arXiv:2611.32555v1 [math.GT] 24 Nov 2026

有界上同调中的杯积与体积类

MICHELLE BUCHER 和 ROBERTO FRIGER IO

Abstract. 设 M 为一个完备黎曼 n流形， $n \geq 2$，并假设 M 或者具有负曲率，或者是非紧型局部对称空间。通过对直单形积分，每个顶次数有界微分形式 $\omega \in \Omega_b^n(M)$都定义了一个$H_b^n(M)$中的有界上同调类。我们证明，所有这类上同调类都属于整个分次代数 $H_b^{\geq 1}(M)$中杯积的湮灭子。对于闭可定向曲面，这一结果推广了 Marasco 的一个结论；此外，通过转移，它还为以下事实提供了新的证明：$SL(2, \mathbb{R})$的有界欧拉类与自身的杯积为零。我们的结果也适用于 Soma 和 Farre 构造的三次有界上同调类，从而表明，对于曲面群和自由群，三次情形下杯积的湮灭子也是无限维的。

1. Introduction

令 M 为完备的负曲率黎曼 n流形，或完备的局部对称 n维空间， $n \geq 2$。众所周知，当M 具有远离 0 的负曲率且体积有限时， M的实系数有界上同调 $H_b^k(M)$ 在 2 次和 3 次上是无限维的；但计算 $k \geq 4$ 的有界上同调模 $H_b^k(M)$ 通常是一项艰巨的任务：例如，当 M 是双曲曲面，或具有非初等基本群的双曲三流形时，目前尚不清楚 $H_b^4(M)$ 是否为零。

一个自然的问题是，是否可以通过对低次数上同调类取杯积，在次数 $k \geq 4$ 上构造非平凡的有界上同调类。我们关于 M 的假设保证 M 支持一种对单形进行拉直的过程，使得最高维的直单形具有一致有界的体积。因此，如果 $n =$维数为 $M \geq 2$且 $\omega \in \Omega_b^n(M)$ 是一个最高次数的有界微分形式，那么通过在直单形上对 ω 进行积分，便可构造一个奇异有界上循环，进而定义一个有界上同调类 $[\omega]_b \in H_b^n(M)$。我们的主定理适用于曲率远离 0 的完备负曲率黎曼流形，以及维数为 ≥ 2的完备局部对称空间；该定理表明，这样的一个上同调类与任意其他有界上同调类的杯积总是为零（有界拉直的定义见第 3 节）：

定理1。 设 M 是一个具有有界拉直。对于每个 $k \geq 2$、每个 $\omega \in \Omega_b^n(M)$ 以及每个类 $\beta \in H_b^k(M)$，都有

$$[\omega]_b \cup \beta = 0 \quad in\ H_b^{n+k}(M)\ .$$

换言之，通过对最高次数微分形式进行积分所定义的有界上同调类属于杯积的湮灭子（严格来说，$H_b^0(M) \cong \mathbb{R}$ 中的非平凡类不会被任何非平凡有界上同调类湮灭；下文中，我们将把一个类湮灭每个正次数有界上同调类的情形称为该类属于杯积的湮灭子）。

如今，关于有界上同调中杯积消失的问题，已经有相当多的结果。Marasco 在 [Mar23] 中证明，对于任意维数的闭负曲率流形，通过对 2 次恰当微分形式积分定义的有界上同调类属于杯积的湮灭子。当 M 是闭可定向曲面时，我们的定理1通过纳入非恰当微分形式（如面积形式）推广了 Marasco 的结果。对于完备可定向双曲曲面，若 ω 是面积形式，则 $[\omega]_b$ 是有界欧拉类的一个非零倍数，因此定理1推出以下结论：

推论2。设 $\Sigma = \mathbb{H}^2/\Gamma$ 是完备可定向双曲曲面，且$e_b^\Sigma \in H_b^2(\Sigma) \cong H_b^2(\Gamma)$ 是与 Γ 在$\partial\mathbb{H}^2$上的作用相关联的有界欧拉类。那么

$$e_b^\Sigma \cup \beta = 0 \quad in\ H_b^{2+k}(\Sigma)$$

对于每个类 $\beta \in H_b^k(\Sigma)$，$k \geq 1$。

当 Γ 是 $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 中的一致格时（即当 Σ 是闭的时），从连续有界上同调 $H_{cb}^\bullet(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))$ 到 $H_b^\bullet(\Gamma)$ 的限制映射具有一个左逆转移映射，因此它是单射（参见例如 [BM02a，命题 2.4。1]）。此外，通过转移，该类 e_b^Σ 被映射为有界欧拉类 $e_b \in H_{cb}^2(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))$。因此，推论2 为下述定理提供了一个新的证明；该定理此前由 Morita [Mor88] 以及 Burger 和 Monod [BM02b] 独立证明：

推论3。令 $e_b \in H_{cb}^2(\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{R}))$ 为有界欧拉类。则

$$e_b \cup e_b = 0 \quad in\ H_{cb}^4(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))\ .$$

最近，[FM26] 中进一步得到了关于由微分形式产生的有界类之杯积的消失结果。或许值得一提的是，至少在 2 次情形下，对于每个闭的负曲率 n-流形 M，这类类张成了 $H_b^2(M)$ 的一个无限维子空间 $n \geq 2$（见 [BG88、BFM+24]）。

近年来，人们对自由群的情形给予了大量关注；研究表明，在多种情况下，二次类与有界上同调类的杯积为零（参见 [BM18、Heu20、AB22]）。回顾一下，对于任意拓扑空间 X，其有界上同调与X的基本群的有界上同调等距同构，且该同构保持杯积。如果 F_r 是秩为 $r \geq 2$ 的自由群，M 是任意一完备非紧、有限面积的双曲曲面，并且满足 $\pi_1(M) \cong F_r$，那么 [DFH26] 证明了映射 $\Omega_b^2(M) \to H_b^2(M) \cong H_b^2(F_r)$ 是单射；该映射将元素 $\omega \in \Omega_b^2(M)$ 映到类 $[\omega]_b$。因此，定理1又给出了包含于杯积的湮灭子中的一个无限维子空间 $H_b^2(F_r)$。

有界微分形式也已被广泛用于展示自由群和曲面群的第三有界上同调群中存在非平凡元素。事实上，若 Γ 是自由群或曲面群，则可通过取形如$[\omega]_b$的类构造 $H_b^3(\Gamma)$ 的无限维子空间，其中 ω 是几何无限双曲三流形 M 上的有界微分三形式，并且该流形满足 $\pi_1(M) \cong \Gamma$。更多细节请参阅例如 [Som97a、Som97b、Far18、Far20]。因此，定理1还推出以下结论：

推论 4。 设 Γ 为曲面群或非阿贝尔自由群。则第三上同调群 $H_b^3(\Gamma)$ 中由杯积的湮灭子中的元素构成的子空间是无限维的。

本文结构。 在第2节中，我们回顾有界上同调的定义。在第3节中，我们引入（有界）拉直的概念，给出这类拉直的例子，并给出主定理中所涉及的上同调类 $[\omega]_b$ 的精确定义。第4节专门用于证明定理1。

致谢。 第一作者获得SNSF的部分资助，第二作者通过GNSAGA获得INdAM的部分资助。

AI声明。 在论文的先前版本中，作者在附加假设 M 为紧的条件下证明了定理1和推论2，整个过程未使用任何AI。这足以同时得到推论3。我们将该版本提交给 ChatGPT 6.1 Sol，询问我们的证明是否正确以及是否可以加以简化；AI指出，（经过 minor modification）我们的证明在主定理的假设中将紧性替换为完备性后同样成立。这也使我们能够得到推论 4。

2. Bounded cohomology

设 M 为一个拓扑空间（事实上，我们只关注 M 为流形的情形）。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们用 Δ^k 表示标准的 k单形，它是 $\mathbb{R}^{k+1}$的标准基的凸包；用 $\mathrm{Sing}_k(M)$ 表示 M的奇异 k维单形的集合，即其元素为从 Δ^k到 M的连续映射。我们用 $C_\bullet^{\mathrm{Sing}}(M)$表示 M的带实系数的奇异链复形，该复形在 k度上是以 $\mathrm{Sing}_k(M)$为基的实向量空间。下文中，我们默认（余）链和（余）上同调群始终取实系数。

2.1. 有界上同调。

M的有界上同调 $H_b^\bullet(M)$是余复形的上同调

$$0 \longrightarrow C^0_{\mathrm{Sing},b}(M) \longrightarrow C^1_{\mathrm{Sing},b}(M) \longrightarrow C^2_{\mathrm{Sing},b}(M) \longrightarrow \cdots,$$

其中 $C^k_{\mathrm{Sing},b}(M)$ 表示 M 上有界奇异 k-上链的空间，微分映射是通常奇异上链复形 $C^\bullet_{\mathrm{Sing}}(M)$ 的余边映射的限制，而上链 $b \in C^k_{\mathrm{Sing}}(M)$ 若满足以下条件，则称为有界

$$\|b\|_\infty = \sup\big\{|b(\sigma)|,\ \sigma \in \mathrm{Sing}_k(M)\big\} < \infty\ .$$

2.2. 顶点上链。设 M 为任意拓扑空间，并记其万有覆盖为 $\widetilde{M}$。若 $\Gamma \cong \pi_1(M)$ 是万有覆盖的自同构群，我们将 M 上的顶点 k-单形简单地定义为

$$\mathrm{Vert}_k(\widetilde{M}) = \widetilde{M}^{k+1} .$$

记 $C_\bullet^{\mathrm{Vert}}(\widetilde{M})$ 为定义在 $\widetilde{M}$ 上的带实系数的顶点链复形，其中 $\widetilde{M}$ 在次数 k 中，它是以 $\mathrm{Vert}_k(M)$ 为基的实向量空间。复形 $C_\bullet^{\mathrm{Vert}}(M)$ 的微分在次数 k 并作用于基 $\mathrm{Vert}_k(M)$ 上时，由以下公式给出

$$\partial_k(x_0, \dots, x_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_k) .$$

按照 [Gro82 第 2 节，3], 我们通过对每个 $k \in \mathbb{N}$ 规定如下，来定义 M 上的顶点[1]上链复形：

$$C^k_{\mathrm{Vert},b}(\widetilde{M}) = \ell^\infty(\widetilde{M}^{k+1}) ,$$

其中，$\ell^\infty(\widetilde{M}^{k+1})$ 表示定义在 $\widetilde{M}^{k+1}$ 上的实值有界函数空间，并且

$$C^k_{\mathrm{Vert},b}(M) = \ell^\infty(\widetilde{M}^{k+1})^\Gamma ,$$

其中约定 Γ 在 $\widetilde{M}^{k+1}$ 上按对角方式作用。微分

$$\delta^k : C^k_{\mathrm{Vert},b}(M) \longrightarrow C^{k+1}_{\mathrm{Vert},b}(M)$$

由 ∂_{k+1} 诱导。

存在一个自然的 Γ 等变映射

$$\nu_k : C_k^{\mathrm{Sing}}(\widetilde{M}) \longrightarrow C_k^{\mathrm{Vert}}(\widetilde{M})$$

该映射定义在奇异单形 $\sigma \in \mathrm{Sing}_k(M)$ 的基上，将 σ 映至其 $k+1$ 有序顶点。（这也说明了我们选择这一术语的理由：我们将 $C_k^{\mathrm{Vert}}(M)$ 中的顶点链视为一组单形的线性组合，这些单形仅记录其顶点的位置。）利用 $C^k_{\mathrm{Sing},b}(M)$ 与 $C^k_{\mathrm{Sing},b}(\widetilde{M})^\Gamma$ 之间显而易见的同一化，Γ 等变链映射 $\nu_\bullet$ 诱导出一个余链复形映射

$$\nu^\bullet : C^\bullet_{\mathrm{Vert},b}(M) \longrightarrow C^\bullet_{\mathrm{Sing},b}(\widetilde{M})^\Gamma \cong C^\bullet_{\mathrm{Sing},b}(M) .$$

最初，Gromov 要求顶点上链是从 M^{n+1} 到 $\mathbb{R}$ 的博雷尔可测（甚至连续）有界映射。后来，L¨oh 在 [L¨oh06 的定理 3.5]中证明，连续顶点上链能够计算 M 的有界上同调；也就是说，将上链映射 $\nu^\bullet$ 限制在连续顶点上链上，会在有界上同调中诱导出一个（等距）同构。

为了获得 $\nu_\bullet$ 的显式链同伦逆，有必要采用一种程-序，将 M 中任意的 $(k+1)$-点组以 Γ-等变的方式对应到 M 中的一个奇异单形。这正是拉直的目的，将在下一节中讨论。对于满足支持拉直这一非常严格假设的流形，我们将恢复 L¨oh 同构的一个著名变体，即 $\nu^\bullet$ 在有界上同调上诱导同构，而从 M^{n+1} 到 $\mathbb{R}$ 的映射除有界性外无需满足任何正则性要求。

[1]Gromov 将它们称为 *straight* 上链，但在我们讨论拉直的语境中，这个术语容易造成混淆。

3. Straightenings

设 M 是一个光滑流形。和之前一样，设 M 是其万有覆盖，$\Gamma \cong \pi_1(M)$ 是其基本群。

定义 3.1。一个拉直 $\mathsf{str}_\bullet$ on M 是由一列 Γ-等变映射组成的

$$\mathrm{str}_k : \mathrm{Vert}_k(\widetilde{M}) \to \mathrm{Sing}_k(\widetilde{M}),$$

其中 k 遍历 $\mathbb{N}$，并满足以下性质：

(1) 对于每个 $(v_0, \dots, v_k) \in \mathsf{Vert}_k(\widetilde{M})$，其拉直 $\mathsf{str}_k(v_0, \dots, v_k) : \Delta^k \to M$ 属于 C^1类；(2) 任意 $(v_0, \dots, v_k) \in \mathsf{Vert}_k(M)$ 的拉直 $\mathsf{str}_k(v_0, \dots, v_k)$ 的 i 面，等于 $(v_0, \dots, v_k)$ 的 i 面 $(v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k) \in \mathsf{Vert}_{k-1}(M)$ 的拉直 $\mathsf{str}_{k-1}(v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k)$；(3) 对任意 $\sigma \in \mathsf{Sing}_k(\widetilde{M})$，存在一族同伦 h_σ：$\Delta^k \times [0,1] \to \widetilde{M}$，连接 σ 与 $\mathsf{str}_k(\nu_k(\sigma))$，其中 k 遍历 $\mathbb{N}$；这一族同伦是 Γ-等变的，并且与对面的限制相容，即与 σ 的一个面相关联的同伦，等于将 h_σ 限制到同一个面再乘以 $[0,1]$。

此外，如果拉直满足以下附加性质，则称其为**有界拉直**：

(4) 设 $n = \mathsf{dim}\ M = \mathsf{dim}\ M$。存在一个常数 $D > 0$，使得对于每个直单形 $s = \mathsf{str}_n(v_0, \dots, v_n) : \Delta^n \to M$，

$$\int_{\Delta^n} |\det ds_p| \, d\mu(p) \le D \ ,$$

其中 ds_p 表示 s 在 p处的微分，ds_p 的行列式通过在 $T_p\Delta^n$ 和 $T_{s(p)}M$中取正交归一标架来计算，而 $d\mu$ 是 Δ^n上的通常欧氏测度。

拉直的线性延拓给出一个映射

$$\mathrm{str}_\bullet : C_\bullet^{\mathrm{Vert}}(\widetilde{M}) \to C_\bullet^{\mathrm{Sing}}(\widetilde{M}),$$

根据性质 (2)，它是一个 Γ-等变链映射。容易看出，

$$\nu_\bullet \circ \mathrm{str}_\bullet : C_\bullet^{\mathrm{Vert}}(\widetilde{M}) \longrightarrow C_\bullet^{\mathrm{Vert}}(\widetilde{M})$$

它在 Γ-等变意义下与恒等映射链同伦。（在许多 str_0为恒等映射的情形下，它本身已经是恒等映射。一般情形下，很容易写出一个显式同伦。）此外，根据性质 (3)，我们还有

$$\mathrm{str}_\bullet \circ \nu_\bullet : C_\bullet^{\mathrm{Sing}}(\widetilde{M}) \longrightarrow C_\bullet^{\mathrm{Sing}}(\widetilde{M})$$

与恒等映射是 Γ-等变链同伦的，参见例如 [Fri17，命题 8.11]。这两个映射在链层面上对于 ℓ^1-范数都是范数不增的，因此在相应的上链复形上诱导出映射，并且它们在上同调层面上互为逆映射：

引理 3.2。假设流形 M 支持依据定义 *3.1* 的拉直。那么，这些上链映射

$$\nu^\bullet : C^\bullet_{\mathrm{Vert},b}(M) \longrightarrow C^\bullet_{\mathrm{Sing},b}(M)$$

and

$$\mathrm{str}^\bullet : C^\bullet_{\mathrm{Sing},b}(M) \longrightarrow C^\bullet_{\mathrm{Vert},b}(M)$$

在有界上同调上诱导出分次代数的等距同构。特别地， M 的有界上同调可以通过顶点上链余复形的上同调来计算。

在考虑 M 的有界上同调 $H^\bullet_b(M)$ 时，今后我们将使用顶点余复形。

请注意，与我们的主定理1不同，要使这个引理成立，并不需要有界拉直。

本节最后，我们将给出若干（有界）拉直的例子，然后考察有界拉直的存在性（此处有界性将发挥关键作用）如何用于确保最高次体积类存在一个有界代表（第3.4小节）。

3.1. **测地拉直**。设 $\dim M \geq 2$，且 M 的曲率为负并且远离 0。由于 M 完备，$\widetilde{\ }$万有覆盖 M 本身也完备。它同样具有负曲率，因此是唯一测地的；这使我们能够在 M 上归纳地定义一种拉直：根据从 v_0 出发的测地线段，将一个顶点为 v_1、.....、 v_k 的（$k-1$）-奇异单形拉直。

定义 3.1 中的性质 (1)，即拉直单纯形确实属于 C^1 类这一事实，一般而言实际上并不成立，但通过对单纯形进行与各个面相协调的重新参数化，便可轻松实现。性质 (2) 可直接由定义得出，而性质 (3) 例如见 [Fri17，命题 8.11]。关键性质 (4)，即测地拉直具有一致有界的体积这一事实，证明见 [IY82]。

3.2. **重心拉直**。现在假设 $\dim M \geq 3$，且M是一个非紧型局部对称空间。给定 $(x_0, \dots, x_k) \in \widetilde{M}^{k+1}$, 可通过映射定义一种拉直

$$\begin{array}{ccc} \Delta^k & \longrightarrow & \widetilde{M} \\ (t_0, \dots, t_k) & \longmapsto & \text{the unique minimizer of } \widetilde{M} \ni x \mapsto \sum_{i=0}^k t_i\, d(x, x_i)^2. \end{array}$$

极小值点的唯一性源于距离的凸性性质。很容易验证，这定义了一种拉直，但尽管它很可能有界，要证明这一点似乎很困难。在这一构造中，唯一的极小值点也可以看作测度 $\sum_{i=0}^k t_i \delta_{x_i}$，$\widetilde{\ }$ 的 Fr´echet 重心，其中 δ_{x_i} 表示位于 $x_i \in M$ 处的狄拉克测度。将顶点处的狄拉克测度替换为对称空间无穷远边界上的帕特森–沙利文测度，并将 Fr´echet 重心替换为布塞曼重心后，Besson、Courtois 和 Gallot [BCG96] ，以及针对高秩对称空间的 Connell 和 Farb [CF03], ，研究了一种重心直化；按照我们的定义 3.1，它是一种拉直。Lafont 和 Schmidt 在 [LS06] 中使用了这种拉直的一个略微不同的变体，并进一步证明了它有界（即满足我们的性质 (4) ）；但对于具有局部 $\mathbb{H}^2$ 或 SL(3，$\mathbb{R}$)/SO(3) 因子的局部对称空间，这一结论除外。对于这两种情形，分别需要借助上文所述的测地拉直（对于双曲流形而言，它在重新参数化后与重心直化一致

），或者借助下一个例子中所述的射影直化。

即使当 M 是一个闭的 n 维负曲率流形时，也可以定义有界重心直化，并且它满足定义 3.1 中所述的所有性质； $n \geq 3$ （证明见 [CW19] ）。

3.3. **射影直化**。如果 M 是一个凸射影流形，那么它的万有覆盖是实射影 n 空间 $\mathbb{P}^n$（$\mathbb{R}$）中某个仿射图内的真凸域。一般而言，它并非唯一测地的；不过，对于由仿射图中的仿射线段（重新参数化）所给出的那些优选测地线，人们仍然可以仿照归纳式测地拉直 [BFR26，第 8] 节。这始终是一种拉直。已知对于局部同构于 SL(3，$\mathbb{R}$)/SO(3) [BK07] 的流形而言，它是一种有界拉直。这些拉直在 [BFR 26] 中得到应用，用以给出任意闭的、定向的、凸射影 n 维流形 M 的欧拉示性数与单纯形体积之间的不等式 $|\chi（M）| \leq （n+2）/4\|M\|$。

注意，在双曲流形的情形下，测地拉直、重心直化和射影直化经过重新参数化后彼此重合。

注记 3.3。 根据定义，通过测地拉直或射影直化得到的映射 str_0 是恒等映射。换言之，(v_0，...， v_k) 的测地拉直的顶点为 (v_0，...， v_k)。对于重心直化，一般而言这并不成立，这正是引理 3.1 中不要求 str_0 为恒等映射的原因。

3.4. **由微分形式得到的有界上同调类**。 如前所述，设 $\sim M = M/\Gamma$ 是一个完备的 n 维流形。对于每个光滑的微分 n 形式 $\omega \in \Omega^n(M)$，我们定义

$$\|\omega\|_\infty = \sup\{|\omega_p(e_1,\dots,e_n)|\,,\ p \in M\,,\ (e_1,\dots,e_n) \text{ orthonormal frame in } T_pM\}\,.$$

我们称 ω 是有界的，如果 $\|\omega\|_\infty < \infty$ （当 M 紧致时，该条件总是成立），并将 $\Omega_b^n(M) \subseteq \Omega^n(M)$ 记作有界 n形式所构成的子空间。如果 M 取向且体积形式为 $d\mathrm{Vol}$，那么任意 n形式 $\omega \in \Omega^n(M)$ 都可写成$\omega = f\,d\mathrm{Vol}$，其中 $f\colon M \to \mathbb{R}$ 是某个光滑函数，并且当且仅当 f 有界时， ω 才是有界的。

设 $\omega \in \Omega_b^n(M)$ 是一个有界微分形式。由于是顶维的， ω 必然是闭的。即使可以忽略奇异单形$\sigma \in C_n^{\mathrm{Sing}}(M)$ 通常并不光滑这一事实，由其定义的奇异上循环

$$\sigma \longmapsto \int_\sigma \omega$$

除非 $\omega = 0$，否则并不是有界的。然而，在存在有界拉直的情况下

$$\mathrm{str}_\bullet : \mathrm{Vert}_\bullet(\widetilde{M}) \longrightarrow \mathrm{Sing}_\bullet(\widetilde{M})$$

在 M 上，我们可以改为考虑由其定义的奇异上循环

$$\sigma \longmapsto \int_{p\circ \mathrm{str}_n(\nu_n(\tilde{\sigma}))} \omega\ , \tag{1}$$

其中， $\tilde{\sigma}$ 是 σ 到 M 的任意提升， $p\colon\ M \to M$ 表示万有覆盖投影。有界拉直的定义 3.1 中的性质（4），以及 ω的有界性，确保这确实是有界的。同样地，令

$\sim$ $\sim\widetilde{\omega} \in \Omega^n(M)$表示 ω 到 M的拉回，我们可以考虑相应的顶点有界上循环

$$\begin{array}{rccc} I(\widetilde{\omega}): & \widetilde{M}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_0,\dots,x_n) & \longmapsto & \int_{\mathrm{str}_n(x_0,\dots,x_n)} \widetilde{\omega}\ . \end{array}$$

注意，这两个上链确实是上循环，这一点可由斯托克斯定理以及以下事实共同推出：形式 ω 和 $\widetilde{\omega}$ 是闭的，并且 $\mathrm{str}_\bullet$ 是链映射。

取顶点上链复形的有界上同调 $H_b^\bullet(M)$，于是我们可以定义一个映射

$$\begin{array}{ccc} \Omega_b^n(M) & \longrightarrow & H_b^n(M) \\ \omega & \longmapsto & [I(\widetilde{\omega})]\ . \end{array}$$

注意，我们也可以在奇异上链复形中利用上循环 (1) 来定义这个映射。这就是我们在引言中记作 $[\omega]_b$ 的上同调类。最后请注意，后一个映射可能取决于有界拉直。

本节所述过程正是引入有界拉直的最初动机，因为它表明，对于承认有界拉直的闭定向流形，奇异上同调 $H^n_{\mathrm{Sing}}(M)$ 中的最高维体积形式（该上同调与德拉姆上同调同构）可以由一个有界上循环表示。这等价于 M 的单纯形体积严格为正。

4. Cup product of top–degree forms

$\widetilde{\ }$现在回到一般情形：$M = M/\Gamma$ 是一个完备的$\widetilde{\ }$黎曼 n-流形，其中 $\Gamma < \mathrm{Isom}(M)$ 同构于 $\pi_1(M)$，并令$\sim p : M \to M$ 为万有覆盖投影。在本节中，我们始终假设 M 支持有界拉直

$$\mathrm{str}_\bullet : \mathrm{Vert}_\bullet(\widetilde{M}) \longrightarrow \mathrm{Sing}_\bullet(\widetilde{M})\ ,$$

并固定一个有界微分形式 $\omega \in \Omega^n_b(M)$。按照惯例，记 $\widetilde{\omega} = p^*(\omega) \in \widetilde{\ }\Omega^n_b(M)$。我们的目标是证明，由顶点上循环 $I(\widetilde{\omega}) \in C^n_{\mathrm{Vert},b}(M)$ 表示的类 $[\omega]_b \in H^n_b(M)$ 属于杯积的湮灭子。

我们首先将 $I(\widetilde{\omega})$ 表示为无穷多个（非 Γ-不变的）上循环 $I_\gamma(\widetilde{\omega}) \in \sim C^n_{\mathrm{Vert},b}(M)$ 之和，这些上循环由 Γ 的元素 γ 索引。设 $F \subseteq M$ 为 Γ 在 M 上作用的一个基本域$\widetilde{\ }$。对于任意 $\gamma \in \Gamma$ 以及每个 $(x_0,\dots,x_n) \in M^{n+1}$，我们定义

$$I_\gamma(\widetilde{\omega})(x_0,\dots,x_n) = \int_{\mathrm{str}(x_0,\dots,x_n)} \chi_\gamma\, \widetilde{\omega} \in \mathbb{R}\ ,$$

$\widetilde{\ }$其中 $\chi_\gamma : M \to \mathbb{R}$ 是 γF的特征函数。由于族 $\{\gamma F\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是局部有限的，且 $\mathrm{str}(x_0,\dots,x_n)$ 的支集是紧的，对于每个固定的 $(x_0,\dots,x_n) \in \sim M^{n+1}$，我们有 $I_\gamma(\widetilde{\omega})(x_0,\dots,x_n) \neq 0$ 仅对有限个元素 $\gamma \in \Gamma$成立。$\widetilde{\ }$因此，无穷和 $\sum_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma(\widetilde{\omega})$ 给出了一个良定义的映射 $M^{n+1} \to \mathbb{R}$。$\widetilde{\ }$ 根据 F 的定义，我们有 $\sum_{\gamma\in\Gamma} \chi_\gamma \widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}$ 在 M 上几乎处处成立，因此

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma(\widetilde{\omega}) = I(\widetilde{\omega})\ .$$

引理 4.1。*(1)* 对于每个 $\gamma\in\Gamma$，顶点上链 $I_\gamma(\widetilde{\omega})$ 是一个上循环。*(2)* 对于每个 γ_0、$\gamma\in\Gamma$，我们有 $\gamma_0\cdot I_\gamma(\widetilde{\omega})=I_{\gamma_0\gamma}(\widetilde{\omega})$。*(3)* 我们有

$$\sup_{(x_0,\dots,x_n)\in\widetilde{M}^{n+1}}\sum_{\gamma\in\Gamma}|I_\gamma(\widetilde{\omega})(x_0,\dots,x_n)|\le D\|\omega\|_\infty\ ,$$

其中 D 是有界体积的拉直定义中出现的常数（特别地，对于每个 $\gamma\in\Gamma$，$\|I_\gamma(\widetilde{\omega})\|_\infty\le D\|\omega\|_\infty$，因此 $I_\gamma(\widetilde{\omega})$ 确实有界）。

证明。(1)：对于每个 $\gamma\in\Gamma$，博雷尔可测微分形式 $\chi_\gamma\,\widetilde{\omega}$ 是最高次微分形式，因此在任意 $(n+1)$- 奇异链的边界上都为零，故

$$\begin{aligned}0&=\int_{\partial\mathrm{str}(x_0,\dots,x_{n+1})}\chi_\gamma\,\widetilde{\omega}\ =\ \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\int_{\mathrm{str}(x_0,\dots,\widehat{x}_i,\dots,x_{n+1})}\chi_\gamma\,\widetilde{\omega}\\&=\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^iI_\gamma(\widetilde{\omega})(x_0,\dots,\widehat{x}_i,\dots,x_{n+1})\ =\ \delta I_\gamma(\widetilde{\omega})(x_0,\dots,x_{n+1})\ .\end{aligned}$$

(2)：利用微分形式 $\widetilde{\omega}$ 具有 Γ-不变性，对每个 $(x_0,\dots,x_n)\in\widetilde{M}^{n+1}$，可得

$$\begin{aligned}(\gamma_0\cdot I_\gamma)(\widetilde{\omega})(x_0,\dots,x_n)&=I_\gamma(\widetilde{\omega})(\gamma_0^{-1}x_0,\dots,\gamma_0^{-1}x_n)=\int_{\mathrm{str}(\gamma_0^{-1}x_0,\dots,\gamma_0^{-1}x_n)}\chi_\gamma\,\widetilde{\omega}\\&=\int_{\mathrm{str}(x_0,\dots,x_n)}\chi_{\gamma_0\gamma}\,\widetilde{\omega}\ =\ I_{\gamma_0\gamma}(\widetilde{\omega})(x_0,\dots,x_n)\ .\end{aligned}$$

(3)：设 $\widetilde{\omega}=f\,d\mathrm{Vol}$，其中 $d\mathrm{Vol}$ 表示 $\widetilde{M}$ 上的体积微分形式，且 $f:M\to\mathbb{R}$ 是一个光滑函数（即使 M 不可定向，我们也可以在单连通流形 M 上选定一个辅助定向）。根据微分形式的 ℓ^∞-范数定义（且由于 $\|\widetilde{\omega}\|_\infty=\|\omega\|_\infty$），对于每个 $x\in M$，都有 $|f(x)|\le\|\omega\|_\infty$。固定 $(x_0,\dots,x_n)\in M^{n+1}$，并为简化记号，记 $s=\mathrm{str}(x_0,\dots,x_n)$。对于每个 $\gamma\in\Gamma$，令 $B_\gamma=s^{-1}(\gamma F)\subseteq\Delta^n$。于是

$$\begin{aligned}|I_\gamma(\widetilde{\omega})(x_0,\dots,x_n)|&=\left|\int_{\mathrm{str}(x_0,\dots,x_n)}\chi_\gamma\,\widetilde{\omega}\right|=\left|\int_{B_\gamma}f(s(p))\det ds_p\,d\mu(p)\right|\\&\le\int_{B_\gamma}|f(s(p))|\cdot|\det ds_p|\,d\mu(p)\le\|\omega\|_\infty\int_{B_\gamma}|\det ds_p|\,d\mu(p)\ .\end{aligned}$$

现在，根据构造 $\Delta^n=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma$，对于 Γ 中任意一对不同元素 $\gamma\ne\gamma'$，集合 $B_\gamma\cap B_{\gamma'}$ 经由 $s=\mathrm{str}(x_0,\dots,x_n)$ 映射到 M 的一个零测度子集，因此

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\Gamma}|I_\gamma(\widetilde{\omega})(x_0,\dots,x_n)|&\le\|\omega\|_\infty\cdot\sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{B_\gamma}|\det ds_p|\,d\mu(p)\\&=\|\omega\|_\infty\cdot\int_{\Delta^n}|\det ds_p|\,d\mu(p)\le D\|\omega\|_\infty\ .\end{aligned}$$

□

现在我们可以证明

$$[\omega]_b \cup \beta = 0 \quad \text{in } H_b^{n+k}(M) \ ,$$

对每个 $\beta \in H_b^k(M)$，从而完成定理1的证明。我们利用引理 3.2，将 M 的有界上同调 $H_b^\bullet(M)$ 与顶点上链复形的上同调对应起来。在该复形中，类 $[\omega]_b$ 由上循环 $I(\widetilde{\omega})$ 表示，而一般元素 $\beta \in H_b^k(M)$ 由有界顶点上循环 $b \in \ell^\infty(\widetilde{M}^{k+1})^\Gamma$ 表示。为了完成证明，我们需要构造一个 Γ-不变的有界原函数，使其对应于 $I(\widetilde{\omega}) \cup b$ in $\ell^\infty(\widetilde{M}^{n+k})^\Gamma$。

为此，对每个 $\gamma \in \Gamma$，我们首先定义 b 的锥 $c_\gamma(b) \in \ell^\infty(\widetilde{M}^k)$ 如下：固定一个基点 $o \in M$，并令

$$c_\gamma(b)(x_1, \dots, x_k) = b(\gamma o, x_1, \dots, x_k) \quad \text{for every } (x_1, \dots, x_k) \in \widetilde{M}^k \ .$$

根据构造，对于每个 $\gamma \in \Gamma$，我们都有 $\|c_\gamma(b)\|_\infty \le \|b\|_\infty$。上链 $c_\gamma(b)$ 并不具有不变性：事实上，由于 b 是 Γ-不变的，对于每个 γ_0，$\gamma \in \Gamma$ 我们都有

$$\begin{aligned}(\gamma_0 \cdot c_\gamma(b))(x_1, \dots, x_k) &= c_\gamma(b)(\gamma_0^{-1}x_1, \dots, \gamma_0^{-1}x_k) = b(\gamma o, \gamma_0^{-1}x_1, \dots, \gamma_0^{-1}x_k) \\ &= b(\gamma_0\gamma o, x_1, \dots, x_k) = c_{\gamma_0\gamma}(b)(x_1, \dots, x_k) \ ,\end{aligned}$$

因此 $\gamma_0 \cdot c_\gamma(b) = c_{\gamma_0\gamma}(b)$。此外，注意到 $c_\gamma(b)$ 是通过对 γo 进行锥化由 b 得到的，立即可以验证 $\delta c_\gamma(b) = b$。

令

$$P = \sum_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma(\widetilde{\omega}) \cup c_\gamma(b) \ \in \ \ell^\infty(\widetilde{M}^{n+k}) \ .$$

现在我们将证明，P 是 $I(\widetilde{\omega}) \cup b$ 的一个有界 Γ-不变原函数（差一个符号），从而完成定理1的证明。

我们首先证明 P 是有界的。回顾一下，对于任意固定的 $(n+1)$-元组 $\widetilde{\ }(x_0, \dots, x_n) \in M^{n+1}$，只有有限多个元素 $\gamma \in \Gamma$ 满足 $I_\gamma(\widetilde{\omega})(x_0, \dots, x_n) \neq 0$，因此对于每个 $(x_0, \dots, x_{n+k-1}) \in \widetilde{M}^{n+k}$，定义 $P(x_0, \dots, x_{n+k-1})$ 的求和是有限的。根据引理 4.1–(3)，我们有

$$\begin{aligned}|P(x_0, \dots, x_{n+k-1})| &\le \sum_{\gamma \in \Gamma} |I_\gamma(\widetilde{\omega})(x_0, \dots, x_n)| \cdot |c_\gamma(b)(x_n, \dots, x_{n+k-1})| \\ &\le \|b\|_\infty \sum_{\gamma \in \Gamma} |I_\gamma(\widetilde{\omega})(x_0, \dots, x_n)| \le D\|b\|_\infty \|\omega\|_\infty \ ,\end{aligned}$$

因此，P 确实是有界的。

为了证明 P 是 Γ-不变的，只需注意，若 $\gamma_0 \in \Gamma$，则

$$\gamma_0 \cdot P = \sum_{\gamma \in \Gamma} (\gamma_0 \cdot I_\gamma(\widetilde{\omega})) \cup (\gamma_0 \cdot c_\gamma(b)) = \sum_{\gamma \in \Gamma} I_{\gamma_0\gamma}(\widetilde{\omega}) \cup c_{\gamma_0\gamma}(b) = P \ ,$$

其中，在第二个等式中，我们利用了引理 4.1–(2)以及以下事实：$\gamma_0 \cdot c_\gamma(b) = c_{\gamma_0\gamma}(b)$。

最后，回顾对于每个 $\gamma \in \Gamma$，我们有 $\delta c_\gamma(b) = b$，而根据引理 4.1–(1)，$\delta I_\gamma(\widetilde{\omega}) = 0$，因此

$$\delta P = \delta\left(\sum_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma(\widetilde{\omega}) \cup c_\gamma(b)\right) = \sum_{\gamma\in\Gamma} (\delta I_\gamma(\widetilde{\omega}) \cup c_\gamma(b)) + (-1)^n \sum_{\gamma\in\Gamma} (I_\gamma(\widetilde{\omega}) \cup \delta c_\gamma(b))$$

$$= (-1)^n \sum_{\gamma\in\Gamma} (I_\gamma(\widetilde{\omega}) \cup b) = (-1)^n \left(\sum_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma(\widetilde{\omega})\right) \cup b = (-1)^n I(\widetilde{\omega}) \cup b \ .$$

定理1的证明至此完成。

References

[AB22] Sofia Amontova 和 Michelle Bucher。通过对齐链研究自由群有界上同调中的平凡杯积。*Forum Math.*，34(4)：933–943，2022。[BCG96] G´erard Besson、Gilles Courtois 和 Sylvestre Gallot。最小熵与 Mostow 刚性定理。*Ergodic Theory Dyn. Syst.*，16(4)：623–649，1996。[BFM+24] Ludovico Battista、Stefano Francaviglia、Marco Moraschini、Filippo Sarti 和 Alessio Savini。恰当形式的有界上同调类。*Proc. Amer. Math. Soc.*，152(1)：71–80，2024。[BFR26] Michelle Bucher、Stefano Francaviglia 和 Grazia Rago。角度上循环、欧拉示性数与光滑流形的单纯形体积，2026。[BG88] Jean Barge 和 Etienne Ghys。曲面与有界上同调。（曲面与有界上同调）。*Invent. Math.*，92(3)：509–526，1988。[BK07] Michelle Bucher-Karlsson。由 $\mathrm{SL}_3\mathbb{R}/\mathrm{SO}(3)$ 覆盖的局部对称空间的单纯形体积。*Geom. Dedicata*，125：203–224，2007。[BM02a] M. Burger 和 N. Monod。连续有界上同调及其在刚性理论中的应用。*Geom. Funct. Anal.*，12(2)：219–280，2002。[BM02b] Marc Burger 和 Nicolas Monod。关于 SL_2 的有界上同调及其相关问题。载于 *Rigidity in dynamics and geometry. Contributions from the programme Ergodictheory, geometric rigidity and number theory, Isaac Newton Institute for the Mathematical Sciences, Cambridge, UK, January 5–July 7*，2000 年，第 19–37 页。柏林：Springer，2002 年。[BM18] Michelle Bucher 和 Nicolas Monod。Brooks 拟同态的杯积。*Forum Math.*，30(5)：1157–1162，2018。[CF03] Christopher Connell 和 Benson Farb。高秩中的度定理。*J. Differ. Geom.* 65 1 19 ( )：–59，2003。[CW19] Chris Connell 和 Shi Wang。满足 Ricci 型曲率条件的非正曲率流形的单纯体积正性。*Groups, Geometry, and Dynamics*，13(3)：1007–1034，2019 年 5 月。[DFH26] Gian Maria Dall'Ara、Roberto Frigerio 和 Ervin Hadziosmanovic。由微分形式得到的有界上同调类，2026。[Far18] James Farre。有限生成克莱因群的有界上同调。*Geom. Funct. Anal.* 28 6 1597 1640, 2018 ( )：–。[Far20] James Farre。有界上同调中的关系。*J. Topol.*，13(3)：1084–1118，2020。[FM26] Roberto Frigerio 和 Francesco Milizia。关于有界上同调中的德拉姆类杯积，2026。[Fri17] Roberto Frigerio。*Bounded cohomology of discrete groups* 227 *Mathematical Surveys and Monographs*，的体积。2017 美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，。[Gro82] Michael Gromov。体积与有界上同调。*Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 56 5 ，：–99，1982。[Heu20] Nicolaus Heuer。自由群有界上同调中的杯积。*Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* 21 1 ，，：–。26, 2020 [IY82] Hisao Inoue 和 Koichi Yano。负曲率流形的 Gromov 不变量。*Topology*，21(1)：83–89，1982 年 1 月。

[L¨oh06] Clara L¨oh。测度同调与奇异同调等距同构。*Math. Z.*，253(1)：197–218，2006。[LS06] Jean-Fran.çois Lafont 和 Benjamin Schmidt。非紧型闭局部对称空间的单纯形体积。 *Acta Math.*，197(1)：129–143，2006。[Mar23] Domenico Marasco。负曲率流形有界上同调中的杯积。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，151(6)：2707–2715，2023。[Mor88] S. Morita。曲面丛的特征类与有界上同调。《拓扑学庆典：献给 Itiro Tamura 的论文集》，233–257（1988）。，1988。[Som97a] Teruhiko Soma。闭曲面的有界上同调。

Topology 36 6 1221 1246, , ( ): –。[1997

Som97b] Teruhiko Soma。有界上同调的零范数子空间。

Comment. Math. , ( ): –。

Helv. 72 4 582 592, 1997

University of Geneva, Switzerland
Email address: michelle.bucher@unige.ch

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Italy
Email address: roberto.frigerio@unipi.it