非相干编码下的量子容量

Oxana Shaya[1], * 和 Zahra Baghali Khanian[2, 3]
[1] *Institute for Information Processing (tnt/L3S), Leibniz Universität Hannover, 30167 Hannover, Germany*
[2] *Perimeter Institute for Theoretical Physics, Waterloo, Ontario, Canada*
[3] *Institute for Quantum Computing, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada*
（日期：2026年11月24日）

当编码器受限于非相干操作时，任意微弱的退极化噪声都会使任意输入基下的量子容量降为零。此时，即使是一个量子比特也无法可靠传送：如果输出以 $\varepsilon \le 1/2$ 的概率被替换为最大混合态，那么在任意分块长度下，纠缠保真度至多为 $1-\varepsilon/2$ 。在采用不受限制的解码时，一个单字母公式将非相干编码下的容量表示为：对具有相同环境输出的基态系综取 Holevo 信息的最大值。无论采用非相干编码还是不受限编码，施加非相干解码都会使容量最多降低一半；这一因子是最优的。我们给出非相干解码器保真度的界，并计算多量子比特泡利信道在非相干编码下的容量。

arXiv:2611.32514v1 [quant-ph] 24 Nov 2026

I. 引言

量子通信协议通常将通信和共享纠缠视为资源，同时将局域操作视为免费。资源理论使我们能够重新审视这一假设。相干性的资源理论说明了局域量子操作所需的相干性 [1–4]。在量子态合并和态再分配中，限制局域相干性会改变传输共享态的一部分所需的通信和纠缠 [5, 6]。Tan等人 构造了一种纠错协议，该协议会消耗额外的相干辅助量子比特 [7]。Kelly等人 研究了在监测Clifford电路中，相干性如何限制针对测量的量子信息保护，并以相干性的形式界定稳定子码的距离 [8]。另一种限制要求连续逻辑对称性以横向方式作用于物理子系统，这限制了对局部错误的纠正 [9–11]。

当量子处理器协助一个局域操作受限的客户端[12]，，或当异构网络连接具有不同资源约束的各方时 [13]，也会产生不同的局域能力。这些情形促使我们将编码和解码分开处理。

相关工作量化了：使用受资源约束的操作，可以在给定量子态中编码多少经典信息，并在无噪声传输后将其恢复 [14, 15]。

相反，我们关注任意无记忆信道的渐近速率：当编码器、解码器，或二者都被限制为非相干操作（IO）时，能够传输多少量子信息？这些限制是相对于固定参考基而言的。不提供外部相干辅助系统。一个 IO 映射具有这样的克劳斯表示：其中每个算子都将一个参考基态映射为某个基态的倍数。

* 联系作者：shayaoxana@gmail.com

标准量子容量由正则化相干信息给出，并且可能超过单次信道使用的最优值 [16, 17]。当采用 IO 编码器和无限制解码器时，定理 1 给出了一个精确的单字母公式。该公式按照输入基态在信道环境中留下的量子态对其进行分组，而容量是在单个组内能够实现的最大 Holevo 信息。相同的环境输出使得经典码能够被相干地解码，这建立在私有经典通信与量子通信之间联系的基础上 [16, 18]。逆定理很强：对于任何高于该容量的码率，随着信道使用次数增加，纠缠保真度将以指数速度趋于零。该容量通常为零（第三节 C）。

退极化噪声以一定概率将信道输出替换为最大混合态。任意小的退极化噪声都会使带有非相干编码器的量子容量降为零；这一结论对每个有限维信道和每个输入基都成立，即使采用不受限制的解码。量子比特退相位展示了同样的不连续性。其计算基态仍能完美传输一个经典比特，而标准量子容量 $1-h_2(p)$ 在相位翻转概率 p 趋于零时趋近于 1。对于在该基下使用非相干编码器的情况，无论$0 < p < 1/2$为何，量子容量都为零，因为这两个输入会产生不同的环境态（第 V 节 A）。

第三节 C 的零容量判据解释了这种不连续性。令 $\mathcal{R}$ 为替换信道，即对每个输入都输出相同的态，并考虑 $\mathcal{N}_\varepsilon = (1-\varepsilon)\mathcal{N} + \varepsilon\mathcal{R}$。以概率 ε 发生替换，此时环境会接收到输入态本身。因此，对于每一对

个不同的基态，当 $\varepsilon > 0$ 时，使用非相干操作编码的两种容量均为零（推论 3）。此时，甚至连一个量子比特都无法可靠传输：对于 $\varepsilon \le 1/2$，任何采用非相干操作编码器且逻辑维数至少为二的编码，在任意分块长度下，其纠缠保真度都不超过 $1-\varepsilon/2$。由于 $\|\mathcal{N}_\varepsilon - \mathcal{N}\|_\diamond \le 2\varepsilon$，这两种容量在其取正值的所有位置都不连续。标准量子容量关于菱形

范数 [19] 连续。零错误容量也存在类似的不连续性 [20], , 这类容量要求在有限分块长度下实现完美传输。对于非相干操作编码器，即使编码的误差趋于零，这种不连续性仍然成立。

接收方可以利用信道输出中的相干性进行恢复。定理 4 表明，无论编码器是非相干操作还是不受限制的操作，IO 解码器所达到的容量至少是不受限制的解码所达到容量的一半。这一因子在两种情况下都是最优的。我们还对 IO 解码所能达到的保真度给出了界，并对采用 IO 解码时的两种容量进行了渐近刻画。对于非相干操作编码器，傅里叶信道达到二分之一这一因子：一次信道使用所提供的相干性可以解码另一次信道使用，且不存在任何编码能够做得更好。多量子比特泡利信道在计算基下不会损失码率。

II. 通信模型

A. 非相干操作

我们考虑一个有限维量子信道$\mathcal{N}_{A\to B}$，即一个完全正、保迹（CPTP）映射。相干性是相对于固定的正交归一基 [1, 2]定义的： $\{|x\rangle : x \in \mathcal{X}\}$ 在 A 上，以及 $\{|y\rangle : y \in \mathcal{Y}\}$ 在 B上。参考基中为对角形式的量子态是非相干的；复合系统使用乘积参考基。维数为d 的最大相干态为$|\Psi_d\rangle = d^{-1/2}\sum_{j=0}^{d-1}|j\rangle$。特别地， $|\Psi_2\rangle$ 是一个最大相干量子比特。

非相干操作（IO）是这样一种量子信道：它具有克劳斯表示，其中每个 Kraus算子都将每个基态映射为某个基态的倍数 [1]。当测量系统被丢弃、仅保留记录在参考基态中的结果时，这允许进行任意测量。附录 A 4 回顾了相关的自由操作类别，我们将用其进行比较。

B. 编码与容量

一个 n 次使用的编码具有 CPTP编码器 $\mathcal{E}_{A_1\to A^n}$ 和解码器 $\mathcal{D}_{B^n\to B_1}$，其逻辑维数为 $\dim A_1 = \dim B_1 = M$ [21, 第 24 节.1]。我们将 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{D}$ 称为编码映射。这里， A^n 和 B^n 分别是信道输入和输出。逻辑参考基独立于 A 和 B上的参考基固定，并将 $|i\rangle_{A_1}$ 与 $|i\rangle_{B_1}$等同。目标是逻辑恒等信道。最后施加的任何校正都属于 $\mathcal{D}$ 的一部分，并且必须满足相同的限制。通信不借助外部资源，不使用预共享纠缠或额外的通信信道。局部辅助系统包含在编码映射中。实现非相干操作映射时不提供相干辅助态，但 IO 解码器可以使用信道输出中已经存在的相干性。

子空间传输以趋于一致为 1 的保真度保留每个纯逻辑态。纠缠传输则在存在不可访问参考系的情况下保留一个最大纠缠态。对于无约束编码，两者的渐近容量相同 [22, 23]；我们证明，对于 IO 编码、IO 解码或二者同时施加时同样成立（附录 E）。因此，我们采用纠缠传输，其输入

$$|\Phi_M\rangle_{RA_1} = \frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{i=1}^{M}|i\rangle_R|i\rangle_{A_1}. \tag{1}$$

参考系 R 保持不变。解码态和纠缠保真度为 [24]

$$\begin{aligned}\omega_{RB_1} &= \left[\mathrm{id}_R\otimes(\mathcal{D}\circ\mathcal{N}^{\otimes n}\circ\mathcal{E})\right](|\Phi_M\rangle\langle\Phi_M|_{RA_1}),\\ F_e(\mathcal{D}\circ\mathcal{N}^{\otimes n}\circ\mathcal{E}) &= \langle\Phi_M|_{RB_1}\,\omega_{RB_1}\,|\Phi_M\rangle_{RB_1}.\end{aligned} \tag{2}$$

如果一系列具有逻辑维数 M_n的 n次信道使用编码满足 $\mathrm{liminf}_{n\to\infty} n^{-1}\log M_n \geq r$ ，且其纠缠保真度趋于 1，则码率 $r \geq 0$ 是可实现的。码率以每次信道使用的量子比特数计；容量是所有可实现码率的上确界。

$Q^{\mathrm{IO},\mathrm{all}}(\mathcal{N})$、$Q^{\mathrm{all},\mathrm{IO}}(\mathcal{N})$ 和 $Q^{\mathrm{IO},\mathrm{IO}}(\mathcal{N})$ 中的上标分别规定了编码器和解码器的限制；所有情形均允许任意完全正迹保持映射。两者均不受限制时，容量为 $Q(\mathcal{N})$。

C. 信道扩张与信息度量

为描述环境所丢失、接收方 E 无法获得的信息，我们使用 Stinespring 等距映射V： $A \to B\otimes E$ [21]。信道及其互补信道为

$$\mathcal{N}_{A\to B}(\rho_A) = \mathrm{tr}_E\left(V\rho_A V^\dagger\right), \tag{3}$$

$$\mathcal{N}^c_{A\to E}(\rho_A) := \mathrm{tr}_B\left(V\rho_A V^\dagger\right). \tag{4}$$

两个输入是否产生相同的环境态，与 V的选择无关。

所有对数均以 2 为底。对于经典随机变量， $H(X)$ 表示香农熵， $H(Y|X)$表示条件熵， $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$ 表示互信息。我们将 $h_2(p) = -p\log p - (1-p)\log(1-p)$记作二元熵。对于量子态$\rho$，冯·诺伊曼熵为 $S(\rho) = -\mathrm{tr}(\rho\log\rho)$。双体状态 ω_{AB} 的互信息为$I(A;B)_\omega = S(\omega_A) + S(\omega_B) - S(\omega_{AB})$。

双体状态的相干信息 ω_{RB} 为$I(R\rangle B)_\omega := S(\omega_B) - S(\omega_{RB})$。对于具有纯化 $|\psi\rangle_{RA}$的信道输入 ρ_A，令 $\omega_{RB} = (\mathrm{id}_R\otimes\mathcal{N})(|\psi\rangle\langle\psi|_{RA})$，并定义 $I_c(\rho_A,\mathcal{N}) = I(R\rangle B)_\omega$。标准量子容量是正则化相干信息 [16, 25,26],

$$\begin{aligned}Q(\mathcal{N}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}Q^{(1)}(\mathcal{N}^{\otimes n}),\\ Q^{(1)}(\mathcal{N}) &= \max_{\rho_A} I_c(\rho_A,\mathcal{N}).\end{aligned} \tag{5}$$

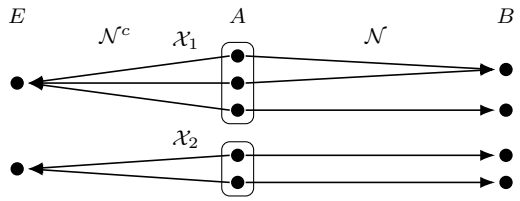

图 1. 当且仅当基输入对应的环境输出态 ρ_x^E 相同时，它们才属于同一类。箭头表示每个输入的两个约化输出。同一类中的接收方态 ρ_x^B 可以相同，也可以不同，如图所示。

对于输入系综 $\{p_x, \rho_x^A\}$，记 $\rho_x^B = \mathcal{N}(\rho_x^A)$和 $\rho_x^E = \mathcal{N}^c(\rho_x^A)$。接收方的Holevo 信息为

$$\chi(p) := S\left(\sum_x p_x \rho_x^B\right) - \sum_x p_x S(\rho_x^B), \tag{6}$$

而 $\chi_E(p)$ 的定义是将 B 替换为 E。对于该系综，$\chi(p)$ 给出了接收方进行测量所能获取的关于 x 的信息量上限。通过对多次使用进行编码并联合测量输出，可以实现低于 $\chi(p)$的经典通信速率 [27, 28]。

III. 非相干编码下的量子容量

对于每个输入基态 $|x\rangle$，将接收方和环境的输出态定义为

$$\rho_x^B = \mathcal{N}(|x\rangle\langle x|), \qquad \rho_x^E = \mathcal{N}^c(|x\rangle\langle x|). \tag{7}$$

令 $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ 表示定义在 $\mathcal{X}$上的概率分布。对于$p \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$，考虑经典-量子态

$$\omega_{XBE} = \sum_x p_x \, |x\rangle\langle x|_X \otimes V \, |x\rangle\langle x|_A \, V^\dagger, \tag{8}$$

其中，经典寄存器 X 记录所选的基输入。接收方的 Holevo 信息为 $I(X;B)_\omega = \chi(p)$。对于环境，则为 $I(X;E)_\omega = \chi_E(p)$。

我们称 $I(X;E)_\omega = 0$ 为隐私条件：环境无法获知基输入。由于 X 是经典的，当且仅当对每个满足 $p_x > 0$ 的 x，都有 $\rho_x^E = \omega_E$ 时，该条件成立。我们将环境输出相同的基输入归为环境类 $\mathcal{X}_1$, ..., $\mathcal{X}_\nu$。当且仅当一个分布的支撑集完全包含在某个类中时，该分布满足这一隐私条件。我们用 $\mathcal{P}(\mathcal{X}_c)$ 表示定义在某个类上的分布，并在该类之外扩展为零（图 1）。

定理 1（非相干编码下的容量）。 对于每个有限维量子信道 $\mathcal{N}$,

$$\begin{aligned} Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{N}) &= \max_{\substack{p \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \\ I(X;E)_\omega = 0}} I(X;B)_\omega \\ &= \max_c \max_{p \in \mathcal{P}(\mathcal{X}_c)} \chi(p). \end{aligned} \tag{9}$$

第二个表达式中的内层最大值是信道 $x \mapsto \rho_x^B$ 在输入限制为一个类时的经典容量。量子传输还要求保留编码字的叠加态。

为证明可达性，我们选择一个满足隐私条件的分布。经典—量子信道的编码定理保证存在一组基编码字，其可以被区分，且错误趋于零。隐私条件确保它们的环境输出相同。Uhlmann 定理指出，它们的纯化可以通过接收方系统上的酉变换彼此关联。将这些酉变换与解码测量的相干实现结合起来，即可得到一个量子解码器。相干恢复引理（引理 8）给出的下界是：其纠缠保真度至少为经典译码成功概率的平方。因此，其纠缠保真度趋于 1。编码器是一个 IO 等距映射，它将逻辑基态映射到不同的基编码字，并保持它们的叠加态。这类编码器在物理上是非相干的，因此也是严格非相干的 [29], ，所以定理 1 在两种更强的编码器限制下均成立。若以退相干协变非相干操作（DIO）或最大非相干操作（MIO）作为编码器，该公式未必成立（附录 B 5）。

逆定理建立在一个恒等式之上。对于两个输入基态,

$$\|\mathcal{N}(|x\rangle\langle y|)\|_1 = \big\|\sqrt{\rho_x^E}\sqrt{\rho_y^E}\big\|_1, \tag{10}$$

其中，$\|X\|_1 = \mathrm{tr}\sqrt{X^\dagger X}$ 是迹范数（附录A 2）。右侧是两个环境输出保真度的平方根。因此，只有当环境无法区分两个基输入时，它们之间的相干性才能毫无损失地到达接收方。IO 编码器的每个 Kraus算子都会将逻辑基态映射为基编码字的倍数，而可靠的编码必须保持它们之间的相干性。因此，几乎所有编码字都具有相同的环境输出，并且经典速率界适用于每次信道使用中的一个环境类（附录 B 2）。该逆定理很强：对于任何高于此容量的码率，随着信道使用次数增加，纠缠保真度将呈指数趋近于零（命题10）。

A. 与相干信息的关系

相干信息可以写成 $I_c(\rho, \mathcal{N}) = S(\mathcal{N}(\rho)) - S\mathcal{N}^c(\rho)$（附录A 3）。容量公式意味着

$$Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{N}) \le Q^{(1)}(\mathcal{N}) \le Q(\mathcal{N}). \tag{11}$$

对于任意 $p \in \mathcal{P}(\mathcal{X}_c)$，所有环境输出都相同。联合输出 $V|x\rangle$ 是纯态，因此 $S(\rho_x^B) = S(\rho_x^E)$。将这些等式代入相干信息

得到 [18]

$$I_c\left(\sum_x p_x \left|x\right\rangle\!\left\langle x\right|, \mathcal{N}\right) = I(X;B)_\omega = \chi(p). \tag{12}$$

这些对角输入态构成了 $Q^{(1)}(\mathcal{N})$ 取最大值所遍历的量子态集合的一个子集。这证明了式 (11) 中的不等式一。由于低于 $Q^{(1)}(\mathcal{N})$ 的每个码率都可以达到 [16, 25, 26]，因此不等式二成立。

B. 可加性与凸性

命题 2 (可加性与凸性)。 对于任意两个有限维量子信道，

$$Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2) = Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{N}_1) + Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{N}_2). \tag{13}$$

对于从 A 到 B 的信道 $\mathcal{N}_j$ 和概率 λ_j，

$$Q^{\mathrm{IO,all}}\left(\sum_j \lambda_j \mathcal{N}_j\right) \le \sum_j \lambda_j Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{N}_j). \tag{14}$$

对于可加性，积信道的环境类是各个信道环境类的积，相应的经典容量相加。对于凸性，满足混合信道隐私条件的分布，也满足每个具有正权重的分量的隐私条件。对于这一固定分布，混合接收方输出系综的 Holevo 信息不会超过其加权平均值。证明见附录 B 4。

C. 一般零容量

该公式刻画了非相干编码阻止量子通信的情形。对于每个有限维信道，$Q^{\mathrm{IO,\,all}}(\mathcal{N}) = Q^{\mathrm{IO,\,IO}}(\mathcal{N}) = 0$ 当且仅当

$$\rho_x^E = \rho_y^E \quad \Longrightarrow \quad \rho_x^B = \rho_y^B \tag{15}$$

对于每一对输入基态 $|x\rangle$，$|y\rangle$（附录 B 3）。下面定理 4 中的界表明，当解码器也采用非相干操作时，同一判据仍然适用。

如果不同的基输入留下不同的环境态，则每个类只包含一个输入，容量为零。特别地，如果互补信道是单射的，则在每个输入参考基下，两种容量都消失。

推论 3（任意弱噪声）。设 $\mathcal{N}$ 是一个从 A 到 B的信道，σ 是 B上的一个量子态，并且有 $0 < \varepsilon \le 1$。对于任意选定的参考基，信道 $\mathcal{N}_\varepsilon = (1-\varepsilon)\,\mathcal{N} + \varepsilon\,\mathrm{tr}(\cdot)\,\sigma$ 满足

$$Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{N}_\varepsilon) = Q^{\mathrm{IO,IO}}(\mathcal{N}_\varepsilon) = 0.$$

对于 $\varepsilon \le 1/2$，对于任意分块长度，任何使用非相干操作编码器且逻辑维数至少为二的 $\mathcal{N}_\varepsilon$ 编码，其纠缠保真度都不超过 $1-\varepsilon/2$。

对于不同的基输入，替换项在 $|x\rangle\!\langle y|$ 上为零，因此 $\|\mathcal{N}_\varepsilon(|x\rangle\!\langle y|)\|_1 \le 1-\varepsilon$。根据式 (10)，不同基输入的环境输出各不相同，因此容量为零。两个不同的编码字至少有一个位置不同，因此相同的界也限制了它们之间的相干性，并给出保真度界（引理 9，附录 B 3）。对于 $\sigma = I_B/d_B$，当 $d_B =$ 维数为 B 时，这相当于信道输出端的退极化噪声，而信道 $\mathcal{N}_\varepsilon$ 恰好是 Choi矩阵满秩的那些信道。对于固定的有限维系统 A 和 B，这些信道构成从 A 到 B 的完全正迹保持映射中的开稠密子集，其补集的 Lebesgue测度为零。因此，只要容量为正，使用非相干操作编码的两种容量都会不连续，尽管每个固定编码的保真度仍然连续（附录 B 3）。例如，只要擦除概率或衰减概率非零，擦除信道和量子比特振幅阻尼信道在任何输入基下使用非相干操作编码时的容量都为零（附录D 3）。当噪声概率低于 $1/2$ [30, 31] 时，两者的标准容量均为正。

IV. 非相干解码下的量子容量

现在我们要求解码器为非相干操作。接收方仍可利用信道输出中存在的相干性。$Q^{\mathrm{IO,\,all}}$的可达性构造中的解码器使用了不必属于非相干操作的酉算子。第五节B中的量子傅里叶变换信道表明，即使环境没有获知任何有关输入的信息，非相干操作解码器仍可能达不到该码率。

定理 4（使用非相干解码的容量界）。 将解码器限制为非相干操作，至多会使容量降低一半：使用不受限编码时为 $Q^{\mathrm{all,\,IO}}(\mathcal{N}) \ge \frac{1}{2}Q(\mathcal{N})$，使用非相干编码时为 $Q^{\mathrm{IO,\,IO}}(\mathcal{N}) \ge \frac{1}{2}Q^{\mathrm{IO,\,all}}(\mathcal{N})$。对于有限维信道，因子 $1/2$ 无法统一增大。

对于傅里叶信道，因子 $1/2$ 的来源很简单：采用非相干编码时，一次使用提供的相干性可用于解码另一次使用，并且没有任何编码能够做得更好（第五节B）。第五节 C 的标记信道 $\mathcal{N}_d$ 在采用不受限编码时趋近于该因子。第一个界表明，当且仅当 $Q(\mathcal{N})$ 为正时，$Q^{\mathrm{all,\,IO}}(\mathcal{N})$ 才为正。

A. 采用非相干解码的纠缠保真度

设 $\mathcal{T} = \mathcal{N}^{\otimes n} \circ \mathcal{E}$ 为从 A_1 到B^n的编码信道，其逻辑维数为 M。我们考虑完全正映射 $\mathcal{A}$：$B^n \to B_1$，它们允许存在满足以下条件的 Kraus算子$\{A_a\}$

$$\begin{aligned} &\sum_a A_a^\dagger A_a \le I_{B^n}, \\ &\sum_a \|A_a\left|y\right\rangle\|_{\ell_1}^2 \le 1 \quad \text{for every } y, \end{aligned} \tag{16}$$

其中，y 遍历输出基字符串，且 $\|v\|_{\ell_1} = \sum_i |\langle i|v\rangle|$ 使用逻辑基。第一个条件允许映射降低迹。若映射保持迹，这两个条件就会迫使每个 Kraus 算子的每一列至多只有一个非零元素，这正是 IO 所要求的。因此，允许迹损失就放宽了 IO 解码的限制。定义 $F_{\ell_1}(\mathcal{T}) = \sup_{\mathcal{A}} F_e(\mathcal{A}\circ\mathcal{T})$，其中上确界取遍这些映射。对于降低迹的映射，$F_e$ 与 $|\Phi_M\rangle$ 的重叠度和式（2）中的相同，只是不对输出进行归一化。

定理 5（采用非相干解码时的纠缠保真度）。对于逻辑维数为 M 的每个编码信道 $\mathcal{T}$，上确界 $\sup_{\mathcal{D}\in\mathrm{IO}} F_e(\mathcal{D}\circ\mathcal{T}) \le F_{\ell_1}(\mathcal{T})$。对于每个整数 $1 \le m \le M$，存在一个等距映射 $W\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^M$，将基态映射到不同的逻辑基态，使得限制信道 $\mathcal{T}_W(\rho) = \mathcal{T}(W\rho W^\dagger)$ 满足

$$\sup_{\mathcal{D}\in\mathrm{IO}} F_e(\mathcal{D}\circ\mathcal{T}_W) \ge \left(\sqrt{F_{\ell_1}(\mathcal{T})} - \sqrt{m/M}\right)_+^2 . \tag{17}$$

第二个上确界取遍输出维数为 m 的 *IO* 解码器，并且 F_e 使用 $|\Phi_m\rangle$。其中 u_+ =最大值$\{u, 0\}$。

每个 IO 解码器都满足公式 (16)，这给出了上界。对于下界，我们进行抽样：在 Kraus算子的每一列中，仅保留一个元素，其选择概率与该元素的模成正比，并进行重缩放，使得其期望能够还原该列。抽样结果是非相干的，但抽样后的列 y 的平方范数为 $\|A_a|y\rangle\|_{\ell_1}^2$，而不是 $\|A_a|y\rangle\|^2$。多余部分来自不同逻辑基态对之间的贡献。在一个随机子码中，若包含 M 个逻辑基态中的 m 个，则平均而言其中至多约有 m/M 的比例保留下来，而对角重缩放可以将其消除。对于公式 (16) 中的映射，由此产生的损失就是公式 (17) 中的 $\sqrt{m/M}$ 项（附录 C 1 和 C 2）。

推论 6（非相干解码容量）。对于每个有限维量子信道 $\mathcal{N}$，其非相干解码容量为

$$\sup\left\{R \ge 0 : \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathcal{E}} F_{\ell_1}(\mathcal{N}^{\otimes n}\circ\mathcal{E}) = 1\right\}. \tag{18}$$

内层上确界是对输入为 n 个信道、逻辑维数为 $M \ge 2^{nR}$ 的编码器取的：当 $Q^{\mathrm{IO},\ \mathrm{IO}}(\mathcal{N})$ 时取非相干操作编码器；当 $Q^{\mathrm{all},\ \mathrm{IO}}(\mathcal{N})$ 时取任意 *CPTP* 编码器。

对于正码率编码，在定理 5 中取 $m = \lfloor M/n \rfloor$ 时，只要 $F_{\ell_1} \to 1$，保真度就会趋于 1，而码率仅降低 $O(\log n/n)$。这就证明了推论 6（附录 C 3）。该刻画以式（16）中的两项约束取代了对非相干 Kraus 算子的要求；对编码器和分组长度的优化仍然保留。

定理 4 可由同一构造得出，只需将其应用于任意编码的解码器。其超出量不再受 1 的限制，且公式 (17) 中的第二个估计替代了 m/M，约为 $m/\sqrt{M}$。当 m 为 $\sqrt{M}/n$ 量级时，该项趋于零；而仅保留约为码维数平方根的部分，会使渐近速率减半。将编码限制在逻辑基态上，不会使 IO 编码器失去非相干性，因此该构造适用于非相干操作和无约束编码器（附录 C4）。

设 $P(y|i) = \langle y|\,\mathcal{T}(|i\rangle\langle i|)\,|y\rangle$ 表示逻辑基态输入 $|i\rangle$ 发送后，接收方在其参考基上测量时输出 y 的概率。式（16）中的约束还意味着（附录 C 5）

$$M\sqrt{F_{\ell_1}(\mathcal{T})} \le \sum_y \max_i \sqrt{P(y|i)}. \tag{19}$$

这个界及其一个改进，给出了第 V 节中各个例子的反向界。

B. 与标准容量的关系

不受限编码与非相干解码下的容量问题，将标准量子容量问题作为其特例。根据定理 4]，最大相干态 $|\Psi_K\rangle$ 足以实现任意输出维数为 K 的解码器，所用操作为非相干操作 [4, ；见式 (A8)。对于输入维数为 $d_A = \dim A$ 的信道 $\mathcal{N}$，考虑在其输出端附加一个固定最大相干态所得到的信道，

$$\mathcal{N}'(\rho_A) = \mathcal{N}(\rho_A)\otimes|\Psi_{d_A}\rangle\langle\Psi_{d_A}|\,. \tag{20}$$

逻辑维数为 $M_n \le d_A^n$ 的不受限量子编码（采用等距编码器）可以达到所有低于$Q(\mathcal{N})$ [21, 第 24 节.4] 的码率。经过 n 次使用后，附加的输出提供 $|\Psi_{d_A}\rangle^{\otimes n} = |\Psi_{d_A^n}\rangle$。根据式 (A8)，借助$d = d_A^n \ge M_n$，这一资源足以通过非相干操作实现任意此类编码的解码器，且不改变其纠缠保真度。通过允许不受限制的解码，可以得到反向界。此外，$Q(\mathcal{N}') = Q(\mathcal{N})$，因为不受限接收方可以在本地制备或舍弃附加态。因此，

$$Q^{\mathrm{all,IO}}(\mathcal{N}') = Q(\mathcal{N}') = Q(\mathcal{N}). \tag{21}$$

因此，$Q^{\mathrm{all},\ \mathrm{IO}}$ 的一般公式也将确定每个信道的标准量子容量。等式 $Q^{\mathrm{all},\ \mathrm{IO}} = Q$ 并不对每个信道成立（第 V.C 节）。

V. 示例

在以下示例中，我们使用计算基。

A. Pauli 信道

对于多量子比特泡利噪声，对称性可以明确识别环境类别。采用 IO 编码时，限制解码器不会造成进一步的损失。

对于 m 个量子比特，基态由长度为 m的二进制串 $x \in \mathbb{F}_2^m$进行索引。我们用 0^m 表示全零串，使用 $\oplus$ 表示模二按位加法，并将二进制点积写作 $b \cdot x = \sum_{j=1}^m b_j x_j$ （模 2）。考虑一个具有计算参考基的 m量子比特 Pauli 信道，

$$\mathcal{N}(\rho) = \sum_{a,b \in \mathbb{F}_2^m} p_{ab} X^a Z^b \rho Z^b X^a, \tag{22}$$

其中 p_{ab} 为概率， X 和 Z 为泡利算符， $X^a = \bigotimes_{j=1}^m X^{a_j}$; 类似地， Z^b也是如此。在一次使用中， m 量子比特上的错误可能存在相关性；重复使用仍保持独立。

对于公式 (22) 中的信道，设 T 为随机比特错误模式，且 $\Pr(T = a) = q_a = \sum_b p_{ab}$。定义二进制子空间

$$L = \big(\operatorname{span}\{b \oplus b' : p_{ab} p_{ab'} > 0 \text{ for some } a\}\big)^{\perp},$$

其中，正交补采用二进制点积，并将 $T + L$ 记为包含T的 L 的陪集。设 X 在 L上均匀分布。在给定 $X = x$的条件下，设 Y为接收方参考基中对 $\mathcal{N}(|x\rangle\langle x|)$ 进行测量所得的结果，因此对于$y \in \mathbb{F}_2^m$， $\Pr(Y = y \mid X = x) = q_{y \oplus x}$。

定理 7 (泡利信道)。 *对于具有计算参考基的 m量子比特泡利信道 $\mathcal{N}$，以及如上所定义的L、 T、 X和 Y，*

$$\begin{aligned} Q^{\mathrm{IO,IO}}(\mathcal{N}) = Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{N}) &= I(X;Y) \\ &= \dim L - H(T \mid T + L). \end{aligned} \tag{23}$$

子空间 L 是定理 1 中包含0^m 的环境类：对于每个比特错误 a，所有满足 $p_{ab} > 0$ 的相位错误b 在每个满足 $x \in L$的基态 $|x\rangle$上的作用都相同。每个环境类都是 L 的一个陪集，并给出相同的最大互信息，该最大互信息由均匀输入取得。因此，式 (23) 由 p_{ab} 的支撑集和比特错误概率决定。对于基输入，接收方输出是对角的；通过非相干操作（附录 D1），经典译码的相干实现可达到该码率。

对于一个量子比特，比特翻转噪声 $\mathcal{N}_p^X$具有 $p_{00} = 1 - p$ 和$p_{10} = p$，而退相干 $\mathcal{N}_p^Z$具有 $p_{00} = 1 - p$ 和 $p_{01} = p$；其他所有概率均为零。对于 $0 < p < 1/2$，比特翻转信道的两个基输入使环境处于相同状态，因此属于同一个环境类， $L = \mathbb{F}_2$。接收方看到的是二进制对称信道，因此定理 7 给出的非相干编码下两种容量均为 $I(X;Y) = 1 - h_2(p)$，与标准量子容量相等。退相干将这些输入完美地传输给接收方，但会产生不同的环境输出。每个类仅包含一个输入，因此$L = \{0\}$ 和 $I(X;Y) = 0$。仅限制解码器时，定理 4 保证存在正码率，而附录 D 2 中的编码可达到完整的 $1 - h_2(p)$。这两个信道通过哈达玛基变换相关联，

表 I. 在 $1/2$ $d \geq 2$ $0 < p <$ 和下，每次信道使用的量子比特数的容量。标准退相干容量由文献 [32, 附录 B]推出；比特翻转噪声在酉变换下等价。其他容量见附录 D 中的推导。

信道 $\mathcal{N}$	$Q(\mathcal{N})$	$Q^{\mathrm{IO,\,all}}(\mathcal{N})$	$Q^{\mathrm{all,\,IO}}(\mathcal{N})$	$Q^{\mathrm{IO,\,IO}}(\mathcal{N})$
退相干 $\mathcal{N}_p^Z$	$1 - h_2(p)$	0	$1 - h_2(p)$	0
比特翻转 $\mathcal{N}_p^X$	$1 - h_2(p)$	$1 - h_2(p)$	$1 - h_2(p)$	$1 - h_2(p)$
QFT $\mathcal{F}_d$	对数 d	对数 d	对数 d	$\frac{1}{2}$ 对数 d
已标记 $\mathcal{N}_H$	1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$

但该变换不是非相干操作。加入足够弱的额外相位翻转噪声后，比特翻转信道的环境输出将不再相同，非相干编码下的两种容量均为零，而标准容量仍为正（附录 D1）。表 I 对比了这些示例及下文的示例。

B. 量子傅里叶变换信道

对于 $d \geq 2$，量子傅里叶变换信道为 (QFT)

$$\mathcal{F}_d(\rho) = F_d \rho F_d^\dagger, \qquad F_d |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{y=0}^{d-1} e^{2\pi i x y / d} |y\rangle . \tag{24}$$

环境与输入无关，因此在定理 1 中，所有基态都属于同一类。它们在接收方的输出是彼此正交的纯态，而均匀系综给出 $Q^{\mathrm{IO,\,all}}(\mathcal{F}_d) = \log d$。然而，在输出基上进行测量会为每个输入标签给出相同的均匀分布。对 $|0\rangle$的一次使用可提供 $|\Psi_d\rangle$，从而接收方能够通过对承载消息的第二次使用的输出执行 IO，实现 $F_d^\dagger$。这达到了 $\frac{1}{2}\log d$ 的码率。逆定理可直接由公式 (19) 得出：对于任意 IO 编码器， $P(y|i) = d^{-n}$，因此 $F_e \leq F_{\ell_1} \leq d^n / M^2$。所以 $Q^{\mathrm{IO,\,IO}}(\mathcal{F}_d) = \frac{1}{2}\log d$，定理 4 中针对 IO 编码的容量下界是紧的（附录 D 5）。如果放宽任一端的映射限制，在该端应用 $F_d^\dagger$ 即可达到完整的 $\log d$ 码率（表 I）。因此，即使信道没有向环境丢失任何信息，在完整传输速率下进行解码仍可能需要相干性。

C. 带有经典标志的信道

即使采用不受限编码，IO 解码也可能严格降低容量。一个例子是带标记的哈达玛信道

$$\mathcal{N}_H(\rho) = \tfrac{1}{2}\rho \otimes |0\rangle\langle 0| + \tfrac{1}{2} H \rho H \otimes |1\rangle\langle 1| , \tag{25}$$

其中 H 是 Hadamard 矩阵，第二个张量因子是标志寄存器 J，用于记录所执行的操作。恒等编码器是非相干操作，而

不受限接收方使用 J 来逆转该操作。因此 $Q^{\mathrm{IO},\ \mathrm{all}}(\mathcal{N}_H) = Q(\mathcal{N}_H) = 1$。采用 IO 解码时，$Q^{\mathrm{all},\ \mathrm{IO}}(\mathcal{N}_H) = Q^{\mathrm{IO},\ \mathrm{IO}}(\mathcal{N}_H) = 3/4$。逆定理使用了公式 (19) 的一种细化（附录 D 4a）。结合退相干可知，这两种限制中没有一种始终具有更高的代价（表 I）。

对于 $\mathcal{F}_d$ 和 $\mathcal{N}_H$，无论采用非相干操作还是不受限编码，将 IO 解码替换为 MIO 都不会改变容量。MIO 映射只需将非相干态映射为非相干态（附录 D 4 a 和 D 5）。

即使采用不受限编码，损失也可接近二分之一，因此定理 4 中的因子 $1/2$ 在这种情况下同样是最优的。这个例子使用互为无偏基（MUB）：这些正交归一基满足，来自不同基的任意两个基态的重叠模为$d^{-1/2}$。对于每个素数幂 d，都有 $d+1$ 个这样的基，由标准稳定子构造给出 [33, 34]。带标记的互为无偏基信道 $\mathcal{N}_d$ 以均匀概率选取其中一个基，将其旋转至参考基，并用正交标记记录所选基。不受限的接收方可以反转该旋转，因此 $Q(\mathcal{N}_d) = \log d$。这些基的熵不确定性关系给出了采用 IO 解码时可达到的码率上界：

$$Q^{\mathrm{all,IO}}(\mathcal{N}_d) \le \log d - \tfrac{1}{2}\log\frac{d+1}{2}. \tag{26}$$

根据定理 4，当 d 增大时，比值 $Q^{\mathrm{all},\ \mathrm{IO}}(\mathcal{N}_d)/Q(\mathcal{N}_d)$ 趋于 $1/2$（附录 D4 b）。

VI. 讨论与开放问题

任意弱的退极化噪声都能消除采用 IO 编码器、在任意输入基下进行的量子传输。采用不受限编码时，利用信道输出中的相干性，IO 解码器总能达到至少为标准容量一半的传输速率。

推论 6 中的容量一般仍有待求解。采用不受限编码时，该问题包含标准量子容量问题（第 IVB 节）。当两种映射均为 IO 时，容量对不同信道不具有可加性：即使量子容量为零的信道，也能提供相干性，从而提高联合码率（附录 D6）。

对于量子容量为正的信道，当两种映射均为 IO 时，其传输速率有多少能够保留下来，取决于什么？傅里叶信道能保留一半，而定理 7 中的泡利信道则能保留全部速率。尚待解决的问题是刻画量子信息传输与生成解码所需相干性之间的权衡。当两种编码映射均为非相干映射时，可以研究可实现的数对（$R,\ C$），其中 R 为传输速率，C 为每次信道使用所提供的最大相干量子比特数。发送方与接收方之间的分配也可以进行优化。

同样的问题也适用于其他资源理论：当编码和解码被限制为自由操作时，还能保留多少量子容量？对于魔态，可以将两种映射都限制为稳定子操作，并探究最优通信码率是否需要使用通用容错计算中所需的非稳定子资源 [35]。针对玻色和费米系统的高斯纠错禁止定理，揭示了此类限制所带来的根本局限 [36, 37]。对于相干性，发送方和接收方的要求截然不同：若要实现正速率传输，通常必须采用超出 IO 的编码；而 IO 解码器则可以利用信道输出，达到至少一半的可用容量。

致谢

O.S. 感谢周界理论物理研究所在其于2026年7月访问期间给予的热情接待。本研究部分得到了周界理论物理研究所的支撑。周界理论物理研究所的研究工作得到加拿大政府通过创新、科学与经济发展部以及安大略省通过学院、大学、研究卓越与安全部的支撑。

Z.B.K. 感谢周界理论物理研究所艾达·洛夫莱斯博士后奖学金提供的支撑。在此项工作期间，O.S. 得到了德国联邦研究、技术与航天部（BMFTR）通过量子计算服务中心 QUICS（资助编号：13N17418）提供的支撑。

Claude Fable（Anthropic）协助完成推导、文献综述和稿件准备。作者指导了其使用，并逐行审阅了其贡献。

数据可用性

这是一项纯数学研究，本研究未创建或分析任何数据。

附录目录

A. 技术预备知识 1. 距离、保真度与测量 8
2. 扩张与纯化 3. 信息度量 4. 非相干操作 8
9
9
10
11

B. 非相干编码的证明 12
1. 可达性 2. 逆定理 3. 一般性零容量 4. 可 12
加性与凸性 5. 更改允许的编码器类 14
17
18
19

C. 非相干解码的证明 20
1. 容许映射与非相干实现 2. 非相干解码下的纠缠保 20
真度 3. 非相干解码容量 4. 非相干解码下的容量界 24
24
5. 一般编码的上界 25
25

D. 示例 26
1. Pauli 信道 2. 使用非相干解码器的退 26
相干 3. 擦除与振幅阻尼 4. 带经典标志的 28
信道 a. 带标记的哈达玛信道 b. 带标记的 29
MUB 信道 5. 量子傅里叶变换信道 6. 不 30
可加性 32
32
33
34

E. 纠缠与子空间传输的等价性 34

参考文献 35

附录 A：技术预备知识

我们考虑一个有限维量子信道 $\mathcal{N}_{A\to B}$，即一个完全正且保迹（CPTP）的映射。相干性是相对于固定的正交归一基 [1, 2] 定义的：$\{|x\rangle:\ x\in\mathcal{X}\}$ 在 A 上，以及 $\{|y\rangle:\ y\in\mathcal{Y}\}$ 在 B上。参考基中的对角态是非相干的；复合系统使用乘积参考基。非相干操作（IO）是一种量子信道，它具有克劳斯表示，其中每个 Kraus算子都将每个基态映射为某个基态的倍数 [1]。

编码器为 n 次 $\mathcal{N}$的独立使用准备输入，解码器则联合处理其输出。图 2 展示了这一纠缠传输模型。为区分各次信道使用，我们将第 k次使用的输入、输出和环境分别记为 $A^{(k)}$、 $B^{(k)}$和$E^{(k)}$。因此， $A^n=\bigotimes_{k=1}^n A^{(k)}$；对于 B^n 和 E^n也同理。

n次使用的编码由 CPTP 编码器 $\mathcal{E}_{A_1\to A^n}$和解码器 $\mathcal{D}_{B^n\to B_1}$构成，其逻辑维数为 $\dim\ A_1=\dim B_1=M$ [21, 第 24 节。1]。逻辑参考基独立于 A 和 B上的参考基固定，并且我们将 $|i\rangle_{A_1}$ 与$|i\rangle_{B_1}$等同。局部辅助系统包含在编码映射 $\mathcal{E}$和 $\mathcal{D}$中。对于有效信道 $\Lambda=\mathcal{D}\circ\mathcal{N}^{\otimes n}\circ\mathcal{E}$，令

$$|\Phi_M\rangle_{RA_1}=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{i=1}^{M}|i\rangle_R|i\rangle_{A_1},\qquad \omega_{RB_1}=(\mathrm{id}_R\otimes\Lambda)(|\Phi_M\rangle\langle\Phi_M|_{RA_1}).$$

参考　　系 R 保持不变。纠缠保真度　　保真度为

$$F_e(\Lambda)=\langle\Phi_M|_{RB_1}\,\omega_{RB_1}\,|\Phi_M\rangle_{RB_1}.$$

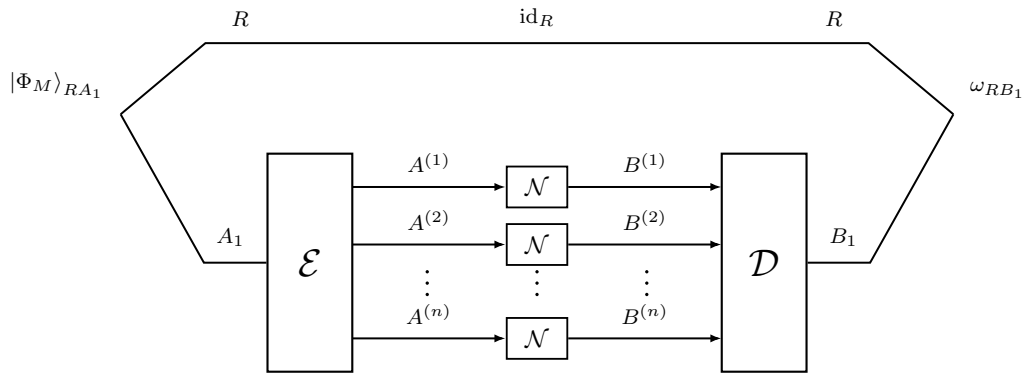

图 2. 通过 n 次使用 $\mathcal{N}$ 进行纠缠传输。参考系 R 和逻辑输入 A_1 初始处于最大纠缠态 $|\Phi_M\rangle_{RA_1}$。参考系保持不变。编码器 $\mathcal{E}$ 将 A_1 映射为 A^n，$\mathcal{N}$ 分别作用于每个输入，而解码器 $\mathcal{D}$ 联合处理 B^n 以生成 B_1。输出 ω_{RB_1} 与最大纠缠目标态 $|\Phi_M\rangle_{RB_1}$ 进行比较。对于一系列成功的编码，随着 n 增大，纠缠保真度趋近于 1。编码器、解码器，或二者均可被限制为非相干操作（IO）。

如果一系列使用 n 次信道的编码具有逻辑维数 M_n，且满足 $\liminf_{n\to\infty} n^{-1}\log M_n \geq r$，同时纠缠保真度趋于 1，则码率 $r \geq 0$ 可达。码率以每次信道使用的量子比特数为单位；容量是可达码率的上确界。$Q^{\mathrm{IO},\,\mathrm{all}}(\mathcal{N})$、$Q^{\mathrm{all},\,\mathrm{IO}}(\mathcal{N})$ 和 $Q^{\mathrm{IO},\,\mathrm{IO}}(\mathcal{N})$ 中的上标分别表示编码器和解码器限制；all 表示允许任意完全正迹保持映射。当编码器和解码器均不受限制时，容量为 $Q(\mathcal{N})$。

所有对数均以 2 为底。关于量子信道、保真度、迹距离和熵的标准性质，我们遵循参考文献 [21, 38] 。

1. 距离、保真度和测量 s

对于算子 X，迹范数为 $\|X\|_1 = \mathrm{tr}\sqrt{X^\dagger X}$，希尔伯特–施密特范数为 $\|X\|_2 = (\mathrm{tr}\, X^\dagger X)^{1/2}$。我们将 $\|X\|_\infty$ 记作算子范数。量子态 ρ 和 σ 之间的迹距离为

$$d(\rho,\sigma) = \frac{1}{2}\|\rho-\sigma\|_1. \tag{A1}$$

对于半正定算子 P, Q，用 $f(P,Q) = \left\|\sqrt{P}\sqrt{Q}\right\|_1$ 表示它们的根保真度。对于归一化量子态，我们采用的保真度约定为 $F(\rho,\sigma) = f(\rho,\sigma)^2$。量子信道会收缩迹范数，包括对非厄米算子的情形 [38, 推论 3.40]。特别地，迹距离在量子信道作用下不会增加。它也能界定任意测量结果概率的变化：$|\mathrm{tr}[P(\rho-\sigma)]| \leq d(\rho,\sigma)$，其中 $0 \leq P \leq I$。

对于逻辑系统维数为 M 的信道 Λ，Schumacher公式 [24] 将纠缠保真度表示为任意克劳斯表示 $\Lambda(\rho) = \sum_\alpha K_\alpha \rho K_\alpha^\dagger$ 的形式：

$$F_e(\Lambda) = \frac{1}{M^2}\sum_\alpha |\mathrm{tr}\, K_\alpha|^2. \tag{A2}$$

具有结果 i 的测量由正算子值测度（POVM）$\{D_i\}$ 描述，其中 $D_i \geq 0$ 且 $\sum_i D_i = I$。对于输入态 ρ_x，结果 i 发生的概率为 $\mathrm{tr}(D_i\rho_x)$。如果 X 记录从系综 $\{p_x,\rho_x\}$ 中选择输入的情况，而 Y 记录测量结果，则 Holevo界给出

$$I(X;Y) \leq S\left(\sum_x p_x\rho_x\right) - \sum_x p_x S(\rho_x).$$

2. 扩张与纯化

对于任意克劳斯表示 $\mathcal{N}(\rho_A) = \sum_\alpha K_\alpha \rho_A K_\alpha^\dagger$，Stinespring 等距映射为

$$V = \sum_\alpha K_\alpha \otimes |\alpha\rangle_E\,, \tag{A3}$$

其中，环境的量子态 $|\alpha\rangle_E$彼此 E正交归一。信道及其互补信道分别为 $\mathcal{N}(\rho_A) = \mathrm{tr}_E(V\rho_A V^\dagger)$ 和 $\mathcal{N}^c(\rho_A) = \mathrm{tr}_B(V\rho_A V^\dagger)$。每个 Stinespring扩张都可由一个最小扩张通过在环境上施加等距映射W得到。由于 $W^\dagger W = I$，两个环境态满足 $W\rho W^\dagger = W\sigma W^\dagger$ 当且仅当 $\rho = \sigma$。图 3 展示了如何通过偏迹得到信道输出和互补输出。

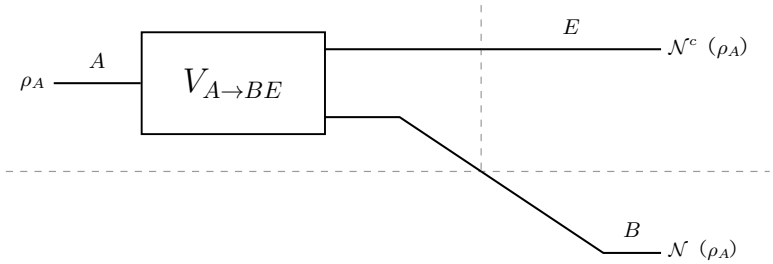

图 3。 $\mathcal{N}_{A\to B}$一次使用的 Stinespring扩张。等距映射 V将 ρ_A发送到 BE上的联合态 $V\rho_A V^\dagger$。对 E进行迹运算得到接收方的量子态 $\mathcal{N}(\rho_A)$，对 B进行迹运算得到环境的量子态 $\mathcal{N}^c(\rho_A)$。一般而言，接收方与环境是相关的。电路布局遵循参考文献 [21, 图 5。2]。

Uhlmann 定理将两个环境态的根保真度与其纯化的重叠联系起来。设$|\phi\rangle_{BE}$和 $|\psi\rangle_{CE}$分别是量子态 ρ_E和 σ_E的纯化，且 $\dim B = \dim C$。则

$$\|\sqrt{\rho_E}\sqrt{\sigma_E}\|_1 = \max_{U:B\to C} |\langle\psi|_{CE}(U\otimes I_E)|\phi\rangle_{BE}|, \tag{A4}$$

其中最大值取遍从 B 到 C的酉算子。当 $\rho_E = \sigma_E$时，根保真度为 1。于是，适当选择相位后，达到最大值的酉算子满足

$$(U\otimes I_E)|\phi\rangle_{BE} = |\psi\rangle_{CE}.$$

我们在引理 8 中使用这一情形。

a. 比较环境输出。对于两个输入基态，Uhlmann 定理还给出了 [38, 推论 3。23]

$$\|\mathcal{N}(|x\rangle\langle y|)\|_1 = \left\|\sqrt{\mathcal{N}^c(|x\rangle\langle x|)}\sqrt{\mathcal{N}^c(|y\rangle\langle y|)}\right\|_1 \le 1. \tag{A5}$$

事实上，对于 $|\varphi_x\rangle_{BE} = V|x\rangle_A$ 和 $|\varphi_y\rangle_{BE} = V|y\rangle_A$，迹范数的变分公式给出

$$\begin{aligned}\|\mathcal{N}(|x\rangle\langle y|)\|_1 &= \max_{U_B \text{ unitary}} |\mathrm{tr}[U_B\,\mathrm{tr}_E|\varphi_x\rangle\langle\varphi_y|]| \\ &= \max_{U_B \text{ unitary}} |\langle\varphi_y|(U_B\otimes I_E)|\varphi_x\rangle|.\end{aligned}$$

根据式（A4），这是两个环境态的根保真度。式（A5）中的范数恰好在两个环境态相同时等于 1。

3. 信息度量

对于双体状态 ω_{RB}，条件熵为 $S(R|B)_\omega = S(\omega_{RB}) - S(\omega_B)$。因此，第 II C 节中的相干信息可以写为

$$I(R\rangle B)_\omega = -S(R|B)_\omega. \tag{A6}$$

对于在 RA 上纯化的输入 ρ_A，施加 Stinespring 等距映射后得到 RBE 上的一个纯态。因此，其边缘态满足 $S(\omega_{RB}) = S(\omega_E)$，而信道的相干信息为

$$I_c(\rho_A,\mathcal{N}) = S(\mathcal{N}(\rho_A)) - S(\mathcal{N}^c(\rho_A)).$$

对于概率分布 $p = (p_i)$， $1/2$ 阶 Rényi 熵为 $H_{1/2}(p) = 2\log\sum_i\sqrt{p_i}$。如果 p 至多有 M 个结果，根据柯西–施瓦茨不等式可得 $H_{1/2}(p) \le \log M$。

对于经典-量子态 $\omega_{XE} = \sum_x p_x|x\rangle\langle x|_X\otimes\rho_x^E$，经典寄存器的熵是香农熵 $S(\omega_X) = H(X)$。量子态 $|x\rangle_X$彼此正交，因此 $S(\omega_{XE}) = H(X) + \sum_x p_x S(\rho_x^E)$。将这些表达式代入 $I(X;E)_\omega = S(\omega_X)+S(\omega_E)-S(\omega_{XE})$ 后，两个 $H(X)$ 项相互抵消。这给出了环境系综的 Holevo 信息，即 $I(X;E)_\omega = S(\omega_E) - \sum_x p_x S(\rho_x^E)$。互信息恰好在 $\omega_{XE} = \omega_X\otimes\omega_E$ 时为零。对应于 $|x\rangle_X$ 的对角块分别为 $p_x\rho_x^E$和 $p_x\omega_E$。当且仅当对每个满足 $p_x > 0$ 的 x 都有 $\rho_x^E = \omega_E$时，每个块中都成立等式。这就是第三节中的隐私条件。

a. 相对熵与强反演。 对于一个量子态 ρ 和一个正定量子态 σ，量子相对熵与 Petz R´nyi 散度分别为

$$D(\rho\|\sigma)=\operatorname{tr}\big[\rho(\log\rho-\log\sigma)\big],\qquad D_{1+\alpha}(\rho\|\sigma)=\frac{1}{\alpha}\log\operatorname{tr}\big(\rho^{1+\alpha}\sigma^{-\alpha}\big).$$

对于奇异的 σ，这些表达式在其支撑集上计算；除非 $\operatorname{supp}\rho\subseteq\operatorname{supp}\sigma$，否则它们为无穷大。对于 $0<\alpha\le 1$，$D_{1+\alpha}$ 在量子信道下不会增加，并且当 $\alpha\downarrow 0$时趋于 D。对于可能输出的有限系综$\{\rho_x\}_x$，最大 Holevo 信息同样具有信息半径表达式

$$\max_p \chi(p)=\inf_{\sigma>0}\max_x D(\rho_x\|\sigma),$$

其中下确界取遍正定密度算子。因此，可以为所有输出选择同一个比较态，使每个相对熵都不超过经典容量加上任意小的正量。这些标准事实 [39] 被用于附录 B 2 中的强反演。

4. 非相干操作

在非相干Kraus表示中，每个 K_α 在参考基 [3]中的每一列至多有一个非零元素。因此，它可以写成

$$K_\alpha=\sum_i c_{\alpha i}\,|f_\alpha(i)\rangle\langle i|\,. \tag{A7}$$

这里， $c_{\alpha i}$ 是输入 $|i\rangle$的振幅，而 $f_\alpha(i)$指定了该振幅非零时的输出基态。当 $c_{\alpha i}=0$时， $f_\alpha(i)$可以任意选择。不同的输入可能对应同一个输出基态。

最大非相干操作（MIO）是将每个非相干态映射为非相干态的完全正迹保持映射 [2]。根据线性性，只需在输入基态上检验这一条件即可。

我们将 $\Delta(\rho)=\sum_i |i\rangle\langle i|\,\rho\,|i\rangle\langle i|$ 记作参考基下的完全退相干。下标指定其作用的系统。退相干协变非相干操作（DIO）是满足 $\Delta\circ\Lambda=\Lambda\circ\Delta$ 的完全正迹保持映射 Λ，其中分别对输出系统和输入系统进行退相干。每个 DIO 映射都是 MIO [29]。

严格非相干操作（SIO）是存在 Kraus 算子 K_α 的完全正迹保持映射，其中 K_α 和 $K_\alpha^\dagger$ 都是非相干的 [40]。等价地，每个 Kraus 算子在每一行和每一列中至多有一个非零元素。SIO 映射属于 DIO，因为它们与完全退相干相交换。

a. 使用相干性实现解码器。 最大相干辅助态 $|\Psi_d\rangle=d^{-1/2}\sum_{j=0}^{d-1}|j\rangle$ 允许非相干操作信道实现任意解码器。对于任意解码器 $\mathcal{D}_{B^n\to B_1}$，若 $\dim B_1=M$ 且任意整数$d\ge M$，则存在一个非相干操作信道 $\mathcal{D}_{B^nS\to B_1}$，其 $\dim S=d$，使得

$$\widetilde{\mathcal{D}}\big(\rho_{B^n}\otimes|\Psi_d\rangle\langle\Psi_d|_S\big)=\mathcal{D}(\rho_{B^n})\qquad\text{for every state }\rho_{B^n}. \tag{A8}$$

情形 $d=M$ 是参考文献 [4, 定理 4]的模拟结果。以下克劳斯表示直接验证了对于每个 $d\ge M$，公式 (A8) 均成立。写作 $\mathcal{D}(\rho)=\sum_k K_k\rho K_k^\dagger$，并用 $i=0,\ldots,M-1$对输出基进行编号。对于 $s=0,\ldots,d-1$，定义

$$D_{k,s}=\sum_{i=0}^{M-1}\sum_j (K_k)_{ij}\,|i\rangle_{B_1}\langle j|_{B^n}\otimes\langle i+s|_S\,,$$

其中 j 遍历输入基， $i+s$ 按模 d读取。对于基输入 $|j\rangle_{B^n}|t\rangle_S$，至多有一项保留下来：即满足 $i=t-s$ (模 d) 的那一项。其输出是 $|i\rangle_{B_1}$的倍数；若 $i\notin\{0,\ldots,M-1\}$，则输出为零。因此，每个 $D_{k,\,s}$都是非相干的。由于 $\sum_s|i+s\rangle\langle i+s|_S=I_S$，输出基的正交性给出

$$\sum_{k,s}D_{k,s}^\dagger D_{k,s}=\sum_k K_k^\dagger K_k\otimes I_S=I_{B^nS}.$$

因此，这些算子定义了一个非相干操作信道。此外，

$$D_{k,s}(I_{B^n}\otimes|\Psi_d\rangle_S)=\frac{K_k}{\sqrt{d}}.$$

对 d s 的取值求和即可证明公式（A8）。

附录 B：非相干编码的证明

我们采用第三节中的记号。

定理 1（重述）。对于任意有限维量子信道 $\mathcal{N}$，

$$Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{N}) = \max_{\substack{p\in\mathcal{P}(\mathcal{X})\\ I(X;E)_\omega=0}} I(X;B)_\omega = \max_{c}\max_{p\in\mathcal{P}(\mathcal{X}_c)} \chi(p).$$

对于字符串 $x=(x_1,\ldots,x_n)$，记作 $|x\rangle_{A^n}=\bigotimes_{k=1}^n |x_k\rangle_{A^{(k)}}$、$\rho_x^{B^n}=\bigotimes_{k=1}^n \rho_{x_k}^{B^{(k)}}$ 和 $\rho_x^{E^n}=\bigotimes_{k=1}^n \rho_{x_k}^{E^{(k)}}$。图 4 总结了证明的两个方向。

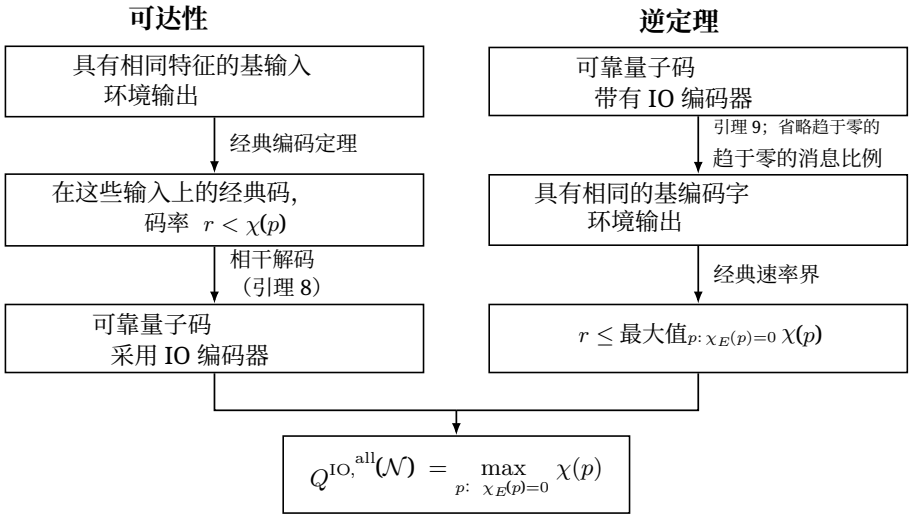

图4. 非相干编码下容量公式的证明概要。编码为非相干操作；解码不受限制。基输入上的分布 p 具有 $\chi_E(p)=0$ 当且仅当其支撑集中的所有输入都具有相同的环境输出。可达性将这些输入上的经典码转化为量子码。逆定理则从每个可靠量子码中提取出这样的经典码。

1. 可达性

由正算子值测度（POVM）描述的解码测量用于识别经典消息。对于量子传输，解码器还必须保留逻辑基态的叠加态。下面的引理通过相干地实施测量，并利用环境输出相等这一条件来实现这一点。证明遵循 Devetak [16, 关于定理 5], 的证明中的相干解码论证，并将其专门用于环境输出相同的情形。

引理 8 (相同环境输出的相干恢复)。设 $x_i=(x_{i,1},\ldots,x_{i,n})\in\mathcal{X}^n$, $i=1,\ldots,M$ 是彼此不同的基字符串，且其环境输出 $\rho_{x_i}^{E^n}$ 均相同。设 *POVM* $\{D_i\}_{i=1}^M$ 在 B^n 上的平均成功概率为

$$p_{\mathrm{succ}}=\frac{1}{M}\sum_i \mathrm{tr}\Big(D_i\rho_{x_i}^{B^n}\Big),\qquad D_i\ge 0,\qquad \sum_i D_i = I_{B^n}.$$

令 A_1 和 B_1 具有 维数为 M，并令 $\mathcal{E}_{A_1\to A^n}$ 为由编码等距映射实现的信道

$$|i\rangle_{A_1}\longmapsto |x_i\rangle_{A^n},\qquad i=1,\ldots,M.$$

则 $\mathcal{E}$ 是非相干操作，并且存在一个*CPTP*解码器 $\mathcal{D}_{B^n\to B_1}$，满足

$$F_e(\mathcal{D}\circ\mathcal{N}^{\otimes n}\circ\mathcal{E})\ge p_{\mathrm{succ}}^2. \tag{B1}$$

图5展示了证明中使用的编码器和解码器。

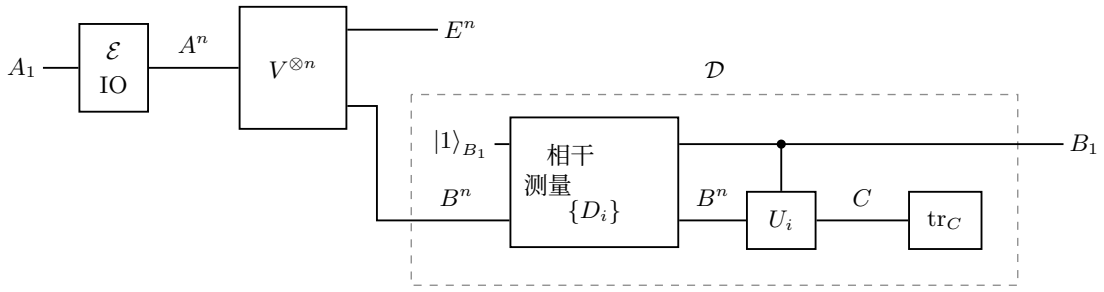

图 5. 采用 IO 编码器的量子传输（引理 8），遵循 Devetak 的相干解码论证 [16]。编码器对具有相同环境输出的不同基编码字实现 $|i\rangle_{A_1} \mapsto |x_i\rangle_{A^n}$。其中， V是 $\mathcal{N}$的 Stinespring 等距映射。目标是恢复 B_1中的逻辑量子态。解码器将 B_1 初始化于 $|1\rangle$ 中，并相干地实现解码正算子值测度 $\{D_i\}$，同时不测量 B_1。受控酉算子对每个基态$|i\rangle_{B_1}$施加 U_i： $B^n \to C$；随后对C 取迹。根据 Uhlmann 定理选取 U_i： 每个 U_i 都将信道作用后紧接着的相应联合态映射为一个公共纯化。

引理 *8* 的证明。 该编码器只有一个 Kraus算子 $\sum_i |x_i\rangle_{A^n}\langle i|_{A_1}$。由于编码字是不同的基态，且每列都只有一个非零元素，因此其列是正交归一的。因此，该编码是等距的，并且属于非相干操作。

对于编码字 i，Stinespring 等距映射产生联合纯态

$$|\varphi_i\rangle_{B^nE^n} = V^{\otimes n}|x_i\rangle_{A^n}.$$

所有 $|\varphi_i\rangle$ 都纯化同一个环境态。在 B^n的副本 C 上选择一个纯化 $|\eta\rangle_{CE^n}$，使得对于每个 i，$\mathrm{tr}_C|\eta\rangle\langle\eta|_{CE^n} = \rho_{x_i}^{E^n}$。根据附录A 2中的纯化性质，存在酉算子 U_i： $B^n \to C$ 满足

$$(U_i \otimes I_{E^n})|\varphi_i\rangle_{B^nE^n} = |\eta\rangle_{CE^n}. \tag{B2}$$

选择一个正交归一基 $\{|s\rangle_C\}$，并通过其 Kraus 算子定义解码器

$$K_s = \sum_i |i\rangle_{B_1}\langle s|_C U_i\sqrt{D_i}, \qquad \sum_s K_s^\dagger K_s = \sum_i \sqrt{D_i}U_i^\dagger U_i\sqrt{D_i} = I_{B^n}. \tag{B3}$$

它以相干方式实现 POVM，将其结果记录在 B_1 中，而不测量该寄存器，然后应用相应的 U_i 并丢弃 C。所显示的恒等式表明，所得信道是保迹的。

因子 $\sqrt{D_i}$ 可能会在应用 U_i 之前扰动信道输出。为界定由此产生的误差，将 Schumacher 公式（公式（A2））应用于该编码。取环境的一个正交归一基 $\{|e\rangle_{E^n}\}$，可得

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{1}{M^2}\sum_{s,e}\left|\sum_i(\langle s|_C\otimes\langle e|_{E^n})(U_i\sqrt{D_i}\otimes I_{E^n})|\varphi_i\rangle\right|^2 \\ &= \frac{1}{M^2}\left\|\sum_i(U_i\sqrt{D_i}\otimes I_{E^n})|\varphi_i\rangle\right\|^2. \end{aligned}$$

该范数至少等于其与纯态 $|\eta\rangle$的绝对重叠。根据公式（B2），

$$\begin{aligned} \langle\eta|(U_i\sqrt{D_i}\otimes I_{E^n})|\varphi_i\rangle &= \langle\varphi_i|(\sqrt{D_i}\otimes I_{E^n})|\varphi_i\rangle \\ &= \mathrm{tr}\Big(\sqrt{D_i}\rho_{x_i}^{B^n}\Big) \geq \mathrm{tr}\Big(D_i\rho_{x_i}^{B^n}\Big). \end{aligned}$$

该不等式由 $0 \leq D_i \leq I_{B^n}$ 得出，它意味着 $\sqrt{D_i} \geq D_i$。对 i 求和可得

$$F_e \geq \frac{1}{M^2}\left|\sum_i\langle\eta|(U_i\sqrt{D_i}\otimes I_{E^n})|\varphi_i\rangle\right|^2 \geq \frac{1}{M^2}\left(\sum_i\mathrm{tr}\Big(D_i\rho_{x_i}^{B^n}\Big)\right)^2 = p_{\mathrm{succ}}^2.$$

□

容量公式的可达性。固定一个类 $\mathcal{X}_c$、一个分布 $p \in \mathcal{P}(\mathcal{X}_c)$ 和 $0 < r < \chi(p)$。经典—量子编码定理 [27, 28] 给出了字符串属于 $\mathcal{X}_c^n$、码率趋于 r 且平均错误为 $\varepsilon_n \to 0$ 的编码。

恢复引理要求编码字彼此不同。如果多条消息使用同一个字符串，则将它们的 POVM效应 相加，并且只保留该字符串一次。设 M 和 M' 分别为原始和最终的码字数量。正确解码概率之和保持不变，因此新的平均成功概率满足

$$p'_{\text{succ}} = \frac{M}{M'}(1-\varepsilon_n) \geq 1-\varepsilon_n.$$

由于 $p'_{\text{succ}} \leq 1$，我们还得到 $M' \geq M\ (1-\varepsilon_n)$，且码率仍趋于 r。

每个剩余字符串都属于 $\mathcal{X}_c^n$。由于一次信道使用的环境输出在 $\mathcal{X}_c$ 上是常数，所有这些字符串在 E^n 上产生相同的乘积态。因此，引理 8 给出了一个 IO 编码器和一个无限制解码器，使得

$$F_e \geq (1-\varepsilon_n)^2 \longrightarrow 1.$$

对 p 和 c 取最大值即可证明下界；码率为零的情形显然成立。 □

相同的编码器是物理非相干操作（PIO） [29]。为实现等距映射 $|i\rangle_{A_1} \mapsto |x_i\rangle_{A^n}$，在基态 $|x_1\rangle$ 中附加 A^n，并对联合参考基应用一个置换，将其映射为

$$|i\rangle_{A_1}|x_1\rangle_{A^n} \longmapsto |1\rangle_{A_1}|x_i\rangle_{A^n}, \qquad i=1,\ldots,M.$$

指定的输入和输出是不同的基态，因此该映射可以扩展为整个基上的一个置换。随后丢弃 A_1 即可实现该编码等距映射。附加一个非相干态、施加基置换并丢弃一个子系统，均属于物理非相干操作。这些操作也都是严格非相干的。由于下文的逆定理适用于所有 IO 编码器，因此对于任一较小的编码器类别，容量公式都保持不变。

2. 逆定理

我们首先提取接收方能够可靠解码的基编码字。接近于 1 的纠缠保真度也意味着，这些编码字中几乎所有的环境输出都相同：在每个位置上，它们的字母都属于同一个环境类。于是可以在这些类别内应用经典速率界。

引理 9（来自 IO 编码器的经典码字）。考虑一个使用 n 次的编码，其编码器为 $\mathcal{E}_{A_1\to A^n}$，解码器为 $\mathcal{D}_{B^n\to B_1}$，其中 维数 A_1 =维数 $B_1 = M$。存在基字符串 x_1、……、$x_M \in \mathcal{X}^n$（不一定互不相同），以及一个索引 i_0，使得

$$F_e(\mathcal{D}\circ\mathcal{N}^{\otimes n}\circ\mathcal{E}) \leq \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\min\Big\{\sqrt{s_j},\, f(\rho^{E^n}_{x_{i_0}},\rho^{E^n}_{x_j})\Big\}, \qquad s_j = \langle j|\,\mathcal{D}(\rho^{B^n}_{x_j})\,|j\rangle\,. \tag{B4}$$

其中，s_j 是经典码中正确解码消息 j 的概率：发送方制备 $|x_j\rangle$，接收方应用原始解码器 $\mathcal{D}$ 并在其逻辑基中测量 B_1。保真度将环境输出与某个编码字的环境输出进行比较。

引理 9 的证明。 选择编码器的一个非相干Kraus表示，其中 $K_\alpha|i\rangle = c_{\alpha i}|f_\alpha(i)\rangle$。当$c_{\alpha i}=0$时，任意选择 $f_\alpha(i)$。将算子 K_α 作用于 $|\Phi_M\rangle_{RA_1}$的一半 A_1 上，得到向量

$$(I_R\otimes K_\alpha)|\Phi_M\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}}\sum_i c_{\alpha i}|i\rangle_R|f_\alpha(i)\rangle_{A^n}\,.$$

其平方范数 $q_\alpha = M^{-1}\sum_i |c_{\alpha i}|^2$ 是分支 α的概率，并且由迹保持性可得 $\sum_\alpha q_\alpha = 1$。编码态是由归一化分支构成的混合态，其权重为 q_α。与纯目标态的保真度关于解码态是线性的。因此，它等于归一化分支的保真度 F_α 的平均值，即 $F_e = \sum_\alpha q_\alpha F_\alpha$，所以至少存在一个具有正概率的分支，其保真度 F 不低于该编码的保真度。

对于这个分支，令 $x_i = f_\alpha(i)$ 和 $c_i = c_{\alpha i}/\sqrt{M q_\alpha}$ 那么它的归一化输入为

$$|\psi\rangle_{RA^n} = \sum_i c_i|i\rangle_R|x_i\rangle_{A^n}, \qquad \sum_i |c_i|^2 = 1.$$

定义 $G_{ij} = \langle i| \mathcal{D}\big(\mathcal{N}^{\otimes n}(|x_i\rangle\langle x_j|)\big) |j\rangle$。将基中的 $|\psi\rangle\langle\psi|$ 和 $|\Phi_M\rangle$ 展开可得

$$F = \langle \Phi_M | \left(\mathrm{id}_R \otimes \mathcal{D} \circ \mathcal{N}^{\otimes n}\right)(|\psi\rangle\langle\psi|) |\Phi_M\rangle = \frac{1}{M} \sum_{i,j} c_i \overline{c_j} G_{ij}.$$

我们对 G 使用两个界。完全正性使 G 半正定：将 $\mathrm{id}_R \otimes (\mathcal{D} \circ \mathcal{N}^{\otimes n})$ 作用于 $\sum_i |i\rangle_R |x_i\rangle_{A^n}$ 与自身的外积，并取量子态 $\overline{|i\rangle}_R |i\rangle_{B_1}$之间的矩阵元。因此，$|G_{ij}| \le \sqrt{s_i s_j}$，其中 $s_i = G_{ii} = \langle i| \mathcal{D}(\rho_{x_i}^{B^n}) |i\rangle$ 是正确解码消息 i的概率。此外，一个矩阵元不大于迹范数，且解码器不会增大迹范数。结合信道 $\mathcal{N}^{\otimes n}$的式 (A5)，可得

$$|G_{ij}| \le \left\| \mathcal{D}\big(\mathcal{N}^{\otimes n}(|x_i\rangle\langle x_j|)\big) \right\|_1 \le \left\| \mathcal{N}^{\otimes n}(|x_i\rangle\langle x_j|) \right\|_1 = f(\rho_{x_i}^{E^n}, \rho_{x_j}^{E^n}) =: f_{ij}.$$

这些数 $m_{ij} = \min\{\sqrt{s_i s_j}, f_{ij}\}$具有对称性且非负，并且 $|G_{ij}| \le m_{ij}$。利用 $2|c_i||c_j| \le |c_i|^2 + |c_j|^2$以及 m_{ij}的对称性，可得

$$F \le \frac{1}{M} \sum_{i,j} |c_i||c_j| m_{ij} \le \frac{1}{M} \sum_i |c_i|^2 \sum_j m_{ij} \le \max_i \frac{1}{M} \sum_j m_{ij}.$$

最后一步成立是因为权重 $|c_i|^2$ 之和为 1。由于 $s_i \le 1$，我们有 $m_{ij} \le$ 最小值$\{\sqrt{s_j}, f_{ij}\}$。取达到最大值的索引 i_0 即可证明该结论。 □

容量公式的逆定理。令 $C =$ 最大值$_c$最大值$_{p \in \mathcal{P}(\mathcal{X}_c)}$ $\chi(p)$。输入基态的数量有限，并且不同环境态之间的根保真度严格小于 1。因此

$$\varphi = \max_{x,y:\rho_x^E \neq \rho_y^E} f(\rho_x^E, \rho_y^E) < 1,$$

其中，如果只有一个环境类，则令 $\varphi = 0$。

考虑一个使用 n 次、纠缠保真度至少为 $1-\varepsilon$ 的编码，并取引理 9 中的字符串和索引 i_0。最小值不大于其中的每一项，因此由式 (B4) 得到

$$\frac{1}{M} \sum_j \sqrt{s_j} \ge 1 - \varepsilon, \qquad \frac{1}{M} \sum_j f(\rho_{x_{i_0}}^{E^n}, \rho_{x_j}^{E^n}) \ge 1 - \varepsilon. \tag{B5}$$

对于每个位置 k，令 $\mathcal{X}_{c_k}$ 为包含 $x_{i_0,\,k}$ 的环境类。选取编码字在每个位置都使用这些类别的消息，

$$\mathcal{J} = \{i : x_{i,k} \in \mathcal{X}_{c_k} \text{ for every } k\}.$$

令 $M' = |\mathcal{J}|$和 $t = 1 - M'/M$表示省略部分的比例。所有选定的编码字都具有相同的乘积环境态。对于任意被省略的编码字，其环境输出与编码字 i_0 的环境输出之间的根保真度，是对 n 个位置上的乘积。至少有一个因子不超过 φ，而其他每个因子都不超过 1。因此，式 (B5) 中的第二个界给出

$$1 - \varepsilon \le \frac{1}{M} \sum_i f(\rho_{x_{i_0}}^{E^n}, \rho_{x_i}^{E^n}) \le \frac{M' + (M - M')\varphi}{M} = 1 - (1 - \varphi)t, \qquad t \le \frac{\varepsilon}{1 - \varphi}. \tag{B6}$$

由于 $\sqrt{s_i} \le (1 + s_i)/2$，公式 (B5) 中的第一个界给出 $M^{-1} \sum_i s_i \ge 1 - 2\varepsilon$。因此，原经典码的总译码错误为 $\sum_i (1 - s_i) \le 2M\varepsilon$。对于均匀选取的选定消息，其平均错误至多为$\varepsilon' = 2\varepsilon/(1-t)$。对于省略消息的解码器结果，可以将其分配给任意选定消息，而不会增加该错误。重新标记选定字 $x_1, \ldots, x_{M'}$并定义

$$p_k(x) = \frac{1}{M'} \big|\{i : x_{i,k} = x\}\big|. \tag{B7}$$

这是均匀消息下信道使用 k 的输入分布。其支撑集完全位于 $\mathcal{X}_{c_k}$中。图6展示了这些选出的编码字。

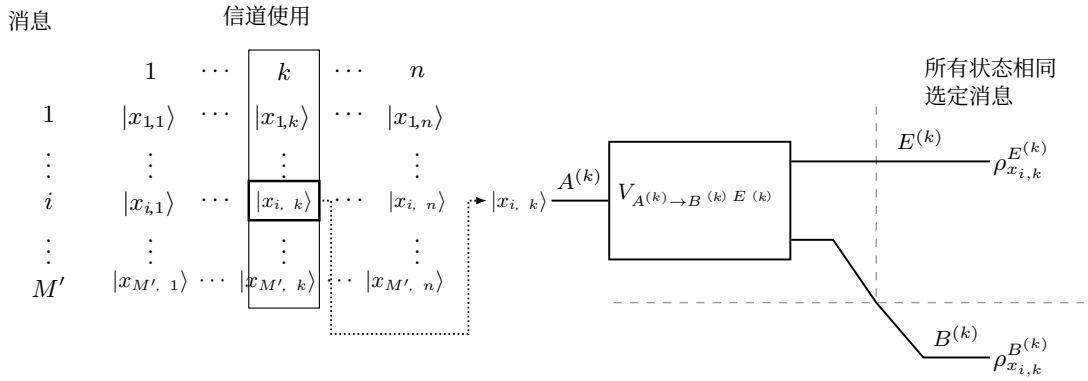

图6。逆定理中的选定基编码字。每一行对应一条 M' 选定消息，每一列对应一次信道使用。在均匀消息下， $p_k(x)$是第 k 列 x的比例。该列的所有元素都属于 $\mathcal{X}_{c_k}$，因此它们的环境输出相同。根据公式 (B6)，被省略消息的比例随错误率趋于零。

令 J 为均匀选出的消息，令 J 为解码器的估计值。Fano不等式 [21, 第 10 节。7] 和 Holevo界 [38,定理 5。49] 给出

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon')\log M' - 1 &\le I(J;\widehat{J}) \\ &\le S\left(\frac{1}{M'}\sum_i \rho^{B^n}_{x_i}\right) - \frac{1}{M'}\sum_i S(\rho^{B^n}_{x_i}) \\ &\le \sum_{k=1}^{n}\left[S\left(\frac{1}{M'}\sum_i \rho^{B^{(k)}}_{x_{i,k}}\right) - \frac{1}{M'}\sum_i S(\rho^{B^{(k)}}_{x_{i,k}})\right] = \sum_{k=1}^{n}\chi(p_k) \le nC. \end{aligned} \tag{B8}$$

第三个不等式对每个乘积输出使用熵的可加性，对它们的平均值使用次可加性。将具有$x_{i,k} = x$ 的消息分组，可得到与$\sum_k \chi(p_k)$相等的结果。最后的界成立，是因为每个 p_k 的支撑集都位于一个类中，尽管该类可能因位置而异。

对于可靠的序列， $\varepsilon \to 0$ 意味着 $t \to 0$ 和 $\varepsilon' \to 0$。此外，

$$\frac{\log M'}{n} = \frac{\log M}{n} + \frac{\log(1-t)}{n},$$

因此，该选择不会改变渐近速率。公式 (B8)随后将该码率限制为 C，从而证明逆定理。

□

事实上，任何高于该容量的码率都会迫使纠缠保真度呈指数衰减至零。

命题10 （非相干编码的强逆定理）。 令 $R > Q^{\mathrm{IO,\ all}}(\mathcal{N})$ 。存在常数 $\gamma > 0$ 和 n_0，使得每个使用 n 次、具有非相干操作编码器和任意解码器的编码，并满足 $\log M \ge nR$ ，均满足

$$F_e(\mathcal{D}\circ\mathcal{N}^{\otimes n}\circ\mathcal{E}) \le 2^{-\gamma n} \qquad (n \ge n_0).$$

证明。 令 $C = Q^{\mathrm{IO,\ all}}(\mathcal{N})$ ，并选取 $\eta > 0$ 使得 $C + 2\eta < R$。对于每个环境类 $\mathcal{X}_c$，附录A 3 a中的相对熵半径公式给出一个满秩态 σ_c ，使得对于所有 $x \in \mathcal{X}_c$， $D\left(\rho^B_x \| \sigma_c\right) \le C + \eta$。由于基输入的数量有限，根据 R´ényi 阶的连续性，可取一个公共的 $0 < \alpha \le 1$ ，使得

$$D_{1+\alpha}(\rho^B_x \| \sigma_c) \le C + 2\eta \qquad (x \in \mathcal{X}_c). \tag{B9}$$

我们使用这些固定量子态来界定经典解码测量的成功概率，沿用经典量子信道编码 [39] 中关于 R´ényi-散度的论证。

取自引理 9 的字符串 x_j、索引 i_0 和成功概率 s_j 。根据消息编码字中字母所属的环境类对消息分组。模式 $P = (P_1, \ldots, P_n) \in \{1,\ldots,\nu\}^n$ 指定了在 n 个位置上使用的类别，而

$$\mathcal{I}_P = \{j : x_{j,l} \in \mathcal{X}_{P_l} \text{ for all } l\}$$

包含具有模式 P 的消息。重复的编码字不会造成问题：这些消息仍保有各自不同的逻辑索引。

令 $T_j = \mathcal{D}^\dagger(|j\rangle\langle j|)$ 表示解码 POVM 的效应算子，并设 $\sigma_P = \bigotimes_{l=1}^n \sigma_{P_l}$。对于 $j \in \mathcal{I}_P$，乘积态上的 R´ényi 散度具有可加性，因此有 $D_{1+\alpha}(\rho_{x_j}^{B^n}\|\sigma_P) \le n(C+2\eta)$。二元测量 $\{T_j, I-T_j\}$ 以概率 s_j 和 $t_j = \mathrm{tr}(T_j\sigma_P)$ 接受这两个量子态。如果 $T_j = 0$，那么 $s_j = 0$。否则 $t_j > 0$，因为 σ_P是满秩的。该测量是一个输出经典比特的量子信道，因此两个结果分布的 R´ényi 散度不大于两个量子态的散度。对于有限集合上的概率分布 u 和 v，$D_{1+\alpha}(u\|v) = \alpha^{-1}\log\sum_\omega u(\omega)^{1+\alpha}v(\omega)^{-\alpha}$ 是非负项之和的对数。仅保留结果“接受”对应的项，可得

$$\frac{1}{\alpha}\log\left(s_j^{1+\alpha}t_j^{-\alpha}\right) \le D_{1+\alpha}\big((s_j,1-s_j)\big\|(t_j,1-t_j)\big) \le D_{1+\alpha}(\rho_{x_j}^{B^n}\|\sigma_P) \le n(C+2\eta).$$

解出 s_j 可得

$$s_j \le 2^{\beta n(C+2\eta)}t_j^\beta, \qquad \beta = \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

效应算子 T_j 之和为单位算子，因此 $\sum_{j\in\mathcal{I}_P} t_j \le \mathrm{tr}\,\sigma_P = 1$。两边取平方根，并对指数为 $2/\beta$ 和 $(1-\beta/2)^{-1}$ 的量应用 H¨older 不等式，可得

$$\sum_{j\in\mathcal{I}_P}\sqrt{s_j} \le 2^{\beta n(C+2\eta)/2}\sum_{j\in\mathcal{I}_P} t_j^{\beta/2} \le 2^{\beta n(C+2\eta)/2}\,|\mathcal{I}_P|^{1-\beta/2} \le M^{1-\beta/2}\,2^{\beta n(C+2\eta)/2}. \tag{B10}$$

令 $\varphi < 1$ 为不同类别的基输入的环境输出之间的最大根保真度；若只有一个类别，则设$\varphi = 0$，并固定 $0 \le k \le n$。如果 x_j 和 x_{i_0} 的模式在超过 k 个位置上不同，则根保真度的乘法性给出 $f(\rho_{x_{i_0}}^{E^n}, \rho_{x_j}^{E^n}) \le \varphi^{k+1}$。所有其他消息均属于至多以下数量的

$$V_k = \sum_{l=0}^{k}\binom{n}{l}(\nu-1)^l$$

模式。在公式 (B4) 中，将最小值分别用第一类消息的保真度和第二类消息的 $\sqrt{s_j}$ 进行界定。第一类消息至多有 M 条，而公式 (B10) 界定了第二类至多 V_k 种模式中每一种模式的求和。因此

$$\begin{aligned} F_e(\mathcal{D}\circ\mathcal{N}^{\otimes n}\circ\mathcal{E}) &\le \frac{1}{M}\left[M\varphi^{k+1} + V_k M^{1-\beta/2}\,2^{\beta n(C+2\eta)/2}\right] \\ &= \varphi^{k+1} + V_k\,2^{-\frac{\beta}{2}(\log M - n(C+2\eta))}. \end{aligned} \tag{B11}$$

写出 $b = \frac{\beta}{2}(R-C-2\eta) > 0$。若 $\varphi = 0$，取 $k = 0$，于是 $V_k = 1$，且上界为 2^{-nb}。否则 $\nu \ge 2$。选取充分小的 $0 < \delta < (\nu-1)/\nu$，使得 $h_2(\delta) + \delta\log(\nu-1) < b$，并取 $k = \lfloor\delta n\rfloor$。汉明球大小的上界给出

$$V_k \le 2^{n[h_2(\delta)+\delta\log(\nu-1)]}.$$

由于 $\log M \ge nR$，式 (B11) 中的第二项至多为 $2^{-n[b-h_2(\delta)-\delta\log(\nu-1)]}$，，第一项至多为 $\varphi^{\delta n}$。两者均呈指数衰减。对于小于两个衰减指数的任意 γ，当 n 充分大时，它们的和至多为 $2^{-\gamma n}$，这就证明了该命题。

□

3. 一般零容量

a. 零容量准则 *erion.* 对于每个有限维信道，$Q^{\mathrm{IO},\,\mathrm{all}}(\mathcal{N}) = Q^{\mathrm{IO},\,\mathrm{IO}}(\mathcal{N}) = 0$ 当且仅当 f

$$\rho_x^E = \rho_y^E \quad\Longrightarrow\quad \rho_x^B = \rho_y^B$$

对于每一对输入基态 $|x\rangle$，$|y\rangle$。

证明。 假设对于每一对基输入， $\rho_x^E = \rho_y^E$ 蕴含 $\rho_x^B = \rho_y^B$。在每个环境类中，接收方状态因此相同。因此，对于支撑集为某个类的每个分布， $\chi(p) = 0$ ，容量公式给出 $Q^{\mathrm{IO},\ \mathrm{all}}(\mathcal{N}) = 0$。

反之，若该蕴含不成立，则存在两个基输入，其对应的环境态为 $\rho_x^E = \rho_y^E$ 和 $\rho_x^B \neq \rho_y^B$。对二者各赋予概率 $1/2$ 的分布，其支撑集包含在同一个环境类中。由冯·诺伊曼熵的严格凹性可得 $\chi(p) > 0$，因此由容量公式可知 $Q^{\mathrm{IO},\ \mathrm{all}}(\mathcal{N}) > 0$。根据附录 C 4， $\frac{1}{2}Q^{\mathrm{IO},\ \mathrm{all}}(\mathcal{N}) \leq Q^{\mathrm{IO},\ \mathrm{IO}}(\mathcal{N}) \leq Q^{\mathrm{IO},\ \mathrm{all}}(\mathcal{N})$，所以这两个容量同时为零。这也证明了该结论对 IO 解码器成立。 □

特别地，单射互补信道会将不同的输入态映射为不同的环境态。因此，该判据表明，在任意输入基下，非相干编码的容量均为零。

推论 *3* 的证明。 信道 $\mathcal{R}(\rho) = \mathrm{tr}(\rho)\sigma$ 会将每个输入态映射到同一个输出，并且对于任意输入参考基中的不同基态，满足 $\mathcal{R}(|x\rangle\langle y|) = 0$。由公式 (A5)， $\mathcal{N}_\varepsilon = (1-\varepsilon)\mathcal{N} + \varepsilon\mathcal{R}$ 的环境输出因此满足

$$f\big(\mathcal{N}_\varepsilon^c(|x\rangle\langle x|), \mathcal{N}_\varepsilon^c(|y\rangle\langle y|)\big) = \|\mathcal{N}_\varepsilon(|x\rangle\langle y|)\|_1 = (1-\varepsilon)\|\mathcal{N}(|x\rangle\langle y|)\|_1 \leq 1-\varepsilon < 1. \tag{B12}$$

每个类都是单元素集，因此使用非相干编码时，两种容量均为零。

对于保真度界，设 $\varepsilon \leq 1/2$ ，并考虑一个使用 IO 编码器、逻辑维数为 $M \geq 2$ 的 n 次使用编码。取引理 9 中的字符串 x_j、索引 i_0 和成功概率 s_j ，并令 k 为满足 $x_j = x_{i_0}$ 的消息数 j 。解码 POVM 的效应算子之和为恒等算子，因此这些 k 个成功概率之和至多为一；根据柯西–施瓦茨不等式，它们的平方根之和至多为 $\sqrt{k}$ 。每个其他编码字都至少在一个位置上与 x_{i_0} 不同。根保真度的可乘性和式 (B12) 将其在式 (B4) 中对应的项界定为 $1-\varepsilon$。因此

$$F_e(\mathcal{D}\circ\mathcal{N}_\varepsilon^{\otimes n}\circ\mathcal{E}) \leq \frac{\sqrt{k} + (M-k)(1-\varepsilon)}{M} \leq 1 - \varepsilon\Big(1 - \frac{1}{M}\Big) \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

第二个不等式成立，是因为分子不会随着 $k \geq 1$ 增大：其增量为 $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} - (1-\varepsilon) \leq \sqrt{2} - \frac{3}{2} < 0$。 □

b. 一般信道。 令 $J(\mathcal{N}) = \sum_{x,\ y} |x\rangle\langle y|_A \otimes \mathcal{N}(|x\rangle\langle y|)$ 为 $\mathcal{N}$ 的 Choi矩阵，并取 $\sigma = I_B/d_B \,\mathrm{with} d_B = \dim B$，使得 $J(\mathcal{R}) = I_{AB}/d_B$。满足 $\mathcal{N}_\varepsilon$ with $0 < \varepsilon \leq 1$ 的量子信道，恰好是其 Choi矩阵具有满秩的量子信道。事实上， $J(\mathcal{N}_\varepsilon) \geq \varepsilon I_{AB}/d_B$。反之，如果 $J(\mathcal{N})$ 的最小特征值 λ 为正，则 $J(\mathcal{N}) - \lambda I_{AB} \geq 0$。令 $\varepsilon = \lambda d_B$，由于 $J(\mathcal{N})$ 的特征值的均值为 $1/d_B$，该值至多为 1。于是 $\mathcal{N} - \varepsilon\mathcal{R}$ 是完全正的，因此对于某个信道 $\mathcal{N}'$，有 $\mathcal{N} = (1-\varepsilon)\mathcal{N}' + \varepsilon\mathcal{R}$。

满秩是一个开条件，并且 $\mathcal{N}_\varepsilon \to \mathcal{N}$ as $\varepsilon \to 0$。因此，这些量子信道构成从 A 到 B 的 CPTP映射的一个开稠密子集。所有量子信道的 Choi 矩阵都位于厄米算子 J 在 AB 上的实仿射空间中，并满足 $\mathrm{tr}_B J = I_A$。在该空间上，$\det J$ 是一个不恒为零的多项式，因为它在 $J(\mathcal{R})$ 处为正。其零点集具有 Lebesgue测度零，并且包含每个 Choi矩阵为奇异的量子信道。最后，$\|\mathcal{N}_\varepsilon - \mathcal{N}\|_\diamond \leq 2\varepsilon$，因此在其值为正的每个量子信道处，两个容量都是不连续的。

c. 固定编码下的连续性。 这种不连续性涉及渐近容量。对于固定的编码器 $\mathcal{E}$、解码器 $\mathcal{D}$ 和分块长度 n，

$$\big|F_e(\mathcal{D}\circ\mathcal{N}^{\otimes n}\circ\mathcal{E}) - F_e(\mathcal{D}\circ(\mathcal{N}')^{\otimes n}\circ\mathcal{E})\big| \leq \frac{n}{2}\|\mathcal{N} - \mathcal{N}'\|_\diamond,$$

其中 $\|\cdot\|_\diamond$ 是菱形范数。为得到该界，一次替换一个信道使用。由于其他信道使用、编码和解码都不会增大迹距离，每次替换使解码态的变化至多为 $\frac{1}{2}\|\mathcal{N} - \mathcal{N}'\|_\diamond$。纠缠保真度是一个测量概率，因此其变化也受同一个距离所界定。这证明了在每个固定分块长度下的连续性；该界随 n 增长，因此并不能推出容量的连续性。

4. 可加性和凸性

命题 2 （重述）。 对于任意两个有限维量子信道，

$$Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2) = Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{N}_1) + Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{N}_2).$$

对于从 A 到 B 的量子信道 $\mathcal{N}_j$ 以及概率 λ_j，

$$Q^{\mathrm{IO,all}}\left(\sum_j \lambda_j \mathcal{N}_j\right) \leq \sum_j \lambda_j Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{N}_j).$$

证明。可加性。 对于这两个量子信道，分别用$\rho_x^{B'}$， $\rho_x^{E'}$和$\tau_y^{B''}$， $\tau_y^{E''}$表示输入基态的输出。借助乘积Stinespring扩张，输入基态 $|x\rangle \otimes |y\rangle$的环境输出为$\rho_x^{E'} \otimes \tau_y^{E''}$。两个这样的乘积态相等，当且仅当它们各自的边缘分布相等。因此，若用 $\mathcal{X}_c$和 $\mathcal{Y}_d$ 表示这两个量子信道的类别，则它们乘积的类别恰好为 $\mathcal{X}_c \times \mathcal{Y}_d$。

固定 p_{xy} 在 $\mathcal{X}_c \times \mathcal{Y}_d$上的一个分布，其边缘分布为 $p_x = \sum_y p_{xy}$ 和 $q_y = \sum_x p_{xy}$。分别用 $\chi_{12}(p_{xy})$、 $\chi_1(p_x)$ 和$\chi_2(q_y)$ 表示联合系综及其两个边缘系综的 Holevo 信息。平均输出态的熵的次可加性，以及每个乘积输出态的熵的可加性，给出

$$\chi_{12}(p_{xy}) \leq \chi_1(p_x) + \chi_2(q_y).$$

对于乘积分布，等号成立。因此，一个乘积类中的最大 Holevo 信息等于其两个单独类别的最大值之和。对 c和 d 取最大值，并应用容量公式，即可证明所声称的可加性。

凸性。令 $\mathcal{N} = \sum_j \lambda_j \mathcal{N}_j$，省略权重为零的分量。固定一个满足关于 $\mathcal{N}$的隐私条件的分布 p ，并令 x, y属于其支撑集。在 $\mathcal{N}$作用下，它们的环境输出相同，因此由式 (A5)和三角不等式可得

$$1 = \|\mathcal{N}(|x\rangle\langle y|)\|_1 \leq \sum_j \lambda_j \|\mathcal{N}_j(|x\rangle\langle y|)\|_1 \leq 1.$$

右侧的每个范数至多为一，且每个 λ_j 均为正，因此所有这些范数都等于一。由同一个保真度恒等式可知，对于每个 j， $\mathcal{N}_j^c(|x\rangle\langle x|) = \mathcal{N}_j^c(|y\rangle\langle y|)$。因此， p对每个分量信道都满足隐私条件。Write $\chi(p;\mathcal{M})$ 表示 $\{p_x, \mathcal{M}(|x\rangle\langle x|)\}$的 Holevo 信息。输出系综满足

$$\omega_{XB}^{(j)} = \sum_x p_x \, |x\rangle\langle x|_X \otimes \mathcal{N}_j(|x\rangle\langle x|_A), \qquad \omega_{XB} = \sum_j \lambda_j \omega_{XB}^{(j)}.$$

这些量子态具有相同的 X 边缘态，其熵为 $H(X)$。根据条件熵的凹性 [21, 第 11], 章，我们得到

$$\begin{aligned}
\chi(p;\mathcal{N}) &= H(X) - S(X|B)_\omega \\
&\leq \sum_j \lambda_j \left[H(X) - S(X|B)_{\omega^{(j)}}\right] \\
&= \sum_j \lambda_j \chi(p;\mathcal{N}_j) \leq \sum_j \lambda_j Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{N}_j).
\end{aligned}$$

最后一个不等式成立，是因为 p 对每个分量信道都满足隐私条件。对 $\mathcal{N}$ 可行的分布取最大值即可证明凸性。

□

5. 更改允许的编码器类

定理 1 对 PIO 和 SIO 编码器仍然成立，但对其他所有自由操作的选择并不成立。特别地，以下信道在采用 IO 编码时具有零容量，但使用 DIO编码器和 IO 解码器却能完美传输一个量子比特。

令 $A = C \otimes S$ 由两个量子比特组成，并将信道输出 B 与 C的一个副本对应。定义

$$U = |0\rangle\langle 0|_C \otimes I_S + |1\rangle\langle 1|_C \otimes H_S, \qquad \mathcal{N}_{A\to B}(\sigma) = \mathrm{tr}_S(U^\dagger \sigma U), \tag{B13}$$

其中 H是 Hadamard 门。酉算子 $U^\dagger$是从 A到 $B \otimes S$的 Stinespring 等距映射，其中 S是环境。对于四个输入基态，

$$\mathcal{N}_{A\to S}^{\mathrm{c}}(|i\rangle\langle i|_C \otimes |j\rangle\langle j|_S) = H^i \, |j\rangle\langle j| \, H^i, \qquad i, j \in \{0, 1\}. \tag{B14}$$

这两个计算基态和两个 Hadamard 基态彼此均不相同。因此，每个环境类只包含一个输入，由定理 1 可得

$$Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{N}) = Q^{\mathrm{IO,IO}}(\mathcal{N}) = 0.$$

取量子比特逻辑系统 A_1 和 B_1，并分别将它们的基态与 C 和 B 的基态对应起来。选择编码器

$$\mathcal{E}_{A_1\to A}(\rho) = U\left(\rho\otimes\frac{I_S}{2}\right)U^\dagger. \tag{B15}$$

为检验其退相干协变性，写成 $\rho=\sum_{i,\ j=0}^{1}\rho_{ij}\,|i\rangle\langle j|$。其在 C 上的块为

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{1}\rho_{ij}\,|i\rangle\langle j|_C\otimes H^iH^j.$$

对角块是 I_S的倍数，而其他块在 A上对角线为零。因此，

$$\Delta_A(\mathcal{E}(\rho)) = \frac{1}{2}\sum_i\rho_{ii}\,|i\rangle\langle i|_C\otimes I_S = \mathcal{E}(\Delta_{A_1}(\rho)).$$

因此， $\mathcal{E}$ 是退相干不变操作，因而也是 MIO。直接代入得到 $\mathcal{N}\circ\mathcal{E}=\mathrm{id}_{A_1\to B}$，所以从 B 到 B_1的恒等解码器能够恢复每个输入态，包括其与参考系的纠缠。在每次使用中独立应用此编码可达到每次使用一个量子比特的码率。由于信道输出是一个量子比特，不可能达到更高码率。因此，无论解码器采用 IO 还是不受限操作，在使用退相干不变操作或 MIO 进行编码时，其容量均为 1。

附录 C：非相干解码的证明

本附录证明定理 4 和定理 5 以及推论 6。固定一个编码器 $\mathcal{E}_{A_1\to A^n}$，并将从逻辑输入 A_1 到接收方系统 B^n的信道记为 $\mathcal{T}=\mathcal{N}^{\otimes n}\circ\mathcal{E}$。两个逻辑系统 A_1 和 B_1 的维数均为 M，且索引相同的基态彼此对应。我们用 i 表示逻辑基索引，用 y 表示由 B^n组成的基字符串。

对于向量 $|v\rangle$和作用于 B_1上的算子 X，令

$$\|v\|_{\ell_1}=\sum_i|\langle i|v\rangle|,\qquad \|X\|_{\ell_1}=\sum_{i,j}|\langle i|\,X\,|j\rangle|.$$

两个范数均取自逻辑基。特别地， $\||v\rangle\langle v|\|_{\ell_1}=\|v\|_{\ell_1}^2$。我们用 $\|X\|_1$ 表示迹范数，用 $\|v\|$表示欧几里得范数。

1. 容许映射与非相干实现

对于 Kraus 算子为 D_a的信道，迹保持条件给出

$$\sum_a\|D_a\,|y\rangle\|^2=\langle y|\sum_a D_a^\dagger D_a\,|y\rangle=1.$$

每个向量都满足 $\|v\|_{\ell_1}\ge\|v\|$，且当且仅当至多只有一个坐标非零时等号成立。因此，对于每个 y，$\sum_a\|D_a\,|y\rangle\|_{\ell_1}^2\le 1$ 当且仅当每个 D_a 的每一列至多有一个非零元素。因此，当且仅当一个信道具有这样的 Kraus 表示时，它才是非相干操作。我们保留这一列条件，但允许迹减小。

与第 IV A 节一样，有限族 $\{A_a:B^n\to B_1\}$ 是可容许的，如果

$$\sum_a A_a^\dagger A_a\le I_{B^n},\qquad \sum_a\|A_a\,|y\rangle\|_{\ell_1}^2\le 1\quad\text{for every } y. \tag{C1}$$

完全正映射 $\mathcal{A}$ 若具有容许克劳斯族，则称为容许映射。第一个不等式使 $\mathcal{A}$ 迹非增。第二个不等式还意味着

$$\|\mathcal{A}(|y\rangle\langle y|)\|_{\ell_1}\le\sum_a\|A_a\,|y\rangle\|_{\ell_1}^2\le 1, \tag{C2}$$

根据 $\|\cdot\|_{\ell_1}$的三角不等式。

引理 11 (采样)。 对于每个算子 A: $B^n \to B_1$，存在一个仅取有限个值的随机算子 Z，使得其每个取值在每列中至多有一个非零元素，并且

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z &= A, \\ \mathbb{E}[Z^\dagger Z] &= A^\dagger A + \sum_y \left(\|A|y\rangle\|_{\ell_1}^2 - \|A|y\rangle\|^2 \right) |y\rangle\langle y| . \end{aligned} \tag{C3}$$

证明。 写作 $A_{iy} = \langle i| A |y\rangle$ 和 $s_y = \sum_i |A_{iy}|$。对于满足 $s_y > 0$ 的一列，以概率 $|A_{iy}|/s_y$ 选取一行 i，并令

$$Z_{iy} = s_y \frac{A_{iy}}{|A_{iy}|}.$$

该列的所有其他元素均为零。若 $s_y = 0$，则整列为零。不同列的选择相互独立。因此，每个非零元素 A_{iy} 在期望中都会重现，从而 $\mathbb{E}Z = A$。

对于 $y \neq y'$，由独立性可得

$$\mathbb{E}\,\langle y| Z^\dagger Z |y'\rangle = \sum_i \overline{A_{iy}} A_{iy'} = \langle y| A^\dagger A |y'\rangle .$$

第 y 列的平方范数始终为 s_y^2。因此， $\mathbb{E}[Z^\dagger Z]$ 的对角元素为 $\|A|y\rangle\|_{\ell_1}^2$，而 $A^\dagger A$ 的对角元素为 $\|A|y\rangle\|^2$。这就证明了第二个恒等式。 □

对于具有 Kraus 算子 A_a 的完全正映射 $\mathcal{A}$，以及具有 Kraus 算子 T_b 的编码信道 $\mathcal{T}$，与公式（A2）相同的计算给出

$$F_e(\mathcal{A} \circ \mathcal{T}) = \langle \Phi_M| \left(\mathrm{id}_R \otimes \mathcal{A} \circ \mathcal{T}\right)(|\Phi_M\rangle\langle\Phi_M|) |\Phi_M\rangle = \frac{1}{M^2} \sum_{a,b} |\mathrm{tr}(A_a T_b)|^2. \tag{C4}$$

即使 $\mathcal{A}$ 降低了迹，这个表达式也定义良好。

采样会改变 Kraus 算子的归一化。下一个引理通过仅保留一部分逻辑基态来控制这种变化。随后进行对角重缩放，得到一个保真度仍接近原映射的 IO 解码器。这里我们允许任意迹不增加映射：容许映射对应推论 6，而无限制解码器则对应定理 4 中的下界。

引理 12 (子码上的非相干解码)。 设 $\mathcal{T}$ 是一个信道，其逻辑输入维数为 $M \geq 2$，输出维数有限。设 $\mathcal{A}$ 是从其输出到一个 M 维逻辑系统的完全正且迹不增映射，其 *Kraus* 算子为 A_a。定义

$$\begin{aligned} \pi_y(i) &= \sum_a |\langle i| A_a |y\rangle|^2, & \ell_y &= \sum_i \sqrt{\pi_y(i)}, \\ \kappa_y &= \sum_a \|A_a |y\rangle\|_{\ell_1}^2, & \bar{p}(y) &= \langle y| \mathcal{T}(I/M) |y\rangle . \end{aligned}$$

这里 $\sum_i \pi_y(i) \leq 1$，而 $\bar{p}$ 是对最大混合逻辑输入测量信道输出所得的分布。对于 $1 \leq m \leq M$，令

$$\varepsilon_m = \sum_y \bar{p}(y) \min\left\{1, \frac{m-1}{M-1}\kappa_y, \frac{m-1}{M-1}\ell_y\right\}. \tag{C5}$$

存在一个等距映射 W： $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^M$，将基态映射到互不相同的逻辑基态；以及一个 *IO* 解码器 $\mathcal{D}$，其输出维数为 m，使得

$$F_e(\mathcal{D} \circ \mathcal{T}_W) \geq \left(\sqrt{F_e(\mathcal{A} \circ \mathcal{T})} - \sqrt{\varepsilon_m}\right)_+^2, \qquad \mathcal{T}_W(\rho) = \mathcal{T}(W\rho W^\dagger), \tag{C6}$$

其中 $u_+ =$ 最大值$\{u, 0\}$。

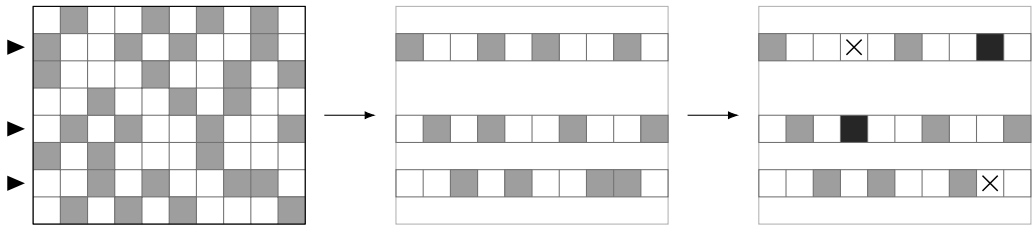

图 7。引理 12 证明中的限制和采样。行是逻辑基态，列是输出基字符串，阴影单元格表示非零元素。(a) 映射 $\mathcal{A}$ 的 Kraus算子 A_a。三角形标记随机集合 S 中的行。(b) 限制 $A_{a,\,S}$ 仅保留这些行。其中两列仍包含两个非零元素。(c) 随机算子 $Z_{a,\,S}$ 的一个取值。在这两列中的每一列里，按照其模成比例的概率选取一个元素并重新缩放（深色），另一个元素则设为零（交叉标记）。其余列保持不变。

证明。从 $S \subseteq \{1,\dots,M\}$ 中均匀随机选取一个大小为 m 的子集。令 $W_S\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^M$ 为包含映射，按递增顺序将基态映射到索引属于 S的逻辑基态。通过设定 $A_{a,\,S} = W_S^\dagger A_a$来限制每个 Kraus 算子的逻辑输出。对于每个物理输出基态，记为

$$\xi_y(S) = \sum_a \left(\|A_{a,S}\,|y\rangle\|_{\ell_1}^2 - \|A_{a,S}\,|y\rangle\|^2 \right), \qquad L_S = \sum_y \frac{|y\rangle\langle y|}{\sqrt{1+\xi_y(S)}}.$$

数值 $\xi_y(S)$ 均为非负数。对每个 $A_{a,\,S}$ 应用引理 11，并将所得的随机算子记为 $Z_{a,\,S}$ （图 7）。由于 $\sum_a A_{a,\,S}^\dagger A_{a,\,S} \le I$，其矩恒等式给出

$$\begin{aligned} \sum_a \mathbb{E}[(Z_{a,S}L_S)^\dagger Z_{a,S}L_S] &= L_S \left(\sum_a A_{a,S}^\dagger A_{a,S} + \sum_y \xi_y(S)\,|y\rangle\langle y| \right) L_S \\ &\le L_S \left(\sum_y \big(1+\xi_y(S)\big)\,|y\rangle\langle y| \right) L_S = I. \end{aligned} \tag{C7}$$

我们将 $Z_{a,\,S}L_S$ 的每个可能取值乘以其采样概率的平方根，并将其用作 Kraus算子。每个算子都是非相干的，因为对角因子 L_S 不会在列中引入其他非零元素。I 与公式 (C7) 左侧之差是半正定的。将其分解为 $\sum_j |v_j\rangle\langle v_j|$ 后，对于固定的逻辑基态 $|i_0\rangle$，我们可以加入算子 $|i_0\rangle\langle v_j|$。这些算子同样是非相干的，并将这一族算子补全为一个非相干操作信道 $\mathcal{D}_S$。

接下来，我们对 L_S 所导致的保真度变化进行界定。对于 $\mathcal{T}$ 的 Kraus 算子 T_b，定义振幅向量

$$v_S(a,b) = \frac{1}{m}\,\mathrm{tr}\Big(W_S^\dagger A_a T_b W_S\Big).$$

对角重缩放使该向量发生变化，变化量的平方范数至多为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m^2}\sum_{a,b} |\mathrm{tr}[A_{a,S}(I-L_S)T_bW_S]|^2 \\ &\qquad \le \frac{1}{m}\sum_b \mathrm{tr}\Big[W_S^\dagger T_b^\dagger (I-L_S)^2 T_b W_S\Big] =: w_S. \end{aligned} \tag{C8}$$

该不等式使用了 $|\mathrm{tr}\,X|^2 \le m\mathrm{tr}\big(X^\dagger X\big)$ 和 $\sum_a A_{a,\,S}^\dagger A_{a,\,S} \le I$。

根据式（C4），$\mathcal{D}_S \circ \mathcal{T}_{W_S}$ 的保真度是若干非负项之和，每一项对应 $\mathcal{D}_S$ 的一个Kraus算子以及每个b。我们舍去附加算子 $|i_0\rangle\langle v_j|$的那些项。对于抽样算子，平方绝对值的均值至少不小于均值的平方绝对值，并且$\mathbb{E}Z_{a,S} = A_{a,S}$。因此

$$F_e(\mathcal{D}_S \circ \mathcal{T}_{W_S}) \ge \frac{1}{m^2}\sum_{a,b}\mathbb{E}|\mathrm{tr}(Z_{a,S}L_ST_bW_S)|^2 \ge \frac{1}{m^2}\sum_{a,b}|\mathrm{tr}(A_{a,S}L_ST_bW_S)|^2.$$

右侧是分量为 $v_S(a,b) - m^{-1}\operatorname{tr}[A_{a,S}(I - L_S)T_b W_S]$的向量的平方范数。根据式（C8）和三角不等式，

$$\sqrt{F_e(\mathcal{D}_S \circ \mathcal{T}_{W_S})} \geq \|v_S\| - \sqrt{w_S}. \tag{C9}$$

为了对 w_S 求平均，我们还必须考虑选定子码的输出分布。令 $p(y|i) = \langle y|\,\mathcal{T}(|i\rangle\langle i|)\,|y\rangle$。于是

$$w_S = \frac{1}{m}\sum_{i\in S}\sum_y p(y|i)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\xi_y(S)}}\right)^2.$$

固定 $i,\ y$ 并以 $i \in S$ 为条件。展开平方范数之差可得

$$\xi_y(S) = \sum_a \sum_{\substack{j,k\in S\\ j\neq k}} |\langle j|\,A_a\,|y\rangle|\,|\langle k|\,A_a\,|y\rangle|.$$

每一对不同的 j,k 指标以至多 $\tau = (m-1)/(M-1)$ 的条件概率被纳入。因此

$$\mathbb{E}[\xi_y(S) \mid i \in S] \leq \tau\kappa_y.$$

对于第二个界，令 $u_j = \sqrt{\pi_y(j)}$ 和 $z = \sum_{j\in S\setminus\{i\}} u_j$。对 Kraus 指标应用柯西–施瓦茨不等式可得

$$\xi_y(S) \leq \sum_{\substack{j,k\in S\\ j\neq k}} u_j u_k \leq 2u_i z + z^2 \leq 2z + z^2,$$

因为 $u_i \leq 1$。因此，

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\xi_y(S)}}\right)^2 \leq \min\{1, \xi_y(S), z\}.$$

事实上，对于每个 $\xi \geq 0$，$0 \leq 1 - (1+\xi)^{-1/2} \leq \min\{1,\xi\}$，这给出了前两个界。由 $1 + \xi_y(S) \leq (1+z)^2$ 和 $z^2/(1+z)^2 \leq z$ 可得关于 z 的界。每个 $j \neq i$ 以条件概率 τ 属于 S，因此$\mathbb{E}[z \mid i \in S] = \tau(\ell_y - u_i) \leq \tau\ell_y$。最小值的期望不大于期望的最小值，且每个$i$ 以概率 m/M 属于 S。因此，以传输的基态为条件可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_S w_S &= \frac{1}{M}\sum_{i,y} p(y|i)\,\mathbb{E}\left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\xi_y(S)}}\right)^2 \,\middle|\, i \in S\right] \\ &\leq \frac{1}{M}\sum_{i,y} p(y|i)\min\{1, \tau\kappa_y, \tau\ell_y\} = \varepsilon_m.\end{aligned} \tag{C10}$$

最后一个等式利用了 $\bar{p}(y) = M^{-1}\sum_i p(y|i)$。

最后，每个指标以概率 m/M 属于 S，因此

$$\mathbb{E}_S v_S(a,b) = \frac{1}{M}\operatorname{tr}(A_a T_b).$$

由欧几里得范数的凸性和平方根的凹性可得

$$\mathbb{E}_S\|v_S\| \geq \sqrt{F_e(\mathcal{A}\circ\mathcal{T})}, \qquad \mathbb{E}_S\sqrt{w_S} \leq \sqrt{\varepsilon_m}.$$

对公式 (C9) 取平均可知，至少有一个子集 S 达到所声称的界。 □

2. 使用非相干解码时的纠缠保真度

我们采用第 IV A 节中的定义，

$$F_{\ell_1}(\mathcal{T}) = \sup_{\mathcal{A}\ \text{admissible}} F_e(\mathcal{A}\circ\mathcal{T}). \tag{C11}$$

定理 5 (重述)。 对于每个逻辑维数为 M 的编码信道 $\mathcal{T}$，

$$\sup_{\mathcal{D}\in\mathrm{IO}} F_e(\mathcal{D}\circ\mathcal{T}) \le F_{\ell_1}(\mathcal{T}).$$

对于每个整数 $1\le m\le M$，都存在一个等距映射 $W\colon \mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^M$，它将基态映射到互不相同的逻辑基态，使得限制信道 $\mathcal{T}_W(\rho)=\mathcal{T}(W\rho W^\dagger)$ 满足

$$\sup_{\mathcal{D}\in\mathrm{IO}} F_e(\mathcal{D}\circ\mathcal{T}_W) \ge \left(\sqrt{F_{\ell_1}(\mathcal{T})}-\sqrt{m/M}\right)_+^2. \tag{C12}$$

第二个上确界是 对输出维数为 m 的 *IO* 解码器取上确界，而 F_e 使用 $|\Phi_m\rangle$。这里 $u_+=$最大值$\{u,0$ $\}$.

证明。 每个 IO 解码器都有一个可容许的 Kraus 表示，由此可证上界。对于 $M=1$,
接收方可以丢弃信道输出 p出并且 prep是唯一 q的 g正交基态 , giving 保真度y one.

设 $M\ge 2$ 并固定 m。对于任意可容许映射 $\mathcal{A}$，列条件给出 $\kappa_y\le 1$。因此，引理 12 中的误差满足

$$\varepsilon_m \le \frac{m-1}{M-1} \le \frac{m}{M}.$$

m 个逻辑基态的子集只有有限多个。对于每个子集，选择保持其顺序的包含映射 W。在这些包含映射上取最大值，引理给出

$$\max_W \sup_{\mathcal{D}\in\mathrm{IO}} F_e(\mathcal{D}\circ\mathcal{T}_W) \ge \left(\sqrt{F_e(\mathcal{A}\circ\mathcal{T})}-\sqrt{m/M}\right)_+^2.$$

左侧与 $\mathcal{A}$ 无关。对可容许映射取上确界，并利用右侧作为其保真度函数的连续性，可得对于有限多个包含映射中的至少一个，式 (C12) 成立。 □

3. 非相干解码下的容量

定理 5 中的两个界证明了推论 6。对于可达性，保留 $1/n$ 比例的逻辑基态会使附加误差消失，同时仅将码维数的对数减少 $O(\log n)$。

推论 6 （重述）。 对于每个有限维量子信道 $\mathcal{N}$，采用 *IO* 解码时的各项容量为

$$\sup\left\{R\ge 0:\ \lim_{n\to\infty}\sup_{\mathcal{E}} F_{\ell_1}(\mathcal{N}^{\otimes n}\circ\mathcal{E})=1\right\}.$$

内层上确界取遍具有 n 信道输入和逻辑维数 $M\ge 2^{nR}$ 的编码器：对于 $Q^{\mathrm{IO},\ \mathrm{IO}}(\mathcal{N})$，取 *IO* 编码器；对于 $Q^{\mathrm{all},\ \mathrm{IO}}(\mathcal{N})$，取任意 *CPTP*编码器。

推论 *6* 的证明。 固定选择 IO 编码器或无约束编码器，并令 R_0 表示所述公式右侧的上确界。若码率 $r>0$ 可通过 IO 解码实现，则选择达到该码率且误差趋于零的编码。对于任意 $R<r$，其维数最终都会超过 2^{nR}。定理 5 中的上界给出，对于这些编码器有$F_{\ell_1}\to 1$，因此 $r\le R_0$。

反过来，设 $R>0$ 是一个使内层上确界趋于 1 的码率。选取维数为 $M_n\ge 2^{nR}$ 的编码器 $\mathcal{E}_n$，使得对于 $\mathcal{T}_n=\mathcal{N}^{\otimes n}\circ\mathcal{E}_n$，$F_{\ell_1}(\mathcal{T}_n)\to 1$。取 $m_n=\lfloor M_n/n\rfloor$应用定理 5；当 n 充分大时，它为正。由此可得包含映射 W_n，使得限制信道 $\mathcal{T}_{n,\ W_n}(\rho)=\mathcal{T}_n(W_n\rho W_n^\dagger)$ 满足

$$\sup_{\mathcal{D}\in\mathrm{IO}} F_e(\mathcal{D}\circ\mathcal{T}_{n,W_n}) \ge \left(\sqrt{F_{\ell_1}(\mathcal{T}_n)}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_+^2 \longrightarrow 1,$$

因为 $m_n/M_n \le 1/n$。选取一个与该上确界相差不超过 $1/n$ 的 IO 解码器，可使限制编码器 $\rho \mapsto \mathcal{E}_n(W_n \rho W_n^\dagger)$ 的保真度趋于 1。包含映射 W_n 将基态映射为基态，因此只要 $\mathcal{E}_n$ 是 IO，这些编码器就是 IO。此外，

$$\frac{1}{n}\log m_n \ge R - \frac{\log n + 1}{n}$$

对所有充分大的 n均成立。因此，低于 R 的所有码率都可通过 IO 解码实现。对R 取上确界，即可证明反向界。使用一维码可实现零码率，从而完成对这两类编码器的论证。

□

4. 非相干解码的容量界

定理 4 中的下界由引理 12 得出。该引理将较大编码的解码器转化为针对由逻辑基态张成的子空间的 IO 解码器。

定理 4 (重述)。 *将解码器限制为 IO，容量损失至多为一半：* $Q^{\mathrm{all},\ \mathrm{IO}}(\mathcal{N}) \ge \frac{1}{2}Q(\mathcal{N})$，*适用于不受限编码；以及* $Q^{\mathrm{IO},\ \mathrm{IO}}(\mathcal{N}) \ge \frac{1}{2}Q^{\mathrm{IO},\ \mathrm{all}}(\mathcal{N})$，*适用于非相干编码。对于有限维信道，因子* $1/2$ *均无法统一提高。*

采用 IO 编码时，傅里叶信道可达到因子 $1/2$ （附录 D 5）；采用不受限编码时，带标记的 MUB 信道 $\mathcal{N}_d$可逼近该因子（附录 D 4 b）。

定理 4 中的下界。 考虑非相干操作编码器或无约束编码器。设 $r > 0$ 可通过不受限制的解码实现，并选择一列逻辑维数为 M_n、纠缠保真度趋于 1 且 $\liminf_n n^{-1}\log M_n \ge r$ 的编码。

将引理 12 应用于编码信道 $\mathcal{T}_n = \mathcal{N}^{\otimes n} \circ \mathcal{E}_n$ 及其解码器 $\mathcal{A} = \mathcal{D}_n$，保留 $m_n = \lceil \sqrt{M_n}/n \rceil$ 个逻辑基态。对于保迹解码器 $\mathcal{D}_n$，$\pi_y(i) = \langle i|\,\mathcal{D}_n(|y\rangle\langle y|)\,|i\rangle$ 是对输入为 $|y\rangle$ 时测量其输出的逻辑基所得的分布。因此 $\ell_y = 2^{H_{1/2}(\pi_y)/2}$。由于该分布至多有 M_n 个结果，$H_{1/2}(\pi_y) \le \log M_n$，从而 $\ell_y \le \sqrt{M_n}$。因此，引理中的误差项至多为

$$\frac{(m_n - 1)\sqrt{M_n}}{M_n - 1} \le \frac{M_n}{n(M_n - 1)} \le \frac{2}{n}$$

对所有充分大的 n，所得 IO 解码器的纠缠保真度趋于 1，而

$$\frac{\log m_n}{n} \ge \frac{\log M_n}{2n} - \frac{\log n}{n}.$$

因此，码率 $r/2$ 可实现。包含映射将基态映射为基态，因此属于非相干操作；故将其与原编码器复合后，编码器类保持不变。对所有可实现的 r 取上确界，即可证明这两个界；当原容量为零时，下界显然成立。

□

5. 一般编码的上界

下一个引理允许将编码信道的每个 Kraus 算子拆分为两部分。它利用第一部分的希尔伯特–施密特范数和第二部分的矩阵元素来界定它们对保真度的贡献。这种分解给出了附录 D 4 中的不确定性界，该界同时适用于 $\mathcal{N}_H$ 和 $\mathcal{N}_d$。将第一部分设为零，即可得到附录 D 5 中用于傅里叶信道的较简单界。

引理 13 (Kraus 算子的上界)。 *设* $\mathcal{A} : B^n \to B_1$ *是一个完全正且迹不增映射，满足对每个* y*都有* $\|\mathcal{A}(|y\rangle\langle y|)\|_{\ell_1} \le 1$。*设* T_b *是信道* $\mathcal{T} \colon A_1 \to B^n$*的 Kraus 算子。对于任意分解* $T_b = T'_b + T''_b$*，*

$$M\sqrt{F_e(\mathcal{A}\circ\mathcal{T})} \le \left(M\sum_b \|T'_b\|_2^2\right)^{1/2} + \sum_y \left(\max_i \sum_b |\langle y|\,T''_b\,|i\rangle|^2\right)^{1/2}. \tag{C13}$$

根据公式 (C2)，每个可容许映射都满足这些假设。每个 MIO 信道也是如此：它对基态的输出是对角的，且迹为 1。

证明。为 $\mathcal{A}$ 选取 Kraus 算子 A_a。对于从 A_1 到 B^n 的一族算子 $X=(X_b)$，令

$$q(X)=\left(\sum_{a,b}\left|\mathrm{tr}(A_aX_b)\right|^2\right)^{1/2}.$$

这是.....的欧几里得范数　　一个线性依赖于 X的向量，因此满足三角不等式。因此

$$M\sqrt{F_e(\mathcal{A}\circ\mathcal{T})}=q(T)\le q(T')+q(T'').$$

对于第一项，柯西–施瓦茨不等式给出 $|\mathrm{tr}\,Y|^2\le M\,\mathrm{tr}\left(Y^\dagger Y\right)$ 对逻辑空间上的每个算子 Y均成立。由于 $\sum_a A_a^\dagger A_a\le I$，因此

$$q(T')^2\le M\sum_{a,b}\mathrm{tr}\left(T_b'^\dagger A_a^\dagger A_aT_b'\right)\le M\sum_b\|T_b'\|_2^2.$$

对于第二项，令 $|r_{by}\rangle=(T_b'')^\dagger|y\rangle$ 以及 $R_y=\sum_b|r_{by}\rangle\langle r_{by}|$。则 $\mathrm{tr}(A_aT_b'')=\sum_y\langle r_{by}|A_a|y\rangle$。欧几里得范数的三角不等式给出

$$\begin{aligned}q(T'')&\le\sum_y\left(\sum_{a,b}|\langle r_{by}|A_a|y\rangle|^2\right)^{1/2}\\&=\sum_y\left(\mathrm{tr}[\mathcal{A}(|y\rangle\langle y|)R_y]\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

对于矩阵 P和 R，在基下展开迹可得 $|\mathrm{tr}(PR)|\le\|P\|_{\ell_1}\max_{i,j}|R_{ij}|$。由于 $R_y\ge0$，$|(R_y)_{ij}|^2\le(R_y)_{ii}(R_y)_{jj}$，因此其绝对值最大的元素是一个对角元素。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[\mathcal{A}(|y\rangle\langle y|)R_y]&\le\|\mathcal{A}(|y\rangle\langle y|)\|_{\ell_1}\max_i\langle i|R_y|i\rangle\\&\le\max_i\sum_b|\langle y|T_b''|i\rangle|^2.\end{aligned}$$

这证明了关于 $q(T'')$ 的所述界限。 □

对于一般的编码信道，在引理 13 中令 $T_b'=0$，并定义

$$P(y|i)=\langle y|\mathcal{T}(|i\rangle\langle i|)|y\rangle=\sum_b|\langle y|T_b|i\rangle|^2.$$

这是发送逻辑基态 $|i\rangle$ 时得到输出 y 的概率，接收方在参考基下进行测量。我们得到

$$M\sqrt{F_{\ell_1}(\mathcal{T})}\le\sum_y\max_i\sqrt{P(y|i)}.\tag{C14}$$

对于任意 MIO 解码器，将 $F_{\ell_1}(\mathcal{T})$ 替换为 $F_e(\mathcal{D}\circ\mathcal{T})$ 后，同样的界限仍然成立。

Appendix D: Examples

本附录证明了第III C节和第V节中例子相关的论述，并表明 $Q^{\mathrm{IO},\,\mathrm{IO}}$ 不是可加的。

1. 泡利信道

我们首先证明，对于采用 IO 编码的 MIO 信道，IO 解码能够达到与不受限制的解码相同的码率。定理 7 可通过计算泡利信道的这一码率得出。

对于基输入 $|x\rangle$，令 $P(y|x)=\langle y|\mathcal{N}(|x\rangle\langle x|)|y\rangle$ 表示在参考基下测量输出时得到结果 $Y=y$的概率。记 $I(X;Y)_p$ 为该经典信道在输入分布 p下的互信息。

命题 14（环境类内的非相干解码）。 对于每个有限维信道 $\mathcal{N}$，

$$Q^{\mathrm{IO,IO}}(\mathcal{N}) \geq \max_{c} \max_{p\in\mathcal{P}(\mathcal{X}_c)} I(X;Y)_p. \tag{D1}$$

若 $\mathcal{N}$ 是 *MIO*，则等号成立，且两边均等于 $Q^{\mathrm{IO},\,\mathrm{all}}(\mathcal{N})$。

证明。 固定一个环境类 $\mathcal{X}_c$ 和一个分布 $p\in\mathcal{P}(\mathcal{X}_c)$。对于任何低于 $I(X;Y)_p$ 的码率，经典编码 [41,第 6] 章给出互不相同的基编码字 $x_i\in\mathcal{X}_c^n$ 和构成输出基字符串划分的解码区域 G_i。其平均成功概率趋于 1。所有编码字的环境输出都相同，因此引理 8 适用，其中 $D_i=\sum_{y\in G_i}|y\rangle\langle y|_{B^n}$。量 $\mathrm{tr}\big(D_i\rho_{x_i}^{B^n}\big)$ 恰好是测得的输出字符串属于 G_i 的概率。因此，该引理给出所得量子码的 $F_e\geq p_{\mathrm{succ}}^2\to 1$。

这里的 D_i 是正交投影算子。式 (B3) 中的 Kraus 算子满足

$$K_s\,|y\rangle_{B^n}=\langle s|_C\,U_i\,|y\rangle_{B^n}\,|i\rangle_{B_1}\quad (y\in G_i).$$

每个 K_s 都将一个基态映射为基态的倍数，因此解码器是非相干操作。对 p 和各类别取最大值即可证明式 (D1)。

如果 $\mathcal{N}$ 是 MIO，则每个接收方状态 $\mathcal{N}(|x\rangle\langle x|)$ 都是对角的，因此 $I(X;Y)_p=\chi(p)$。定理 1 和刚刚证明的下界随后给出 $Q^{\mathrm{IO},\,\mathrm{IO}}(\mathcal{N})=Q^{\mathrm{IO},\,\mathrm{all}}(\mathcal{N})$，并且等式 (D1) 中取等号。 □

对于式 (22) 中的 Pauli 信道，我们采用第 V.A 节的记号：概率 q_a、比特错误模式 T、子空间 L，以及随机变量 X 和 Y。这里 $0^m=(0,\ldots,0)$，所有字符串的长度均为 m，且运算在 $\mathbb{F}_2$ 上进行。

定理 7（重述）。 对于具有计算参考基的 m 量子比特 *Pauli* 信道 $\mathcal{N}$，以及如上所定义的 L、T、X 和 Y，

$$\begin{aligned} Q^{\mathrm{IO,IO}}(\mathcal{N})=Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{N}) &= I(X;Y)\\ &= \dim L - H(T\mid T+L). \end{aligned} \tag{D2}$$

证明。 我们首先确定环境类。Kraus 算子 $\sqrt{p_{ab}}\,X^aZ^b$ 给出式 (A3) 中的 Stinespring 等距映射 $V=\sum_{a,b}\sqrt{p_{ab}}\,X^aZ^b\otimes|a,\ b\rangle_E$。由于 $X^aZ^b\,|x\rangle=(-1)^{b\cdot x}\,|x\oplus a\rangle$，

$$V\,|x\rangle=\sum_{a,b}\sqrt{p_{ab}}\,(-1)^{b\cdot x}\,|x\oplus a\rangle_B\,|a,b\rangle_E\,.$$

具有不同 a 的量子态 $|x\oplus a\rangle_B$ 彼此正交归一。因此，对 B 进行迹运算可得

$$\rho_x^E=\sum_a\sum_{b,b'}\sqrt{p_{ab}p_{ab'}}\,(-1)^{(b\oplus b')\cdot x}\,|a,b\rangle\langle a,b'|_E\,.$$

两个基输入 x 和 y 具有相同的环境输出，当且仅当所有这些矩阵元素都相同，即当 $p_{ab}p_{ab'}>0$ 时，$(b\oplus b')\cdot(x\oplus y)=0$。这说明 $x\oplus y$ 与 L 定义中的张成空间正交。因此

$$\rho_x^E=\rho_y^E\quad\Longleftrightarrow\quad x\oplus y\in L. \tag{D3}$$

环境类是子空间 L 的陪集 $x_0+L=\{x_0\oplus z:\ z\in L\}$，而 L 本身就是包含 0^m 的类。

对 E 进行迹运算则得到接收方输出

$$\rho_x^B=\sum_a q_a\,|x\oplus a\rangle\langle x\oplus a|_B\,. \tag{D4}$$

它对每个基输入都是对角的，因此 $\mathcal{N}$ 是 MIO。在参考基中对其进行测量，以概率 q_a 得到结果 $x\oplus a$。这就是第 V.A 节的经典信道 $P(y|x)=q_{y\oplus x}$。因此，命题 14 给出

$$Q^{\mathrm{IO,IO}}(\mathcal{N})=Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{N})=\max_{c}\max_{r\in\mathcal{P}(\mathcal{X}_c)} I(X;Y)_r. \tag{D5}$$

接下来需要计算这个最大值。固定一个类 $x_0 + L$ 及其上的一个分布 r。令 X_r 服从分布r，且独立于比特错误 T，并令 $Y_r = X_r \oplus T$。于是 $H(Y_r \mid X_r) = H(T)$，因此 $I(X;\, Y)_r = I(X_r;\, Y_r) = H(Y_r) - H(T)$。回忆一下，$T + L$是包含 T的 L的陪集。由于 X_r属于 $x_0 + L$，输出 Y_r将该陪集确定为 $(Y_r \oplus x_0) + L$。对于 $T + L$的每个取值，输出都限制在一个具有 $|L| = 2^{\dim L}$ 个元素的陪集中。因此

$$H(Y_r) = H(T + L) + H(Y_r \mid T + L) \leq H(T + L) + \dim L.$$

当 X_r 在输入类上均匀分布时，添加任意固定误差都会使 Y_r 在所得输出陪集上均匀分布。给定 $T + L$后，对于每个可能的误差，这是同一个陪集，因此等式成立。由于 $T + L$ 是T的函数，我们有 $H(T) = H(T + L) + H(T \mid T + L)$。因此，每个类都给出相同的最大值，

$$\max_r I(X;Y)_r = \dim L + H(T + L) - H(T) = \dim L - H(T \mid T + L),$$

该最大值由类上的均匀分布取得。对于类 L，这就是定理中 X 的分布，因此
最大值等于 $I(X;Y)$。这 与公式（D5）结合，即可证明公式（D2）。 □

a. 比特翻转噪声和退相干。对于比特翻转噪声，仅发生 $\mathcal{N}_p^X\, b = 0$，因此两个环境输出相同，并且 $L = \mathbb{F}_2$。对于退相干，它们的根保真度为 $|1 - 2p| < 1$，因此二者不同，并且 $L = \{0\}$（图 8）。

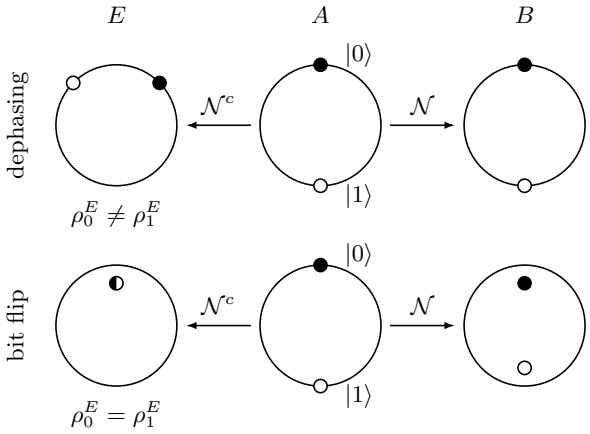

图 8. $p = 0.15$时布洛赫 x–z 平面中的基输入和约化输出。实心和空心标记分别对应输入 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$；半实心标记表示输出重合。对于退相干，环境态彼此不同且不正交，因此 $Q^{\mathrm{IO},\ \mathrm{all}} = 0$。对于比特翻转噪声，环境态彼此重合，且 $Q^{\mathrm{IO},\ \mathrm{all}} = 1 - h_2(p)$。

b. 额外的相位翻转噪声。 加入独立的相位翻转噪声，展示了附录 B 3 中确立的不连续性。对于由 $\mathcal{N}_\varepsilon^Z \circ \mathcal{N}_p^X$和 $0 < \varepsilon < 1/2$组成的复合信道，式 (A5) 给出了 $|0\rangle$和 $|1\rangle$的环境输出的根保真度：

$$f(\rho_0^E, \rho_1^E) = \|(\mathcal{N}_\varepsilon^Z \circ \mathcal{N}_p^X)(|0\rangle\langle 1|)\|_1 = 1 - 2\varepsilon < 1.$$

因此，对于所有此类 ε，采用非相干编码时的两种容量均为零。相比之下，最大混合输入给出

$$Q(\mathcal{N}_\varepsilon^Z \circ \mathcal{N}_p^X) \geq I_c(I/2, \mathcal{N}_\varepsilon^Z \circ \mathcal{N}_p^X) = 1 - h_2(p) - h_2(\varepsilon).$$

接收端输出的熵为一，而环境输出有四个特征值：$(1-p)(1-\varepsilon)$、 $p(1-\varepsilon)$、$(1-p)\varepsilon$ 和 $p\varepsilon$。因此，其熵为 $h_2(p) + h_2(\varepsilon)$。对于固定的 $0 < p < 1/2$，当 ε 足够小时，标准容量仍为正。

2. 使用非相干解码器进行退相干

仅解码器限制不会降低$\mathcal{N}_p^Z$的容量。其相位错误与经典比特错误具有相同的分布。对于任意 $0 < r < 1 - h_2(p)$，选择维数为 k的二进制线性码 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$，且 $k/n \to r$，使其

能够纠正概率为 p [42, 的比特翻转定理 18.12 和 18.13]。令 $\mathcal{L}$ 包含解码器从 $\mathcal{C}$的每个陪集中选出的错误代表元。实际错误位于 $\mathcal{L}$ 中的概率趋近于 1。

令 $k\times n$ 矩阵 G 的各行构成 $\mathcal{C}$的一组基。那么 ker $G=\mathcal{C}^{\perp}$。对于每个 u，满足 $Gy=u$的字符串 y构成 $\mathcal{C}^{\perp}$的一个陪集。将二进制串视为列向量，并定义编码等距映射

$$K\left|u\right\rangle_{A_1}=2^{-(n-k)/2}\sum_{y:Gy=u}\left|y\right\rangle_{A^n},\qquad u\in\mathbb{F}_2^k. \tag{D6}$$

每个求和中有 2^{n-k} 项。不同 u对应的基态集合互不相交，这验证了 K 是等距映射。将相应的输入基和输出基视为一致，记 $Z^e=\bigotimes_{j=1}^n Z^{e_j}$，并取

$$D_e=K^{\dagger}Z^e,\qquad D_e\left|y\right\rangle=2^{-(n-k)/2}(-1)^{e\cdot y}\left|Gy\right\rangle,\quad e\in\mathcal{L}. \tag{D7}$$

每个算子都将一个基态映射为某个基态的倍数，因此它是非相干的。为验证迹保持和恢复，注意对于 $e,\ e'\in\mathcal{L}$,

$$\left\langle u\right|K^{\dagger}Z^{e\oplus e'}K\left|v\right\rangle=\delta_{u,v}\,2^{-(n-k)}\sum_{y:Gy=u}(-1)^{(e\oplus e')\cdot y}=\delta_{u,v}\delta_{e,e'}.$$

对于 $e\neq e'$，它们的差不属于 $\mathcal{C}$。于是存在一个 $z\in\mathcal{C}^{\perp}$，使得 $(e\oplus e')\cdot z=1$，将 y与 $y\oplus z$配对后，求和项相互抵消。对于 $e=e'$，归一化给出 1。因此，子空间 $Z^e\,\mathrm{im}\,K$ 彼此正交。它们的维数之和为 $2^k|\mathcal{L}|=2^n$，所以它们张成了 B^n 和 $\sum_e D_e^{\dagger}D_e=I_{B^n}$。同一恒等式还给出 $D_{e'}Z^eK=\delta_{e,\ e'}I$，因此 $\mathcal{L}$ 中的每个错误都能被精确纠正。由于 $\mathcal{E}(\rho)=K\rho K^{\dagger}$ 且 $\mathcal{D}(\rho)=\sum_e D_e\rho D_e^{\dagger}$，其纠缠保真度满足

$$F_e(\mathcal{D}\circ(\mathcal{N}_p^Z)^{\otimes n}\circ\mathcal{E})\geq\sum_{e\in\mathcal{L}}p^{|e|}(1-p)^{n-|e|}\longrightarrow 1,$$

其中，$|e|$ 是 e的汉明重量。因此，所有低于 $1-h_2(p)$ 的码率都可以通过非相干操作解码器实现。标准量子容量给出了相应的上界，从而证明

$$Q^{\mathrm{all,IO}}(\mathcal{N}_p^Z)=Q(\mathcal{N}_p^Z)=1-h_2(p).$$

3. 擦除与振幅阻尼

只需证明互补信道是单射：这样，任意两个不同的输入基态都不会产生相同的环境输出。附录 B 3 中的零容量判据给出 $Q^{\mathrm{IO},\ \mathrm{all}}=0$, 因此 $Q^{\mathrm{IO},\ \mathrm{IO}}=0$。

对于输入维数为 $d\geq 2$ 、擦除概率为 p 的擦除信道，该信道及其互补信道见 [21, 第 4.7.6 节和第 5.2]

$$\mathcal{E}_p(\rho)=(1-p)\rho\oplus p\left|e\right\rangle\!\left\langle e\right|,\qquad \mathcal{E}_p^c(\rho)=p\rho\oplus(1-p)\left|e\right\rangle\!\left\langle e\right|. \tag{D8}$$

这里，$\oplus$ 表示直和。每个输出空间都包含一个输入空间的副本，以及一个与之正交的擦除标志$|e\rangle$。在输入空间的副本上，环境态具有区块 $p\rho$。对于 $p>0$，该区块决定了 ρ。

对于量子比特振幅阻尼 $\mathcal{A}_\gamma$，令 γ为衰减概率，并在能量基中写出 $\rho_{ij}=\left\langle i\right|\rho\left|j\right\rangle$。使用标准的 Kraus 算子 [21, 第 4.7 节。5], 式 (A3) 给出

$$\mathcal{A}_\gamma^c(\rho)=\begin{pmatrix}\rho_{00}+(1-\gamma)\rho_{11} & \sqrt{\gamma}\rho_{01}\\ \sqrt{\gamma}\rho_{10} & \gamma\rho_{11}\end{pmatrix}. \tag{D9}$$

当 $\gamma>0$ 时，右下角元素和非对角元确定 ρ_{11}，ρ_{01}，ρ_{10}；随后左上角元素确定 ρ_{00}。这证明了它对所有输入态都是单射。因此，在每个输入参考基中，

$$\begin{aligned}Q^{\mathrm{IO,IO}}(\mathcal{E}_p)=Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{E}_p)=0,&\qquad 0<p\leq 1,\\ Q^{\mathrm{IO,IO}}(\mathcal{A}_\gamma)=Q^{\mathrm{IO,all}}(\mathcal{A}_\gamma)=0,&\qquad 0<\gamma\leq 1.\end{aligned}$$

对于正的擦除或衰减　　y 概率低于 $1/2$ 时，两个信道都具有正的标准量子容量 [30, 3　　1].

4. 带有经典标志的信道

我们考虑这样一个信道：它从酉算子 $U_1,\dots,U_{d_J}$ 中均匀随机选择一个，并将该选择记录在维数为 d_J 的标志寄存器 J 中。对于 d 维输入，该信道为

$$\mathcal{N}(\rho)=\frac{1}{d_J}\sum_{\beta=1}^{d_J}U_\beta\rho U_\beta^\dagger\otimes|\beta\rangle\langle\beta|_J\,. \tag{D10}$$

量子态 $|\beta\rangle_J$ 构成标志寄存器的参考基，而输出 BJ 具有乘积参考基。不受限接收方可以读取标志并逆转 U_β；IO 接收方可能无法施加其逆操作。

为界定采用 IO 解码时的码率，我们考察参考基中的输出概率。在该基中测量 $U_\beta|\psi\rangle$等价于在输入基 $\{U_\beta^\dagger|y\rangle\}_y$ 中测量输入 $|\psi\rangle$。令 Y_β 表示这一测量结果，其概率为 $\Pr_\psi(Y_\beta=y)=|\langle y|U_\beta|\psi\rangle|^2$，并令

$$h=\min_{|\psi\rangle}\frac{1}{d_J}\sum_{\beta=1}^{d_J}H(Y_\beta)_\psi. \tag{D11}$$

最小值取遍归一化纯态。测量结果的熵关于量子态是凹函数，因此对混合态也得到相同的下界。

命题 15（带有经典标志的信道的逆定理）。 式 (D10) 中的信道满足

$$Q^{\mathrm{all,IO}}(\mathcal{N})\le\log d-\frac{1}{2}h. \tag{D12}$$

在高于此界的每一个码率上，纠缠保真度都以指数速度趋于零。这对 *MIO* 解码器同样成立。

证明。设 K_b： $A_1\to A^n$ 为任意编码器 $\mathcal{E}$ 的 Kraus 算子，维数为 $A_1=M$。对于标志串$s=(s_1,\ldots\ldots,s_n)$，令 $U_s=U_{s_1}\otimes\cdots\otimes U_{s_n}$ 以及

$$T_{s,b}=U_sK_b,\qquad p_s(y|i)=\langle y|U_s\mathcal{E}(|i\rangle\langle i|)U_s^\dagger|y\rangle=\sum_b|\langle y|T_{s,b}|i\rangle|^2.$$

此处 $y\in\{0,\dots,d-1\}^n$ 是一个输出基串， $\mathbb{E}_s$ 表示对独立均匀标志取平均。编码态可以是混合的，并且可以在各信道输入之间纠缠。

我们首先控制具有异常大概率的结果的总权重。对于 $\alpha>0$，定义

$$g(\alpha)=\max_\rho\frac{1}{d_J}\sum_{\beta=1}^{d_J}\sum_{y=0}^{d-1}\big(\langle y|U_\beta\rho U_\beta^\dagger|y\rangle\big)^{1+\alpha},$$

其中 ρ 是单个信道输入上的一个量子态。在独立选取的基中依次测量这些输入。在先前的选择与结果条件下，下一个输入由一个密度算子描述，且其基的选择仍然独立且均匀。因此，其对 $(1+\alpha)$ 次幂的条件求和在该选择上取平均后至多为 $g(\alpha)$。依次对最后一个结果与基选择求和，再对前面的各项求和，即得

$$\mathbb{E}_s\sum_y p_s(y|i)^{1+\alpha}\le g(\alpha)^n. \tag{D13}$$

在 $\alpha=0$ 处展开，得到 $\log g(\alpha)=-\alpha h+O(\alpha^2)$。余项对输入态是一致的： $t^{1+\alpha}$ 关于 α 的二阶导数在 $0\le t\le1$ 和 $\alpha\ge0$处有界，其在 $t=0$ 处的值由连续性定义。因此，对于任意固定的 $\delta>0$，我们可以选择一个固定的 $\alpha>0$，使得 $g(\alpha)\le2^{-\alpha(h-\delta/2)}$。令

$$q_n=2^{-n(h-\delta)},\qquad e_s=\frac{1}{M}\sum_i\sum_{y:p_s(y|i)>q_n}p_s(y|i).$$

由于当 $p>q_n$ 时 $p\le q_n^{-\alpha}p^{1+\alpha}$，式 (D13) 表明

$$\mathbb{E}_se_s\le q_n^{-\alpha}g(\alpha)^n\le2^{-n\alpha\delta/2}. \tag{D14}$$

对于每个标志串，将 $T_{s,\,b} = T'_{s,\,b} + T''_{s,\,b}$ 分开。第一个矩阵包含满足 $p_s(y|i) > q_n$ 的元素；第二个矩阵包含其余元素。对于每个 Kraus 指标 b，均采用相同的选择。根据构造，

$$\sum_b \left\|T'_{s,b}\right\|_2^2 = Me_s, \qquad \max_i \sum_b \left|\langle y|\, T''_{s,b}\, |i\rangle\right|^2 \le q_n.$$

任取该编码的一个 IO 解码器 $\mathcal{D}$。将其标记输入固定后，得到 IO 解码器 $\mathcal{D}_s(\tau) = \mathcal{D}(\tau \otimes |s\rangle\langle s|_{J^n})$。将引理 13 应用于此解码器以及 Kraus 算子为 $T_{s,\,b}$ 的条件信道，可得

$$\sqrt{F_s} \le \sqrt{e_s} + \frac{d^n\sqrt{q_n}}{M},$$

其中 F_s 是其纠缠保真度。第一项界定了被舍弃的元素；每个 d^n 个输出基字符串对第二项的贡献至多为 $\sqrt{q_n}$。总保真度为 $F_e = \mathbb{E}_s F_s$，因为标记概率与输入无关。因此，均方根的三角不等式给出

$$\sqrt{F_e} \le \sqrt{\mathbb{E}_s e_s} + \frac{d^n\sqrt{q_n}}{M} \le 2^{-n\alpha\delta/4} + \frac{2^{n(\log d - h/2 + \delta/2)}}{M}. \tag{D15}$$

在码率 $R > \log\, d - h/2$ 下，也就是说，对于 $M \ge 2^{nR}$，取 $\delta < 2(R - \log\, d + h/2)$。此时两项都呈指数衰减。固定非相干标记也能保持 MIO 性质，并且引理 13 适用于 MIO 解码器，从而证明最后的断言。 □

当两个编码映射都限制为 IO 时，一个共同的计算即可确定下文各例以及傅里叶信道的容量。

命题 16 (具有等模元素的带标志幺正算子)。 设 $\mathcal{N}$ 为方程 (D10) 中的信道，且 $d \ge 2$。假设对于每个 β，都存在一个整数 $1 \le D_\beta \le d$，使得

$$|\langle y|\, U_\beta\, |x\rangle|^2 \in \{0, D_\beta^{-1}\} \qquad for\ every\ x, y.$$

Then

$$Q^{\mathrm{IO,IO}}(\mathcal{N}) = \log d - \frac{1}{2d_J}\sum_{\beta=1}^{d_J} \log D_\beta. \tag{D16}$$

将非相干操作替换为 *MIO*（无论是在一个还是两个编码映射中）都不会改变该值。

证明。 由于 U_β 的行和列均为单位范数，因此每行和每列恰好包含 D_β 个非零元素。对于标志串 $s = (s_1, \ldots, s_n)$，定义

$$D(s) = \prod_{k=1}^n D_{s_k}, \qquad \mu = \frac{1}{d_J}\sum_{\beta=1}^{d_J} \log D_\beta.$$

因此，$U_s = \bigotimes_{k=1}^n U_{s_k}$ 的每一行和每一列都有 $D(s)$ 个非零元素，每个元素的模为 $D(s)^{-1/2}$。这些标记相互独立且服从均匀分布，因此 $n^{-1}\log D(s) \to \mu$ 依概率成立。

为证明可达性，在整个输入空间上使用恒等编码器，其维数为 $M = d^n$。具有 Kraus 算子 $U_s^\dagger(I_{B^n} \otimes \langle s|_{J^n})$ 的无限制解码器可以精确地逆转该信道。对于引理 12，这给出

$$\ell_{s,y} = \sqrt{D(s)}, \qquad \bar{p}(s,y) = d_J^{-n} d^{-n}.$$

确实，$U_s^\dagger\, |y\rangle$ 具有模为 $D(s)^{-1/2}$ 的 $D(s)$ 个振幅，而最大混合输入会产生均匀的输出和标记。

固定 $0 < R < \log d - \mu/2$，并应用满足 $m_n = \lceil 2^{nR} \rceil$ 的引理。其误差项的上界为

$$\varepsilon_n = \mathbb{E}_s \min\left\{1, \frac{(m_n - 1)\sqrt{D(s)}}{d^n - 1}\right\}.$$

选择 $\delta > 0$ 使得 $R < \log\, d - (\mu + \delta)/2$。根据 $\log D(s) \le n(\mu + \delta)$ 的情况对平均值进行拆分可得

$$\varepsilon_n \le \Pr_s\{\log D(s) > n(\mu + \delta)\} + \frac{(m_n - 1)2^{n(\mu+\delta)/2}}{d^n - 1} \longrightarrow 0.$$

根据大数定律，该概率趋于零，而最后一项根据 δ 的选取而消失。由于完整编码的保真度为一，引理给出了保真度趋于一的 IO 解码器，用于所选的基编码字。它们的编码器同样是非相干操作，从而证明了可达性。

对于逆定理，设 $\mathcal{E}$ 是一个逻辑维数为 M 的 MIO 编码器，并允许使用 MIO 解码器。每个编码后的基输入都是对角态，因此我们可以将 $\mathcal{E}(|i\rangle\langle i|) = \sum_x r(x|i)\,|x\rangle\langle x|$ 写成输入基字符串上的概率分布 $r(\cdot|i)$。U_s 的每个矩阵元的模平方至多为 $1/D(s)$。因此

$$p_s(y|i) = \sum_x r(x|i)|\langle y|\,U_s\,|x\rangle|^2 \le \frac{1}{D(s)},$$

即使混合态在不同信道输入之间存在关联也是如此。固定解码器的标记输入后，仍能保持 MIO 性质。因此，公式 (C14) 给出的条件纠缠保真度 F_s 上界为

$$F_s \le \min\left\{1, \frac{d^{2n}}{M^2 D(s)}\right\}, \qquad F_e = \mathbb{E}_s F_s. \tag{D17}$$

在码率 $R > \log d - \mu/2$下，选择 $\delta > 0$ 使得 $R > \log\, d - (\mu - \delta)/2$。对于 $M \ge 2^{nR}$,

$$F_e \le \Pr_s\{\log D(s) < n(\mu-\delta)\} + \frac{2^{n(2\log d - \mu + \delta)}}{M^2} \longrightarrow 0.$$

这证明了 MIO 编码映射的上界，并完成了证明。 □

a. Flagged Hadamard channel

设 A、 B和 J 为量子比特，在 BJ上取计算积基。第 V 节 C 中的带标记的哈达玛信道为

$$\mathcal{N}_H(\rho) = \frac{1}{2}\rho \otimes |0\rangle\langle 0|_J + \frac{1}{2} H\rho H \otimes |1\rangle\langle 1|_J\,,$$

其中 $H = 2^{-1/2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ 是 Hadamard 矩阵。不受限接收方使用 J来逆转记录的操作。恒等编码器是非相干操作，因此 $Q^{\mathrm{IO},\ \mathrm{all}}(\mathcal{N}_H) = Q(\mathcal{N}_H) = 1$。对于非相干操作解码，我们证明

$$Q^{\mathrm{IO,IO}}(\mathcal{N}_H) = Q^{\mathrm{all,IO}}(\mathcal{N}_H) = \frac{3}{4}. \tag{D18}$$

逆定理。 命题 15 中的两种测量分别采用 Z 基和 X 基。对于 Bloch 坐标为$x,\ z$的量子比特，不等式 $h_2(p) \ge 4p(1-p)$ 给出

$$\frac{1}{2}\left[h_2\left(\frac{1+x}{2}\right) + h_2\left(\frac{1+z}{2}\right)\right] \ge 1 - \frac{x^2+z^2}{2} \ge \frac{1}{2}.$$

Z基态可取到等号。因此 $h = 1/2$，且该命题将容量限制为 $3/4$，MIO 解码时也成立。

可达性。 恒等分支和 Hadamard 分支分别具有 $D_1 = 1$ 和 $D_2 = 2$。命题 16 适用于 $d = 2$和 $d_J = 2$。它给出 $Q^{\mathrm{IO},\ \mathrm{IO}}(\mathcal{N}_H) = 3/4$，这也为 $Q^{\mathrm{all},\ \mathrm{IO}}(\mathcal{N}_H)$ 提供下界。由此证明了式 (D18)。由于逆定理也适用于 MIO 解码器，因此用 MIO 解码替代非相干操作解码不会改变这两个容量。

b. Flagged MUB channels

对于第 V 节 C 中的带标记的 MUB 信道，我们现在证明式 (26) 中的上界，以及在使用不受限编码时定理 4 中因子 $1/2$ 的最优性。令 $d \ge 2$ 为一个素数幂，并选择酉算子 U_0、.....、U_d，满足$U_0 = I$，使得 $\{U_\beta^\dagger |y\rangle\}_{y=0}^{d-1}$ 构成标准的完备 $d+1$ 稳定子互补基（MUB） [33, 34]。定义

$$\mathcal{N}_d(\rho) = \frac{1}{d+1}\sum_{\beta=0}^{d} U_\beta \rho U_\beta^\dagger \otimes |\beta\rangle\langle\beta|_J\,, \tag{D19}$$

其中，在 BJ 上采用乘积参考基，且维数为 $A = \dim B = d$、$\dim J = d+1$。不受限接收方利用标记来反转该酉算子，因此恒等编码器达到 $Q^{\mathrm{IO},\,\mathrm{all}}(\mathcal{N}_d) = Q(\mathcal{N}_d) = \log d$。

每个基都与 $U_0 = I$ 指定的参考基互为无偏基，且具有 $\beta \neq 0$。因此，其酉算子的所有矩阵元素的模均为 $d^{-1/2}$。于是 $D_0 = 1$ 和 $D_\beta = d$，对于 $\beta = 1, \ldots, d$。命题 16 给出了精确值

$$Q^{\mathrm{IO,IO}}(\mathcal{N}_d) = \frac{d+2}{2(d+1)} \log d. \tag{D20}$$

按上述方式，将 Y_β 记为相应的测量结果。对于一组完备的互为无偏基，每个纯输入都满足 $\sum_{\beta,\,y} \Pr_\psi(Y_\beta = y)^2 = 2$ [43]。香农熵不小于碰撞熵，即 $H(Y_\beta)_\psi \geq -\log \sum_y \Pr_\psi(Y_\beta = y)^2$，且 $-\log$ 是凸函数。因此，利用詹森不等式可得

$$\frac{1}{d+1} \sum_\beta H(Y_\beta)_\psi \geq -\log \left[\frac{1}{d+1} \sum_{\beta,y} \Pr_\psi(Y_\beta = y)^2 \right] = \log \frac{d+1}{2}. \tag{D21}$$

因此，命题 15 给出

$$Q^{\mathrm{all,IO}}(\mathcal{N}_d) \leq \log d - \frac{1}{2} \log \frac{d+1}{2}, \tag{D22}$$

对于 MIO 解码也同样成立。由于 $Q^{\mathrm{all},\,\mathrm{IO}}(\mathcal{N}_d) \geq Q^{\mathrm{IO},\,\mathrm{IO}}(\mathcal{N}_d)$，我们得到

$$\frac{d+2}{2(d+1)} \leq \frac{Q^{\mathrm{all,IO}}(\mathcal{N}_d)}{Q(\mathcal{N}_d)} \leq \frac{1}{2} + \frac{\log[2d/(d+1)]}{2 \log d} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

当 d 在 素数幂中递增时。结合附录 C 4 中的普适下界，即可证明

$$\inf_{\mathcal{N}:\, Q(\mathcal{N})>0} \frac{Q^{\mathrm{all,IO}}(\mathcal{N})}{Q(\mathcal{N})} = \frac{1}{2}, \tag{D23}$$

其中下确界取遍有限维信道。

5. 量子傅里叶变换信道

在参考基下，

$$\langle y| F_d |x\rangle = d^{-1/2} e^{2\pi i x y/d}, \qquad x, y = 0, \ldots, d-1.$$

如果编码器或解码器中的任意一个不受限制，它都可以应用逆傅里叶变换，因此一次使用即可传输 $\log d$ 个量子比特。输入维数给出了相应的上界。

F_d 的所有元素的绝对值均为 $d^{-1/2}$。因此，命题 16 适用于单个酉算子 $U_1 = F_d$，其中$D_1 = d$，从而得到

$$Q^{\mathrm{IO,IO}}(\mathcal{F}_d) = \tfrac{1}{2} \log d.$$

一个简单的编码可以精确达到这一码率：对 $|0\rangle$ 使用一次会输出 $|\Psi_d\rangle = F_d |0\rangle$，根据公式 (A8)，该状态使 IO 解码器能够对第二次使用的输出应用 $F_d^\dagger$。该命题中的逆定理同样允许使用 MIO 编码器和解码器。对于 n 次使用，$D(s) = d^n$。因此，对于逻辑维数为 M的编码，公式 (D17) 化简为

$$F_e \leq \frac{d^n}{M^2}. \tag{D24}$$

它在所有高于 $\frac{1}{2} \log d$ 的码率下都呈指数趋近于零。因此，允许编码映射和解码映射均采用 MIO 并不会改变容量。

6. 不可加性

一个信道提供的相干性也可以协助另一个信道的解码，因此 $Q^{\mathrm{IO},\ \mathrm{IO}}$ 并不是不同信道上的可加函数。具体而言，令 $d \geq 2$，$\mathcal{R}_d(\rho) = \mathrm{tr}(\rho)\,|\Psi_d\rangle\langle\Psi_d|$ 表示作用于 d 维系统的信道，该信道将每个输入都替换为同一个最大相干态。它的量子容量为零，但是

$$\begin{aligned} Q^{\mathrm{IO},\mathrm{IO}}(\mathcal{F}_d \otimes \mathcal{R}_d) &= \log d \\ &> Q^{\mathrm{IO},\mathrm{IO}}(\mathcal{F}_d) + Q^{\mathrm{IO},\mathrm{IO}}(\mathcal{R}_d) \\ &= \tfrac{1}{2}\log d. \end{aligned}$$

为了达到积信道每次使用 $\log d$ 的码率，编码器通过 $\mathcal{F}_d$ 传输逻辑态，并通过 $\mathcal{R}_d$ 传输一个固定基态。后者提供了 $|\Psi_d\rangle$，利用公式 (A8) 足以通过非相干操作 IO 实现 $F_d^\dagger$。所得信道作用于逻辑系统时为恒等信道，因此能够保持其与参考系之间的纠缠。不受限接收方可以在本地制备固定的辅助态，因此 $Q(\mathcal{F}_d \otimes \mathcal{R}_d) = \log d$ 给出了相应的上界。由此，一个不携带任何输入信息的信道可以通过为解码提供相干性，提高联合可达到的码率。

附录 E：纠缠传输与子空间传输的等价性

纠缠传输在最大纠缠输入上检验编码。相比之下，子空间传输要求编码保留逻辑输入空间中的每个纯态。对于一个逻辑维数为 M 的有效信道 Λ，定义

$$F_{\min}(\Lambda) = \min_{\langle\psi|\psi\rangle=1} \langle\psi|\,\Lambda(|\psi\rangle\langle\psi|)\,|\psi\rangle\,. \tag{E1}$$

相应的输入基态和输出基态按照正文中的方式对应。

对于不受限编码，这些判据的等价性已得到充分确立 [22, 23]。较新的表述选择一个较小的子空间，在该子空间上恢复始终可靠 [44, 引理 5 和推论 1] 以及 [45, 引理 24]。所选子空间不必由参考基态张成，因此嵌入其中不一定是非相干操作。这里我们选择一个由参考基态张成的子空间，并控制整个子空间上的误差。关于主子矩阵的一个定理保证了这种选择不会带来渐近速率损失。嵌入原编码空间的包含映射，以及输出端相应的限制，均为非相干操作。

命题 17（纠缠与子空间传输）。纠缠传输和子空间传输具有相同的容量。当编码器、解码器或二者均受到非相干操作的限制时，结论仍然成立。

证明。首先假设 $F_{\min}(\Lambda) \geq 1-\delta$。对纯输入取平均所得的保真度至少为 $1-\delta$，并满足 [46, 式。(3)]

$$\int \langle\psi|\,\Lambda(|\psi\rangle\langle\psi|)\,|\psi\rangle\; d\psi = \frac{MF_e(\Lambda)+1}{M+1},$$

其中 $d\psi$ 为归一化的 Haar测度。因此 $F_e(\Lambda) \geq 1-(1+1/M)\delta$。

对于另一个方向，令 Λ 为一个 n次使用编码的有效信道。

a. 控制误差的算子。令 K_α 为 Λ的 Kraus 算子，并令

$$a_\alpha = \frac{\mathrm{tr}\,K_\alpha}{M}, \qquad G = \sum_\alpha (K_\alpha - a_\alpha I)^\dagger (K_\alpha - a_\alpha I). \tag{E2}$$

这是参考文献 [45, 引理 24]的子空间论证中使用的误差算子。展开乘积并使用公式（A2）和 $\sum_\alpha K_\alpha^\dagger K_\alpha = I$，得到

$$\frac{\mathrm{tr}\,G}{M} = 1 - F_e(\Lambda), \qquad 0 \leq G \leq 2\big(1+F_e(\Lambda)\big)I \leq 4I. \tag{E3}$$

算子界由 $(A-B)^\dagger(A-B) \leq 2A^\dagger A + 2B^\dagger B$得出。因此，成功的纠缠传输会使 G 的对角元的平均值变小。

对于逻辑系统的任意纯态 $|\psi\rangle$，

$$\begin{aligned} 1 - \langle\psi|\,\Lambda(|\psi\rangle\langle\psi|)\,|\psi\rangle &= \langle\psi|\,G\,|\psi\rangle - \sum_\alpha |\langle\psi|\,K_\alpha\,|\psi\rangle - a_\alpha|^2 \\ &\leq \langle\psi|\,G\,|\psi\rangle\,. \end{aligned} \tag{E4}$$

通过展开平方并使用 $\sum_\alpha \|K_\alpha\,|\psi\rangle\|^2 = 1$即可得到等式。非负和给出了不等式。因此，$G$ 上的算子界可以控制每个纯输入的保真度。

b. 选择逻辑基态。取 $\varepsilon = 1 - F_e(\Lambda)$。由于 G 的对角元非负且均值为 ε，其中至少有 $M/2$个不超过 2ε。令 S 表示这些指标的集合，并令 G_S 表示相应的主子矩阵。记

$$G_S = \mathrm{diag}(G_S) + T,$$

其中，$\mathrm{diag}(G_S)$ 是 G_S 的对角部分，而 T 包含其非对角元。该对角部分至多为 $2\varepsilon I$。矩阵 T 是对角元为零的厄米矩阵，并且 $\|T\|_\infty \le 4$: G_S 和 $\mathrm{diag}(G_S)$ 均介于 0 与 $4I$ 之间。

Youssef [47, 命题 5.1] 中的一个定理指出，对于任意 $0 < \delta < 1$，一个对角元为零的厄米矩阵存在一个主子矩阵，其坐标数至少为原坐标数的 $c\delta^2$ 倍，且其算子范数至多为原范数的 δ 倍。这里 $c > 0$ 是一个通用常数。将该定理应用于 T。所得的基态集合定义了一个包含映射 $W\colon\ \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^M$，满足

$$m \ge \frac{c\delta^2 M}{2}, \qquad W^\dagger G W \le (2\varepsilon + 4\delta) I_m. \tag{E5}$$

第一次选取限制了误差的对角部分；该定理则控制进一步子集上的非对角部分。

c. 限制编码。 在原编码器之前，应用 $\mathcal{E}_0(\rho) = W\rho W^\dagger$。在原解码器之后，应用

$$\mathcal{D}_0(\sigma) = W^\dagger \sigma W + \mathrm{tr}\big[(I_M - WW^\dagger)\sigma\big]\,|1\rangle\langle 1|\,. \tag{E6}$$

第二项将选定子空间之外的任意分量映射到固定的逻辑基态 $|1\rangle$，从而使其 $\mathcal{D}_0$保迹。编码器只有一个 Kraus算子 W。解码器具有 Kraus 算子 $W^\dagger$和 $|1\rangle\langle k|$，分别对应未使用的基态 $|k\rangle$。这些算子中的每一个都会将一个基态映射为某个基态的倍数。因此，两个映射都是非相干操作（IO），并且它们与原编码器和解码器的复合仍保持所施加的限制。

对于新的有效 c $\widetilde{}$信道 $\Lambda = \mathcal{D}_0 \circ \Lambda \circ \mathcal{E}_0$ 以及每个纯逻辑态 $|\psi\rangle$，式（E6）中的第一项给出 s

$$\begin{aligned}\langle\psi|\,\widetilde{\Lambda}(|\psi\rangle\langle\psi|)\,|\psi\rangle &\ge \langle\psi|\,W^\dagger \Lambda(W\,|\psi\rangle\langle\psi|\,W^\dagger) W\,|\psi\rangle \\ &\ge 1 - \langle\psi|\,W^\dagger G W\,|\psi\rangle \\ &\ge 1 - 2\varepsilon - 4\delta.\end{aligned}$$

省略的项是非负的。第二个不等式是将式（E4）应用于纯态 W |所得。 $\psi\rangle$.

最后，对于一系列具有正码率的 n次使用编码，取 $\delta = 1/n$ 对于 $n \ge 2$。于是

$$F_{\min}(\widetilde{\Lambda}) \ge 1 - 2\big(1 - F_e(\Lambda)\big) - \frac{4}{n}, \qquad \log m = \log M - O(\log n). \tag{E7}$$

只要 $F_e(\Lambda) \to 1$，误差就趋于零。该编码仍使用 n 次信道使用，且 $\log M$ 中的损失关于n是次线性的，因此其渐近速率保持不变。结合第一个方向，即可证明该命题。 □

---

[1] T. Baumgratz、M. Cramer 和 M. B. Plenio，《量化相干性》，《物理评论快报》**113**，140401（2014）。[2] A. Streltsov、G. Adesso 和 M. B. Plenio，专题综述：量子相干性作为资源，《现代物理评论》**89**，041003（2017）。[3] A. Winter 和 D. Yang，相干性的操作资源理论，《物理评论快报》**116**，120404（2016）。[4] K. Ben Dana、M. Garc´ıa D´ıaz、M. Mejatty 和 A. Winter，相干性的资源理论：超越量子态，《物理评论A》**95**，062327（2017），勘误：《物理评论A》96，059903（2017）。[5] A. Streltsov、E. Chitambar、S. Rana、M. N. Bera、A. Winter 和 M. Lewenstein，量子态合并中的纠缠与相干性，《物理评论快报》**116**，240405（2016）。[6] A. Anshu、R. Jain 和 A. Streltsov，具有局域相干性的量子态再分配（2018），arXiv:1804.04915 [quant- ph]。[7] K. C. Tan、S. Omkar 和 H. Jeong，相干性作为量子纠错的单位资源（ 2017 1704 07572 ），[ ] arXiv: . quant-ph 。[8] S. P. Kelly、U. Poschinger、F. Schmidt-Kaler、M. P. A. Fisher 和 J. Marino，混合电路动力学中量子通信的相干性要求，《SciPost物理学》**15**，250（2023）。[9] B. Eastin 和 E. Knill，横向编码量子门集的限制，《物理评论快报》**102**，110502（2009）。[10] P. Faist、S. Nezami、V. V. Albert、G. Salton、F. Pastawski、P. Hayden 和 J. Preskill，连续对称性与近似量子纠错，《物理评论X》**10**，041018（2020）。

[11] S. Zhou、Z.-W. Liu 和 L. Jiang, 《协变量子纠错的新视角》, Quantum 5, 521 (2021)。[12] K.-D. Wu、T. Theurer、G.-Y. Xiang、C.-F. Li、G.-C. Guo、M. B. Plenio 和 A. Streltsov, 《量子相干性与态转换：理论与实验》, npj Quantum Inf. 6, 22 (2020)。[13] R. Ganardi、J. Son、J. Czartowski、S. H. Lie 和 N. H. Y. Ng, 《在网络中操纵异质量子资源》（2026）, arXiv:2602.17803 [quant-ph]。[14] K. Korzekwa、Z. Puchała、M. Tomamichel 和 K. Życzkowski, 《将经典信息编码到量子资源中》, IEEE Trans. Inf. Theory 68, 4518 (2022)。[15] S. Mondal、S. Das、P. Parashar 和 T. Guha, 《自由编码容量：量子资源的通用单位》（2026）, arXiv:2601.23116 [quant-ph]。[16] I. Devetak, 《量子信道的私有经典容量与量子容量》, IEEE Trans. Inf. Theory 51, 44 (2005)。[17] D. P. DiVincenzo、P. W. Shor 和 J. A. Smolin, 《高噪声信道的量子信道容量》, 《物理评论A》57, 830 (1998), 勘误：《物理评论A》59, 1717 (1999)。[18] B. Schumacher 和 M. D. Westmoreland, 《量子隐私与量子相干性》, 《物理评论快报》80, 5695 (1998)。[19] D. Leung 和 G. Smith, 《量子信道容量的连续性》, Commun. Math. Phys. 292, 201 (2009)。[20] R. Ahlswede、I. Bjelakovi´c、H. Boche 和 J. N¨otzel, 《对抗性量子噪声下的量子容量：任意变化量子信道》, Commun. Math. Phys. 317, 103 (2013)。[21] M. M. Wilde, 《*Quantum Information Theory*》, 第2版（剑桥大学出版社，2017）。[22] H. Barnum、E. Knill 和 M. A. Nielsen, 《关于量子保真度与信道容量》, IEEE Trans. Inf. Theory 46, 1317 (2000)。[23] D. Kretschmann 和 R. F. Werner, 《变奏曲：量子信道容量》, New J. Phys. 6, 26 (2004)。[24] B. Schumacher, 《通过有噪量子信道发送纠缠》, 《物理评论A》54, 2614 (1996)。[25] S. Lloyd, 《有噪量子信道的容量》, 《物理评论A》55, 1613 (1997)。[26] P. W. Shor, 《量子信道容量与相干信息》（2002）, MSRI量子计算研讨会讲义。[27] A. S. Holevo, 《具有一般信号态的量子信道容量》, IEEE Trans. Inf. Theory 44, 269 (1998)。[28] B. Schumacher 和 M. D. Westmoreland, 《通过有噪量子信道发送经典信息》, 《物理评论A》56, 131 (1997)。[29] E. Chitambar 和 G. Gour, 《对非相干操作及量子相干资源理论的批判性考察》, 《物理评论快报》117, 030401 (2016)。[30] C. H. Bennett、D. P. DiVincenzo 和 J. A. Smolin, 《量子擦除信道的容量》, 《物理评论快报》78, 3217 (1997)。[31] V. Giovannetti 和 R. Fazio, 《自旋链关联的信息容量描述》, 《物理评论A》71, 032314 (2005)。[32] I. Devetak 和 P. W. Shor, 《量子信道同时传输经典信息和量子信息的容量》, Commun. Math. Phys. 256, 287 (2005)。[33] W. K. Wootters 和 B. D. Fields, 《通过互不相容测量进行最佳态确定》, Ann. Phys. 191, 363 (1989)。[34] W. M. Kantor, 《互为无偏基的不等价性与仿射平面》, J. Math. Phys. 53, 032204 (2012), arXiv:1104.3370 [math.CO]。[35] V. Veitch、S. A. Hamed Mousavian、D. Gottesman 和 J. Emerson, 《稳定子量子计算的资源理论》, New J. Phys. 16, 013009 (2014)。[36] J. Niset、J. Fiur´aˇsek 和 N. J. Cerf, 《高斯量子纠错的禁行定理》, 《物理评论快报》102, 120501 (2009)。[37] Y. Tang、I. Roth、P. Faist、Z.-W. Liu、J. Eisert 和 Z. Liu, 《费米子量子纠错从来都不是免费的》（2026）, arXiv:2609.15059 [quant-ph]。[38] J. Watrous, 《*The Theory of Quantum Information*》（剑桥大学出版社，2018）。[39] M. Mosonyi 和 T. Ogawa, 《经典–量子信道编码的强逆定理指数》, Commun. Math. Phys. 355, 373 2017 1409 ( ), arXiv: .3562 [quant-ph]。[40] B. Yadin、J. Ma、D. Girolami、M. Gu 和 V. Vedral, 《不使用相干性的量子过程》, 《物理评论X》6, 041028 2016 1512 ( ), arXiv: .02085 [quant-ph]。[41] I. Csisz´ar 和 J. K¨orner, 《*Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems*》, 第2版（剑桥大学出版社，2011）。[42] Y. Polyanskiy 和 Y. Wu, 《*Information Theory: From Coding to Learning*》（剑桥大学出版社，2025）。[43] A. Klappenecker 和 M. R¨otteler, 《互为无偏基是复射影 -设计》, 载于（IEEE, ）第 – 页。[44] F. Buscemi 和 N. Datta, 《具有任意相关噪声的信道的量子容量》, IEEE Trans. Inf. Theory 56, 1447 (2010)。[45] M. Berta、H.-C. Cheng 和 Y. Yao, 《紧致的任意次量子解耦》（2026）, arXiv:2602.17430 [quant-ph]。[46] M. A. Nielsen, 《量子动力学操作平均门保真度的一个简单公式》, Phys. Lett. A 303, 249 (2002)。[47] P. Youssef, 《关于列子集选择的注记》, Int. Math. Res. Not. 2014, 6431 (2014), arXiv:1212.0976 [math.FA]。

2 *Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on Information Theory* 2005 1740 1744