。由于具有坚实的实践背景和重要的理论性质，分数阶随机占优目前已成为决策科学和金融经济学等领域最前沿的研究方向之一。本文将分数阶随机占优准则引入 DSMAGDM 问题的研究，并构建一种优先度，用以衡量一个备选方案对另一个备选方案的占优程度。

2.1 分数阶随机占优准则

假设决策者（DM）的效用函数$u(x)$连续可微。Müller 等人[16] 将适用于决策者的效用函数集定义为

$$U_{1+\gamma} = \left\{ u(\cdot) \mid 0 \le \gamma u'(y) \le u'(x), \forall x \le y \right\}, \quad 0 \le \gamma \le 1.$$

注意，在上述定义中，当 γ趋近于 0 时，约束简化为$u'(x) \geq 0, \forall x$，因此U_1是所有非递减效用函数的集合，适用于所有非餍足决策者。当 γ趋近于 1 时，约束简化为$u'(x) \geq 0$ 和$u''(x) \leq 0, \forall x$，因此 U_2 是所有递增凹效用函数的集合，适用于所有非餍足且风险厌恶的决策者。对于 $0 < \gamma < 1$，$U^{1+\gamma}$是所有具有局部凸性的递增效用函数的集合，适用于所有主要风险厌恶、但并非完全排斥各种风险的非餍足决策者。此外，根据$U^{1+\gamma}$的定义，可以得出

$$U_2 \subseteq U_{1+\gamma_2} \subseteq U_{1+\gamma_1} \subseteq U_1, \quad 0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq 1. \tag{1}$$

设 a 和 b 为满足 a $<$ b 的两个实数。假设 X 和 Y 是定义在区间 [a, b], 上的两个随机变量，F 和 G 分别是 X 和 Y 的累积分布函数（累积分布函数），且满足 F(a) $=$ G(a) $=0$ 以及 F(b) $=$ G(b) $=1$。设 $\mathbb{E}_F[\cdot]$ 和 $\mathbb{E}_G[\cdot]$ 分别为分布 F 和 G 的期望值。Müller 等人 [16] 利用效用函数集 $U^{1+\gamma}$和插值思想，定义了一类分数阶随机占优准则，即$1+\gamma$阶随机占优准则。

定义 2.1。（Müller 等人 [16]）对于 $0 \leq \gamma \leq 1$，F通过 $1+\gamma$阶随机占优（$1+\gamma$- SD）占优于G，记作$F \succeq_{1+\gamma-SD} G$（或$X \succeq_{1+\gamma-SD} Y$），如果对于所有$u \in U^{1+\gamma}$，均有 $\mathbb{E}_F[u(X)] \geq \mathbb{E}_G[u(Y)]$ 成立。

根据 $1+\gamma$-随机占优规则和集合$U^{1+\gamma}$的定义可知，当 $\gamma = 0$时，$F \succeq_{1\text{-SD}} G$对应于一阶随机占优，即$F \succeq_{FSD} G$；当 $\gamma = 1$时，$F \succeq_{2\text{-SD}} G$ 对应于二阶随机占优，即$F \succeq_{SSD} G$。以下性质阐述了 $1+\gamma$-随机占优、一阶随机占优和二阶随机占优准则之间的关系。

性质 2.1。（*Müller* 等人 *[16]*）对于两个累积分布函数 F 和 G，以下结果成立。

（*i*）对于任意 $0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq 1$，$F \succeq_{1+\gamma_1}$–随机占优 $G \implies F \succeq_{1+\gamma_2}$–随机占优 G。

（*ii*）对于任意 $0 \leq \gamma \leq 1$，$F \succeq_{FSD} G \implies F \succeq_{1+\gamma\text{-}SD} G \implies F \succeq_{SSD} G$。

证明。

(i) 如果 $F \succeq_{1+\gamma_1-SD} G$，则根据定义 2.1，可知对于所有 $u \in U^{1+\gamma_1}$，$\mathbb{E}_F[u(X)] \geq \mathbb{E}_G[u(Y)]$ 成立。此外，由于根据方程（1）可得 $0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq 1$，因此 $U_{1+\gamma_2} \subseteq U^{1+\gamma_1}$，于是对于所有 $u \in U^{1+\gamma_2}$，不等式 $\mathbb{E}_F[u(X)] \geq \mathbb{E}_G[u(Y)]$ 成立，从而 $F \succeq_{1+\gamma_2}$-SD G。

(ii) 对于任意 $0 \leq \gamma \leq 1$，由方程（1）可知 $U_2 \subseteq U_{1+\gamma_2} \subseteq U_1$。然后，类似于命题（i）的证明，我们可以得到所需结果。 □

下面给出 $1+\gamma$-SD准则的分布形式。

理论 **第 2.1 节**。（*Müller* 等人 *[16]*）对于两个累积分布函数 F 和 G，当且仅当对所有 $t \in [a,b$，$F \succeq_{1+\gamma\text{-}SD} G$],

$$\int_a^t \big(F(x) - G(x)\big)_+ \, \mathrm{d}x \leq \gamma \int_a^t \big(G(x) - F(x)\big)_+ \, \mathrm{d}x \tag{2}$$

成立，其中 $(x)_+ =$ 最大值$\{x\ 0\}$。

Müller 等人 [16] 限制了边际效用之比，Huang 等人 [17]则限制了绝对风险厌恶的程度，并在程度为 1 或更高时获得了分数阶随机占优。其判据定义如下。

考虑一个冯·诺伊曼—摩根斯坦货币效用函数 u，其二阶连续可微并满足 $u' > 0$。与 u 相对应的 Arrow–Pratt绝对风险厌恶度量定义为

$$\rho_{u,2}(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

对于常数 $c \in (0,1],$，效用函数族为

$$\mathscr{U}_{1,c} = \left\{ u \,\middle|\, u'(x) > 0, \text{ and } \rho_{u,2}(x) \geq -\left(\frac{1}{c} - 1\right), \forall x \in [a,b] \right\}.$$

当 c 趋近于零时，$\mathscr{U}_{1,\,0}$ 包含所有非饱和效用函数。随着c增加并趋近于 1，只有非饱和且风险厌恶型决策者属于 $\mathscr{U}_{1,\,1}$。因此，对于任意处于开区间 c 内的 $(0,1)$，潜在偏好可能表现出风险偏好特征，但这种风险偏好是有界的。适当选择 c后，集合 $\mathscr{U}_{1,\,c}$ 包含具有局部凸区段的多种效用函数。此外，根据 $\mathscr{U}_{1,\,c}$的定义可知，$\mathscr{U}_{1,\,1} \subset \mathscr{U}_{1,\,c} \subset \mathscr{U}_{1,\,0}$

定义 2.2。 (Huang 等人 [17]) 对于 $0 < c \leq 1$，F通过 $1+c$阶随机占优（$1+c$- SD）支配 G，记为 $F \succeq_{1+c\text{-SD}} G$（或 $X \succeq_{1+c\text{-SD}} Y$），如果对所有满足 $\mathbb{E}_F[u(X)] \geq \mathbb{E}_G[u(Y)]$的 $u \in \mathscr{U}_{1,\,c}$均成立。

$1+c$-随机占优准则也存在一个关于分布的等价条件。

定理 2.2。 （*Huang* 等人 *[17]*）分别用 F 和 G 表示 X 和 Y 的累积分布函数。对于 $c \in (0,1]$, X（$1+c$）随机占优 Y，当且仅当

$$\int_a^x \left[G(t) - F(t)\right] dh_c(t) \geq 0, \quad \textit{for all } x \in [a,b] \tag{3}$$

成立，其中

$$h_c(x) = \begin{cases} e^{(1/c-1)x}, & \textit{if } 0 < c < 1, \\ x, & \textit{if } c = 1. \end{cases}$$

根据 $1+c$-随机占优规则的定理以及集合 $\mathscr{U}_{1,\,c}$ 可知，当 $c \to 0$ 时，$F \succeq_{1\text{-SD}} G$ 对应于一阶随机占优，即 $F \succeq_{FSD} G$；当 $c = 1$ 时，$F \succeq_{2\text{-SD}} G$ 对应于二阶随机占优，即 $F \succeq_{SSD} G$。以下性质阐述了 $1+c$-随机占优、一阶随机占优和二阶随机占优准则之间的关系。

性质 2.2。 （*Huang* 等人 *[17]*）对于两个累积分布函数 F 和 G，以下结果成立。

(*i*) 对于任意 $0 < c_1 \leq c_2 \leq 1$，$F \succeq_{1+c_1\text{–}SD} G \implies F \succeq_{1+c_2\text{–}SD} G$。

(ii) 对于任意 $0 < c \leq 1$，$F \succeq_{FSD} G \implies F \succeq_{1+c\text{-}SD} G \implies F \succeq_{SSD} G$。

与 Huang 等人提出的方法不同，该方法对绝对风险厌恶程度施加了约束，Mao 等人 [17], 提出了一种新的分数阶随机占优，对相对风险厌恶程度施加了约束。 [19]

考虑一个冯·诺伊曼—摩根斯坦货币效用函数 u，其二阶连续可微，并满足 $u' > 0$。与 u 对应的 Arrow–Pratt 相对风险厌恶度量定义为

$$R_{u,2}(x) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)}.$$

对于常数 $\ell \in (0,1],$ ，效用函数族为

$$\mathscr{U}_{1,\ell} = \left\{ u \,\middle|\, u'(x) > 0, \text{ and } R_{u,2}(x) \geq -\left(\frac{1}{c} - 1\right), \forall x \in (0,\infty) \right\}.$$

定义 2.3。 （Mao 等人 [19]）对于 $0 < \ell \leq 1$，若对所有 $u \in \mathscr{U}_{1,\ \ell}$，均有 $\mathbb{E}_F[u(X)] \geq \mathbb{E}_G[u(Y)]$ 成立，则称 F 按 $1+c$ 阶随机占优（$1+\ell$-SD）G，记为 $F \succeq_{1+\ell\text{-SD}} G$（或 $X \succeq_{1+\ell\text{-SD}} Y$）。

Mao 等人 [19] 同样通过分布函数刻画了 $1+\ell$-SD。

定理 2.3。 （*Mao 等人 [19]*）分别用 F 和 G 表示 X 与 Y 的累积分布函数。对于 $\ell \in (0,1]$, X（$1+\ell$）*SD* Y 当且仅当

$$\int_0^x \left[G(t) - F(t)\right] dh_c(t) \geq 0, \quad \textit{for all } x \in (0,\infty) \tag{4}$$

成立，其中 $h_\ell(x) = x^{1/\ell}, 0 < \ell \leq 1$。

在 $1+c$ 阶随机占优下满足的任何性质，在 $1+\ell$ 阶随机占优下也成立。为简洁起见，省略相应讨论。

2.2 分数阶随机占优下的优先度

优先度是一种理论工具，用于衡量两个备选方案（随机变量） [24]之间的占优程度。文献中已提出多种基于不同随机占优规则的优先度，并将其应用于随机多属性决策 [25]。现有优先度均为整数阶。然而，整数阶的尺度过于粗略。从一阶随机占优下的优先度跃迁到二阶随机占优下的优先度，变化幅度很大。对于任何大于一阶的阶数，在衡量备选方案的偏好程度时，这些优先度仅适用于风险厌恶型决策者。为克服这一局限，我们建立了随机占优下连续变化的一系列优先度。

定义 2.4。 对于 $0 \leq d \leq 1$，在 $1+\gamma$-SD（$1+c$-SD， $1+\ell$-SD）规则下，F 优于 G 的优先度定义为

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\left[F \succeq_{1+d\text{-SD}} G\right] = & \frac{(1-d)\cdot\left[\int_a^b (1-F(x))\mathrm{d}x - \int_a^b (1-G(x))\mathrm{d}x\right]}{\int_a^b (1-F(x))\mathrm{d}x} \\ & + \frac{d\cdot\left[\int_a^b (1-F(x))^2\mathrm{d}x - \int_a^b (1-G(x))^2\mathrm{d}x\right]}{\int_a^b (1-F(x))^2\mathrm{d}x}, \quad 0 \leq d \leq 1 \end{aligned} \tag{5}$$

如果存在 $1+\gamma$ 阶随机占优关系，则$d=\gamma$；如果存在 $1+c$ 阶随机占优关系，则$d=c$；如果存在 $1+\ell$ 阶随机占优关系，则$d=\ell$。

通过比较分析，可以得到 $1+\gamma(1+c,1+\ell)$ 阶分数阶随机占优下的优先度与现有随机占优下优先度之间的区别和关系。

注 *2.1.* 对于随机变量 X 和 Y，（i）当 $d=0$，即 $F\succeq_{FSD}G$ 时，公式（5）可简化为 $\mathbb{D}[F\succeq_{1\text{-}SD}G]=\left(\int_a^b(1-F(x))dx-\int_a^b(1-G(x))dx\right)/\left(\int_a^b(1-F(x))dx\right)$，因为 $\mathbb{E}_F[X]=\int_a^b(1-F(x))dx$ 且 $\mathbb{E}_G[Y]=\int_a^b(1-G(x))dx$，所以当 $d=0$ 时，$\mathbb{D}[F\succeq_{1+d\text{-}SD}G]=(\mathbb{E}_F[X]-\mathbb{E}_G[Y])/\mathbb{E}_F[X],$，这与 *Chen* 等人提出的一阶随机占优下的优先度一致。（ii）当 $d=1$，即 $F\succeq_{SSD}G$ 时，公式（5）可简化为 $\mathbb{D}[F\succeq_{2\text{-}SD}G]=\left[\int_a^b(1-F(x))^2dx-\int_a^b(1-G(x))^2dx\right]/\int_a^b(1-F(x))^2dx$。注意，$\int_a^b(1-F(x))^2dx=\mathbb{E}[min\{X_1,X_2\}]$，其中 X_1 和 X_2 是与 X 同分布且相互独立的随机变量。因此，当 $d=1$ 时，该优先度还可以捕捉分布的离散程度，从而衡量二阶随机占优的强度。（iii）当 $0<d<1$ 时，该优先度是第一阶和第二阶优先度的凸组合，即 $\mathbb{D}=(1-d)T_1+dT_2,$，其中 $T_1=(\mathbb{E}_F[X]-\mathbb{E}_G[Y])/\mathbb{E}_F[X]$ 且 $T_2=\left[\int_a^b(1-F(x))^2dx-\int_a^b(1-G(x))^2dx\right]/\int_a^b(1-F(x))^2dx$。因此，$\mathbb{D}$ 的值始终介于 T_1 和 T_2 之间。d 的值由占优关系本身的阶数决定，规定了第一阶和第二阶信息的相对贡献：d 越接近 *0*，该优先度越依赖于关于期望值的一阶信息；d 越接近 *1*，则越依赖于关于离散程度的二阶信息。通过这种方式，该优先度能够根据每种占优关系的阶数进行自适应，而不是在统一尺度上衡量所有关系。

利用 $1+\gamma$-SD（$1+c$-SD，$1+\ell$-SD）下性质2.2中的分布等价条件，我们可以得到 $1+\gamma$-SD（$1+c$-SD，$1+\ell$-SD）下优先度的上下界。

性质 2.3。对于累积分布函数分别为 F 和 G 的两个随机变量 X 和 Y，有 $0\leq\mathbb{D}[F\succeq_{1+d\text{-}SD}G]\leq 1.$

证明。

根据公式（5），优先度可以重写为凸组合 $\mathbb{D}=(1-d)T_1+dT_2$,其中

$$T_1=\frac{\int_a^b(1-F(x))\mathrm{d}x-\int_a^b(1-G(x))\mathrm{d}x}{\int_a^b(1-F(x))\mathrm{d}x},\qquad T_2=\frac{\int_a^b(1-F(x))^2\mathrm{d}x-\int_a^b(1-G(x))^2\mathrm{d}x}{\int_a^b(1-F(x))^2\mathrm{d}x}.$$

由于优先度仅针对存在占优关系的备选方案对定义，因此有$F\succeq_{1+d\cdot SD}G$，其中 $0\leq d\leq 1$，只需证明 $0\leq T_1\leq 1$ 和 $0\leq T_2\leq 1$均成立。

首先，由于 $0\leq 1-F(x)\leq 1$ 在 $[a,\ b]$ 上，且 X 在 b 处不是退化的，因此两个分母均为正，所以 T_1和 T_2 均定义良好。此外，由于 $\int_b^a(1-G(x))\mathrm{d}x\geq 0$ 和 $\int_b^a(1-G(x))^2\mathrm{d}x\geq 0$，我们立即得到 $T_1\leq 1$ 和 $T_2\leq 1$。

剩下需要证明 $T_1 \geq 0$ 和 $T_2 \geq 0$。由于 $d \leq 1$，关系 $F \succeq_{1+d\cdot SD} G \implies F \succeq_{2\cdot SD} G$</style>成立，因为（$d$）阶随机占优的效用函数类包含所有递增凹效用函数 [?]。根据二阶随机占优的积分刻画，有

$$S(x) := \int_a^x \big(G(t) - F(t)\big)\mathrm{d}t \;\geq\; 0, \qquad x \in [a,b].$$

对于一阶项，我们有

$$\int_a^b (1-F(x))\mathrm{d}x - \int_a^b (1-G(x))\mathrm{d}x = \int_a^b \big(G(x)-F(x)\big)\mathrm{d}x = S(b) \geq 0,$$

因此 $T_1 \geq 0$。对于二阶项，注意到

$$\int_a^b (1-F(x))^2\mathrm{d}x - \int_a^b (1-G(x))^2\mathrm{d}x = \int_a^b \big(G(x)-F(x)\big)\big(2-F(x)-G(x)\big)\mathrm{d}x.$$

令 $w(x) = 2 - F(x) - G(x)$。由于 F 和 G 均为非递减函数，w 在 $[a,b]$ 上是非递增的，其中 $0 \leq w(x) \leq 2$，且 $w(b) = 2 - F(b) - G(b) = 0$。通过分部积分并利用 $S(a) = 0$，可得

$$\int_a^b \big(G(x)-F(x)\big)w(x)\mathrm{d}x = S(b)\,w(b) - \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}w(x) = -\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}w(x) \;\geq\; 0,$$

其中，关于 $\mathrm{d}w$ 的积分是在黎曼–斯蒂尔切斯意义下理解的，因为 $S(x) \geq 0$ 且 $\mathrm{d}w \leq 0$在 $[a,b]$上成立。因此 $T_2 \geq 0$。

结合上述结果可得 $0 \leq T_1 \leq 1$ 以及 $0 \leq T_2 \leq 1$；由于 $d \in [0,1]$，优先度作为T_1 和T_2, 的凸组合，满足 $0 \leq \mathbb{D}[F \succeq_{1+d\cdot SD} G] \leq 1$。 □

The 下面给出一个例子，以验证所提出占优度的合理性 .

例2.1。 考虑三个备选方案 X、Y 和 Z，它们在评价等级1、2、.....、5上的概率分布列于表格 1中。

表1：例1中备选方案的概率分布信息

备选方案	概率分布				
	1	2	3	4	5
X	0.100	0.120	0.400	0.310	0.070
Y	0.320	0.070	0.390	0.180	0.040
Z	0.240	0.170	0.090	0.220	0.280

设 F_1, G 和 F_2 分别表示 X、Y 和 Z的累积分布函数。根据公式（2）中给出的分数阶随机占优的分布等价条件，三个备选方案之间的占优关系可确定为 $F_1 \succeq_{FSD} G$ 和 $F_2 \succeq_{1.25\cdot SD} G$，而 $F_2 \succeq_{FSD} G$ 不成立。

对于这一对 (F_1,G)，根据方程（5），计算得到的优先度为 $\mathbb{D}[F_1 \succeq_{FSD} G] = 0.1853$，$\mathbb{D}[F_1 \succeq_{1.25\cdot SD} G] = 0.2055$。对于这一对 (F_2,G)，计算得到的优先度为 $\mathbb{D}[F_2 \succeq_{1.25\cdot SD} G] = 0.1800$.

(i) 值得注意的是，在相同的 1.25 阶下，一阶随机占优关系的优先度高于分数阶关系的优先度，即 $\mathbb{D}[F_1 \succeq_{1.25\text{-}SD} G] = 0.2055 > \mathbb{D}[F_2 \succeq_{1.25\text{-}SD} G] = 0.1800$。这与直觉相符：$F_1 \succeq_{FSD} G$ 是比 $F_2 \succeq_{1.25\text{-}SD} G$更强的关系，也表明所提出的优先度能够区分从一阶视角看相同的占优关系。

(ii) 根据性质1，关系 $F_1 \succeq G$ 在每个阶数下都成立，即 $F_1 \succeq_{FSD} G \Rightarrow F_1 \succeq_{1.25\text{-}SD} G \Rightarrow F_1 \succeq_{1.5\text{-}SD} G \Rightarrow F_1 \succeq_{SSD} G$，因此优先度随着阶数的升高而增加：

$$\mathbb{D}[F_1 \succeq_{1.25\text{-}SD} G] = 0.2055 < \mathbb{D}[F_1 \succeq_{1.5\text{-}SD} G] = 0.2257 < \mathbb{D}[F_1 \succeq_{SSD} G] = 0.2661.$$

上述结果与以下直觉相符：在相同阶数下，更强的占优关系对应更大的占优度，并且该占优度会根据关系的阶数进行调整；因此，所提出的占优度的合理性得到了验证。

注2.2。在 $1+d$-*SD* 特征下，优先度 $\mathbb{D}\left[F \succeq_{1\text{-}SD} G\right]$ 刻画了在 $1+d$-*SD* 准则下 F 占优 G 的强度。$\mathbb{D}\left[F \succeq_{1\text{-}SD} G\right]$ 的值越大，表示占优程度越强。

3 基于 $1+\gamma$-SD的动态随机多属性群决策方法

在现实中，决策数据和信息可能来自不同的阶段或时期，因此决策通常是一个动态过程，早期的决策结果会显著影响后续结果。此外，由于决策者所面临的自然状态具有不确定性且是随机的，在一些实际的多属性群决策问题中，属性值可以表示为随机变量。因此，动态随机多属性群决策（以下简称 DSMAGDM）问题是一个兼具理论意义和实践价值的研究课题 [26]。

本节给出基于分数阶随机占优构建的 DSMAGDM 模型。表2列出了全文使用的符号。

3.1 DSMAGDM问题描述

考虑一个跨越时期 $\mathrm{p} \in \mathrm{P} = \{1,2,3,\ldots\}$的 DSMAGDM 问题。在时期 p，候选集为 $\mathrm{A}^p = \{\mathrm{A}_1^p、\mathrm{A}_2^p、\ldots\ldots、\mathrm{A}_m^p\}$，其中备选方案的索引为 $\mathrm{i} = 1、\ldots\ldots、\mathrm{m}$；属性为 $\mathrm{C}^p = \{\mathrm{C}_1^p、\ldots\ldots、\mathrm{C}_n^p\}$，$\mathrm{j} = 1、\ldots\ldots、\mathrm{n}$；专家为 $\mathrm{E\,p} = \{\mathrm{e}_1^p、\ldots\ldots、\mathrm{e}_r^p\}$，$\mathrm{f} = 1、\ldots\ldots、\mathrm{r}$。时期 p 的属性权重收集为 $\mathrm{w}^p = (\mathrm{w}_1^p、\ldots\ldots、\mathrm{w}_n^p)^T$，其中 $\mathrm{w}^p\mathrm{j} \in [0,1]$ 且 $\sum_{j=1}^n \mathrm{w}^p\mathrm{j} = 1$；专家权重收集为 $\lambda\mathrm{p} = (\lambda\mathrm{p}\,1、\ldots\ldots、\lambda\mathrm{pr})^T$，其中 $\lambda\mathrm{p\,f} \in [0,1]$ 且 $\sum_{f=1}^r \lambda\mathrm{p\,f} = 1$。对于时期 p 的每个三元组 (i, j, f)，专家 $\mathrm{e}^p\mathrm{f}$ 通过随机变量 $\tilde{}\mathrm{X\,p\,f\,i\,j}$ 对备选方案 A_i在属性 $\mathrm{C}j$上的表现进行评价，其分布函数和均值分别为 $\mathrm{F\,p\,fi\,j}$ 和 $\mu\mathrm{p\,fi\,j}$。这些评价构成随机决策矩阵 $\mathrm{X} = [\mathrm{X\,p\,fi\,j}]_{m\times n}$。

本文探讨两个问题。一是对来自X的备选方案进行排序；二是结合早期时期的结果与历史集合 $\mathscr{H}_p$，确定最受青睐的备选方案。集合 $\mathscr{H}_p$ 遵循一种top-

表2：符号及说明

符号	说明
$P=\{1,2,3,\cdots\}$	决策时期的索引集
$A^p=\{A_1^p,A_2^p,\cdots,A_m^p\}$	m个备选方案的集合，$A^p{}_i$ 表示时期p的备选方案i
$C^p=\{C_1^p,C_2^p,\cdots,C_n^p\}$	n个属性的集合，$C^p{}_j$ 表示时期p的属性j
$Ep=\{e_1^p,e_2^p,\cdots,e_r^p\}$	r位专家的集合，$e^p{}_f$ 是时期p的专家f
$w^p=(w_1^p,w_2^p,\cdots,w_n^p)^T$	属性权重向量，其中 w^pj 是属性 j的权重，满足 $\sum_{j=1}^n w_j=1$且 $0\le wj\le 1$
$\lambda^p=(\lambda_{p1卷},\lambda_{p2},\ldots,\lambda_{pr})^T$	专家权重向量，其中 λpf是分配给专家 f的权重，满足 $\sum_{f=1}^r \lambda_f=1$且 $0\le\lambda_f\le 1$
$X=\left[x_{pfij}\right]_{m\times n}$	决策矩阵
F_{fij}^p	X^p的分布函数 fij
μ_{xfij}^p $\left[x_{p*fij}\right]$	X 的数学期望$pfij$
$=\left[\begin{matrix}\widetilde{R}^p{}_{fj}\\ \widetilde{r}^{pj}{}_{fil}\end{matrix}\right]_{m\times m}^{m\times n}$	归一化决策矩阵 优势关系矩阵
$\Phi^p=\left[\varphi_{il}^p\right]_{m\times m}$	优先度矩阵
$S^{p+}(A_i)$	A_i 在时期 p的正流
$S^{p-}(A_i)$	A_i 在时期 p的负流
$S^p(A_i)$	A_i 在时期p的净流
$\widetilde{S}^p(A_i)$	A_i 在时期p的净流归一化值
$\widetilde{\widetilde{S}}p(A_i)$	A_i 在时期p的净流动态归一化值
$\mathscr{H}^p$	时期p的历史集合

K 规则：当前时期排名最高的K 个备选方案将被保留。若某个备选方案从当前候选集中移除，但仍记录在 $\mathscr{H}_p$ 中，则保留其先前评价，以便该备选方案在之后某个时期重新进入候选集时，仍可调用其历史记录。随后， $\mathscr{H}_p$ 更新为

$$\mathscr{H}^p=\mathscr{T}_K\left(O^p\right)\cup\left(\mathscr{H}^{p-1}\setminus A^p\right)$$

其中， $\mathscr{T}_K$（O^p）表示当前时期排序O^p 中的前K 个备选方案集。也就是说，除当前时期的前K 个备选方案外，还将属于历史集合但已离开备选方案集的备选方案及其保留的评价一并保留在历史集合中。

为解决上述问题，本文提出了一种基于分数阶随机占优准则的DSMAGDM方法。在所提出的方法中，该过程分为两个步骤。

（I）。在任意时期p，首先基于分数阶随机占优准则，给出识别任意备选方案对之间占优关系的过程。然后，通过所识别的分数阶占优关系，获得任意备选方案对之间的优先度。进一步根据属性和专家的权重，确定每个备选方案对的总体优先度。最后，根据由PROMETHEE II得到的净流值对时期p 的所有备选方案进行排序，并据此确定当前时期的历史集合 $\mathscr{H}_p$ 。

（II）。动态 决策过程的动态性通过反馈机制加以处理。在每 ry

个时期 p，如果当前集合中的某个备选方案也属于上一时期的历史集合 $\mathscr{H}_{p-1}$，则应根据聚合规则，将本时期的净流与上一时期的净流聚合为新的净流，然后根据净流值对备选方案进行排序。后续时期的净流以相同方式计算，直至整个动态决策过程完成。在每个决策时期，根据本研究采用的保留规则更新历史集合，该规则选择排序最高的K 个备选方案，并将其保留至后续时期。整个动态决策过程持续进行，直至满足停止准则；该准则由决策者根据具体决策情境确定。

3.2 DSMAGDM框架

计算过程分为以下几个步骤。

步骤1. 随机决策矩阵标准化。

在多属性决策问题中，通常既包含数值越大越好的效益型属性，也包含情况相反的成本型属性。为消除不同属性类型对后续计算结果可能产生的影响，需要对属性值进行标准化，具体过程如下。

若$C^p{}_j$为效益型属性，则属性评价值X_{pfij}的标准化公式为:

$$X_{fij}^{p*}=\frac{X_{fij}^{p}-X_{fij}^{p\min}}{X_{fij}^{p\max}-X_{fij}^{p\min}},\quad (i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,n;p=1,2,3,\ldots). \tag{6}$$

I若$C^p{}_j$为成本型属性，则属性评价值X_{pfij}的标准化公式为 s:

$$X_{fij}^{p*}=\frac{X_{fij}^{p\max}-X_{fij}^{p}}{X_{fij}^{p\max}-X_{fij}^{p\min}},\quad (i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,n;p=1,2,3,\ldots). \tag{7}$$

其中，$X_p\max_{fij}$和$X_p\min_{fij}$分别是时期 p 的最大和最小属性评价值。归一化后的评价值X_{p*fij}仍然是一个随机变量，处理后的随机决策矩阵为$X^*=\left[X_{p*fij}\right]_{m\times n}$。

步骤 2. 确定随机占优关系。

在时期 p，对于备选方案 A^pi，首先根据专家 e f 针对属性 C^pj 提供的评价值 X_{fi}j，计算相应的分布函数 F p fi j。然后，对于同一属性 C$_j$，根据公式 (2) 确定备选方案 A_i和 A_l之间的占优关系。本研究采用 $1+\gamma$ 阶随机占优准则来量化并比较不同备选方案之间的占优关系，其中分数阶 γ可以是 $[0,1]$ 中的任意常数。图 1 展示了如何确定每一对备选方案的分数阶占优关系。通过该步骤，可以针对每个属性分别构建占优关系矩阵$\tilde{R}^p$f j $=\left[\tilde{r}^p\text{j f il}\right]m_\times$m。在该矩阵中，元素 $\tilde{r}^p$j fil 表示时期 p 下属性 C$_j$对应的备选方案 A_i和 A_l之间的$1+\gamma$ 阶随机占优关系，其定义如下:

$$\tilde{r}_{fil}^{pj}=\begin{cases}1+\gamma\text{-SD}, & \text{if } F_{fij}^{p}\succ_{1+\gamma\text{-SD}} G_{flj}^{p},\\ ____, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

其中，$\gamma=1+k/h(k=0,\ .....,\ h)$ 表示分数阶，它是将区间 [0,1] 等分为h份后得到的。

步骤3。优先度的计算。

对于具有分数阶随机占优关系的备选方案，需要计算优先度，以量化占优关系的强度。在j属性下，备选方案A_i 与A_l 之间的优先度由公式（3）计算。为更直观地表征备选方案之间的占优强度，构造专家e_f在p时期给出的<style id='j'>j属性优先度矩阵 $\Phi^{p}{}_{fj}=\left[\varphi_{pjfil}\right]_{m\times m}$，其中，$\varphi_{pjfil}$表示备选方案$A_i$与$A_l$之间随机占优关系的强度，定义如下：

$$\varphi_{fil}^{pj}=\begin{cases}D(F_{fij}\succ_{1+\gamma\text{-SD}} G_{flj}), & \text{if } \tilde{r}_{fil}^{pj}=1+\gamma\text{-SD},\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

步骤4。综合优先度的计算。

为确定所有备选方案之间占优关系的强度，需要计算综合优先度，以量化这些占优关系的总体强度。基于$w^p=$（w_1^p、w_2^p、.....、w_n^p）属性权重向量和 $\lambda_p=$（λ_p1 、λ_p2 、.....、λ_{pr}）专家权重向量，在p时期，备选方案A_i 与A_l 之间的综合优先度通过对单项优先度进行加权求和计算，从而构造综合优先度矩阵 $\Phi^{p}=\left[\varphi^{p}{}_{il}\right]_{m\times m}$。

步骤5。归一化净流值的计算。

基于综合优先度矩阵 Φ^{p}，采用 PROMETHEE II方法对备选方案进行排序。计算每个备选方案的正流 $S^{p+}(A_i)$ 和负流 $S^{p-}(A_i)$，净流则由这两个值导出。具体而言，正流 $S^{p+}(A_i)$ 表示备选方案 A_i 相对于其他备选方案的平均优先度，而负流 $S^{p-}(A_i)$ 表示其他备选方案相对于 A_i 的平均优先度。定义如下：

$$S^{p+}(A_i)=\frac{1}{m-1}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{m}\varphi_{il}. \tag{8}$$

$$S^{p-}(A_i)=\frac{1}{m-1}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{m}\varphi_{li}. \tag{9}$$

净流 $S^{p}(A_i)$ 结合了正流和负流：

$$S^{p}(A_i)=S^{p+}(A_i)-S^{p-}(A_i). \tag{10}$$

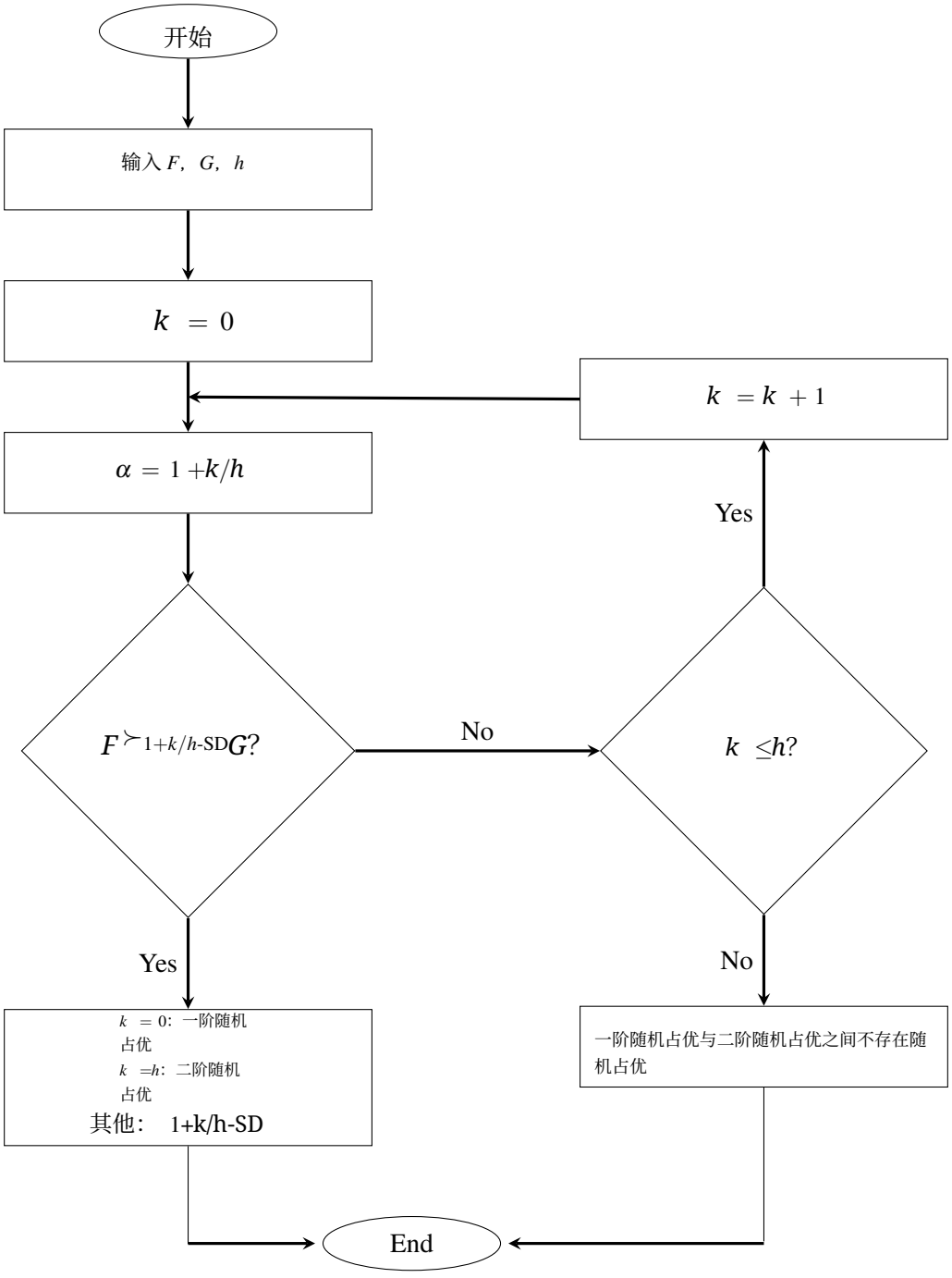

图1：确定 $1+k/h$阶分数阶随机占优的流程

值得注意的是，由方程（$S^p(A_i)$ 10）得到的净流理论上位于区间 $[-1,1]$内，且可能取负值，而每个备选方案的评价值必须位于 $[0,1]$ 内，以便在后续动态决策过程中通过聚合函数与历史评价进行聚合。因此，需要将净流值进一步映射到区间 $[0,1]$。具体而言，备选方案$S^p(A_i)$在第A_i 个p时期的净流通过仿射映射进行归一化

$$\widetilde{S}^p(A_i)=\frac{S^p(A_i)+1}{2},\quad \widetilde{S}^p(A_i)\in[0,1], \tag{11}$$

~其中，$S^p(A_i)$ 表示备选方案A_i 在p时期映射后的评价值。由于该映射严格单调递增，因此不会改变净流的排序或相对间距，所以~根据$S^p(A_i)$ 得出的排序与根据$S^p(A_i)$ 得出的排序相同。

~$S^p(A_i)$ 的值越高，表示对备选方案A_i的评价越高。

步骤6。多期净流量值的聚合。

首先根据评价信息获得当前时期的静态归一化净流量。然后，将这些静态归一化净流量与保留的历史决策数据进行聚合，以获得动态归一化净流值。由于第一时期没有历史决策数据，备选方案的动态归一化净流值等于其静态归一化净流值，因此可以直接执行步骤7的计算。然而，在后续时期，需要将当前时期的静态归一化净流值与上一时期的动态归一化净流~~值进行聚合。备选方案A_i 的动态归一化净流值$S^p(A_i)$计算如下。

$$\widetilde{\widetilde{S}}^p(A_i)=\begin{cases}\widetilde{S}^p(A_i), & A_i\in A^p\setminus\mathscr{H}^{p-1},\\ D_S\left(\widetilde{S}^{p-1}(A_i),\widetilde{S}^p(A_i)\right), & A_i\in A^p\cap\mathscr{H}^{p-1},\\ \widetilde{S}^{p-1}(A_i), & A_i\in\mathscr{H}^{p-1}\setminus A^p\end{cases} \tag{12}$$

其中，D_S 为聚合函数。对于备选方案A_i，如果A_i 仅存在于当前备选方案集A^p 中而~不在 $\mathscr{H}^{p-1}$中，则其动态归一化净流值 ~$S^p(A_i)$就是当前时期的静态归一化净流值 ~$S^p(A_i)$~。如果A_i 同时属于A^p 和 $\mathscr{H}^{p-1}$，则通过聚合函数D_S对 ~$S^{p-1}(A_i)$和~$S^p(A_i)$进行聚合，得到 ~$S^p(A_i)$。如果A_i 仅存在于历史集合 $\mathscr{H}^{p-1}$中，则评价信息与上一时期相比保持~不变，即 ~$S^p(A_i)$ = ~$S^{p-1}(A_i)$。

步骤7。备选方案排序与历史集合确定。

~~通过比较所有备选方案的动态归一化净流值 $S^p(A_i)$，即可获得备选方案的排序并确定最优备选方案。在每个决策时期，根据保留规则更新历史集合，并持续这一过程，直至整个动态决策过程结束。

4 数值示例

本节将上述方法应用于一家企业跨越三个时期的供应商选择问题。供应商选择是供应链管理中的核心问题，直接决定企业的运营效率和竞争优势。实践中，评价指标和备选供应商会在不同决策时期呈现动态变化，专家提供的评价信息也往往具有随机不确定性。因此，在动态且不确定的环境下选择最优供应商属于动态随机多属性群决策问题。分数阶随机占优准则能够更细致地刻画现实情境中决策者的风险态度，从而有效提高动态决策的可靠性与合理性。因此，我们采用上述方法对供应商进行评价和选择。

考虑一家向多家候选供应商采购的企业。评价值和供应商集合都会随时期变化。为简单起见，仅设三个时期 $P=\{1,2,3\}$。每个时期均有三位专家 $E=\{1,2,3\}$ 参与。为便于分析，将区间 $[0,1]$ 等分为四段。第 3 节中的 DSMAGDM 程序用于对供应商进行排序，具体步骤如下。

P=1

在第一时期，对五家备选供应商 $\mathrm{A}^1=\{\mathrm{A}_1^1,\mathrm{A}_2^1,\mathrm{A}_3^1,\mathrm{A}_4^1,\mathrm{A}_5^1\}$ 在三个属性 $\mathrm{C}^1=\{\mathrm{C}_1^1,\mathrm{C}_2^1,\mathrm{C}_3^1\}$上的表现进行评价。这三个属性分别为供应稳定性、产品质量和响应效率。属性权重为 $\mathrm{w}^1=(0.640, 0.115, 0.245)$，专家权重为 $\lambda^1=(0.4, 0.2, 0.4)$。三位专家获得的评价信息见表格 A.1.1–A.1.3（参见附录 A.1）。具体步骤如下。

步骤1。随机决策矩阵标准化。

由于所有属性均为效益型，因此无需对决策矩阵进行标准化。

步骤2。确定随机优势关系。

对于每个属性Cj，专家ef 为每个备选供应商提供的评价值概率分布2根据方程（A.1.4 （见附录A.1））推导得出。基于方程（

步骤3。优先度的计算。

对于每个属性Cj，基于步骤2中获得的占优关系矩阵，根据方程（5）计算每对备选供应商之间的优先度，如表格A.1.5所列（见附录A.1）。

步骤4。总体优先度的计算。

在第一时期的属性权重$w^1=(0.640, 0.115, 0.245)$下，通过对所有属性的优先度进行加权，得到备选方案$A_i$ 和A_l 之间的综合优先度 φ_{fil}^1。此外，根据第一时期的专家权重向量 $\lambda^1=(0.4, 0.2, 0.4)$，总体优先度

优先度 φ_{il}^{1}（备选方案A_i和A_l之间）通过汇总所有专家的综合优先度得出，如表格3所示。

表3：总体优先度矩阵

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	–	0.0542	0.0364	0.0108	0.0186
A_2	0.0467	–	0.0185	0.0807	0.0157
A_3	0.1084	0.1135	–	0.1398	0.0266
A_4	0.0384	0.0580	0.0451	–	0.0371
A_5	0.1040	0.1251	0.0291	0.1287	–

步骤5。归一化净流值的计算。

基于表3中获得的总体优先度，可使用方程（8）–（10）计算每个备选供应商的净流值。因此，根据方程（8）和（9）可得正流值和负流值，分别为 $S^{1+}(A_1)=0.0300$、$S^{1+}(A_2)=0.0404$、$S^{1+}(A_3)=0.0971$、$S^{1+}(A_4)=0.0446$、$S^{1+}(A_5)=0.0967$ 和 $S^{1-}(A_1)=0.0744$、$S^{1-}(A_2)=0.0877$、$S^{1-}(A_3)=0.0323$、$S^{1-}(A_4)=0.0900$、$S^{1-}(A_5)=0.0245$。最后，通过公式（10）计算每个备选供应商的净流值，结果为 $S^{1}(A_1)=-0.0444$、$S^{1}(A_2)=-0.0473$、$S^{1}(A_3)=0.0648$、$S^{1}(A_4)=-0.0454$、$S^{1}(A_5)=0.0722$。此外，由于净流值可能为负值，因此根据公式（11）将其映射到区间 $[0,1]$，作为当前时期备选方案的评价值。相应地，可得到每个备选供应商的归一化净流值：$\tilde{S}^{1}(A_1)=0.4778$、$\tilde{S}^{1}(A_2)=0.4764$、$\tilde{S}^{1}(A_3)=0.5324$、$\tilde{S}^{1}(A_4)=0.4773$、$\tilde{S}^{1}(A_5)=0.5361$。

步骤6。多时期归一化净流值聚合。

由于第一时期没有可用的历史决策数据，备选方案的动态归一化净流值$\sim$ $\sim$等于其静态归一化净流值，即 $\tilde{S}^{1}(A_1)=0.4778$、$\tilde{S}^{1}(A_2)=0.4764$、$\sim$ $\sim$ $\sim$ $\tilde{S}^{1}(A_3)=0.5324$、$\tilde{S}^{1}(A_4)=0.4773$以及 $\tilde{S}^{1}(A_5)=0.5361$，因此可以直接执行步骤7。

步骤7。备选方案排序和历史集合确定。

基于动态归一化净流值，可以确定五个备选供应商的排序为$A_5 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2$。根据保留规则，排名前$K=3$的备选方案将被保留至下一时期，从而得到 $\mathscr{H}^{1}=\{A_1,A_3,A_5\}$。

P=2

在第二时期，根据四个属性 $C^{2}=\{C_1^{2},C_2^{2},C_3^{2}\}$对五个备选供应商 $A^{2}=\{A_1^{2},A_2^{2},A_3^{2},A_6^{2},A_7^{2}\}$ 进行评价。这三个属性分别表示供应稳定性、产品质量和响应效率。专家权重为 $\lambda^{2}=(0.4,0.2,0.4)$，属性权重为 $w^{2}=(0.640,0.115,0.245)$。三位专家获得的评价信息见表 A.2.1–A.2.3（参见附录

A.2）。步骤 1–4 的计算程序与第一时期相同。相应的关系矩阵和优先度矩阵分别见表 A.2.4和 A.2.5。备选方案 φ_{il}^2 之间的总体优先度 A_i 和A_l 显示于表 4中。

表4：总体优先度矩阵

	A_1	A_2	A_3	A_6	A_7
A_1	–	0.0542	0.0364	0.0204	0.0127
A_2	0.0467	–	0.0185	0.0163	0.0853
A_3	0.1084	0.1135	–	0.0121	0.1437
A_6	0.1289	0.1639	0.0636	–	0.1587
A_7	0.0509	0.0558	0.0457	0.0267	–

步骤5. 归一化净流值的计算。

根据表4所示的总体优先度矩阵，使用方程（8）–（10）计算各备选供应商的净流值。根据表3，通过方程（8）和（9）得到正流值和负流值，分别为 $S^{2+}(A_1) = 0.0309$, $S^{2+}(A_2) = 0.0417$, $S^{2+}(A_3) = 0.0944$, $S^{2+}(A_6) = 0.1288$, $S^{2+}(A_7) = 0.0448$ 和 $S^{2-}(A_1) = 0.0837$, $S^{2-}(A_2) = 0.0968$, $S^{2-}(A_3) = 0.0411$, $S^{2-}(A_6) = 0.0189$, $S^{2-}(A_7) = 0.1001$。最后，通过公式（10）计算各备选供应商的净流值，分别为 $S^2(A_1) = -0.0528$, $S^2(A_2) = -0.0551$, $S^2(A_3) = 0.0534$, $S^2(A_6) = 0.1099$, $S^2(A_7) = -0.0553$。据此，得到各备选供应商的归一化净流值，分别为 $\tilde{S}^2(A_1) = 0.4736$, $\tilde{S}^2(A_2) = 0.4724$, $\tilde{S}^2(A_3) = 0.5267$, $\tilde{S}^2(A_6) = 0.5550$, $\tilde{S}^2(A_7) = 0.4723$。

步骤6. 多时期归一化净流值聚合。

对于备选供应商A_1 和A_3, , 需要执行额外操作以确定其动态归一化净流值，即将其与历史归一化净流值进行聚合。A_1 和A_3 的动态归一化~ ~净流值 $\tilde{S}^2(A_1)$以及 $\tilde{S}^2(A_3)$采用简单概率和计算如下：

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{S}}^2(A_1) &= \widetilde{S}^1(A_1) + \widetilde{S}^2(A_1) - \widetilde{S}^1(A_1) \times \widetilde{S}^2(A_1) \\ &= 0.4778 + 0.4736 - 0.4778 \times 0.4736 \\ &= 0.7251,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{S}}^2(A_3) &= \widetilde{S}^1(A_3) + \widetilde{S}^2(A_3) - \widetilde{S}^1(A_3) \times \widetilde{S}^2(A_3) \\ &= 0.5324 + 0.5267 - 0.5324 \times 0.5267 \\ &= 0.7787\end{aligned}$$

其中， $\tilde{S}^1(A_1)$ 和 $\tilde{S}^1(A_3)$ 分别表示第一时期 A_1 和 A_3 的动态归一化净流值。$\tilde{S}^2(A_1)$和 $\tilde{S}^2(A_3)$分别表示第二时期 A_1 和 A_3 的静态归一化净流值。

步骤7。备选方案排序和历史集合确定。

根据动态归一化净流值，可以得到五个备选供应商的排序，如下所示：$A_3 \succ A_1 \succ A_6 \succ A_2 \succ A_7$。根据保留规则，保留排名前 $K = 3$ 位的供应商进入下一时期，即 $\mathscr{H}^2 = \{A_1, A_3, A_5, A_6\}$。

P=3

在第三期，根据三个属性对六个备选供应商$\mathrm{A}^3 = \{\mathrm{A}_1^3, \mathrm{A}_2^3, \mathrm{A}_3^3, \mathrm{A}_5^3, \mathrm{A}_6^3, \mathrm{A}_7^3\}$ 进行评价。三个属性分别代表供应稳定性、产品质量和响应效率。属性权重为$\mathrm{w}^3 = (0.640, 0.115, 0.245)$，专家权重为 $\lambda^3 = (0.4, 0.2, 0.4)$。三位专家获得的评价信息列于表格A.3.1–A.3.3（见附录A.3）。步骤1–4的计算程序与上一时期中的相同。步骤1–4的计算程序与第一时期中的相同。相应的关系矩阵和优先度矩阵分别列于表格A.3.4和A.3.5中。备选方案A_i 和A_l 之间的总体优先度 φ_{il}^3显示于表5中。

表5：总体优先度矩阵

	A_1	A_2	A_3	A_5	A_6	A_7
A_1	–	0.0542	0.0364	0.0194	0.0204	0.0127
A_2	0.0467	–	0.0185	0.0164	0.0163	0.0853
A_3	0.1084	0.1135	–	0.0250	0.0121	0.1437
A_5	0.1026	0.1238	0.0296	–	0.0014	0.1343
A_6	0.1289	0.1639	0.0636	0.0424	–	0.1587
A_7	0.0509	0.0558	0.0457	0.0359	0.0267	–

步骤5. 计算归一化净流值。

根据表5所示的优先度矩阵，使用方程（8）–（10）计算各备选供应商的净流值。根据表4，通过方程（8）和（9）得到正流值和负流值，分别为 $\mathrm{S}^{3+}(\mathrm{A}_1) = 0.0286$, $\mathrm{S}^{3+}(\mathrm{A}_2) = 0.0367$, $\mathrm{S}^{3+}(\mathrm{A}_3) = 0.0805$, $\mathrm{S}^{3+}(\mathrm{A}_5) = 0.0783$, $\mathrm{S}^{3+}(\mathrm{A}_6) = 0.1115$, $\mathrm{S}^{3+}(\mathrm{A}_7) = 0.0430$ and $\mathrm{S}^{3-}(\mathrm{A}_1) = 0.0875$, $\mathrm{S}^{3-}(\mathrm{A}_2) = 0.1022$, $\mathrm{S}^{3-}(\mathrm{A}_3) = 0.0388$, $\mathrm{S}^{3-}(\mathrm{A}_5) = 0.0278$, $\mathrm{S}^{3-}(\mathrm{A}_6) = 0.0154$, $\mathrm{S}^{3-}(\mathrm{A}_7) = 0.1070$。最后，通过公式（10）计算各备选供应商的净流值，分别为 $\mathrm{S}^3(\mathrm{A}_1) = -0.0589$, $\mathrm{S}^3(\mathrm{A}_2) = -0.0656$, $\mathrm{S}^3(\mathrm{A}_3) = 0.0418$, $\mathrm{S}^3(\mathrm{A}_5) = 0.0505$, $\mathrm{S}^3(\mathrm{A}_6) = 0.0961$, $\mathrm{S}^3(\mathrm{A}_7) = -0.0640$。据此，得到各备选供应商的归一化净流值，分别为 $\tilde{\mathrm{S}}^3(\mathrm{A}_1) = 0.4706$, $\tilde{\mathrm{S}}^3(\mathrm{A}_2) = 0.4672$, $\tilde{\mathrm{S}}^3(\mathrm{A}_3) = 0.5209$, $\tilde{\mathrm{S}}^3(\mathrm{A}_5) = 0.5253$, $\tilde{\mathrm{S}}^3(\mathrm{A}_6) = 0.5481$, $\tilde{\mathrm{S}}^3(\mathrm{A}_7) = 0.4680$。

步骤6。多时期归一化净流值聚合。

对于备选方供应商A_1, A_3, A_5 ， 以及A_6, 还需要额外一步来确定其动态 ic

归一化净流值，即通过与历史值进行聚合。动态归一化净流值$\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim\widetilde{S}^3(A_1)$、$\widetilde{S}^3(A_3)$、$\widetilde{S}^3(A_5)$和$\widetilde{S}^3(A_6)$使用简单概率和计算如下：

$$\begin{aligned}
\widetilde{\widetilde{S}}^3(A_1) &= \widetilde{S}^3(A_1) + \widetilde{S}^2(A_1) - \widetilde{S}^3(A_1) \times \widetilde{S}^2(A_1) \\
&= 0.4706 + 0.7251 - 0.4706 \times 0.7251 \\
&= 0.8545, \\
\widetilde{\widetilde{S}}^3(A_3) &= \widetilde{S}^3(A_3) + S^2(A_3) - \widetilde{S}^3(A_3) \times S^2(A_3) \\
&= 0.5209 + 0.7787 - 0.5209 \times 0.7787 \\
&= 0.8940, \\
\widetilde{\widetilde{S}}^3(A_5) &= \widetilde{S}^3(A_5) + S^2(A_5) - \widetilde{S}^3(A_5) \times S^2(A_5) \\
&= 0.5253 + 0.5361 - 0.5253 \times 0.5361 \\
&= 0.7798, \\
\widetilde{\widetilde{S}}^3(A_6) &= \widetilde{S}^3(A_6) + S^2(A_6) - \widetilde{S}^3(A_6) \times S^2(A_6) \\
&= 0.5481 + 0.5550 - 0.5481 \times 0.5550 \\
&= 0.7989.
\end{aligned}$$

步骤7. 备选方案排序与历史集选择。

根据动态归一化净流值，六家供应商的排序结果为$A_3 \succ A_1 \succ A_6 \succ A_5 \succ A_7 \succ A_2$,，最优供应商为$A_3$。根据数值示例的设置，决策过程至此完成。

5 比较分析

为展示所提出的DSMAGDM方法在实践中的效果，我们从两个角度进行考察：一方面，将分数阶准则与基于其他随机占优准则的方法进行比较；另一方面，将该方法与静态SMAGDM模型进行比较。

5.1 与基于其他随机占优准则的方法的比较

本小节考察采用不同占优准则时供应商排序在多大程度上、以何种方式发生变化：将基于分数阶随机占优的方法与采用其他随机占优准则的方法进行比较，从而直观展现其优势。

（1）基于整数阶随机占优准则的方法得出的排序结果

当区间 $[0,1]$ 被划分为1个相等的部分时，分数阶随机占优退化为整数阶随机占优。在这种情况下，按照

第3.2节中介绍的基本决策步骤，采用整数阶随机占优准则和第p（$p=1$，2、3）时期的备选供应商排序结果-阶（$1+\gamma$-阶（$\gamma=k/4$，$k=0$，1，2、3、4）随机占优准则所得结果见表格6。两个准则均嵌入同一动态决策过程中，唯一的区别在于所采用的随机占优准则。

表6：各随机占优准则下备选供应商的排序

占优准则	供应商排名		
	$p=1$	$p=2$	$p=3$
$1+k/4$阶随机占优准则	$A_5 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2$	$A_3 \succ A_1 \succ A_6 \succ A_2 \succ A_7$	$A_3 \succ A_1 \succ A_6 \succ A_5 \succ A_7 \succ A_2$
整数阶随机占优准则	$A_3 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1$	$A_3 \succ A_6 \succ A_7 \succ A_2 \succ A_1$	$A_3 \succ A_6 \succ A_5 \succ A_7 \succ A_2 \succ A_1$

从表6可以看出，两种准则在三个时期所得的排序结果均不相同。第一时期，在（$1+k/4$）阶随机占优准则下，最优供应商为 A_5；而在整数阶随机占优准则下，最优供应商为 A_3 。与此同时，供应商 A_1 在前一种准则下排名第三，但在后一种准则下跌至末位。第二时期，两种准则均将 A_3 确定为最优供应商，但其余排序结果差异显著：第一时期表现良好的供应商 A_1, 在（$1+k/4$）阶准则下仍排名第二，而在整数阶准则下排名末位；相反，供应商 A_7 在分数阶准则下排名末位，却在整数阶准则下排名第三。第三时期，两种准则再次选出 A_3 作为最优供应商；供应商 A_1 在（$1+k/4$）阶准则下保持第二名，但在整数阶准则下仍排名最末。

这些差异是因为整数阶随机占优准则仅利用一阶和二阶信息，并将所有占优关系一视同仁，从而舍弃了介于一阶和二阶之间的关系。相比之下，$(1+k/4)$阶随机占优准则充分捕捉了一阶和二阶之间的占优关系，因此能够充分利用分数阶优势关系所蕴含的强度信息。因此，分数阶准则得出的排序在各时期之间变化更加平稳（例如，排名前三的供应商A_3, A_1 和A_6 在第二期和第三期保持不变，且A_1 始终稳居第二位），这使得在动态决策过程中累积的历史评价更加可靠。这表明，与整数阶方法相比，分数阶随机占优方法能够更精细地区分备选供应商。

（2）基于不同分数阶随机占优准则的方法所得的排序结果

将区间 $[0,1]$ 划分为不同数量的等分，可得到不同的分数阶随机占优准则。按照第3.2节所述的基本决策步骤，我们采用 $1+\gamma$阶（$\gamma=k/h$）随机占优准则，对各时期的备选供应商进行排序，见表7

报告结果。

表7：各随机占优准则下备选供应商的排序

占优准则	供应商排名		
	$p=1$	$p=2$	$p=3$
$1+k/2$阶随机占优准则	$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2$	$A_3 \succ A_6 \succ A_7 \succ A_2 \succ A_1$	$A_3 \succ A_6 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_7 \succ A_2$
$1+k/8$阶随机占优准则	$A_5 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$	$A_3 \succ A_1 \succ A_6 \succ A_2 \succ A_7$	$A_3 \succ A_1 \succ A_6 \succ A_5 \succ A_7 \succ A_2$
$1+k/16$阶随机占优准则	$A_5 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$	$A_3 \succ A_1 \succ A_6 \succ A_2 \succ A_7$	$A_3 \succ A_1 \succ A_6 \succ A_5 \succ A_7 \succ A_2$

从表7可以看出，在第一时期，按照全部三种分数阶随机占优准则，最优供应商均为A_5，这与第4节采用（$1+k/4$）阶准则时的结果相同；不过，其余供应商的排序有所不同：按照（$1+k/2$）阶准则，排序为$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2$,；而按照（$1+k/8$）阶和（$1+k/16$）阶准则，排序则为$A_5 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$。在第二时期，按照所有准则，最优供应商均为$A_3$。按照（$1+k/2$）阶准则，排序为$A_3 \succ A_6 \succ A_7 \succ A_2 \succ A_1$,；而按照（$1+k/8$）阶和（$1+k/16$）阶准则，在第一时期表现良好的供应商$A_1$, 排名第二，且排序与按照（$1+k/4$）阶准则所得结果一致。在第三时期，也可观察到类似情况：按照（$1+k/2$）阶准则，排序为$A_3 \succ A_6 \succ A_5 \succ A_7 \succ A_1 \succ A_2$,；而按照（$1+k/8$）阶和（$1+k/16$）阶准则，排序完全相同，均为$A_3 \succ A_1 \succ A_6 \succ A_5 \succ A_7 \succ A_2$,，且与按照（$1+k/4$）阶准则所得结果一致。

从表格 7的比较结果可以看出，随着区间 $[0,1]$ 被划分为更多等份，基于相应分数阶随机占优规则得出的排序结果逐渐趋于稳定：在三个时期，$(1+k/8)$阶和 $(1+k/16)$阶准则得出的排序完全相同；与之相比，$(1+k/4)$阶准则仅在第一时期对最后两家供应商的排序上有所不同。此外，在所有分数阶规则下，第一时期的最优供应商始终是 A_5，第二和第三时期的最优供应商始终是 A_3。相比之下，较粗略的 $(1+k/2)$阶准则只能区分一阶、1.5阶和二阶之间的占优阶数，无法捕捉一阶与二阶之间占优关系的强度信息，因此得出的排序与更精细的规则有所偏差。这些比较表明，该方法在不同分数阶下表现稳定，适用于实际应用。

5.2 与静态随机多属性群决策模型的比较

为展示所提出的 DSMAGDM 方法在动态决策问题中的有效性，本文对静态 SMAGDM 与 DSMAGDM 进行了比较分析。为排除不同分数阶划分的影响，比较中采用了基于 $1+k/16$ 阶随机优势准则得到的结果。三个时期内备选方案的排序由

这两种方法列于表格8。

表8：静态SMAGDM与DSMAGDM之间的排序结果

	静态排序	动态排序
第1期	$A_5 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$	$A_5 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$
第2期	$A_6 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_7$	$A_3 \succ A_1 \succ A_6 \succ A_2 \succ A_7$
第3期	$A_6 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_7 \succ A_2$	$A_3 \succ A_1 \succ A_6 \succ A_5 \succ A_7 \succ A_2$

从表8可以看出，在第一时期，静态和动态排序结果一致，均为 $A_5 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2$,，因为此时没有可用的历史集合，且每个备选方案仅根据其当前表现进行评价。在第二时期，静态排序 $A_6 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_7$ 与动态排序 $A_3 \succ A_1 \succ A_6 \succ A_2 \succ A_7$ 不同。对于不属于历史集合 $\mathscr{H}^1$ 的新备选方案 A_6 和 A_7,，其动态评价与静态评价一致。相比之下，A_1 和 A_3 属于 $\mathscr{H}^1$，其动态归一化净流值由第一时期的动态归一化净流值与第二时期的静态归一化净流值聚合而得。因此，A_3 超越 A_6，成为最优供应商，这体现了历史信息的作用。在时期 $p = 3$，静态排序 $A_6 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_7 \succ A_2$ 同样不同于动态排序 $A_3 \succ A_1 \succ A_6 \succ A_5 \succ A_7 \succ A_2$。备选方案 A_1, A_3 和 A_6 属于历史集合 $\mathscr{H}^2$，其动态归一化净流值通过聚合得到，而 A_2 和 A_7 的动态归一化净流值则与静态值一致。备选方案 A_5 在这一时期重新进入备选方案集；由于其评价结果已保存在历史集合中，其动态归一化净流值由该保存的评价结果与第三时期的静态归一化净流值聚合而得。两种排序之间的差异体现了动态机制所发挥的作用。

6 结论

本文提出了一种基于分数阶随机占优准则的 DSMAGDM 方法。将整数阶框架扩展至分数阶，可识别并量化整数阶准则无法区分的一阶与二阶之间的占优关系。特别是，本文重新定义了分数阶占优关系的优先度，使每种关系的强度都依据其自身阶数进行衡量，而非一概而论。通过历史集合和反馈算子将当前时期的评价与历史信息相结合，动态排序会随时期推移而变化；当分数阶划分足够精细时，排序变化很小。

本研究有两项贡献。首先，将分数阶随机占优融入动态群体决策框架，以处理随时间变化的不确定信息。其次，历史集机制能够刻画备选方案的表现如何演变，适用于供应商选择、项目评估和战略决策。

现有方法假设决策信息逐步演变，未考虑决策环境中的突变。

未来的研究可以从三个方向拓展这一框架：将分数阶随机占优规则与模糊或犹豫模糊信息相结合，以处理更复杂的不确定性；将突发性环境变化纳入动态机制；以及在规模更大的真实世界数据集上检验该方法。因此，该方法具有实用性和可靠性，能够为复杂的动态多属性问题提供可靠的决策支持。

致谢

作者感谢国家自然科学基金委员会（资助项目编号：72271113、12661104）和江西省自然科学基金（资助项目编号：20232ACB201003、20232BAB201022）的支持。所有作者共同为第一作者，但按照字母顺序排列。

附录

A 补充表格

A.1 第一时期

表格 A.1.1：T 备选供应商的属性评价结果的概率分布。(e=1)

备选方案	评级	C_1	C_2	C_3	备选方案	评级	C_1	C_2	C_3
A_1	1	0.291	0.198	0.133	A_4	1	0.234	0.178	0.231
	2	0.126	0.135	0.193		2	0.224	0.443	0.072
	3	0.120	0.293	0.299		3	0.500	0.004	0.323
	4	0.184	0.248	0.250		4	0.023	0.170	0.256
	5	0.279	0.126	0.125		5	0.019	0.205	0.118
A_2	1	0.139	0.210	0.113	A_5	1	0.087	0.148	0.235
	2	0.294	0.394	0.249		2	0.199	0.406	0.297
	3	0.430	0.021	0.263		3	0.371	0.071	0.093
	4	0.040	0.174	0.240		4	0.147	0.188	0.194
	5	0.097	0.201	0.135		5	0.196	0.187	0.181
A_3	1	0.046	0.234	0.083					
	2	0.178	0.091	0.446					
	3	0.353	0.300	0.097					
	4	0.323	0.250	0.195					
	5	0.100	0.125	0.179					

表 A.1.2：备选供应商的属性评价结果的概率分布。(e=2)

备选方案评级		C_1	C_2	C_3	备选方案评级		C_1	C_2	C_3
A_1	1	0.130	0.413	0.004	A_4	1	0.003	0.208	0.331
	2	0.279	0.004	0.303		2	0.289	0.464	0.006
	3	0.060	0.340	0.319		3	0.444	0.010	0.397
	4	0.360	0.123	0.343		4	0.200	0.005	0.240
	5	0.171	0.120	0.031		5	0.064	0.313	0.026
A_2	1	0.231	0.160	0.141	A_5	1	0.100	0.127	0.216
	2	0.087	0.388	0.187		2	0.212	0.492	0.397
	3	0.516	0.188	0.366		3	0.410	0.005	0.003
	4	0.005	0.004	0.216		4	0.150	0.319	0.156
	5	0.161	0.260	0.090		5	0.128	0.057	0.228
A_3	1	0.262	0.171	0.030					
	2	0.315	0.244	0.580					
	3	0.181	0.279	0.035					
	4	0.240	0.300	0.190					
	5	0.002	0.006	0.165					

表 A.1.3：备选供应商的属性评价结果概率分布。(e=3)

备选方案评级		C_1	C_2	C_3	备选方案评级		C_1	C_2	C_3
A_1	1	0.323	0.319	0.145	A_4	1	0.171	0.290	0.146
	2	0.223	0.003	0.295		2	0.211	0.388	0.004
	3	0.191	0.339	0.291		3	0.475	0.003	0.413
	4	0.053	0.132	0.264		4	0.106	0.177	0.297
	5	0.210	0.207	0.005		5	0.037	0.142	0.140
A_2	1	0.060	0.266	0.436	A_5	1	0.027	0.077	0.351
	2	0.348	0.294	0.298		2	0.131	0.251	0.220
	3	0.286	0.128	0.176		3	0.469	0.034	0.005
	4	0.004	0.272	0.081		4	0.296	0.422	0.106
	5	0.302	0.040	0.009		5	0.077	0.216	0.318
A_3	1	0.003	0.124	0.206					
	2	0.252	0.173	0.389					
	3	0.266	0.208	0.026					
	4	0.389	0.390	0.221					
	5	0.090	0.105	0.158					

Table A.1.4: Stochastic Dominance Relation Matrix for Alternative Suppliers.(P=1)

Expert		**Attribute** C_1					**Attribute** C_2					**Attribute** C_3				
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	A_1	-	-	-	-	-	-	1.5SD	1.25SD	-	-	-	-	-	1.25SD	1.25SD
	A_2	-	-	-	FSD	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.5SD	1.25SD
e_1	A_3	1.5SD	FSD	-	FSD	1.75SD	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.25SD
	A_4	-	-	-	-	-	-	1.75SD	-	-	-	-	-	-	-	1.5SD
	A_5	1.75SD	FSD	-	FSD	-	-	1.25SD	-	1.25SD	-	-	-	-	-	-
	A_1	-	SSD	FSD	-	-	-	-	-	-	-	-	1.5SD	1.5SD	FSD	1.5SD
	A_2	-	-	1.5SD	-	-	1.75SD	-	-	1.75SD	-	-	-	-	FSD	1.75SD
e_2	A_3	-	-	-	-	-	1.5SD	-	-	-	-	-	-	-	SSD	1.5SD
	A_4	-	1.5SD	FSD	-	1.75SD	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	A_5	-	1.25SD	FSD	-	-	1.75SD	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	A_1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.25SD	-	-	-
	A_2	FSD	-	-	1.25SD	-	-	-	-	SSD	-	-	-	-	-	-
e_3	A_3	1.25SD	1.75SD	-	FSD	-	1.5SD	FSD	-	1.25SD	-	-	FSD	-	-	-
	A_4	SSD	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	FSD	1.25SD	-	1.5SD
	A_5	1.25SD	1.75SD	-	FSD	-	1.25SD	FSD	1.75SD	FSD	-	-	-	-	-	-

Table A.1.5: The Priority Degree Matrix for Alternative Suppliers.(P=1)

Expert		**Attribute** C_1					**Attribute** C_2					**Attribute** C_3				
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
e_1	A_1	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0977	0.0121	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0344	0.1029
	A_2	0.0000	-	0.0000	0.1101	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0385	0.1006
	A_3	0.1385	0.1817	-	0.2717	0.0627	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0675
	A_4	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0167	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0853
	A_5	0.1198	0.1592	0.0000	0.2517	-	0.0000	0.0422	0.0000	0.0324	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-
e_2	A_1	-	0.1272	0.2396	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0886	0.1048	0.1519	0.1745
	A_2	0.0000	-	0.1448	0.0000	0.0000	0.1311	-	0.0000	0.0473	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.1035	0.1194
	A_3	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.1214	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.1281	0.0797
	A_4	0.0000	0.1314	0.2071	-	0.0593	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000
	A_5	0.0000	0.0822	0.1967	0.0000	-	0.1218	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-
e_3	A_1	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.2970	0.0000	0.0000	0.0000
	A_2	0.1707	-	0.0000	0.1564	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0555	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000
	A_3	0.2507	0.1119	-	0.2066	0.0000	0.1298	0.2054	-	0.2401	0.0000	0.0000	0.2950	-	0.0000	0.0000
	A_4	0.1498	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.4121	0.1902	-	0.2160
	A_5	0.2432	0.1118	0.0000	0.1954	-	0.1796	0.2676	0.0847	0.2772	-	0.0000	0.3160	0.0000	0.0000	-

A.2 第二周期

表 A.2.1：备选供应商属性评价结果的概率分布。(e=1)

备选方案评级		C_1	C_2	C_3	备选方案评级		C_1	C_2	C_3
A_1	1	0.291	0.198	0.133	A_6	1	0.004	0.097	0.259
	2	0.126	0.135	0.193		2	0.219	0.271	0.243
	3	0.120	0.293	0.299		3	0.320	0.051	0.081
	4	0.184	0.248	0.250		4	0.170	0.318	0.241
	5	0.279	0.126	0.125		5	0.287	0.263	0.176
A_2	1	0.139	0.210	0.113	A_7	1	0.247	0.181	0.224
	2	0.294	0.394	0.249		2	0.229	0.430	0.084
	3	0.430	0.021	0.263		3	0.476	0.005	0.318
	4	0.040	0.174	0.240		4	0.005	0.196	0.262
	5	0.097	0.201	0.135		5	0.043	0.188	0.112
A_3	1	0.046	0.234	0.083					
	2	0.178	0.091	0.446					
	3	0.353	0.300	0.097					
	4	0.323	0.250	0.195					
	5	0.100	0.125	0.179					

表 A.2.2：T he 备选供应商属性评价结果的概率分布。(e=2)

备选方案评级		C_1	C_2	C_3	备选方案评级		C_1	C_2	C_3
A_1	1	0.130	0.413	0.004	A_6	1	0.036	0.196	0.219
	2	0.279	0.004	0.303		2	0.202	0.345	0.409
	3	0.060	0.340	0.319		3	0.430	0.107	0.004
	4	0.360	0.123	0.343		4	0.205	0.348	0.177
	5	0.171	0.120	0.031		5	0.127	0.004	0.191
A_2	1	0.231	0.160	0.141	A_7	1	0.005	0.209	0.360
	2	0.087	0.388	0.187		2	0.276	0.441	0.022
	3	0.516	0.188	0.366		3	0.438	0.013	0.389
	4	0.005	0.004	0.216		4	0.206	0.018	0.209
	5	0.161	0.260	0.090		5	0.075	0.319	0.020
A_3	1	0.262	0.171	0.030					
	2	0.315	0.244	0.580					
	3	0.181	0.279	0.035					
	4	0.240	0.300	0.190					
	5	0.002	0.006	0.165					

表 A.2.3：Th e 备选供应商的属性评价结果的概率分布。(e=3)

备选方案评级		C_1	C_2	C_3	备选方案评级		C_1	C_2	C_3
A_1	1	0.323	0.319	0.145	A_6	1	0.004	0.005	0.297
	2	0.223	0.003	0.295		2	0.224	0.242	0.278
	3	0.191	0.339	0.291		3	0.405	0.088	0.053
	4	0.053	0.132	0.264		4	0.317	0.392	0.036
	5	0.210	0.207	0.005		5	0.050	0.273	0.336
A_2	1	0.060	0.266	0.436	A_7	1	0.182	0.302	0.143
	2	0.348	0.294	0.298		2	0.217	0.376	0.016
	3	0.286	0.128	0.176		3	0.480	0.038	0.407
	4	0.004	0.272	0.081		4	0.054	0.201	0.313
	5	0.302	0.040	0.009		5	0.067	0.083	0.121
A_3	1	0.003	0.124	0.206					
	2	0.252	0.173	0.389					
	3	0.266	0.208	0.026					
	4	0.389	0.390	0.221					
	5	0.090	0.105	0.158					

Table A.2.4: Stochastic Dominance Relation Matrix for Alternative Suppliers.(P=2)

Expert		**Attribute** C_1					**Attribute** C_2					**Attribute** C_3				
		A_1	A_2	A_3	A_6	A_7	A_1	A_2	A_3	A_6	A_7	A_1	A_2	A_3	A_6	A_7
	A_1	-	-	-	-	-	-	1.5SD	1.25SD	-	-	-	-	-	1.5SD	1.25SD
	A_2	-	-	-	-	FSD	-	-	-	-	-	-	-	-	1.5SD	1.5SD
e_1	A_3	1.5SD	FSD	-	-	FSD	-	-	-	-	-	-	-	-	1.5SD	-
	A_6	1.25SD	FSD	FSD	-	FSD	1.5SD	FSD	1.5SD	-	FSD	-	-	-	-	-
	A_7	-	-	-	-	-	-	1.75SD	-	-	-	-	-	-	1.5SD	-
	A_1	-	SSD	FSD	-	-	-	-	-	-	-	-	1.5SD	1.5SD	1.5SD	FSD
	A_2	-	-	1.5SD	-	-	1.75SD	-	-	-	SSD	-	-	-	1.5SD	FSD
e_2	A_3	-	-	-	-	-	1.5SD	-	-	1.5SD	-	-	-	-	1.25SD	1.75SD
	A_6	SSD	1.25SD	FSD	-	-	1.75SD	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	A_7	-	1.25SD	FSD	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	A_1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.25SD	-	-	-
	A_2	FSD	-	-	-	1.25SD	-	-	-	-	1.25SD	-	-	-	-	-
e_3	A_3	1.25SD	1.75SD	-	-	FSD	1.5SD	FSD	-	-	FSD	-	FSD	-	-	-
	A_6	1.25SD	SSD	-	-	1.25SD	FSD	FSD	FSD	-	FSD	-	FSD	-	-	-
	A_7	SSD	-	-	-	-	-	-	-	-	-	FSD	FSD	1.25SD	1.5SD	-

Table A.2.5: The Priority Degree Matrix for Alternative Suppliers. (P=2)

Expert		**Attribute** C_1					**Attribute** C_2					**Attribute** C_3				
		A_1	A_2	A_3	A_6	A_7	A_1	A_2	A_3	A_6	A_7	A_1	A_2	A_3	A_6	A_7
e_1	A_1	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0977	0.0121	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.1106	0.0351
	A_2	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.1104	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.1080	0.0387
	A_3	0.1385	0.1817	-	0.0000	0.2721	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0706	0.0000
	A_6	0.1681	0.2431	0.0751	-	0.3267	0.1327	0.1826	0.1455	-	0.1773	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000
	A_7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0177	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0725	-
e_2	A_1	-	0.1272	0.2396	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0886	0.1048	0.1943	0.1897
	A_2	0.0000	-	0.1448	0.0000	0.0000	0.1311	-	0.0000	0.0000	0.0409	0.0000	-	0.0000	0.1177	0.1435
	A_3	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.1214	0.0000	-	0.0531	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0800	0.1666
	A_6	0.0830	0.1458	0.2449	-	0.0000	0.0927	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000
	A_7	0.0000	0.1178	0.2166	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-
e_3	A_1	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.2970	0.0000	0.0000	0.0000
	A_2	0.1707	-	0.0000	0.0000	0.1655	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0621	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000
	A_3	0.2507	0.1119	-	0.0000	0.2126	0.1298	0.2054	-	0.0000	0.2491	0.0000	0.2950	-	0.0000	0.0000
	A_6	0.2237	0.1124	0.0000	-	0.1981	0.2119	0.3147	0.1375	-	0.3524	0.0000	0.3198	0.0000	-	0.0000
	A_7	0.1326	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.1734	0.4070	0.1836	0.2000	-

A.3 第三时期

表格 A.3.1：备选供应商的属性评价结果的概率分布。(e=1)

备选方案评级		C_1	C_2	C_3	备选方案评级		C_1	C_2	C_3
A_1	1	0.291	0.198	0.133	A_5	1	0.080	0.130	0.242
	2	0.126	0.135	0.193		2	0.196	0.415	0.299
	3	0.120	0.293	0.299		3	0.390	0.073	0.088
	4	0.184	0.248	0.250		4	0.133	0.199	0.198
	5	0.279	0.126	0.125		5	0.201	0.183	0.173
A_2	1	0.139	0.210	0.113	A_6	1	0.004	0.097	0.259
	2	0.294	0.394	0.249		2	0.219	0.271	0.243
	3	0.430	0.021	0.263		3	0.320	0.051	0.081
	4	0.040	0.174	0.240		4	0.170	0.318	0.241
	5	0.097	0.201	0.135		5	0.287	0.263	0.176
A_3	1	0.046	0.234	0.083	A_7	1	0.247	0.181	0.224
	2	0.178	0.091	0.446		2	0.229	0.430	0.084
	3	0.353	0.300	0.097		3	0.476	0.005	0.318
	4	0.323	0.250	0.195		4	0.005	0.196	0.262
	5	0.100	0.125	0.179		5	0.043	0.188	0.112

表格 A.3.2：T 备选供应商的属性评价结果概率分布。(e=2)

备选方案评级		C_1	C_2	C_3	备选方案评级		C_1	C_2	C_3
A_1	1	0.130	0.413	0.004	A_5	1	0.095	0.129	0.209
	2	0.279	0.004	0.303		2	0.214	0.493	0.403
	3	0.060	0.340	0.319		3	0.404	0.006	0.005
	4	0.360	0.123	0.343		4	0.144	0.318	0.155
	5	0.171	0.120	0.031		5	0.143	0.054	0.228
A_2	1	0.231	0.160	0.141	A_6	1	0.036	0.196	0.219
	2	0.087	0.388	0.187		2	0.202	0.345	0.409
	3	0.516	0.188	0.366		3	0.430	0.107	0.004
	4	0.005	0.004	0.216		4	0.205	0.348	0.177
	5	0.161	0.260	0.090		5	0.127	0.004	0.191
A_3	1	0.262	0.171	0.030	A_7	1	0.005	0.209	0.360
	2	0.315	0.244	0.580		2	0.276	0.441	0.022
	3	0.181	0.279	0.035		3	0.438	0.013	0.389
	4	0.240	0.300	0.190		4	0.206	0.018	0.209
	5	0.002	0.006	0.165		5	0.075	0.319	0.020

表 A.3.3：概　率分布：备选供应商的属性评价结果。(e=3)

备选方案评级		C_1	C_2	C_3	备选方案评级		C_1	C_2	C_3
A_1	1	0.323	0.319	0.145	A_5	1	0.042	0.075	0.352
	2	0.223	0.003	0.295		2	0.127	0.258	0.215
	3	0.191	0.339	0.291		3	0.457	0.053	0.005
	4	0.053	0.132	0.264		4	0.310	0.416	0.111
	5	0.210	0.207	0.005		5	0.064	0.198	0.317
A_2	1	0.060	0.266	0.436	A_6	1	0.004	0.005	0.297
	2	0.348	0.294	0.298		2	0.224	0.242	0.278
	3	0.286	0.128	0.176		3	0.405	0.088	0.053
	4	0.004	0.272	0.081		4	0.317	0.392	0.036
	5	0.302	0.040	0.009		5	0.050	0.273	0.336
A_3	1	0.003	0.124	0.206	A_7	1	0.182	0.302	0.143
	2	0.252	0.173	0.389		2	0.217	0.376	0.016
	3	0.266	0.208	0.026		3	0.480	0.038	0.407
	4	0.389	0.390	0.221		4	0.054	0.201	0.313
	5	0.090	0.105	0.158		5	0.067	0.083	0.121

Table A.3.4: Stochastic Dominance Relation Matrix for Alternative Suppliers.(P=3)

Expert		**Attribute** C_1						**Attribute** C_2						**Attribute** C_3					
		A_1	A_2	A_3	A_5	A_6	A_7	A_1	A_2	A_3	A_5	A_6	A_7	A_1	A_2	A_3	A_5	A_6	A_7
e_1	A_1	-	-	-	-	-	-	-	1.5SD	1.25SD	-	-	-	-	-	-	1.25SD	1.5SD	1.25SD
	A_2	-	-	-	-	-	FSD	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.25SD	1.5SD	1.5SD
	A_3	1.5SD	FSD	-	1.75SD	-	FSD	-	-	-	-	-	-	-	-	-	FSD	1.5SD	-
	A_5	1.75SD	FSD	-	-	-	FSD	-	1.25SD	-	-	-	1.25SD	-	-	-	-	-	-
	A_6	1.25SD	FSD	FSD	FSD	-	FSD	1.5SD	FSD	1.5SD	FSD	-	FSD	-	-	-	-	-	-
	A_7	-	-	-	-	-	-	-	1.75SD	-	-	-	-	-	-	-	1.25SD	1.5SD	-
e_2	A_1	-	SSD	FSD	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.5SD	1.5SD	1.5SD	1.5SD	FSD
	A_2	-	-	1.5SD	-	-	-	1.75SD	-	-	-	-	SSD	-	-	-	1.75SD	1.5SD	FSD
	A_3	-	-	-	-	-	-	1.5SD	-	-	-	1.5SD	-	-	-	-	1.75SD	1.25SD	1.75SD
	A_5	-	1.25SD	FSD	-	-	-	1.75SD	-	-	-	-	-	-	-	-	-	FSD	-
	A_6	SSD	1.25SD	FSD	1.25SD	-	-	1.75SD	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	A_7	-	1.25SD	FSD	1.75SD	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
e_3	A_1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.25SD	-	-	-	-
	A_2	FSD	-	-	-	-	1.25SD	-	-	-	-	-	1.25SD	-	-	-	-	-	-
	A_3	1.25SD	1.75SD	-	-	-	FSD	1.5SD	FSD	-	-	-	FSD	-	FSD	-	-	-	-
	A_5	1.25SD	1.75SD	-	-	-	1.25SD	1.25SD	FSD	1.75SD	-	-	FSD	-	FSD	-	-	-	-
	A_6	1.25SD	SSD	-	-	-	1.25SD	FSD	FSD	FSD	FSD	-	FSD	-	FSD	-	-	-	-
	A_7	SSD	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	FSD	FSD	1.25SD	1.5SD	1.5SD	-

Table A.3.5: The Priority Degree Matrix for Alternative Suppliers. (P=3)

Expert		**Attribute C_1**						**Attribute C_2**						**Attribute C_3**					
		A_1	A_2	A_3	A_5	A_6	A_7	A_1	A_2	A_3	A_5	A_6	A_7	A_1	A_2	A_3	A_5	A_6	A_7
e_1	A_1	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0977	0.0121	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.1124	0.1106	0.0351
	A_2	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.1104	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.1102	0.1080	0.0387
	A_3	0.1385	0.1817	-	0.0553	0.0000	0.2721	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0612	0.0706	0.0000
	A_5	0.1267	0.1626	0.0000	-	0.0000	0.2551	0.0000	0.0544	0.0000	-	0.0000	0.0447	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000
	A_6	0.1681	0.2431	0.0751	0.0961	-	0.3267	0.1327	0.1826	0.1455	0.1447	-	0.1773	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000
	A_7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0177	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0804	0.0725	-
e_2	A_1	-	0.1272	0.2396	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0886	0.1048	0.1712	0.1943	0.1897
	A_2	0.0000	-	0.1448	0.0000	0.0000	0.0000	0.1311	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0409	0.0000	-	0.0000	0.1152	0.1177	0.1435
	A_3	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.1214	0.0000	-	0.0000	0.0531	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0984	0.0800	0.1666
	A_5	0.0000	0.0916	0.2052	-	0.0000	0.0000	0.1179	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0280	0.0000
	A_6	0.0830	0.1458	0.2449	0.0599	-	0.0000	0.0927	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000
	A_7	0.0000	0.1178	0.2166	0.0592	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-
e_3	A_1	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.2970	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	A_2	0.1707	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.1655	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0621	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	A_3	0.2507	0.1119	-	0.0000	0.0000	0.2126	0.1298	0.2054	-	0.0000	0.0000	0.2491	0.0000	0.2950	-	0.0000	0.0000	0.0000
	A_5	0.2333	0.0976	0.0000	-	0.0000	0.2079	0.1684	0.2579	0.0715	-	0.0000	0.2988	0.0000	0.3174	0.0000	-	0.0000	0.0000
	A_6	0.2237	0.1124	0.0000	0.0000	-	0.1981	0.2119	0.3147	0.1375	0.0765	-	0.3524	0.0000	0.3198	0.0000	0.0000	-	0.0000
	A_7	0.1326	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	0.1734	0.4070	0.1836	0.2081	0.2000	-

参考文献

[1] X.-C. Dai、H. Li、L.-G. Zhou、Q. Wu，在信念分布环境下不确定多属性群体决策问题的随机共识，《应用软计算》168（2025年）。[2] X.-C. Dai、H. Li、L.-G. Zhou，基于加权相似度量和后悔理论的信念分布多属性决策问题新方法，《专家系统及其应用》243（2024年）13。[3] F. Ahemad、P. Gupta、M. K. Mehlawat、R. Krishankumar、W. Pedrycz，一种采用区间值q-圆正交对模糊数据进行多属性群体决策的综合方法，《应用软计算》193（2026年）114771。[4] J. Qi、J. Hu、Y.-H. Peng，在异构信息参与的多准则群体设计评价中融合Z数和语言D数，《信息科学》699（2025年）。

[5] Y.-J. Zhou、M. Zhou、J.-B. Yang、B.-Y. Cheng、J. Wu，面向多属性群体决策的分散式多方共识模型：用户体验导向视角，《Expert Systems with Applications》287 (2025年) 127917。

[6] J.-J. Wang、X.-N. Li、J.-M. Zhan、H.-J. Yi，基于动态三支决策模型和后悔理论的区间值信息融合，《Information Fusion》124 (2025年) 103364。

[7] J.-L. Xiao、X.-X. Wang、Y. Gao、Z.-S. Xu，基于核密度估计的不完整概率语言多属性群体决策中的概率补全与共识达成，《信息科学》715 (2025年)。

[8] Y.-Z. Xu、S.-L. Yan、I. J. Pérez、F. J. Cabrerizo，基于语言Z数的量子群体共识模型及其在气象灾害应急中的应用，《信息科学》700 (2025年)。

[9] X.-D. Wang, Z.-S. Xu，基于未知概率密度函数的机会约束随机多属性决策分布鲁棒优化方法，《Expert Systems with Applications》264 (2025年)。

[10] B. S. C. Campello, S. Benamor, L. T. Duarte, J. M. T. Romano，改进多准则决策中的偏好分解：结合时间序列分析和多目标方法，《Information Sciences》700 (2025年)。

[11] Y.-J. Li, M.-Z. Guo, M. Kadzi´nski, Q.-P. Zhang, C.-X. Xu，面向多个时间准则排序问题的数据驱动偏好学习方法，《欧洲运筹学杂志》323 (2025年) 918–937。

[12] R. Cheng, J.-P. Fan, M.-Q. Wu，基于 r-数、MEREC 和 COCOSO 方法的动态多属性群体决策方法，《复杂与智能系统》(2023年) 1–34。[13] F. Teng, C.-T. Du, M.-J. Shen, P.-D. Liu，基于信任关系和意见相关性的概率语言术语集动态大规模多属性群体决策方法，《信息科学》(2022年)。[14] J.-H. Xie, Z.-Y. Zhou，多属性效用函数的拼接构造，《决策分析》19 (2022年) 141–169。[15] X. H. Chen, H. Li, C. Q. Tan，考虑多样化心理行为偏好的混合随机多属性决策，《系统工程理论与实践》38卷 (2018年) 1545–1556。[16] A. Müller, M. Scarsini, I. Tsetlin, R. L. Winkler，一阶与二阶随机占优之间，《管理科学》63卷 (2017年)。[17] R. J. Huang, L. Y. Tzeng, L. Zhao，分数阶随机占优，《管理科学》(2019年)。即将出版。[18] J.-H. Xie, W. Zou，对数正态前景的渐近分数阶随机占优，《决策分析》23卷 (2026年) 114–128。[19] T.-T. Mao, R.-D. Wang, L. Zhao，通过不变性定律刻画分数阶随机占优，《决策分析》23卷 (2026年) 149–171。[20] M. Leshno, H. Levy，受到“所有”与“大多数”决策者青睐：近似随机占优，《管理科学》48卷 (2002年) 1074–1085。[21] G.-T. Jiang, Z.-P. Fan, Y. Liu，一种基于随机占优和近似随机占优规则的随机多属性决策方法及其在在线购买决策中的应用，《认知计算》11卷 (2019年) 87–100。[22] G. Campanella, R. A. Ribeiro，动态多准则决策框架，《决策支持系统》52卷 (2011年) 52–60。[23] J.-H. Hu, L. Yang，基于累积前景理论和集对分析的动态随机多准则决策方法，《系统工程学报》1卷 (2011年) 432–439。[24] Y. Zhang, Z.-P. Fan, Y. Liu，一种基于随机占优度的随机多准则决策方法，《计算机与工业工程》58卷 (2010 年) 544–552。[25] C.-L. Luo, P. Chen, P. Jaillet，基于近似二阶随机占优的投资组合优化，《管理科学》71卷 (2025年)。

[26] R. Tao、Z.-Y. Liu、R. Cai、K. H. Cheong，基于直觉模糊集的动态群体多准则决策模型：替代排队法视角，《信息科学》555（2021）85–103。