arXiv:2611.32512v1 [math.AT] 24 Nov 2026

刻画有限群上的2-切片

SUROJIT GHOSH 和 ANKIT KUMAR

摘要。对于有限群G，我们根据其同伦 Mackey 函子和k-不变量，刻画G-谱在正则切片过滤中的2-切片。我们明确计算了循环p-群和交错群A_4的情形。

1. 引言

切片过滤推广了 Dugger 过滤 [1]，其构造以 Voevodsky 的动机切片过滤 [7]为模型。这种过滤是 Postnikov 过滤的等变类比。它用按表示论维数索引的切片胞腔$G_+ \wedge_H S^{k\rho_H}$取代球面S^n，并将一个G-谱X 分解为切片$P^n_n X$。由此得到的切片谱序列是他们解决 Kervaire 不变量一问题 [3]，时所采用的主要计算工具，此后也被用于计算许多等变同伦群。然而，这里的所有计算都针对 Ullman [8]引入的正则切片。每项计算都从确定切片开始，因此了解哪些G-谱是n-切片是很有帮助的。

对于较小的n，这已为人所知。一个G-谱是0-切片，当且仅当它是一个Eilenberg–Mac Lane谱HM；并且 $\Sigma^1 HM$是1-切片，当且仅当M的所有限制都是单射 [3]。Ullman [8]刻画了形如 $\Sigma^{-1}HM$的$(-n)$-切片。由于Σ^{ρ_G}会将切片平移 $|G|$，这些结果描述了度数为0、$\cdots$、$|G|-1$ (模 $|G|$)的所有切片。对于Klein 四元群，尚未解决的情形是2-切片。Slone在 [6]解决了这一问题。

在本文中，我们刻画了每个有限群G的2-切片。对于$H \leq G$ 以及一个G-Mackey函子M，记 $\varphi_H : M(G/H) \to \tilde{H}^0_H(S(\bar{\rho}_H)_+; M)$ 表示由坍缩映射$S(\bar{\rho}_H) \to \mathrm{pt}$诱导的映射，其中 $\bar{\rho}_H$ 是约化正则表示。

定理 A。设G 是一个有限群。

（a） $\Sigma^2 HM$是 2-切片，当且仅当对所有 H，限制映射都是单射 $|H| = 2$，并且 φ_H对所有 $|H| \geq 3$都是双射。（b） $\Sigma^1 HM$是 2-切片，当且仅当对于每个 $H \leq G$，映射 $M(G/H) \to \prod_{C \leq H,\ |C|=2} M(G/C)$ 是单射。特别地，当 $|H|$ 为奇数时，$M(G/H) = 0$。

（c）一个G-谱Y 是 2-切片，当且仅当 $\pi_k Y = 0$ 对于$k \neq 1$、2、 $\pi_1 Y(G/e) = 0$，$\Sigma^2 H\pi_2 Y$ 是2-切片，并且对于每个H 满足 $|H| \geq 3$，Y 的k-不变量诱导出一个映射

$$\bigcap_{L \lneq H} \ker \mathrm{res}^H_L \hookrightarrow \tilde{H}^1_H\big(S(\bar{\rho}_H)_+; \pi_2 Y\big).$$

该定理为确定给定谱是否为2-切片提供了一个实用判据。特别是，当谱的形式为 $\Sigma^2 HM$或 $\Sigma^1 HM$时，该判据

日期：2026 年 25 月 11日。2020 数学主题分类。

55N91、55P91（主要）；57S17、55Q91（次要）。关键词和短语。 等变同伦论、切片塔、Mackey函子。

给出了其成为2-切片的明确充要条件。我们将在第4节研究这些情形。

为了使定理 A 适用，我们计算其陈述中出现的群。正如 [3]，中所述，$S(\bar{\rho}_G)$ 的胞腔结构给出以下公式。

定理 B. $\tilde{H}^0_G(S(\bar{\rho}_G)_+;\ M)$ 是由族 $(x_L)^{L\lneq G}$ 构成的群，其中 $x_L \in M(G/L)$，且这些族与限制映射相容，并与指数至少为 3 的子群上的共轭作用相容。

参见定理 3.3。

注意，$\tilde{H}^0_G(S(\bar{\rho}_G)_+;\ M)$ 可能严格大于 $\tilde{H}^0_G(E\mathcal{P}_+;\ M) = \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(G)^{op}} M$ [5]。我们还用极大子群及其魏尔群来表述定理 B。由此可得 2-切片的显式描述。

1.1. 组织。 本文其余部分的安排如下。在第3节中，我们给出球面的 0th-Bredon上同调在 G 的约化正则表示下的组合描述。在第4节中，我们给出关于 2-切片的一般分类结果，并据此描述循环 p-群和交错群 A_4中的这一结果。

致谢。 Surojit Ghosh 的研究得到了 ANRF、印度的资助，资助编号为 ARG/2025/000434/MS。Ankit Kumar 的研究得到了印度大学拨款委员会的资助。

2. 基础

本节简要回顾 G-谱的切片过滤和切片塔。全文中，我们使用 Ullman 在 [8] 中引入的正则切片。令 Sp^G 表示真正的 G-等变谱范畴。一个切片胞腔 是形如 $G_+ \wedge_H S^{k\rho_H}$ 的 G-谱，其中 $H \leq G$ 且 $k \in \mathbb{Z}$；其维数 为 $k|H|$。此处 ρ_H 表示子群 $H \leq G$ 的正则表示。对每个整数 n，定义 $\tau_{\geq n} \subseteq \mathrm{Sp}^G$ 为由切片胞腔生成的局部化子范畴。根据定义，$\tau_{\geq n}$ 对弱等价、余纤维、扩张和任意楔和封闭。

定义2.1： 若 $X \geq n$，我们记为 $X \in \tau_{\geq n}$；若 $X \leq n$，则对所有 $C \in \tau_{n+1}$都有 $[C,X]^G = 0$。等价地，对于所有 $H \leq G$、$r \geq 0$，以及 n，都有 $[G_+ \wedge_H S^{k\rho_H+r},X]^G = 0$ 和 $k|H| >$。

与 $\tau_{\geq n}$ 相关联的是 Sp^G 上的自然局部化函子 P^{n-1}，其无圈对象恰好是 $\tau_{\geq n}$ 中的对象。由于 $\tau_{\geq n+1} \subseteq \tau_n$，存在一个自然变换 $P^n \to P^{n-1}$，从而为每个 G-谱 X给出切片塔 $\{P^nX\}_{n\in\mathbb{Z}}$。映射 $P^nX \to P^{n-1}X$ 的同伦纤维记为 P^n_nX，称为 n-切片 的 X。等价地，谱 X是一个 n-切片，当且仅当 $X \leq n$ 且 $X \geq n$。

Hill 和 Yarnall 给出了用几何固定点刻画$X \geq n$ 的代数描述。我们将 Φ^HX 记作限制映射 $\mathrm{res}^G_HX \in \mathrm{Sp}^H$ 的几何H-固定点，它是 Sp^H 的对称幺半群函子。

定理 2.2 ([4])**.** 一个 G-谱 X 满足 $X \geq n$，当且仅当对于所有 $H \leq G$ 以及 $k < n/|H|$.，都有 $\pi_k\Phi^HX = 0$。

特别地，我们注意到 $\Sigma^m HM \geq m$对于$m \geq 0$成立，因为HM的几何固定点是 $\Sigma^m\Phi^L HM$，因此是$(m-1)$-连通的，并且$m/|L| \leq m$。

低维中的切片可用 Mackey函子来描述。

命题 2.3 ([3, 8])**.** 设 M 是一个 *G-Mackey*函子，且 $X \in \mathrm{Sp}^G$.

(1) X 是一个0-切片，当且仅当对于某个 G-Mackey函子 M，有 $X \simeq \underline{H}M$。(2) $\Sigma^1 H\,M$ 是一个1-切片，当且仅当 M 的所有限制映射都是单射。(3) $\Sigma^{-1}H\,M$ 是一个$(-n)$-切片，当且仅当从阶为 $\geq n$ 的子群出发的所有转移映射都是满射，且 $M(G/H) = 0$ 对于 $|H| < n$。

Hill、Hopkins 和 Ravenel 观察到的另一个令人兴奋的性质是，这些切片具有ρ_G-周期性。更准确地说，

命题 2.4 ([3, 推论 4.25])。 若 X 是一个 n-切片，则 $\Sigma^\rho X$ 是一个$(n + |G|)$-切片。即

$$P^{k+|G|}_{k+|G|}(\Sigma^{\rho_G} X) \simeq \Sigma^{\rho_G} P^k_k(X)$$

其中 ρ_G 是群 G 的正则表示。

3. LIMIT PRESENTATION OF $\tilde{H}^0_G(S(\bar{\rho}_G); \underline{M})$

在本节中，我们证明系数取值于 Mackey函子M 时，球面在约化正则表示中的 0th-Bredon上同调的某些表示。

首先，考虑一个 Mackey函子M 以及余纤维序列

$$S(\bar{\rho}_G)_+ \to S^0 \to S^{\bar{\rho}_G}.$$

这给出了相应的长正合列

$$0 \to \tilde{H}^0_G(S^{\bar{\rho}_G}; \underline{M}) \to \underline{M}(G/G) \xrightarrow{\varphi_G} \tilde{H}^0_G(S(\bar{\rho}_G)_+; \underline{M}) \to \tilde{H}^1_G(S^{\bar{\rho}_G}; \underline{M}) \to 0$$

in 系数为M的Bredon上同调。于是根据 [3, 推论 3.6],核 is

$$\ker(\varphi_G(\underline{M})) \cong \tilde{H}^0_G(S^{\bar{\rho}_G}; \underline{M}) \cong \bigcap_{L \in \mathcal{P}_G} \ker(\mathrm{res}^G_L(\underline{M})) \tag{3.1}$$

其中， $\mathcal{P}_G$ 是G的所有非平凡真子群所构成的偏序集。

引理 3.2. 对于 $k \geq 1$，存在同构 $\tilde{}H^0_G(S^{k\bar{\rho}_G}; M) \cong$核$(\varphi_G)$。

证明。 我们将对k使用归纳法来证明这一点。考虑余纤维序列

$$S^{m\bar{\rho}_G} \hookrightarrow S^{(m+1)\bar{\rho}_G} \to C$$

记$d_L = \dim \bar{\rho}^L_G$ 为$L \in \mathcal{P}_G$。于是$C^L \simeq S^{(m+1)d_L} \vee S^{md_L+1}$ 且$C^G \simeq *$。因此结论成立。□

定理 3。3。 设 G 为有限群，M 为 G-Mackey函子。则 $\tilde{}H^0_G\big(S(\bar{\rho}_G)_+;\ M\big)$ 同构于满足以下条件的族群

$$(x_L)_{L \in \mathcal{P}_G} \in \prod_{L \in \mathcal{P}_G} \underline{M}(G/L)$$

函数族满足以下两个条件：

(i) $\mathrm{res}^{L_2}_{L_1} x_{L_2} = x_{L_1}$ *for all* $L_1 \leq L_2 \lneq G$;
(ii) $c_g\, x_L = x_{gLg^{-1}}$ *for all* $g \in G$ *and all* $L \in \mathcal{P}_G$ *with* $|G : L| \geq 3$.

证明。 注意到

$$\tilde{H}^0_G(X_+; \underline{M}) = H^0_G(X; \underline{M}) \cong \mathrm{Hom}\big(\mathbb{Z}[\pi_0 X^{(-)}], \underline{M}\big).$$

因此，一个类是一个函数族 $\eta_L\colon\ \pi_0 X^L \to M(G/L)$ ，满足

$$\eta_{L_1}(c') = \mathrm{res}^{L_2}_{L_1} \eta_{L_2}(c), \qquad \eta_{gLg^{-1}}(gc) = c_g\, \eta_L(c), \tag{3.4}$$

其中 $L_1 \leq L_2$ ，而 $c' \in \pi_0 X^{L_1}$ 是包含 $c \in \pi_0 X^{L_2}$ 的连通分支。

对于 $X = S(\bar{\rho}_G)$，我们有

$$X^L \simeq \begin{cases} S^{[G:L]-2} & L \in \mathcal{P}_G, \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，当且仅当 $[X^L \ G : L] \geq 3$ 时，它是连通的；当 L 真包含于某个真子群中时，这一条件成立。如果 $[G : H] = 2$，则 H 是正规子群，并且 $X^H = \{\pm u_H\}$，其中$g \not\in H$ 交换这两个点。

如果 $[\mathrm{G} : \mathrm{L}] \geq 3$，则 $\mathbb{Z}[\pi_0 \mathrm{X}^L] \cong \mathbb{Z}$。将该生成元记为 w_L。然后定义 $\mathrm{x}_L := \eta_L(\mathrm{w}_L)$。如果 $[\mathrm{G} : \mathrm{L}] = 2$，则 $\mathbb{Z}[\pi_0 \mathrm{X}^L] \cong \mathbb{Z}\{\mathrm{u}_L\} \oplus \mathbb{Z}\{-\mathrm{u}_L\}$，其中 $\mathrm{g} \in \mathrm{G} \setminus \mathrm{L}$，满足 $\mathrm{gu}_L = -\mathrm{u}_L$。在这种情况下，定义 $\mathrm{x}_L := \eta_L(\mathrm{u}_L)$。

给定函数族 $\eta_L \colon \mathbb{Z}[\pi_0 X^L] \to M(G/L)$。定义 $\eta_L(-u_L) = g x_L$，其中 $g \not\in L$；由于 $M(G/L)$ 上的 $c_h = \mathrm{id}$ 对于 $h \in L$ 是独立于 g 的。□

令$K_1, \ldots, K_r$为G的极大真子群的共轭类代表元，并设$W_i = N_G(K_i)/K_i$。由极大性可知，当 K_i 在G中不正规时，$W_i = 1$；而当K_i 正规时，$W_i = G/K_i$ 是素数阶循环群。现在我们描述 $\tilde{H}^0_G\big(S(\bar{\rho}_G)_+$中对应于每个$K_i$的连通分支；$M\big)$。定义

$$A_i = \begin{cases} \underline{M}(G/K_i)^{W_i} & \text{if } [G : K_i] \geq 3, \\ \left\{ x \in \underline{M}(G/K_i) : \mathrm{res}^{K_i}_L(c_g x - x) = 0 \text{ for all maximal } L < K_i \right\} & \text{if } [G : K_i] = 2, \end{cases}$$

其中，在第二种情况下，where $g \in G \setminus K_i$。

推论 3.5. 设 G 为有限群，M 为一个 *G-Mackey*函子。则

$$\tilde{H}^0_G\big(S(\bar{\rho}_G)_+; \underline{M}\big) \cong \left\{ (x_i) \in \prod_{i=1}^{r} A_i \ : \ \mathrm{res}^{K_i}_{K_i \cap gK_jg^{-1}} x_i = \mathrm{res}^{gK_jg^{-1}}_{K_i \cap gK_jg^{-1}} c_g x_j \ \ \textit{whenever } K_i \neq gK_jg^{-1} \right\}.$$

只需令 g 遍历 $K_i \backslash G / K_j$ 的一组代表元。特别地，如果 G 没有指数为2的子群，则对所有 i，有 $A_i = M(G/K_i)^{W_i}$。

证明。 我们首先考虑定理 3.3 的条件 (i) 和 (ii)。根据条件 (i)，只需考虑对应于G的极大子群的连通分支。此外，条件 (ii) 允许我们将注意力限制在这些子群的共轭类代表元上。因此，定理 3.3 中的相容条件给出

$$\mathrm{res}^{K_i}_{K_i \cap gK_jg^{-1}} x_i = \mathrm{res}^{gK_jg^{-1}}_{K_i \cap gK_jg^{-1}} c_g x_j.$$

因此结论得证。 □

注 3.6： 如果 G 的每个极大子群都是正规子群，那么上述推论中的方程就化为定理 3.3 的条件 (1)。

对于 p-循环群 C_{p^n}，上述推论具体化为以下结果 t.

推论 3.7。 设 $G = C_{p^n}$，其中 $n \geq 1$。则

$$\tilde{H}^0_G\big(S(\bar{\rho}_G)_+; \underline{M}\big) \cong \begin{cases} \underline{M}\big(G/C_{p^{n-1}}\big)^{G/C_{p^{n-1}}} & p \textit{ odd}, \\ \underline{M}(G/e) & p = 2, \ n = 1, \\ \left\{ x \in \underline{M}\big(G/C_{p^{n-1}}\big) : \mathrm{res}^{C_{p^{n-1}}}_{C_{p^{n-2}}}(x) \in \underline{M}\big(G/C_{p^{n-2}}\big)^{G/C_{p^{n-2}}} \right\} & p = 2, \ n \geq 2, \end{cases}$$

在此同构下，$\varphi_G(m) =$ 限制映射$^G_{G/C_{p^{n-1}}}(m)$。

证明。 由于$C^{p^{n-1}}$ 是G的唯一极大子群，并且它是指数为p 的正规子群，其魏尔群为$G/C^{p^{n-1}}$。因此，根据推论 3.5，乘积 $\prod_{i=1}^{r} A_i$ 在p 为奇数时是$(G/C^{p^{n-1}})^{G/C_{p^{n-1}}}$。 —

考虑 $p = 2$ 的情形。若 $n = 1$，则由恒等式$S(\rho_{C_2}^{\sim}) = C_2/e$可得结论。若 $n \geq 2$，则 $C^{p^{n-2}}$ 是 $C^{p^{n-1}}$ 的唯一极大子群，因此，对于 G 的生成元 g，A_1 由 $cs\mathrm{res}^{C_{p^{n-1}}}_{C_{p^{n-1}}}(x) = \mathrm{res}^{C_{p^{n-1}}}_{C_{p^{n-2}}}(x)$ 定义。因此结论成立。 □

对于 Klein 四元群 K_4，，令 H_1，、H_2，和 H_3 表示其三个极大子群，它们的指标均为 2。于是，推论3.5归结为以下结果。

推论 3.8. 令 $G = K_4$ 和 α_i 为 K_4 的非平凡不可约特征标，且 $\ker \alpha_i = H_i$ 对于 $i = 1, 2, 3$。 则

$$\tilde{H}^0_{K_4}\big(S(\bar{\rho}_{K_4})_+; \underline{M}\big) \cong \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \bigoplus_{i=1}^{3} \underline{M}(K_4/H_i) : \ \mathrm{res}^{H_1}_e x_1 = \mathrm{res}^{H_2}_e x_2 = \mathrm{res}^{H_3}_e x_3\big\}.$$

特别地，并未对 x_i施加 K_4/H_i-不变性。在此同构下，

$$\varphi_{K_4}(m) = (\mathrm{res}^{K_4}_{H_1} m, \mathrm{res}^{K_4}_{H_2} m, \mathrm{res}^{K_4}_{H_3} m).$$

证明。 群 K_4，的极大真子群在共轭意义下为 H_1、H_2，和 H_3。因此，推论 3.5 与注 3.6 一起给出了 $\tilde{H}^0_{K_4}\big(S(\bar{\rho}_{K_4})_+; M\big)$ 的上述描述。 φ 的描述直接由 (3.1) 得出。 □ —

接下来，我们考虑阶为 12 的交错群 A_4，。由于 A_4 没有指数为 2 的子群，因此，对于每个真子群 $J < A_4$，不动点空间 $S(\bar{\rho}_{A_4})^J \simeq S^{[A_4:J]-2}$ 都是连通的。回顾可知，群 A_4，的极大真子群在共轭意义下为K_4 和 C_3。因此，推论 3.5 给出了 $\tilde{H}^0_{A_4}\big(S(\bar{\rho}_{A_4})_+; M\big)$ 的如下描述。 —

推论 3.9. 对于任意 A_4-*Mackey*函子 M，我们有

$$\tilde{H}^0_{A_4}\big(S(\bar{\rho}_{A_4})_+; \underline{M}\big) \cong \big\{(x, y) \in \underline{M}(A_4/K_4)^{C_3} \times \underline{M}(A_4/C_3) : \mathrm{res}^{K_4}_e x = \mathrm{res}^{C_3}_e y\big\}.$$

且映射 $\varphi_G\colon \underline{M}(A_4/A_4) \to \tilde{H}^0_{A_4}\big(S(\bar{\rho}_{A_4})_+; \underline{M}\big)$ 由(限制映射$^{A_4}_{K_4}$，限制映射$^{A_4}_{C_3}$)给出。 — —

4. 2-切片的刻画

本节的主要目标是为任意G-谱建立2-切片的刻画。随后，我们将这一刻画应用于交错群A_4和p-循环群。我们首先给出关于 Eilenberg-Mac Lane 谱的一些分类结果。

命题 4.1. 设 G 为有限群，M 为 G-*Mackey*函子。谱 $\Sigma^2 H\underline{M}$ 是*2*-切片，当且仅当对每个子群 H，以下条件成立。

(1) 若 $|H| = 2$，则限制映射$^{H}_{e}$是单射。*(2)* 若 $|H| \geq 3$，则 φ_H：限制映射 $_H\underline{M}(H/H) \to \tilde{H}^0_H(S(\bar{\rho}_H)_+;$ 限制映射$_H\underline{M})$ 是双射。 —

证明。 我们首先假设条件（1）和（2）成立。

根据定理 2.2，$\Sigma^m H\underline{M} \geq m$对每个 $m \geq 0$均成立。特别地，我们关注$m = 2$的情形。为确定 M需满足的条件，使得 $\Sigma^2 H\underline{M}$成为 2-切片，我们考虑以下群：

$$[S^{k\rho_H + r}, \Sigma^2 H\underline{M}]^H \cong \tilde{H}^{2-k-r}_H(S^{k\bar{\rho}_H}; \underline{M}),$$

对于 $k|H| > 2$和 $r \geq 0$。对于 $\Sigma^2 HM \leq 2$，这些群必须为零。为此，注意到如果$2-k-r<0$，则这显然成立。但当 $2-k-r \geq 0$时，我们逐一分析这种情形。
假设 $|H| = 2$。条件 $k|H| > 2$ 意味着 $k > 1$。因此，唯一满足 $2-k-r \geq 0$的情况是 $(k,r) = (2,0)$。在这种情况下，根据引理 3.2，$\tilde{H}^0_H(S^{2\bar{\rho}_H}; M) \cong \ker(\varphi_H) = \ker(\mathrm{res}^H_e)$ 为零，这由假设 (1) 得出。

若 $|H| \geq 3$，则有序对 (k,r) 的可能取值为 (1,0)、(1,1) 和 (2,0)。第一种情况下，群为 $\tilde{H}^1_H(S^{\bar{\rho}_H}; M) \cong \mathrm{coker}\ \varphi_H$。对于其他情况，利用引理 3.2，可再次得到 $\ker(\varphi_H)$。因此，两项结论均由 (2) 得出。

反过来，假设 $\Sigma^2 HM$是一个 2-切片。那么，条件（1）和（2）直接由 2-切片的定义得到。□

上面的命题完整刻画了 $\Sigma^2 HM$何时是一个 2-切片。接下来，我们研究 $\Sigma^1 H\underline{M}$成为 2-切片的类似代数判据。

命题 4.2. 设 G 是一个有限群，M 是一个 *G-Mackey*函子。当且仅当 $M(G/e) = 0$，并且对于每个 $H \in G$（其中 $|H| \geq 3$.），φ_H 是单射时，谱 $\Sigma^1 H\underline{M}$ 是一个2-切片。

Proof. 我们首先假设上述条件成立，并证明 $\Sigma^1 HM$是一个 2-切片。

同样，对于 $\Sigma^1 H\underline{M} \leq 2$，当$k|H| > 2$且$r \geq 0$时，我们需要群 $\tilde{H}^{1-k-r}_H(S^{k\bar{\rho}_H}; M)$ 为零。对此，唯一的非平凡对(k,r)是(1,0)，这意味着当 $|H| \geq 3$时，该群的值为 $\ker \varphi_H$。因此，当且仅当对于所有 $|H| \geq 3$都有 $\ker \varphi_H = 0$时，$\Sigma^1 HM \leq 2$。

为证明 $\Sigma^1 HM \geq 2$，我们诉诸定理 2.2，该定理表明

$$\pi_k(\Phi^e \Sigma^1 H\underline{M}) = 0 \qquad \text{for all } k < 2.$$

但 $\underline{M}(G/e) = 0$，从而得到所需结果。

另一个方向直接由 1-切片的定义得到。□

注记 4.3. 由命题 2.3，$\Sigma^1 HM$在 M的所有限制映射都是单射时是一个 1-切片。然而，如果 $M(G/e) = 0$，则 $\Sigma^1 HM$是可缩的。

下面的命题是一个显然的事实，直接由定义得到。Slone [6]在没有证明的情况下将其用于 K_4；我们将其推广到任意有限群如下。

命题 4.4. 对于一个 *G-Mackey*函子 M，如果 $\underline{M}(G/e) = 0$，则 $\Sigma^1 H\underline{M} \in [2, |G|]$.

证明。由前一个命题可知，$\Sigma^1 HM \geq 2$。对于另一边的界，我们需要证明，对于每个子群$H \leq G$以及$k|H| > |G|$和$r \geq 0$，群 $\tilde{H}^{1-k-r}_H(\underline{S}^{k\bar{\rho}_H}; M)$为零。这迫使$k \geq 2$。因此，对于任意$r \geq 0$，$1-k-r < 0$，故该群对所有$H \leq G$均为零。于是结论得证。□

为得到形如 $\Sigma^1 HM$ 的 2-切片的另一种刻画，我们先给出以下定义。

定义 *4.5*。对于有限群 G 和 $k \geq 1$，定义 $\mathcal{P}^{(k)}_G := \{L \in \mathcal{P}_G : |L| = k\}$。对于 *Mackey*函子 M，我们定义映射 $\psi_H : M(G/H) \to \prod_{C \in \mathcal{P}^{(2)}_H} M(G/C)$，由

$$\psi_H(m) = (\mathrm{res}^H_C(m))_C.$$

给出

由此，我们可以完整地推导出 $\Sigma^1 HM$成为 2-切片的代数判据，如下所示。

命题 4.6. $\Sigma^1 H\underline{M}$ 是一个2-切片，当且仅当对于所有 $H \leq G.$，ψ_H都是单射

证明。由（ 3.1）和命题 4.2，只需证明以下各项等价

(1) $M(G/e) = 0$ 且 $\bigcap_{L\in\mathcal{P}_H}$ 限制映射的核 $\ker_L^H = 0$ 对于 $H \leq G$ 满足 $|H| \geq 3$。

(2) ψ_H 对于所有 $H \leq G$ 都是单射。

假设 (2) 成立。那么对于 $H = e$，我们有 $\psi_e : M(G/e) \to 0$ 是单射。因此 $M(G/e) = 0$。假设 $|H| \geq 3$，则 $\bigcap_{L\in\mathcal{P}_H} \mathrm{kerres}_L^H \subseteq \ker \psi_H$。因此 (1) 成立。

另一方面，假设 (1) 为真。为了证明对于所有 $H \leq G$，ψ_H 是单射，我们对 $|H|$ 使用归纳法。注意，$|H| = 1$、2 显然成立。设 $|H| \geq 3$。根据归纳假设，我们假设对于所有 $L \in \mathcal{P}_H$，ψ_L 是单射。取 $m \in \ker \psi_H$。则 $\psi_H(m) = (\mathrm{res}_L^H(m))_L = 0$，其中 $L \in \mathcal{P}^{(2)} H$。于是，$\psi_L(\mathrm{res}_L^H(m))$ 恰好是 $\psi_H(m)$ 的连通分支。因此，$\psi_L(\mathrm{res}_L^H(m)) = 0$，由归纳假设可得 $\mathrm{res}_L^H(m) = 0$。因此，$m \in \bigcap_{L\in\mathcal{P}_H} \ker(\mathrm{res}_L^H) = 0$。所以 ψ_H 是单射。□

下面是一个直接的推论。

推论 4.7. 如果 $\Sigma^1 H M$ 是一个2-切片，那么对于每个奇数阶子群 $H \leq G$，都有 $M(G/H) = 0$.

证明。 设 H 是G 的一个奇数阶子群。根据拉格朗日定理，H 不含有满足 $|C| = 2$ 的子群C ，因此 $\mathcal{P}^{(2)} H = \emptyset$。这就证明了该结果。□

备注 4.8. 推论 4.7 的逆命题不成立。例如，设G 是任意一个偶数阶群 $|G| \geq 4$。考虑 $M = g$，其由 $g(G/G) = \mathbb{F}_2$ 和 $g(G/L) = 0$ 给出，其中$L \in \mathcal{P}_G$。于是，对于G的所有奇数阶子群K，都有 $\underline{M}(G/K) = 0$。然而 $\Sigma^1 H\underline{M}$不是一个 2-切片，因为

$$[S^{\rho_G}, \Sigma^1 H\underline{M}]^G \cong \tilde{H}_G^0(S^{\bar{\rho}_G}; \underline{M}) \cong \ker(\underline{M}(G/G) \to \tilde{H}_G^0(S(\bar{\rho}_G)_+; \underline{M})) \cong \mathbb{F}_2 \neq 0.$$

最后一个等式由定理 3.3 得出。

介绍了必要的工具后，我们现在可以陈述主要定理，该定理刻画任意有限群G上的 2-切片。

定理 4.9. G-谱 Y 是一个2-切片，当且仅当满足以下条件。

(1) $\underline{\pi}_k Y = 0$ 对 $k \neq 1, 2$ 且 $\underline{\pi}_1 Y(G/e) = 0$。(2) $\Sigma^2 H\pi_2(Y)$ 是一个 2-切片。(3) 对每个满足 $|H| \geq 3$ 的 $H \leq G$，k- 不变量 $\kappa : \Sigma^1 H\pi_1 Y \to \Sigma^3 H\pi_2 Y$ 诱导一个单射映射 $\ker(\varphi_H(\pi_1 Y)) \to \tilde{H}_H^1(S(\bar{\rho}_H)_+; \pi_2 Y)$。

证明。 证明中，我们首先假设Y 是一个 2-切片。

由于 $Y \geq 2$，定理 2.2 推出 $\pi_k(Y^e) = 0$ 对 $k < 2$成立。因此，$\pi_1 Y(G/e) = 0$且 $\pi_k Y = 0$对 $k \leq 0$成立。而对于 $k \geq 3$，我们有 $S^k \geq 3$。因此，$[S^k, Y]^G = 0$。由此可知，Y 唯一可能非零的同伦 Mackey 函子是 $\pi_1 Y$ 和 $\pi_2 Y$。因此，Y 属于以下纤维序列：

$$\Sigma^2 H\underline{\pi}_2 Y \longrightarrow Y \longrightarrow \Sigma^1 H\underline{\pi}_1 Y. \tag{4.10}$$

由于$H\underline{\pi}_1 Y \leq 0$ 以及$Y \leq 2$，因此有 $\Sigma^2 H\pi_2 Y \leq 2$。另一方面，$\Sigma^2 H\pi_2 Y \geq 2$始终成立。因此，$\Sigma^2 H\pi_2 Y$是一个2-切片。

考虑由上述纤维序列诱导的长正合列

$$\cdots [S^{k\rho_H+r}, \Sigma^2 H\underline{\pi}_2 Y]^H \longrightarrow [S^{k\rho_H+r}, Y]^H \longrightarrow [S^{k\rho_H+r}, \Sigma H\underline{\pi}_1 Y]^H \longrightarrow [S^{k\rho_H+r}, \Sigma^3 H\underline{\pi}_2 Y]^H \cdots$$

$$\downarrow\cong \qquad\qquad \downarrow\cong \qquad\qquad \downarrow\cong$$

$$\tilde{H}_H^{2-r-k}(S^{k\bar{\rho}_H}; \underline{\pi}_2 Y) \qquad \tilde{H}_H^{1-r-k}(S^{k\bar{\rho}_H}; \underline{\pi}_1 Y) \longrightarrow \tilde{H}_H^{3-r-k}(S^{k\bar{\rho}_H}; \underline{\pi}_2 Y)$$

令$k|H| > 2$且$r \geq 0$。因此，群 $\tilde{H}_H^{1-r-k}(S^{k\bar{\rho}_H}; \pi_1 Y)$ 只有在可容许对$(k, r) = (1,0)$下才可能非零，此时该群为 $\ker(\varphi_H(\pi_1 Y))$，而另一个群

$\tilde{\mathrm{H}}^2_H(\underline{\mathrm{S}}^{\bar{\rho}_H};\pi_2\mathrm{Y}) \cong \tilde{\mathrm{H}}^1_H(\mathrm{S}(\bar{\rho}_H)_+;\pi_2\mathrm{Y})$，且左角为零，因为 $\Sigma^2\mathrm{H}\pi_2\mathrm{Y} \leq \underline{2}$。因此$[\mathrm{S}^{k\rho_H+\mathrm{r}},\mathrm{Y}]^H \cong \ker(\varphi_H(\pi_1\mathrm{Y})) \Rightarrow \tilde{\mathrm{H}}^1_H(\mathrm{S}(\bar{\rho}_H)_+;\pi_2\mathrm{Y})$。

对于逆向部分，假设上述所有条件均成立。条件 (3) 表明 $Y \leq 2$。再次考虑纤维序列 (4.10)，由于条件 (1)，我们有 $\pi_1 Y(G/e)$。因此，由命题 4.4 可得 $\Sigma^1 H\pi_1 Y \geq 2$。

由条件 (2)，$\Sigma^2 H\pi_2(\underline{Y}) \geq 2$。由于局部化子范畴在扩张下封闭，因此 $Y \geq 2$。□

4.11. 交错群 A_4. 设 $G = A_4$ 是阶为 12 的交错群。除共轭外，A_4 的子群包括平凡子群 e、阶为 2 的循环子群 C_2 、阶为 3 的循环子群 C_3 、Klein 四元群 K_4，（它是A_4, 的正规子群），以及A_4本身。设 H_1,H_2,H_3 是K_4 （因而也是A_4）中阶为 2 的三个子群。由于A_4 没有指数为 2 的子群，推论 3.5 中的群A_i 只是 Weyl 不动点。

我们首先考虑 Eilenberg–Mac Lane 谱。将命题 4.1 和 4.2 应用于群 A_4, ，得到以下结果。

命题4.12. 设 M 是一个$\underline{A_4}$-*Mackey*函子。

(1) 谱 $\Sigma^2 H\,M$ 是一个 *2*-切片，当且仅当满足以下条件：*(a)* 限制映射 $res^{C_2}e : M(A_4/C_2) \longrightarrow M(A_4/e)$ 是单射。*(b)* 限制映射 $res^{C_3}e : M(A_4/C_3) \longrightarrow M(A_4/e)^{C_3}$ 是双射。*(c)* 映射 $\left(res^{K_4}H_1, res^{K_4}H_2, res^{K_4}H_3\right) : M(A_4/K_4) \longrightarrow T^{K_4}(M)$ 是双射。*(d)* 映射 $\left(res^{A_4}_{K_4}, res^{A_4}_{C_3}\right) : M(A_4/A_4) \longrightarrow T^{A_4}(M)$ 是双射。

其中，$T^{K_4}(M) := \tilde{H}^0_{K_4}\left(S(\bar{\rho}_{K_4})_+;\ M\right)$ 以及$T^{A_4}(M) := \tilde{H}^0_{A_4}\left(S(\bar{\rho}_{A_4})_+;\ M\right)$，其中这些群分别在推论*3.8*和推论*3.9*中进行了描述。

(2) 谱 $\Sigma^1 H\,M$ 是一个2-切片，当且仅当满足以下条件：

*(a) Mackey*函子在轨道 A_4/e 和 A_4/C_3 处的取值为零。即。

$$\underline{M}(A_4/e) = 0 \text{ and } \underline{M}(A_4/C_3) = 0.$$

(b) 映射 $M(\underline{A_4}/K_4) \to \bigoplus_{i=1}^{3} \underline{M}(A_4/H_i)$ 是单射。

(c) 限制映射 res $^{A_4}_{K_4}$ 是单射。

证明。(1) 该结果直接由命题 4.1以及推论3.7和3.9得出。

(2) 该断言由命题 4.2得出。 □

对于一般的A_4-谱Y，完整分类如下。

定理 4.13. A_4-谱Y是2-切片，当且仅当

(1) 对于 $k \neq 1,2$ ，同伦麦基函子 $\underline{\pi}_k Y$ 为零，且 $\pi_1 Y(A_4/e) = \underline{0}$。 *(2)* 谱 $\Sigma^2 H\pi_2 Y$ 是一个 *2*-切片。*(3)* κ-不变量 $\Sigma^1 H\pi_1 Y \to \Sigma^3 H\pi_2 Y$ 诱导以下单射：

$$\underline{\pi}_1 Y(A_4/C_3) \hookrightarrow H^1_{C_3}\left(S(\bar{\rho}_{C_3}); \mathrm{res}_{C_3}\underline{\pi}_2 Y\right) = \underline{\pi}_2 Y(A_4/e)_{C_3},$$

$$\bigcap_{i=1}^{3} \ker\left(\mathrm{res}^{K_4}_{H_i}\right) \hookrightarrow \tilde{H}^1_{K_4}\left(S(\bar{\rho}_{K_4})_+; \mathrm{res}_{K_4}\underline{\pi}_2 Y\right),$$

$$\ker\left(\mathrm{res}^{A_4}_{K_4}\right) \cap \ker\left(\mathrm{res}^{A_4}_{C_3}\right) \hookrightarrow \tilde{H}^1_{A_4}\left(S(\bar{\rho}_{A_4})_+; \underline{\pi}_2 Y\right).$$

证明。 这一刻画直接由定理 4.9 以及推论 3.7、3.8 和 3.9 得出。□

4.14. 循环p-群。设 p 为素数，考虑循环 p-群 C^{p^n}。它有唯一的极大子群，即 $C^{p^{n-1}}$。由于 C^{p^n} 的子群格是一条链，每个子群至多贡献一个条件。因此，我们可以用 j 为这些条件编索引。

Appl将命题 4.1 和 4.2 应用于群 C^{p^n}，可得以下结果。

命题4.15。设 M 为一个$\underline{C}^{p^n}$-*Mackey*函子。则以下结论成立。

(1)设 p 为奇数。则 $\Sigma^2 H\, M$ 是一个2-切片，当且仅当对每个 $1 \leq j \leq n$，限制映射

$$\mathrm{res}^{C_{p^j}}_{C_{p^{j-1}}} : \underline{M}(C_{p^n}/C_{p^j}) \longrightarrow \underline{M}(C_{p^n}/C_{p^{j-1}})^{C_{p^j}/C_{p^{j-1}}}$$

是双射。

(2)假设 $p = 2$。那么 $\Sigma^2 H\, M$ 是一个 2-切片，当且仅当满足以下条件：(a) 若 $n = 1$，则限制映射^{C_2}e 是单射。(b) 若 $n \geq 2$，则 限制映射^{C_2}e 是单射，并且对于每个 $2 \leq j \leq n$，限制映射 限制映射$^{C_{2^j}}$ $C_{2^{j-1}}$ 是到以下集合的双射

$$\left\{ x \in \underline{M}(C_{2^j}/C_{2^{j-1}}) \;\middle|\; \mathrm{res}^{C_{2^{j-1}}}_{C_{2^{j-2}}}(x) \in \underline{M}(C_{2^j}/C_{2^{j-2}})^{C_{2^j}/C_{2^{j-2}}} \right\}.$$

(3)假设 $p = 2$。那么 $\Sigma^1 H\, M$ 是一个 2-切片，当且仅当满足以下条件：

(a) 若 $n = 1$，则 $\underline{M}(C_2/e) = 0$。

(b) 若 $n \geq 2$，则 $\underline{M}(C_{2^n}/e) = 0$，并且对于每个 $2 \leq j \leq n$，限制映射 限制映射$^{C_{2^j}}$ $C_{2^{j-1}}$ 是到以下集合的单射

$$\left\{ x \in \underline{M}(C_{2^j}/C_{2^{j-1}}) \;\middle|\; \mathrm{res}^{C_{2^{j-1}}}_{C_{2^{j-2}}}(x) \in \underline{M}(C_{2^j}/C_{2^{j-2}})^{C_{2^j}/C_{2^{j-2}}} \right\}.$$

证明。 该结论直接由推论 3.7 和命题 4.1 得出。 □

作为命题 4.6 的直接推论，我们得到以下关于奇素数幂阶循环群的注记。

注记 4.16. 设p 为奇素数，且M 为非零C^{p^n}-Mackey函子。则$\Sigma^1 HM$不可能是一个 2-切片。

—

对于一个C^{p^n}-谱Y，记

$$\kappa_j \colon \ker\left(\mathrm{res}^{C_{p^j}}_{C_{p^{j-1}}} : \underline{\pi}_1 Y(C_{p^n}/C_{p^j}) \to \underline{\pi}_1 Y(C_{p^n}/C_{p^{j-1}})\right) \longrightarrow \tilde{H}^1_{C_{p^j}}\left(S(\bar{\rho}_{C_{p^j}})_+; \mathrm{res}_{C_{p^j}} \underline{\pi}_2 Y\right)$$

由 κ-不变式 $\kappa : \Sigma H \underline{\pi}_1 Y \to \Sigma^3 H \underline{\pi}_2 Y$诱导。 _

将定理 4.9 应用于循环p-群C^{p^n}，我们得到以下关于 2-切片的刻画。

定理 4.17. 一个 C^{p^n}-谱 Y 是一个2-切片，当且仅当

(1) $\underline{\pi}_k Y \cong 0$ 若 $k \neq 1, 2$ 且 $\underline{\pi}_1 Y(C^{p^n}/e) = 0$. *(2)* $\Sigma^2 H \underline{\pi}_2 Y$ 是一个 *2*-切片。*(3)* 若 p 为奇数，则对每个 $1 \leq j \leq n$，κ_j 都是单射。

(4) 若 $p = 2$ 且 $n \geq 2$，则对每个 $2 \leq j \leq n$，κ_j 都是单射。

注记 4.18. $\tilde{H}^1_G(S(\bar{\rho}_G)_+; M)$ 的计算可参照论文 [3, (3.5)]进行。更确切地说，令 S_k 表示由G-集组成的旗$F_0 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k$，且$G$ 通过左平移作用。我们有一个面映射 $d_i : S_k \to S_{k-1}$，它删去F_i。对于一个G-Mackey函子，这诱导出一个上链复形

$$\underline{M}(G/G) \xrightarrow{\delta^0} \underline{M}(S_0) \xrightarrow{\delta^1} \underline{M}(S_1) \xrightarrow{\delta^2} \underline{M}(S_2) \cdots .$$

此上链复形的上同调通过同构给出 $\tilde{H}^k_G(S(\bar{\rho}_G)_+; M)$

$$\tilde{H}^k_G(S(\bar{\rho}_G)_+; \underline{M}) \cong \tilde{H}^{k+1}_G(S^{\bar{\rho}_G}; \underline{M}) \text{ for all } k \geq 1.$$

按照Grodal的工作 [2]，可以利用Mackey函子M 的过滤计算出相同结果。

参考文献

[1] D. Dugger，一个用于*KR*理论的*Atiyah–Hirzebruch*谱序列，K-Theory **35** (2005)，第3-4期，213–256。[2]J. Grodal，通过子群复形的高阶极限，Ann. of Math. (2) Second Series，**155**，第2期（2002），第405-457页[3] M. A. Hill, M. J. Hopkins, D. C. Ravenel，关于不存在*Kervaire*不变量为一的元素，Ann. of Math. (2) **184** (2016)，第1期，1–262。[4]M. A. Hill, C. Yarnall，等变切片过滤的新表述及其在C^p-切片中的应用，Proc. Amer. Math. Soc. **146**(2018)，第8期，3605–3614。[5]A. Mathew, N. Naumann, Niko, J. Noel, Justin，导出归纳与限制理论，Geom. Topol.**23** (2019)，第2期，541–636。[6] C. Slone，*Klein*四元2-切片及 $\Sigma^{\pm}{}_{nH\mathbb{Z}}$的切片，Math. Z. **301** (2022)，3895–3938。[7] V. Voevodsky，动机稳定同伦理论中的公开问题 *I*，Motives, polylogarithms and Hodge theory, Part I (Irvine, CA, 1998), Int. Press Lect. Ser., vol. 3, Int. Press, Somerville, MA, 2002, pp. 3–34。[8]J. R. Ullman，关于正则切片谱序列，博士论文，麻省理工学院，2013年。

数学系 印度理工学院鲁尔基分校，印度北阿坎德邦-247667
电子邮件地址：surojit.ghosh@ma.iitr.ac.in；surojitghosh89@gmail.com

数学系，印度理工学院鲁尔基分校，印度北阿坎德邦-247667电子邮件地址：ankit_k@ma.iitr.ac.in