arXiv:2611.32492v1 [math.CA] 24 Nov 2026

混合 Hermite–Laguerre–Jacobi 半群的极大算子

ADAM NOWAK

Abstract. 我们研究与一组正交系相关的热扩散半群，该正交系由经典 Hermite、Laguerre 和雅可比多项式的任意有限个张量积构成。我们的主要结果是相应极大算子的弱型 (1，1) 估计。这意味着对于所有相对于正交测度可积的初始条件，该半群逐点几乎处处收敛到初始值。

1. Introduction

正交展开的调和分析如今被视为调和分析中的一个经典分支。它由 Muckenhoupt 和 E.M. Stein 的开创性工作发端 [11]。过去 60 年来，这一广阔的研究领域已在世界各地得到深入探索。在这一理论中，一类称为经典正交多项式的多项式占据重要地位，即 *Hermite*、*Laguerre* 和雅可比多项式 （例如参见 [22]）。在一维情形下，与这些展开自然相关的测度空间分别为

$$\Big(\mathbb{R}, e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\Big), \qquad \Big([0,\infty), x^{\alpha}e^{-x}\,\mathrm{d}x\Big), \qquad \Big([-1,1], (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\mathrm{d}x\Big);$$

这里 α，$\beta > -1$ 是所谓的类型参数。注意，前两个是非倍增测度空间，而最后一个是倍增测度空间（这意味着具有可比半径的同心球具有可比测度）。多维情形可通过将一维多项式及其正交测度取乘积，以标准方式得到。

在这三个框架中，分别自然对应着如下算子对称扩散半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$：Hermite（Ornstein–Uhlenbeck）半群、Laguerre 半群和 Jacobi 半群。众所周知，参见例如 [2], ，在一维情形下，除仿射变换和时间重新标度外，这些是在区间上唯一的保守对称扩散半群；其生成元是二阶微分算子，在内部为椭圆型，并且具有由次数依次递增的多项式特征函数组成的完备正交基。这些半群同时也是 Ornstein–Uhlenbeck、Laguerre 和

2020 数学学科分类：主要类42B25；次要类42C10。关键词和短语：极大算子，弱型估计，热扩散半群，Hermite 半群，Laguerre 半群，Jacobi 半群，混合 Hermite–Laguerre–Jacobi 半群，经典正交展开，

埃尔米特展开，Laguerre 展开，雅可比展开，混合 Hermite–Laguerre–Jacobi 展开。本研究得到波兰国家科学中心项目 OPUS 2025/59/B/ST1/01786 的资助。本文的创作未使用任何 AI/LLM。

Jacobi随机扩散过程的转移半群；这些过程在数学、物理学及其他领域的理论与应用中都十分重要。

极大算子

$$T_* f = \sup_{t>0} |T_t f|$$

这三个半群的极大算子及其映射性质十分重要，因为例如，它们可直接推出这些半群在 $t \to 0^+$ 时的边界收敛结果。根据 Stein 极大定理[21, p. 73]，三个极大算子在 L^p 空间 $p > 1$ 上有界。另一方面，它们并非 L^1-有界。对于 L^1 函数而言，仍能推出边界收敛的自然替代性质是弱型 (1,1) 有界性；然而，这一性质的证明要困难得多。

关于 Ornstein–Uhlenbeck 半群极大算子的弱型 (1,1) 性质，一维情形由 Muckenhoupt [10] 证明，高维情形则由 Sj¨ogren [19] 证明。后来，至少又有三种其他证明给出了这一结果 [9, 7, 1]。对于 Laguerre 半群极大算子，一维结果由 Muckenhoupt [10]，再次证明，而多维对应结果最初由 [5] 提出，后来又由 [18]，提出；不过我们认为，首个真正完整的证明直到 [14]，才由 Sj¨ogren、Szarek 和作者给出；相关评论见 [14, p. 313]。关于 Jacobi 半群极大算子，Sj¨ogren 和作者 [13] 证明了其弱型 (1,1) 性质。在这种情况下，主要难点在于找到半群积分核的适当上界；这些上界分别在 [4]，和 [13] 中独立得到，且都对类型参数施加了轻微限制。该结果也可直接由三角参数化下多维雅可比热核的高斯上界推出，相关评论见 [14,p. 349]。

现在，可以考虑混合 Hermite–Laguerre–Jacobi 展开，其中正交系统由有限个一维 Hermite、Laguerre 和 Jacobi 多项式的联合张量积定义（允许在乘积中省略任意类型的多项式）。随后，对坐标轴进行适当的重新编号，相应的算子半群将具有一个积分核，该核是 Hermite、Laguerre 和 Jacobi 半群的（多维）积分核的乘积。由此得到的混合 *Hermite– Laguerre–Jacobi* 半群 仍是一个对称扩散半群，并将这三种基本半群作为其特例。特别地，混合半群极大算子在 L^p, $p > 1$ 上的有界性可由 Stein 极大定理 [21, p. 73]推出。但弱型 (1,1) 有界性无法从已有结果推出，而且远非显而易见。

本文旨在证明混合 Hermite–Laguerre–Jacobi 半群的极大算子具有弱型 (1，1) 有界性，参见第 4 节中的定理 1。我们认为这是一个有趣的结果，尤其是它统一了这三种情形下相应的结果。此外，它通过对非倍增与倍增情形进行一种相当非标准的混合，为极大算子理论作出了贡献；这种组合可能会带来分别考察每种情形时不会出现的技术难题。另一项创新之处在于，据我们所知，混合 Hermite–Laguerre–Jacobi 情形尚未明确出现在致力于正交展开调和分析的文献中。

我们对定理 1 的证明，依赖于逐步将问题化归为多维 Laguerre 半群极大算子的弱型 (1，1) 估计，而这一估计已为人所知。这表明，从某种意义上说，Laguerre极大算子优于 Hermite 和 Jacobi 极大算子，因为它更为复杂，而且还涵盖了分别分析 Hermite 和 Jacobi 极大算子时遇到的困难。

本文的组织结构如下。第 2 节简要回顾 Hermite、Laguerre 和 Jacobi 情形。随后在第 3 节中，我们介绍混合 Hermite–Laguerre–Jacobi框架以及混合 Hermite–Laguerre–Jacobi 半群。第 4 节陈述主要结果（定理 1），并给出一个关于 Hermite–Laguerre–Jacobi 半群几乎处处边界收敛性的推论。最后，第 5 节致力于定理 1 的证明。

记号。令 $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$。在全文中，我们分别用 H_n、L_n^α 和 $P^{\alpha,\beta}_n$表示经典的 Hermite、Laguerre 和 Jacobi 多项式，其定义例如见 Szeg″o 的专著 [22]。关于空和与空积，我们采用标准约定。我们写作 $X \lesssim Y$表示 $X \le CY$，其中 C 为与相关量无关的正常数。当 $X \lesssim Y$和 $Y \lesssim X$同时成立时，我们记为 $X \simeq Y$。

2. Preliminaries

现在我们简要介绍众所周知的一维 Hermite、Laguerre 和 Jacobi 情形。多维框架可通过对一维情形取张量积，以标准方式构造；它们是随后将要介绍的一般混合 Hermite–Laguerre–Jacobi 情形的特例。

2.1. **厄米特情形**。设

$$\mathrm{d}\gamma(x) := e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

是 $\mathbb{R}$ 上的（未归一化）高斯测度。Hermite 多项式 H_n, $n = 0$，1，2，.....在 $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\gamma)$ 中构成正交基。它们是 Ornstein–Uhlenbeck算子的特征函数

$$\mathbb{\Delta}_H := -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$

有

$$\mathbb{\Delta}_H H_n = nH_n, \qquad n \ge 0.$$

当最初定义在多项式子空间上时，Ornstein–Uhlenbeck算子在 $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\gamma)$ 中是对称且非负的。因此，$\mathbb{\Delta}_H$ 在 $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\gamma)$ 中有自然的自伴延拓（仍用同一符号表示），其初始定义域为多项式；该延拓是非负的，其谱分解由 Hermite 多项式给出。

与之对应的半群 $\{\exp(-t\mathbb{\Delta}_H)\}_{t\ge0}$ 称为 Ornstein–Uhlenbeck 半群或 Hermite 半群。其积分表示为

$$\exp(-t\mathbb{\Delta}_H)f(x) = \int_{\mathbb{R}} K_t^H(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\gamma(y), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

适用于[1] $f \in L^1(\mathrm{d}\gamma)$，其中核由以下显式公式给出 [2]

$$K_t^H(x,y) := \sum_{n\geq 0} e^{-tn} \frac{H_n(x)H_n(y)}{\|H_n\|^2_{L^2(\mathrm{d}\gamma)}}$$
$$= \sqrt{\frac{e^t}{2\pi \sinh t}} \exp\bigg(- \frac{e^{-t}(x^2+y^2) - 2xy}{2\sinh t}\bigg), \qquad x,y \in \mathbb{R}, \quad t>0.$$

注意，$\|H_n\|^2_{L^2(\mathrm{d}\gamma)} = \sqrt{\pi}\, 2^n n!$ 。

2.2. **Laguerre 情形 etting.** 对于参数 $\alpha > -1$，在 $\mathbb{R}_+$ 上定义一个伽马型测度如下

$$\mathrm{d}\mu_\alpha(x) := x^\alpha e^{-x}\, \mathrm{d}x.$$

拉盖尔多项式 L_n^α, $n = 0, 1, 2, \ldots$，构成 $L^2(\mathbb{R}_+, \mathrm{d}\mu_\alpha)$ 中由拉盖尔算子的特征函数组成的正交基[3]

$$\mathbb{\Delta}_{L,\alpha} := -2x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2(\alpha+1-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x};$$

有

$$\mathbb{\Delta}_{L,\alpha} L_n^\alpha = 2n L_n^\alpha, \qquad n \geq 0.$$

拉盖尔算子在 $L^2(\mathbb{R}_+, \mathrm{d}\mu_\alpha)$ 上最初定义于多项式子空间时是对称且非负的。在此背景下，$\mathbb{\Delta}_{L,\,\alpha}$ 在 $L^2(\mathbb{R}_+, \mathrm{d}\mu_\alpha)$ 上的自然自伴延拓是非负的，其谱分解由拉盖尔多项式给出。

相应的半群 $\{\exp(-t\mathbb{\Delta}_{L,\alpha})\}_{t\geq 0}$ 称为 Laguerre 半群。该半群有一个积分表示

$$\exp(-t\mathbb{\Delta}_{L,\alpha}) f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} K_t^{L,\alpha}(x,y) f(y)\, \mathrm{d}\mu_\alpha(y), \qquad x \in \mathbb{R}_+, \quad t>0,$$

[1]该积分公式将 Hermite 半群的作用延拓至 $L^1(\mathrm{d}\gamma)$，进而延拓至所有 $L^p(\mathrm{d}\gamma)$ 空间，$p \geq 1$；这些空间包含于 $L^1(\mathrm{d}\gamma)$ 中。[2]该级数由 F.G. Mehler 于 1866 年计算得出；参考文献见例如 [20] 。因此，这个核有时被称为 Mehler核。[3]在 $\mathbb{\Delta}_{L,\,\alpha}$ 的定义中，引入公因子 2 是为了使 Hermite 半群和拉盖尔半群的“时间”参数 t 保持一致，这对于混合厄米特–拉盖尔（–雅可比）半群的潜在应用可能十分重要。或许通过 Ornstein–Uhlenbeck过程和拉盖尔随机过程来解释这一调整最为恰当；它们的无穷小生成元分别是 $\mathbb{\Delta}_H$ 和 $\mathbb{\Delta}_{L,\,\alpha}$的多维变体。事实上，若 $\{X_t : \ t \geq 0\}$ 是一个 d 维 Ornstein–Uhlenbeck过程，那么平方径向Ornstein–Uhlenbeck过程 $\{|X_t|^2 : \ t \geq 0\}$ 就是一个参数为 $\alpha = d/2 - 1$ 的一维拉盖尔过程$\{Y_t^\alpha: \ t \geq 0\}$。参见 [3, 附录 1，第 24–26] 节。若没有因子 2，$|X_t|^2$ 和 $Y_t^{d/2-1}$ 的时钟就会以不同的速度运行。

which 对于 $f \in L^1(\mathrm{d}\mu_\alpha)$ 有效。这里的积分核由[4]明确给出

$$
\begin{aligned}
K_t^{L,\alpha}(x,y) &:= \sum_{n\geq 0} e^{-t2n} \frac{L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y)}{\|L_n^\alpha\|^2_{L^2(\mathrm{d}\mu_\alpha)}} \\
&= \frac{e^{t(\alpha+1)}}{2\sinh t} \exp\left(-\frac{e^{-t}}{2\sinh t}(x+y)\right) \big(\sqrt{xy}\big)^{-\alpha} I_\alpha\left(\frac{\sqrt{xy}}{\sinh t}\right), \qquad x,y\in\mathbb{R}_+, \quad t>0;
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

注意 $\|L_n^\alpha\|^2_{L^2(\mathrm{d}\mu_\alpha)} = \Gamma(n+\alpha+1)/n!$。在上述公式中， I_α 是阶数为 α的第一类修正贝塞尔函数。当 $x=0$ 或 $y=0$ 时，核的取值以极限意义存在，因为 $I_\alpha(z) = z^\alpha/(2^\alpha\Gamma(\alpha+1)) + \mathcal{O}(z^{\alpha+2})$， $z\to 0^+$，参见 [8, (5.7.1)]。此外，作为后续参考，请注意，对于 I_α ，当 $\alpha > -1$ 时，标准渐近式意味着，参见 [8, (5.16.5)],

$$
I_\alpha(z) \simeq z^\alpha (z+1)^{-\alpha-1/2} e^z, \qquad z>0. \tag{2.2}
$$

2.3. 雅可比情形。 给定参数 $\alpha,\beta > -1$，在 $[-1,1]$上定义一个贝塔型测度

$$
\mathrm{d}\rho_{\alpha,\beta}(x) := (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \,\mathrm{d}x.
$$

雅可比多项式 $P^{\alpha,\beta}_n$, $n=0,1,2,\ldots$，构成 $L^2([-1,1],\mathrm{d}\rho_{\alpha,\beta})$上的一组正交基，并且是雅可比算子的特征函数

$$
\mathbb{\Delta}_{J,\alpha,\beta} := -\big(1-x^2\big)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \big[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\big]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x};
$$

有

$$
\mathbb{\Delta}_{J,\alpha,\beta} P_n^{\alpha,\beta} = n(n+\alpha+\beta+1) P_n^{\alpha,\beta}, \qquad n\geq 0.
$$

雅可比算子在 $L^2([-1,1],\ \mathrm{d}\rho_{\alpha,\ \beta})$ 中，当最初定义在多项式子空间上时，是对称且非负的。在此背景下，$\mathbb{\Delta}_{J,\ \alpha,\ \beta}$在 $L^2([-1,1],\ \mathrm{d}\rho_{\alpha,\ \beta})$ 中的自然自伴延拓是非负的，其谱分解由雅可比多项式给出。

半群 $\{\exp(-t\mathbb{\Delta}_{J,\ \alpha,\ \beta})\}_{t\geq 0}$ 称为 Jacobi 半群。其积分表示为

$$
\exp(-t\mathbb{\Delta}_{J,\alpha,\beta}) f(x) = \int_{[-1,1]} K_t^{J,\alpha,\beta}(x,y) f(y)\,\mathrm{d}\rho_{\alpha,\beta}(y), \qquad x\in[-1,1], \quad t>0,
$$

对 $f\in L^1(\mathrm{d}\rho_{\alpha,\ \beta})$ 有效。这里的核为

$$
K_t^{J,\alpha,\beta}(x,y) := \sum_{n\geq 0} e^{-tn(n+\alpha+\beta+1)} \frac{P_n^{\alpha,\beta}(x) P_n^{\alpha,\beta}(y)}{\|P_n^{\alpha,\beta}\|^2_{L^2(\mathrm{d}\rho_{\alpha,\beta})}};
$$

注意

$$
\|P_n^{\alpha,\beta}\|^2_{L^2(\mathrm{d}\rho_{\alpha,\beta})} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)},
$$

其中，在 $n=0$ 和 $\alpha+\beta=-1$ 的情况下，乘积 $(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)$ 被理解为 $\Gamma(\alpha+\beta+2)$。定义 $K^{J,\ \alpha,\ \beta}_{t}(x,\ y)$ 的振荡级数无法计算，但雅可比热核的精确估计是可得的。

[4]由于 1926 年发现的 Hille-Hardy公式，级数的计算成为可能；相关评论和参考文献见例如 [13,第 220] 页。

对于 θ, $\varphi \in [0,\pi]$ 和 $t>0$，定义

$$Z_t^{\alpha,\beta}(\theta,\varphi) := [t+\theta\varphi]^{-\alpha-1/2}[t+(\pi-\theta)(\pi-\varphi)]^{-\beta-1/2}\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{(\theta-\varphi)^2}{4t}\right).$$

以下锐界由 Sj¨ogren、Szarek 和作者 [15, 16, 17] 在一系列论文中证明（另请参见近期的一篇相关文章 [12]）。

定理 2.1 ([15, 16, 17])。设 α、$\beta > -1$ 和 $T>0$ 为固定值。存在一个常数$c = c(\alpha$、β、$T) > 1$，使得

$$c^{-1}\cdot Z_t^{\alpha,\beta}(\theta,\varphi) \le K_t^{J,\alpha,\beta}(\cos\theta,\cos\varphi) \le c\cdot Z_t^{\alpha,\beta}(\theta,\varphi)$$

对于 θ、$\varphi \in [0,\pi]$ 和 $0<t\le T$，以及 [5]

$$c^{-1} \le K_t^{J,\alpha,\beta}(x,y) \le c$$

对于 x、$y\in[-1,1]$ 和 $t\ge T$。

3. Mixed Hermite–Laguerre–Jacobi setting

设 $d\ge 1$和 $D=\{1,\dots,d\}$。设 D^H、D^L和 D^J是 D的两两不相交子集，使得

$$D = D^H \sqcup D^L \sqcup D^J;$$

其中某些子集可以为空。记

$$d^H := \left|D^H\right|, \qquad d^L := \left|D^L\right|, \qquad d^J := \left|D^J\right|,$$

并考虑多重指标

$$\alpha = (\alpha_i)_{i\in D^L\sqcup D^J} \in (-1,\infty)^{d^L+d^J} \qquad \text{and} \qquad \beta = (\beta_i)_{i\in D^J} \in (-1,\infty)^{d^J}.$$

下文中，我们假设 D^H、D^L、D^J、α和 β均为固定的。为避免繁复的记号，我们不再明确标示各对象对这些集合和参数的依赖关系。

引入空间

$$\Omega := \omega_1\times\ldots\times\omega_d, \qquad \text{where} \quad \omega_i := \begin{cases}\mathbb{R} & \text{if } i\in D^H\\ \mathbb{R}_+ & \text{if } i\in D^L\\ [-1,1] & \text{if } i\in D^J\end{cases}, \qquad i=1,\dots,d, \tag{3.1}$$

以及 Ω 上的乘积测度

$$\mathrm{d}M(x) := \prod_{i=1}^d \mathrm{d}m_i(x_i), \tag{3.2}$$

其中

$$\mathrm{d}m_i(x_i) := \begin{cases}\mathrm{d}\gamma(x_i) & \text{if } i\in D^H\\ \mathrm{d}\mu_{\alpha_i}(x_i) & \text{if } i\in D^L\\ \mathrm{d}\rho_{\alpha_i,\beta_i}(x_i) & \text{if } i\in D^J\end{cases}, \qquad i=1,\dots,d.$$

[5]该 ge 时间界是短时间估计的直接结果，参见例如 [13, 第 23 页 3].

注意， M 是有限的。

接下来，定义混合 Hermite–Laguerre–Jacobi 多项式

$$\Phi_n := \prod_{i=1}^{d} \varphi_{n_i}, \qquad n \in \mathbb{N}^d,$$

其中

$$\varphi_{n_i} := \begin{cases} H_{n_i} & \text{if } \ i \in D^H \\ L_{n_i}^{\alpha_i} & \text{if } \ i \in D^L \\ P_{n_i}^{\alpha_i,\beta_i} & \text{if } \ i \in D^J \end{cases}, \qquad i = 1, \dots, d.$$

那么 系统 $\{\Phi_n : \ n \in \mathbb{N}^d\}$ 在 $L^2(\Omega,\, \mathrm{d}M)$ 中构成一个正交基。注意到

$$\|\Phi_n\|_{L^2(\mathrm{d}M)} = \prod_{i\in D^H} \|H_{n_i}\|_{L^2(\mathrm{d}\gamma)} \prod_{j\in D^L} \|L_{n_j}^{\alpha_j}\|_{L^2(\mathrm{d}\mu_{\alpha_j})} \prod_{k\in D^J} \|P_{n_k}^{\alpha_k,\beta_k}\|_{L^2(\mathrm{d}\rho_{\alpha_k,\beta_k})}.$$

混合多项式 Φ_n 是“拉普拉斯算子”的特征函数

$$\mathbb{\Delta} := \sum_{i=1}^{d} \mathbb{\Delta}_i, \qquad \text{where} \quad \mathbb{\Delta}_i := \begin{cases} \mathbb{\Delta}_H & \text{if } \ i \in D^H \\ \mathbb{\Delta}_{L,\alpha_i} & \text{if } \ i \in D^L \\ \mathbb{\Delta}_{J,\alpha_i,\beta_i} & \text{if } \ i \in D^J \end{cases};$$

这里，每个一维微分算子 $\mathbb{\Delta}_i$ 均理解为作用于第 i 个坐标。更确切地说，有

$$\mathbb{\Delta}\Phi_n = \Lambda_n \Phi_n, \qquad n \in \mathbb{N}^d,$$

其特征值为

$$\Lambda_n := \sum_{i\in D^H} n_i + 2\sum_{j\in D^L} n_j + \sum_{k\in D^J} n_k(n_k + \alpha_k + \beta_k + 1).$$

算子 $\mathbb{\Delta}$ 在 $L^2(\Omega,\, \mathrm{d}M)$ 中初始定义于多项式子空间上时，是对称且非负的。它在 $L^2(\Omega,\, \mathrm{d}M)$ 中的自然且唯一的自伴延拓（仍记作同一符号）是非负的，并表示为

$$\mathbb{\Delta} f = \sum_{n\in\mathbb{N}^d} \Lambda_n \frac{\langle f, \Phi_n\rangle_{\mathrm{d}M}\ \Phi_n}{\|\Phi_n\|^2_{L^2(\mathrm{d}M)}}$$

定义域为

$$\operatorname{Dom}\mathbb{\Delta} := \left\{ f \in L^2(\mathrm{d}M) : \sum_{n\in\mathbb{N}^d} \left| \Lambda_n \ \frac{\langle f, \Phi_n\rangle_{\mathrm{d}M}}{\|\Phi_n\|_{L^2(\mathrm{d}M)}} \right|^2 < \infty \right\}.$$

相应的半群

$$\mathcal{T}_t := \exp(-t\mathbb{\Delta}), \qquad t \geq 0,$$

我们称之为混合 Hermite–Laguerre–Jacobi 半群，它在 $L^2(\mathrm{d}M)$ 上具有积分表示

$$\mathcal{T}_t f(x) = \int_\Omega \mathcal{K}_t(x,y) f(y)\, \mathrm{d}M(y), \qquad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

该表示对 [6] for $f \in L^1(\mathrm{d}M)$ 有效。这里的核为

$$\mathcal{K}_t(x,y) := \sum_{n\in\mathbb{N}^d} e^{-t\Lambda_n} \frac{\Phi_n(x)\Phi_n(y)}{\|\Phi_n\|^2_{L^2(\mathrm{d}M)}} = \prod_{i=1}^d \mathcal{K}_t^i(x_i,y_i), \qquad x,y\in\Omega, \quad t>0,$$

其中

$$\mathcal{K}_t^i(x_i,y_i) := \begin{cases} K_t^H(x_i,y_i) & \text{if } i\in D^H \\ K_t^{L,\alpha_i}(x_i,y_i) & \text{if } i\in D^L \\ K_t^{J,\alpha_i,\beta_i}(x_i,y_i) & \text{if } i\in D^J \end{cases}, \qquad i=1,\dots,d.$$

注意，$\mathcal{K}_t(x,y)$ 严格为正。由乘积结构以及 Hermite、Laguerre 和 Jacobi 半群的众所周知的性质可知，$\{\mathcal{T}_t\}_{t\geq 0}$ 是 [21, 第三章]意义下的对称扩散半群。

4. Main result

我们研究的主要对象是混合 Hermite– Laguerre-Jacobi 半群的极大算子

$$\mathcal{M}f := \sup_{t>0} |\mathcal{T}_t f|.$$

根据 Stein 极大定理 [21, 第 73], 页，我们看到 $\mathcal{M}$ 在 $L^p(\mathrm{d}M)$ 上有界，其中$p>1$。这也可以直接由 Hermite、Laguerre 和 Jacobi 半群的极大算子的 L^p-有界性得出。

另一方面，刚才提到的半群极大算子都不在 L^1 上有界，而对于 $\mathcal{M}$，自然的替代结果是弱型 (1，1) 估计

$$M\Big(\big\{x\in\Omega : \mathcal{M}f(x)>\lambda\big\}\Big) \lesssim \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathrm{d}M)}, \qquad \lambda>0, \quad f\in L^1(\mathrm{d}M),$$

这等价于 $\mathcal{M}$ 从 $L^1(\mathrm{d}M)$ 到弱 $L^1(\mathrm{d}M)$ 的有界性，即到 Lorentz 空间 $L^{1,\infty}(\mathrm{d}M)$ 的有界性。关于 $\mathcal{M}$ 的这一结果并不能由任何已知的一般定理推出，也不能直接由（多维）Hermite、Laguerre 和 Jacobi 半群极大算子的弱型 (1，1) 有界性得到。

本文的主要结果如下。我们假设 d、D_H、D_L、D_J、α 和 β 如第 3 节开头所述。

定理 1. 混合 *Hermite–Laguerre–Jacobi* 半群的极大算子 $\mathcal{M}$ 从 $L^1(\Omega,\mathrm{d}M)$ 到弱 $L^1(\Omega,\mathrm{d}M)$有界。

结合标准论证 [7], 定理 1，可推出混合 Hermite–Laguerre–Jacobi 半群作用于 L^1 函数时的几乎处处边界收敛。

推论 4.1. 对每个 $f\in L^1(\Omega,\mathrm{d}M)$,

$$\lim_{t\to 0^+} \mathcal{T}_t f = f \quad \text{a.e.}$$

[6] 更确切地说，对于所有 $f\in L^1(\mathrm{d}M)$、$x\in\Omega$ 和 $t>0$，积分都绝对收敛，因而在 $L^1(\mathrm{d}M)$ 上定义了$\mathcal{T}_t$。注意，由于测度是有限的，$L^p(\mathrm{d}M)\subset L^1(\mathrm{d}M)$，$p>1$。[7]例如参见 [6, 第 2 章第 2] 节，并注意系统 $\{\Phi_n : n\in\mathbb{N}^d\}$ 在$L^1(\Omega,\mathrm{d}M)$中线性稠密。

本文其余部分将用于证明定理 1。

5. Proof of Theorem 1

我们首先给出证明中所需的几个引理。

5.1. 技术准备。 回忆 $D = \{1, \dots, d\}$ 对于某个 $d \geq 1$。考虑一个划分

$$D = D' \sqcup D''$$

并记 $d' = |D'|$, $d'' = |D''|$, 从而有 $d' + d'' = d$。我们的乘积空间 $\Omega = \omega_1 \times \ldots \times \omega_d$可以分解为

$$\Omega = \Omega' \times \Omega'', \qquad \text{where} \quad \Omega' = \prod_{i \in D'} \omega_i, \quad \Omega'' = \prod_{i \in D''} \omega_i.$$

于是，Ω 中的点可以写成 $x = (x', \ x'') \in \Omega' \times \Omega''$。测度也以类似的方式分解为,

$$\mathrm{d}M(x) = \mathrm{d}M'(x')\, \mathrm{d}M''(x''),$$

其中

$$\mathrm{d}M'(x') = \prod_{i \in D'} \mathrm{d}m_i(x_i), \qquad \mathrm{d}M''(x'') = \prod_{i \in D''} \mathrm{d}m_i(x_i).$$

接下来，考虑一个作用于 $L^1(\Omega, \mathrm{d}M)$ 上的算子 T，以及分别作用于 $L^1(\Omega', \mathrm{d}M')$ 和 $L^1(\Omega'', \mathrm{d}M'')$ 上的算子 T' 和 T''，使得

$$|Tf| \leq (T' \circ T'')f, \qquad f \in L^1(\Omega, \mathrm{d}M);$$

在复合 $T' \circ T''$ 中，算子 T' 仅作用于坐标 x'，而 T'' 仅作用于坐标 x''（这里我们不妨假定该复合有意义）。

现在我们阐述三个简单的引理。这些结果中的大多数都是众所周知的，至少已成为一种广为流传的常识。有些引理的表述比实际需要的稍具一般性，只是为了从更广阔的视角理解那些论证我们的主要结果的论述。

引理 5.1. 假设 T'' 在 $L^1(\Omega'', \mathrm{d}M'')$ 上有界。

(a) 如果 T' 在 $L^1(\Omega', \mathrm{d}M')$ 上有界，则 T 在 $L^1(\Omega, \mathrm{d}M)$ 上有界。*(b)* 如果 T' 从 $L^1(\Omega', \mathrm{d}M')$ 有界映射到弱 $L^1(\Omega', \mathrm{d}M')$，则 T 从 $L^1(\Omega, \mathrm{d}M)$ 有界映射到弱 $L^1(\Omega, \mathrm{d}M)$。

证明。(a) 项显然。为验证 (b)，先在 x'变量中应用弱型 (1,1) 估计，然后在 x'' 变量中应用强型 (1,1) 估计。□

~设 $\Psi\colon \Omega \mapsto \Omega$ 是一个双可测双射，并令 $\Psi\#M$ 表示由 Ψ在 Ω 上诱导的推前测度~。下一个结果是一个简单的观察，尽管如此，我们仍将其表述为引理，以便今后查阅。

引理 5.2。 T从 $L^1(\Omega, \mathrm{d}M)$到弱 $L^1(\Omega, \mathrm{d}M)$有界，当且仅当由下式定义的算子T_Ψ

$$(T_\Psi f) \circ \Psi = T(f \circ \Psi)$$

~是从 $L^1(\Omega, \mathrm{d}(\Psi\#M))$到弱 $L^1(\Omega, \mathrm{d}(\Psi\#M))$有界的。

注意，当 T例如具有 $Tf(x) = \sup_t \int_\Omega K_t(x,y)|f(y)|\,\mathrm{d}M(y)$ 的形式，且 $\mathrm{d}M(y) = \mathfrak{m}(y)\,\mathrm{d}y$具有可微密度 $\mathfrak{m}$时，根据引理 5.2， T_Ψ 具有 $T_\Psi F(x) = \sup_t \int_\Omega K_t(\Psi^{-1}(x)\ \Psi^{-1}(y))|F(y)|\,\mathrm{d}(\Psi\#M)(y)$ 的形式，其中 $\mathrm{d}(\Psi\#M)(y) = \mathfrak{m}\circ\Psi^{-1}(y)|(\Psi^{-1})'(y)|\,\mathrm{d}y$。

现在设 Ω' 和 M' 关于垂直于 $\mathbb{R}^{d'}$ 中坐标轴的（向量）超平面反射不变。记

$$\Omega'_R = \Omega' \cap \mathbb{R}^{d'}_+, \qquad M'_R = M'\big|_{\Omega'_R}$$

and

$$\Omega_R = \Omega'_R \times \Omega'', \qquad M_R = M'_R \times M''.$$

设 T_R 是定义在 $L^1(\Omega_R,\mathrm{d}M_R)$ 上的算子，其定义为

$$T_R f(x) = Tf^e(x), \qquad x \in \Omega_R,$$

其中， f^e 是将 f 延拓到 Ω 的唯一延拓，并且关于所有 x' 坐标均为偶函数。对于 $\eta = (\eta_i)_{i\in D'} \in \{-1,1\}^{d'}$，令 $\Psi_\eta\colon \Omega \mapsto \Omega$ 定义为

$$\big(\Psi_\eta(x)\big)_i = \begin{cases} \eta_i x_i & \text{if } i \in D' \\ x_i & \text{if } i \in D'' \end{cases}, \qquad i = 1,\dots,d, \quad x \in \Omega.$$

引理 5.3。 假设定义在 $L^1(\Omega, \mathrm{d}M)$ 上的 T 满足以下条件。

(i) T 是次线性的。*(ii)* $|Tf| \le T|f|$。

(iii) 当 $0 \le f_1 \le f_2$ 时 $Tf_1 \le Tf_2$。*(iv)* T 是 $(\Omega', \mathrm{d}M')$- 对称的，即

$$(Tf)\circ\Psi_\xi = Tf \qquad \textit{for all } \xi \in \{-1,1\}^{d'}.$$

那么， T从 $L^1(\Omega, \mathrm{d}M)$到弱 $L^1(\Omega, \mathrm{d}M)$有界，当且仅当 T_R从$L^1(\Omega_R, \mathrm{d}M_R)$到弱 $L^1(\Omega_R,\mathrm{d}M_R)$有界。

为证明该引理，引入一些额外的记号和术语会比较方便。设 $\epsilon = (\epsilon_i)_{i\in D'} \in \{0,1\}^{d'}$。若函数 $f\colon \Omega \mapsto \mathbb{C}$ 满足：对于每个 $i \in D'$，根据 $\epsilon_i = 0$ 或 $\epsilon_i = 1$， f 关于第 i 个坐标分别为偶函数或奇函数，则称其为 ϵ-对称函数。任意 $f\colon \Omega \mapsto \mathbb{C}$ 的 ϵ-对称分量定义为

$$f_\epsilon = \frac{1}{2^{d'}} \sum_{\xi\in\{-1,1\}^{d'}} \xi^\epsilon f\circ\Psi_\xi, \qquad \text{where } \xi^\epsilon = \prod_{i\in D'} \xi_i^{\epsilon_i}.$$

Then

$$f = \sum_{\epsilon\in\{0,1\}^{d'}} f_\epsilon.$$

对于一个 ϵ-对称的 f，用 f_R 表示它在 Ω_R上的限制。回想一下，对于作用于 Ω_R上的函数 f， f^e 表示它在 Ω 上的 $(0,\dots,0)$-对称延拓。

引理 *5.3* 的证明。 首先，假设 T_R 满足弱型 (1,1) 界。那么，根据我们对 T的假设 (i)–(iv)，对于 $f \in L^1(\Omega, \mathrm{d}M)$ 和 $\lambda > 0$，我们有

$$\begin{aligned}
M\Big(\big\{x \in \Omega : |Tf(x)| > \lambda\big\}\Big) &= M\bigg(\Big\{x \in \Omega : \Big|T\Big(\sum_{\epsilon\in\{0,1\}^{d'}} f_\epsilon\Big)(x)\Big| > \lambda\Big\}\bigg) \\
&\overset{(ii)}{\leq} M\bigg(\Big\{x \in \Omega : T\Big|\sum_{\epsilon\in\{0,1\}^{d'}} f_\epsilon\Big|(x) > \lambda\Big\}\bigg) \\
&\overset{(iii)}{\leq} M\bigg(\Big\{x \in \Omega : T\Big(\sum_{\epsilon\in\{0,1\}^{d'}} |f_\epsilon|\Big)(x) > \lambda\Big\}\bigg) \\
&\overset{(i)}{\leq} M\bigg(\Big\{x \in \Omega : \sum_{\epsilon\in\{0,1\}^{d'}} T|f_\epsilon|(x) > \lambda\Big\}\bigg) \\
&\leq \sum_{\epsilon\in\{0,1\}^{d'}} M\Big(\big\{x \in \Omega : T|f_\epsilon|(x) > \lambda/2^{d'}\big\}\Big) \\
&= \sum_{\epsilon\in\{0,1\}^{d'}} \sum_{\xi\in\{-1,1\}^{d'}} M_R\Big(\big\{x \in \Omega_R : (T|f_\epsilon|)\circ\Psi_\xi(x) > \lambda/2^{d'}\big\}\Big) \\
&\overset{(iv)}{=} \sum_{\epsilon\in\{0,1\}^{d'}} 2^{d'} M_R\Big(\big\{x \in \Omega_R : T|f_\epsilon|(x) > \lambda/2^{d'}\big\}\Big) \\
&= \sum_{\epsilon\in\{0,1\}^{d'}} 2^{d'} M_R\Big(\Big\{x \in \Omega_R : T_R\big(|f_\epsilon|_R\big)(x) > \lambda/2^{d'}\Big\}\Big) \\
&\lesssim \sum_{\epsilon\in\{0,1\}^{d'}} \frac{4^{d'}}{\lambda}\big\||f_\epsilon|_R\big\|_{L^1(\Omega_R,\mathrm{d}M_R)} = \sum_{\epsilon\in\{0,1\}^{d'}} \frac{2^{d'}}{\lambda}\big\|f_\epsilon\big\|_{L^1(\Omega,\mathrm{d}M)} \\
&\leq \frac{4^{d'}}{\lambda}\|f\|_{L^1(\Omega,\mathrm{d}M)},
\end{aligned}$$

这里我们还用到了以下事实：$|f_\epsilon|$ 关于所有 x' 坐标都是偶函数，并且$\|f_\epsilon\|_{L^1(\Omega,\ \mathrm{d}M)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega,\ \mathrm{d}M)}$。因此，$T$是弱型（1，1）。

为验证另一个蕴含方向，现在假设T满足弱型（1，1）估计。于是，对于 $f \in L^1(\Omega_R, \mathrm{d}M_R)$和 $\lambda > 0$，我们可以写出

$$\begin{aligned}
M_R\Big(\big\{x \in \Omega_R : |T_R f(x)| > \lambda\big\}\Big) &= M_R\Big(\big\{x \in \Omega_R : \big|Tf^e(x)\big| > \lambda\big\}\Big) \\
&\leq M\Big(\big\{x \in \Omega : \big|Tf^e(x)\big| > \lambda\big\}\Big) \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda}\big\|f^e\big\|_{L^1(\Omega,\mathrm{d}M)} \\
&= \frac{2^{d'}}{\lambda}\|f\|_{L^1(\Omega_R,\mathrm{d}M_R)}.
\end{aligned}$$

结论随即得出。 □

5.2. 归约到 $D_H = \emptyset$ 的情形。这一步基于以下关系：在一维情形下，Ornstein–Uhlenbeck 半群的积分核 $K_t^H(x,\ y)$ 与 Laguerre 半群的核 $K^{L,\ _t\ ^\alpha}(x,\ y)$ 相关。这些核的显式公式分别见第 2.1 节和第 2.2 节。

注意到 $K_t^H(x,\ y)$ 可以分解为

$$K_t^H(x,y) = K_t^{H,e}(x,y) + K_t^{H,o}(x,y), \qquad x,y \in \mathbb{R},$$

其中

$$K_t^{H,e}(x,y) := \sqrt{\frac{e^t}{2\pi \sinh t}} \exp\bigg(-\frac{e^{-t}(x^2+y^2)}{2\sinh t}\bigg) \cosh\bigg(\frac{|xy|}{\sinh t}\bigg),$$
$$K_t^{H,o}(x,y) := \sqrt{\frac{e^t}{2\pi \sinh t}} \exp\bigg(-\frac{e^{-t}(x^2+y^2)}{2\sinh t}\bigg) \operatorname{sgn}(xy)\, \sinh\bigg(\frac{|xy|}{\sinh t}\bigg).$$

显然，

$$K_t^H(x,y) \le K_t^{H,e}(x,y) + \big|K_t^{H,o}(x,y)\big| \le 2K_t^{H,e}(x,y), \qquad x,y \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

另一方面，利用恒等式（参见 [8, 第 5 章，(5.8.5)]）

$$I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cosh z$$

我们得到

$$K_t^{H,e}(x,y) = \frac{e^{t/2}}{2\sinh t} \exp\bigg(-\frac{e^{-t}(x^2+y^2)}{2\sinh t}\bigg) \sqrt{|xy|}\, I_{-1/2}\bigg(\frac{|xy|}{\sinh t}\bigg),$$

在 $xy = 0$ 的情形下作极限解释。因此

$$K_t^{H,e}(x,y) = K_t^{L,-1/2}\big(x^2, y^2\big). \tag{5.2}$$

现在回顾一下，混合半群的积分核由下式给出

$$\mathcal{K}_t(x,y) = \prod_{i\in D^H} K_t^H(x_i,y_i) \prod_{j\in D^L} K_t^{L,\alpha_j}(x_j,y_j) \prod_{k\in D^J} K_t^{J,\alpha_k,\beta_k}(x_k,y_k), \tag{5.3}$$

相应的测度空间为 $(\Omega,\ \mathrm{d}M) = (\omega_1 \times \ldots \times \omega_d,\ \mathrm{d}m_1 \ldots \mathrm{d}m_d)$，参见及（3.2）。 (3.1)

假设 $D^H \neq \emptyset$。由于（5.1），只需证明定理 1，其中将（5.3）中的 $K_t^H(x_i,\ y_i)$ 替换为 $K^{H,\ _t\ ^e}(x_i,\ y_i)$；乘法常数 2^{d^H} 当然与我们的目的无关，因而略去（下文将不再重复类似说明）。

然后，鉴于 $K^{H,\ _t\ ^e}(x_i,\ y_i)$ 的反射对称性以及引理 5.3（限定于 $\Omega' = \prod_{i\in D^H} \omega_i$），还可以将乘积定义空间时对应于 $i \in D^H$ 的因子 $\omega_i = \mathbb{R}$ 替换为 $\omega_i = \mathbb{R}_+$，并相应地限制测度。

最后，根据 (5.2) 和引理 5.2（取 Ψ 为 $i \in D^H$ 时的 $(\Psi(x))_i = x_i^2$，否则为 $(\Psi(x))_i = x_i$），还可以将因子 $K^{H,\ _t\ ^e}(x_i,y_i)$ 替换为 $K^{L,\ _t\ ^{-1/2}}(x_i,y_i)$，同时令 $\mathrm{d}m_i(x_i) = \mathrm{d}\mu_{-1/2}(x_i)$，其中 $i \in D^H$。

因此，我们将定理 1 的证明归结为情形 $D^H = \emptyset$。

5.3. 进一步归结为情形 $D_J = D_H = \emptyset$。 从现在起，我们假设 $D_H = \emptyset$，因此混合半群的核为

$$\mathcal{K}_t(x,y) = \prod_{j\in D^L} K_t^{L,\alpha_j}(x_j,y_j) \prod_{k\in D^J} K_t^{J,\alpha_k,\beta_k}(x_k,y_k). \tag{5.4}$$

我们将通过有限个辅助极大算子的和来控制相应的极大算子 $\mathcal{M}$。随后我们将证明，在测度空间 $(\Omega, \mathrm{d}M)$ 上，该和式中的每个分量都满足弱型 $(1,1)$ 估计，前提是多维拉盖尔半群极大算子是弱型 $(1,1)$。当起初 $D_J = \emptyset$ 时，这是显然的，因此下文中我们假设 $D_J \neq \emptyset$。

对于 $k \in D^J$ 和 $x_k,\ y_k \in [-1,1]$ 记为

$$\theta_k = \theta_k(x_k) := \arccos x_k, \qquad \varphi_k = \varphi_k(y_k) := \arccos y_k.$$

注意，对于点 $x,\ y \in \Omega$ 和 $t > 0$

$$\begin{aligned} 1 &\le \chi_{\{t>1\}} + \chi_{\{t\le 1\}} \prod_{k\in D^J} \Big(\chi_{\{\theta_k,\varphi_k \le 3\pi/4\}} + \chi_{\{\theta_k,\varphi_k \ge \pi/4\}} + \chi_{\{|\theta_k-\varphi_k|\ge \pi/2\}} \Big) \\ &= \chi_{\{t>1\}} + \sum_{A\sqcup B\sqcup C = D^J} \chi_{\{t\le 1\}} \prod_{i\in A} \chi_{\{\theta_i,\varphi_i \le 3\pi/4\}} \prod_{j\in B} \chi_{\{\theta_j,\varphi_j \ge \pi/4\}} \prod_{k\in C} \chi_{\{|\theta_k-\varphi_k|\ge \pi/2\}}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

其中，最后一个求和遍历将 D^J 划分为子集 $A,\ B,\ C$ 的所有弱[8]有序划分。式 (5.5) 中的表达式是 $1 + 3^{d^J}$ 项之和。将我们的核 $\mathcal{K}_t(x,\ y)$ 在 (5.4) 中分别乘以这些项中的每一项，将得到 $1 + 3^{d^J}$ 个辅助核，分别记为 $\mathcal{K}_t^{\infty}(x,\ y)$ 和 $\mathcal{K}^{A,\ B\ C}_{t}\ (x,\ y)$。于是

$$\mathcal{K}_t(x,y) \le \mathcal{K}_t^{\infty}(x,y) + \sum_{A\sqcup B\sqcup C = D^J} \mathcal{K}_t^{A,B,C}(x,y).$$

因此，

$$\mathcal{M}f \le \mathcal{M}_{\infty} f + \sum_{A\sqcup B\sqcup C = D^J} \mathcal{M}_{A,B,C} f,$$

其中，辅助极大算子定义为

$$\mathcal{M}_{\infty} f(x) = \sup_{t>1} \int_{\Omega} \mathcal{K}_t^{\infty}(x,y)|f(y)|\,\mathrm{d}M(y),$$

$$\mathcal{M}_{A,B,C} f(x) = \sup_{0<t\le 1} \int_{\Omega} \mathcal{K}_t^{A,B,C}(x,y)|f(y)|\,\mathrm{d}M(y).$$

现在我们来分析 $\mathcal{M}_{\infty}$ 和 $\mathcal{M}_{A,\ B,\ C}$。使用以下记号会比较方便

$$\Omega' = \prod_{j\in D^L} \omega_j, \qquad \mathrm{d}M' = \prod_{j\in D^L} \mathrm{d}m_j, \qquad \Omega'' = \prod_{k\in D^J} \omega_k, \qquad \mathrm{d}M'' = \prod_{k\in D^J} \mathrm{d}m_k$$

and

$$\Omega''_{\lozenge} = \prod_{k\in \lozenge} \omega_k, \qquad \mathrm{d}M''_{\lozenge} = \prod_{k\in \lozenge} \mathrm{d}m_k, \qquad \lozenge = A,B,C.$$

[8]这里的弱是指允许存在空集的划分。

关于 $\mathcal{M}_\infty$。我们有以下结论。

引理5.4。极大算子

$$f \mapsto \sup_{t\geq 1} \int_{\Omega''} \prod_{k\in D^J} K_t^{J,\alpha_k,\beta_k}(x_k,y_k)|f(y)|\,\mathrm{d}M''(y)$$

在 $L^1(\Omega'', \mathrm{d}M'')$ 上有界。

证明。这是定理 2.1 的直接推论，因为对于 $t \geq 1$，一维核 $K^J_{t,\ \alpha_k\ \beta_k,}(x_k,y_k)$ 均由与 t 和 x_k, y_k 无关的常数控制。□

算子 $\mathcal{M}_\infty$ 受 Laguerre极大算子与

$$f \mapsto \sup_{t>0} \int_{\Omega'} \left[\prod_{j\in D^L} K_t^{L,\alpha_j}(x_j,y_j) \right] |f(y)|\,\mathrm{d}M'(y)$$

作用于 D^L 坐标上的极大算子，以及作用于 D^J 坐标上的引理5.4中的极大算子的复合所控制。因此，鉴于引理5.4中所述的有界性，我们处于引理 5.1(b)的情形。由此可知，若 Laguerre极大算子具有类似性质，则 $\mathcal{M}_\infty$ 是弱型 (1,1) 算子。

处理 $\mathcal{M}_{A、B、C}$，归结为情形 $C = \emptyset$。我们假设 $C \neq \emptyset$，否则这一步无事可做。

引理 5.5。极大算子

$$f \mapsto \sup_{0<t\leq 1} \int_{\Omega''_C} \left[\prod_{k\in C} \chi_{\{|\theta_k-\varphi_k|\geq \pi/2\}} K_t^{J,\alpha_k,\beta_k}(x_k,y_k) \right] |f(y)|\,\mathrm{d}M''_C(y)$$

在 $L^1(\Omega''_C,\ \mathrm{d}M''_C)$上有界。

证明。论证与引理5.4的证明基本相同。令 $k \in C$。假设 $0 < t \leq 1$ 和 $|\theta_k - \varphi_k| \geq \pi/2$。那么，由定理 2.1，

$$\begin{aligned} K_t^{J,\alpha_k,\beta_k}(x_k,y_k) &\lesssim [t+\theta_k\varphi_k]^{-\alpha_k-1/2}[t+(\pi-\theta_k)(\pi-\varphi_k)]^{-\beta_k-1/2}\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{(\theta_k-\varphi_k)^2}{4t}\right) \\ &\lesssim [t+\theta_k\varphi_k]^{-\alpha_k-1}[t+(\pi-\theta_k)(\pi-\varphi_k)]^{-\beta_k-1}\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{(\pi/2)^2}{4t}\right) \\ &\lesssim t^{-\alpha_k-\beta_k-5/2}e^{-\pi^2/(16t)} \lesssim 1. \end{aligned}$$

这表明，我们的极大算子的核受一个与 t 及各变量无关的常数控制。结论得证。□

The o算子 $\mathcal{M}_{A,\ B,\ C}$ 受一个极大算子的复合控制

$$
\begin{aligned}
f \mapsto \sup_{0<t\le 1} \int_{\Omega'\times\Omega''_A\times\Omega''_B} |f(y)| \prod_{j\in D^L} K_t^{L,\alpha_j}(x_j,y_j)\,\mathrm{d}m_j(y_j) \\
\times \prod_{k\in A} \chi_{\{\theta_k,\varphi_k\le 3\pi/4\}} K_t^{J,\alpha_k,\beta_k}(x_k,y_k)\,\mathrm{d}m_k(y_k) \\
\times \prod_{l\in B} \chi_{\{\theta_l,\varphi_l\ge \pi/4\}} K_t^{J,\alpha_l,\beta_l}(x_l,y_l)\,\mathrm{d}m_l(y_l)
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

作用于 $D^L\sqcup A\sqcup B$ 坐标以及引理 5.5 中的极大算子。因此，考虑到引理 5.5 所给出的有界性，由引理 5.1(b)可知，$\mathcal{M}_{A,\ B,\ C}$是弱型 (1，1) 的，只要$\mathcal{M}_{A,\ B,\ \emptyset}$满足弱型 (1，1) 有界性。

对 $\mathcal{M}_{A,\ B,\ C}$的处理，进一步归结为 $B=C=\emptyset$的情形。在此步骤中，我们假设 $C=\emptyset$ 和 $B\neq\emptyset$。考虑式 (5.6) 中定义的极大算子（即 $\mathcal{M}_{A,\ B,\ \emptyset}$）以及双射 $\Psi\colon \Omega'\times\Omega''_A\times\Omega''_B\mapsto\Omega'\times\Omega''_A\times\Omega''_B$，其由 $(\Psi(x))_i=-x_i$ if $i\in B$，否则为 $(\Psi(x))_i=x_i$给出。注意到 $\Psi^{-1}=\Psi$。在该双射同时作用于 x 和 y 变量的情况下，式 (5.6) 中的前两个乘积保持不变，而最后一个乘积变为

$$
\prod_{l\in B} \chi_{\{\theta_l,\varphi_l\le 3\pi/4\}} K_t^{J,\beta_l,\alpha_l}(x_l,y_l)\,\mathrm{d}\rho_{\beta_l,\alpha_l}(y_l); \tag{5.7}
$$

这里我们使用了 Jacobi 多项式满足以下性质这一事实（参见 [22, Chapter IV, (4.1.3)] ）

$$
P_n^{\alpha,\beta}(-z)=(-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(z), \qquad n\ge 0.
$$

注意到，（5.7）中的表达式与（5.6）中的第二个乘积具有相同的形式。因此，两个乘积可以合并为一个同类型的乘积。于是，根据引理 5.2，只要对形如以下形式的极大算子（ A及 Jacobi 参数可任意选择）具有相应的估计，（5.6）中的极大算子就满足弱型 (1，1) 界：

$$
\begin{aligned}
f \mapsto \sup_{0<t\le 1} \int_{\Omega'\times\Omega''_A} |f(y)| \prod_{j\in D^L} K_t^{L,\alpha_j}(x_j,y_j)\,\mathrm{d}m_j(y_j) \\
\times \prod_{k\in A} \chi_{\{\theta_k,\varphi_k\le 3\pi/4\}} K_t^{J,\alpha_k,\beta_k}(x_k,y_k)\,\mathrm{d}m_k(y_k),
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

也就是对 $\mathcal{M}_{A,\ \emptyset,\ \emptyset}$。

对 $\mathcal{M}_{A,\ B,\ C}$ 的处理，最终归结为拉盖尔情形。在这一步中，我们假设$B=C=\emptyset$ 且 $A\neq\emptyset$，即 $\Omega''=\Omega''_A$。

步骤 1. 设Ω''_A 与$\prod_{k\in A}[0,\pi]$。考虑式（5.8）中定义的极大算子（即 $\mathcal{M}_{A,\ \emptyset,\ \emptyset}$）以及双射 $\Psi\colon \Omega'\times\Omega''_A\mapsto\Omega'\times\Omega''_A$，其定义为（$\Psi(x)$）$_i=\arccos x_i$ if $i\in A$，否则为（$\Psi(x)$）$_i=x_i$。在 x 和 y 变量中同时应用该双射后，式（5.8）中的第一个乘积保持不变，而第二个乘积则变为（见引理 5.2 之后的注释）

$$
\prod_{k\in A} \chi_{\{x_k,y_k\le 3\pi/4\}} K_t^{J,\alpha_k,\beta_k}(\cos x_k,\cos y_k)\,\mathrm{d}\widetilde{m}_k(y_k),
$$

其中 $\mathrm{d}\widetilde{m}_k$（$y_k$）：$= 2^{\alpha_k+\beta_k+1}$[sin（$y_k/2$）$]^{2\alpha_k+1}$[cos（$y_k/2$）$]^{2\beta_k+1}\,\mathrm{d}y_k$。由引理 5.2 可知，式（5.8）中极大算子的弱型（1，1）界等价于下式的弱型（1， 1）估计

$$
\begin{aligned}
f \mapsto \sup_{0<t\le 1} \int_{\Omega'\times\widetilde{\Omega}''_A} |f(y)| \prod_{j\in D^L} K_t^{L,\alpha_j}(x_j,y_j)\,\mathrm{d}m_j(y_j) \\
\times \prod_{k\in A} \chi_{\{x_k,y_k\le 3\pi/4\}} K_t^{J,\alpha_k,\beta_k}(\cos x_k,\cos y_k)\,\mathrm{d}\widetilde{m}_k(y_k)
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

$\widetilde{}$关于测度空间（$\Omega'\times\Omega''_A$，$\mathrm{d}M'\prod_{k\in A}\mathrm{d}\,\widetilde{m}_k$）上的测度。

步骤 2。 我们注意到，在（5.9）中，得益于示性函数 $\chi_{\{x_k,y_k\le 3\pi/4\}}$，将测度 $\mathrm{d}\widetilde{m}_k(y_k)$ 替换为相应的可比测度

$$
\mathrm{d}\breve{m}_k(y_k) := y_k^{2\alpha_k+1}\,\mathrm{d}y_k \tag{5.10}
$$

得到一个极大算子，其关于测度$\widetilde{}$空间（$\Omega'\times\Omega''_A$，$\mathrm{d}M'\prod_{k\in A}\mathrm{d}\,\breve{m}_k$）的弱型（1，1）有界性等价于（5.9）中极大$\widetilde{}$算子的弱型（1，1）有界性。此外，在将 Ω''_A 替换为

$$
\breve{\Omega}''_A := \prod_{k\in A}\mathbb{R}_+
$$

并按照相同的公式（5.10）在 $\mathbb{R}_+$ 上定义 $\mathrm{d}\breve{m}_k$ 。也就是说，我们现在关注的是极大算子

$$
\begin{aligned}
f \mapsto \sup_{0<t\le 1} \int_{\Omega'\times\breve{\Omega}''_A} |f(y)| \prod_{j\in D^L} K_t^{L,\alpha_j}(x_j,y_j)\,\mathrm{d}m_j(y_j) \\
\times \prod_{k\in A} \chi_{\{x_k,y_k\le 3\pi/4\}} K_t^{J,\alpha_k,\beta_k}(\cos x_k,\cos y_k)\,\mathrm{d}\breve{m}_k(y_k)
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

相对于测度空间 ($\Omega'\times\breve{\Omega}''_A$，$\mathrm{d}M'\prod_{k\in A}\mathrm{d}\,\breve{m}_k$)。

步骤 3。 现在考虑双射 $\Psi(x)_i = x_i^2/2$ 给出，当 $i\in A$ 时，否则为 $(\Psi(x))_i = x_i$。然后，借助引理 5.2，我们看到，极大算子 (5.11) 的弱型 (1，1) 界等价于对以下算子的弱型 (1，1) 估计

$$
\begin{aligned}
f \mapsto \sup_{0<t\le 1} \int_{\Omega'\times\breve{\Omega}''_A} |f(y)| \prod_{j\in D^L} K_t^{L,\alpha_j}(x_j,y_j)\,\mathrm{d}m_j(y_j) \\
\times \prod_{k\in A} \chi_{\{x_k,y_k\le 9\pi^2/32\}} K_t^{J,\alpha_k,\beta_k}(\cos\sqrt{2x_k},\cos\sqrt{2y_k})\,\mathrm{d}\mu_{\alpha_k}(y_k)
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

关于测度空间 ($\Omega'\times\breve{\Omega}''_A$，$\mathrm{d}M'\prod_{k\in A}\mathrm{d}\mu_{\alpha_k}$)。

步骤 4。 最后，我们需要以下结果。

引理 5.6。 设 $\alpha > -1$。一维拉盖尔核 $K^{L,\alpha}_t$（x，y）满足

$$
K_t^{L,\alpha}(x,y) \simeq \left(t+\sqrt{xy}\right)^{-\alpha-1/2}\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2t}\right)
$$

对 $0\le x$、$y\le 3$ 和 $0<t\le 1$ 一致成立。

证明。 在整个证明过程中，我们可以假设 $x, y \in (0,3]$。令 $t \in (0,1]$。由显式公式 (2.1) 和贝塞尔函数界 (2.2)，可得

$$\begin{aligned} K_t^{L,\alpha}(x,y) &\simeq \frac{e^{t(\alpha+1)}}{2\sinh t}(xy)^{-\alpha/2}\left(\frac{\sqrt{xy}}{\sinh t}\right)^{\alpha}\left(\frac{\sqrt{xy}}{\sinh t}+1\right)^{-\alpha-1/2}\exp\left(-\frac{e^{-t}(x+y)-2\sqrt{xy}}{2\sinh t}\right) \\ &\simeq \big(t+\sqrt{xy}\big)^{-\alpha-1/2}\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2t}\right) \\ &\qquad \times \exp\left(\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2t}-\frac{e^{-t}(x+y)-2\sqrt{xy}}{2\sinh t}\right), \end{aligned}$$

根据我们对 t 的假设，最后一个关系成立，因为 $\sinh t \simeq t$。现在只需证明，对于所考虑的 x， y 和 t，最后一个指数项的自变量有界。

注意到

$$\begin{aligned} &\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2t}-\frac{e^{-t}(x+y)-2\sqrt{xy}}{2\sinh t} \\ &\qquad = \frac{1-e^{-t}}{2t}(x+y)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\sinh t}\right)\Big[\big(\sqrt{x}-\sqrt{y}\big)^2-(1-e^{-t})(x+y)\Big]. \end{aligned}$$

由于这些函数

$$t \mapsto \frac{1-e^{-t}}{2t} \qquad \text{and} \qquad t \mapsto \frac{1}{t}-\frac{1}{\sinh t}$$

在 $(0,1]$，上有界，我们便得到所需的结论。 □

根据定理 2.1 根据引理 5.6，(5.12) 中的第二个乘积可由以下乘积控制

$$\prod_{k\in A} K_t^{L,\alpha_k}(x_k,y_k)\,\mathrm{d}\mu_{\alpha_k}(y_k)$$

拉盖尔核与测度，并且对 x_k， $y_k \geq 0$ 和 $0 < t \leq 1$ 一致成立。因此，(5.12) 中的极大算子可由多维拉盖尔极大算子控制。因此，后者的弱型 (1，1) 界蕴含 (5.12) 中算子的弱型 (1，1) 估计。

综上 所述，我们已将定理 1 的证明归结为 $D^H = D^J = \emptyset$ 情形 .

5.4. 后记。 关于多维 Laguerre 半群极大算子弱型 (1，1) 估计的证明，请参见 [14, 第 2] 节。论证相当冗长且有些棘手，因此我们在此甚至不对细节作任何概述。请注意，本文所采用的略有不同的时间缩放并不会改变 Laguerre极大算子。

References

[1] H. Aimar，L. Forzani，R. Scotto，高斯调和分析背景下的*Riesz*变换与极大函数，《美国数学会汇刊》359（2007），2137–2154。[2] D. Bakry，I. Gentil，M. Ledoux，马尔可夫扩散算子的分析与几何，《数学科学基础》348，Springer出版社，沙姆，2014。[3] A.N. Borodin，P. Salminen，布朗运动手册：事实与公式，第2版，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔–波士顿–柏林，2002。

[4] T. Coulhon，G. Kerkyacharian，P. Petrushev，狄利克雷空间中的热核生成框架，《傅里叶分析与应用杂志》18（2012），995–1066。[5] U. Dinger，有限维Laguerre 半群极大函数的弱型 (1, 1) 估计，《伊比利亚美洲数学评论》8（1992），93–120。[6] J. Duoandikoetxea，傅里叶分析，《数学研究生教材》29，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2001。[7] J. Garc´ıa-Cuerva，G. Mauceri，S. Meda，P. Sj¨ogren，J.L. Torrea，全纯Ornstein–Uhlenbeck 半群的极大算子，《伦敦数学会杂志》67（2003），219–234。[8] N.N. Lebedev，特殊函数及其应用，多佛出版社，纽约，1972。[9] T. Men´arguez，S. P´erez，F. Soria，迈勒极大函数：弱型 1 的几何证明，《伦敦数学会杂志》61（2000），846–856。[10] B. Muckenhoupt，Hermite和Laguerre展开的泊松积分，《美国数学会汇刊》139（1969），231–242。[11] B. Muckenhoupt，E.M. Stein，经典展开及其与共轭调和函数的关系，《美国数学会汇刊》118（1965），17–92。[12] A. Nowak，P. Plewa，T.Z. Szarek，统一证明雅可比热核带迹的锐界及乘法常数的估计，预印本2025，81页。arXiv:2512.16306[13] A. Nowak，P. Sj¨ogren，雅可比热核的锐估计，《数学研究》218（2013），219–244。[14] A. Nowak，P. Sj¨ogren，T.Z. Szarek，与经典正交展开相关的奇异和非奇异Laguerre及其他半群的极大算子，《数学进展》318（2017），307–354。[15] A. Nowak，P. Sj¨ogren，T.Z. Szarek，球面热核的锐估计，《纯粹与应用数学杂志》129（2019），23–33。[16] A. Nowak，P. Sj¨ogren，T.Z. Szarek，紧致秩一对称空间上、雅可比展开中的、球上及单纯形上的真正锐热核估计，《数学年刊》381（2021），1455–1476。[17] A. Nowak，P. Sj¨ogren，T.Z. Szarek，通过推广Dijksma–Koornwinder公式获得的雅可比热核新锐界，《构造逼近》63（2026），623–645。[18] E. Sasso，全纯拉盖尔半群的极大算子，《斯堪的纳维亚数学》97（2005），235–265。[19] P. Sj¨ogren，关于Mehler核的极大函数，《调和分析》，科尔托纳，1982，《数学讲义》992（Springer出版社，1983），73–82。[20] P. Sj¨ogren，与Hermite 半群相关的算子——一篇综述，《傅里叶分析与应用杂志》3（1997），813–823。[21] E.M. Stein，与利特尔伍德–佩利理论相关的调和分析专题，《数学年刊研究》第63卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1970。[22] G. Szeg˝o，正交多项式，第4版，《美国数学会讨论会出版物》23，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1975。

Adam NowakInstitute of Mathematics,
Polish Academy of SciencesSniadeckich 8, 00–656 Warszawa,
Poland电子邮件地址: adam.nowak@impan.pl