arXiv:2611.32559v1 [math.CO] 24 Nov 2026

对称性约束下图的唯一实现

James Cruickshank*、Csaba Kir´aly†、Bernd Schulze‡、Shin-ichi Tanigawa§

2026年11月25日

摘要

全局刚性研究的是：一个图的实现是否由其边长唯一确定（相差欧几里得全等）。本文研究有限点群对称性约束下杆-铰框架的全局刚性。若图在 d空间中的每个实现$\mathbb{R}^d$都具有相同的边长和指定对称性，且与该框架全等，则称该框架在 d空间中是强制对称全局刚性的。我们建立了关于全局刚性的两个基本结果的对称扩展。

我们的第一个结果将Hendrickson必要条件扩展到强制对称情形。对于对称一般位置框架，若任意有限点群在顶点上自由作用，且至少有 $d+2$ 个顶点轨道，我们证明强制对称全局刚性蕴含强制对称冗余刚性。

我们的第二个结果推广了 Connelly、Jord´an 和 Whiteley 关于体-杆框架一般位置全局刚性的经典刻画。对于本文所研究的对称体-杆模型，我们证明了强制对称全局刚性是一种一般性性质，并在任意维数下获得了组合刻画。

关键词：杆-铰框架；体-杆框架；全局刚性；对称性；强制对称刚性；群标记图

1 引言

杆-铰框架是在欧氏空间中的图的实现，其中顶点表示铰点，边表示刚性杆。局部刚性研究的是：在具有相同边长的附近实现中，该框架是否除欧氏运动外是孤立的；而全局刚性研究的是：在所有实现中，它是否是唯一的此类实现。这些问题不仅出现在结构工程、机器人学和材料科学中，也出现在传感器网络定位 [1] 以及生物分子结构 [14]的分析中。

对称性是许多此类结构的显著特征，从工程建造物到生物分子组装体皆是如此。因此，数十年来，人们一直在研究对称性对刚性和柔性的影响；综述见 [28] 。2010 年代，随着人们逐渐认识到增益图可用于将许多经典刚性定理推广到对称框架 [5, 22, 25]，这一领域的研究兴趣迅速增长。通过将对称图编码为

*数学与统计科学学院，戈尔韦大学，爱尔兰

†匈牙利厄特沃什·洛兰德大学及 HUN-REN–ELTE 埃格尔瓦里组合优化研究组，Pázmány Péter sétány 1/C, 布达佩斯，匈牙利 H-1117

‡数学科学学院，兰卡斯特大学，兰卡斯特，英国§商业经济学系，管理学院，东京理科大学，日本

其商图以及边上的群标记，这种方法使得人们能够根据图结构和指定对称性来表述刚性条件。它为若干重要类别的对称框架带来了局部刚性的组合刻画。

本文将对称性视为对实现空间的附加约束：其他实现必须同时满足指定的边长和指定的对称性。这就是强制对称 情形，对于无穷小 刚性和局部 刚性，人们已对此进行了广泛研究 [18, 23, 26, 30, 27, 3, 10, 28]。本文探讨的全局 问题是：这些约束能否将一个框架唯一确定到欧几里得全等的程度。对称性可以显著改变全局刚性问题。例如，底层图不连通的框架，在满足指定对称性的实现中仍可能是全局刚性的，因为对称性可以约束其各个连通分支的相对位置。

这一情形下的全局刚性理论远不如局部刚性理论成熟。关于无限周期框架的近期进展 [21, 20, 11] 表明，当将周期性作为约束时，可以有效地分析全局刚性。本文发展了有限框架点群对称性的理论，并将经典全局刚性理论中的两个基本结果推广到这一情形。

从周期性转向点群对称性会带来更多困难。在具有固定格表示的满秩周期情形中，与格平移相交换的欧氏等距变换仅仅是平移。对于点群对称性，相应的等距变换群是欧几里得群中点群的中心化子，其结构取决于所给定的表示。因此，实现空间模去保对称全等后的几何会随对称性而变化。因此，经典全局刚性证明所依据的紧性和商空间论证在这一情形下需要格外谨慎。

我们的第一个主要结果是 Hendrickson 关于全局刚性的必要条件的强制对称类比 [13]。在经典情形中，具有足够多顶点的一般位置全局刚性框架必须是冗余刚性的，也就是说，删除任意一条边后仍保持局部刚性。这建立了全局刚性与局部刚性之间的基本联系。对于满足适当假设的一般位置对称框架，我们证明了强制对称全局刚性蕴含强制对称冗余刚性。该结果使现有的强制对称局部刚性理论能够为全局刚性提供必要条件。我们的证明首先在紧致性假设下建立 Hendrickson 论证的抽象版本，随后证明全局刚性提供了验证这一假设所需的有界性，从而适用于对称情形。

一个自然的后续问题是：这一必要条件何时也是充分条件。Hendrickson猜想，冗余刚性与（$d+1$）-点连通度相结合，刻画了 $\mathbb{R}^d$中的一般位置全局刚性。Connelly随后在维数 $d \geq 3$ [8]中反驳了这一猜想，而平面情形后来由Jackson和Jord´an [15]确立。此后，确定一些重要的框架类，使得Hendrickson必要条件成为充分条件，一直是研究的一个重要方向。一个著名例子是Connelly、Jord´an和Whiteley [6], 的定理，该定理指出，在任意维数中，一个一般位置的体-杆框架是全局刚性的，当且仅当它是冗余刚性的。

我们的第二个主要结果建立了该定理的强制对称对应定理。体-杆框架由通过杆连接的满维刚体组成，并且pro-

vide a standard model in engineering。在本文所考察的对称体-杆模型中，我们通过强制对称冗余刚性、商图的连通性，以及与覆盖分支和整个群相关联的中心化子相等，刻画了一般位置全局刚性。当覆盖图连通时，中心化子条件自动满足，此时全局刚性可以完全通过冗余刚性来刻画。将我们的结果与现有的体-杆框架强制对称局部刚性的组合刻画 [30]相结合，可得到任意维度下强制对称全局刚性的多项式时间可检验刻画。

本文组织如下。第 2 节回顾全局刚性和对称框架的必要背景。第 3 节介绍强制对称局部与整体刚性及其以商增益图表述的形式，并给出一般位置局部刚性的秩刻画。第 4 节建立 Hendrickson必要条件的强制对称类比，第 5 节证明体-杆框架的相应刻画。第 6 节讨论进一步的问题。

2 预备知识

本节给出全局刚性的基本定义。对于 $x,\ y \in \mathbb{R}^d$，我们记作$\langle x,\ y\rangle = x^\top y$, $\|x\|^2 = x^\top x = \sum_{k=1}^{d} x_k^2$。

2.1 全局刚性背景

在 $\mathbb{R}^d$ 中，一个杆-铰框架（或简称框架）是一个二元组 $(\widetilde{G},\ \widetilde{p})$，其中 $\widetilde{G}=(\widetilde{V},\ \widetilde{E})$ 是一个简单图，且 $\widetilde{p}\colon \widetilde{V}\to\mathbb{R}^d$ 是一个映射。我们也称 $(\widetilde{G},\ \widetilde{p})$ 为底层图 G 的 d 维实现 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$，并记作 $\widetilde{p}_i=\widetilde{p}(i)$。对于 $V=\{1,\dots,n\}$，我们将 $\widetilde{p}$ 视为 $\mathbb{R}^{dn}$ 中的一个向量，称为构型。

固定 $\widetilde{G}$ 的边顺序后，我们定义边函数 $f_{\widetilde{G}}\colon \mathbb{R}^{dn}\to\mathbb{R}^{|E|}$ 为

$$f_{\widetilde{G}}(\widetilde{p}_1,\dots,\widetilde{p}_n)=\big(\dots,\|\widetilde{p}_i-\widetilde{p}_j\|^2,\dots\big),$$

其中 $ij\in\widetilde{E}$。其纤维 $f_{\widetilde{G}}^{-1}(f_{\widetilde{G}}(\widetilde{p}))$ 由 $\mathbb{R}^{dn}$ 中所有与 $\widetilde{p}$ 具有相同边长平方的构型组成。令 K_n 为 $\widetilde{V}$ 上的完全图。则 $f_{K_n}^{-1}(f_{K_n}(\widetilde{p}))\subseteq f_{\widetilde{G}}^{-1}(f_{\widetilde{G}}(\widetilde{p}))$。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$两个框架 $(G,\ \widetilde{p})$ 和 $(G,\ \widetilde{q})$ 称为等价，记作 $(G,\ \widetilde{p})\simeq(G,\ \widetilde{q})$，若 $f_{\widetilde{G}}(\widetilde{p})=_{\sim}$ $_{\sim}f_{\widetilde{G}}(\widetilde{q})$。若 $f_{K_n}(\widetilde{p})=f_{K_n}(\widetilde{q})$，则称它们全等，记作 $(G,\ \widetilde{p})\equiv(G,\ \widetilde{q})$。

我们用 $O(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$的正交群。$\mathbb{R}^d$ 的等距变换 是一个映射 $x\mapsto Ax+t$，其中 $A\in O(\mathbb{R}^d)$ 且 $t\in\mathbb{R}^d$。我们用 Euc(d) 表示 $\mathbb{R}^d$ 的等距变换群。

两个框架 $(G,\widetilde{p})$ 与 $(G,\widetilde{q})$ 全等，当且仅当存在等距变换 $_{\sim}h\in\mathrm{Euc}(d)$，使得对每个 $i\in V$，都有 $\widetilde{q}_i=h(\widetilde{p}_i)$。

框架 $(G,\widetilde{p})$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中是（局部）刚性的，如果存在 $\widetilde{p}$ 在 $\mathbb{R}^{dn}$ 中的一个开邻域 U，使得对于每个 $\widetilde{q}\in U$，若其与 $(\widetilde{G},\ \widetilde{p})$ 等价，则它与之全等。此处以及下文中，邻域均取自 $\mathbb{R}^{dn}$ 的通常拓扑。框架 $(\widetilde{G},\ \widetilde{p})$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中是全局刚性的，如果对于每个 $\widetilde{q}\in\mathbb{R}^{dn}$，若 $(\widetilde{G},\ \widetilde{p})\simeq(\widetilde{G},\ \widetilde{q})$，则 $(\widetilde{G},\ \widetilde{p})\equiv(\widetilde{G},\ \widetilde{q})$。

构型 $\widetilde{p}\in\mathbb{R}^{dn}$ 若其坐标在$_{\sim}\mathbb{Q}$上代数无关，则称为一般位置 。框架 $(G,\widetilde{p})$ 若其构型处于一般位置，则称为一般位置 。

2.2 对称图与框架

设 G 为有限简单图。有限群 Γ 在 G 上的作用是一个群同态 $\theta: \Gamma \to \mathrm{Aut}(G)$，其中 $\mathrm{Aut}(G)$ 表示 G 的自同构群。若 Γ 通过 θ 作用于 G，则称 G 为 Γ-对称（相对于 θ）。在下文中，若上下文明确，我们通常会省略对作用 θ 的说明。此时，我们将 $\theta(\gamma)(i)$ 记作 γi。为简单起见，我们假设 Γ 通过 θ 在 V 上自由作用，即对于每个 $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$ 和每个 $i \in V$，都有 $\theta(\gamma)(i) \neq i$。

对于一个 Γ-对称图 $G = (V, E)$，顶点 i（分别地，边 e）的轨道记为 Γi（分别地，Γe）。因此，$\Gamma i = \{\gamma i | \gamma \in \Gamma\}$ 和 $\Gamma e = \{\gamma e | \gamma \in \Gamma\}$。所有顶点轨道（分别地，边轨道）的集合记为 V（分别地，E）。商图 G/Γ G 是一个多重图，其顶点集为 V，边集为 E，关联关系满足：若 Γe 中的某条（等价地，每条）边与 Γi 中的一个顶点及 Γj 中的一个顶点关联，则 $\Gamma e = \Gamma i \Gamma j$。

Lift 设为一个具有商图 $G = (V, E)$ 的 Γ-对称图。对于每个顶点轨道 Γi，固定一个代表顶点 $i' \in \Gamma i$。对于每个边轨道 Γe，选取一条代表边，并对其端点排序。施加一个群元素，使第一个端点成为其顶点轨道的选定代表 i'。若 j' 是第二个端点所在顶点轨道的选定代表，则所得有序边具有形式 $(i', \gamma j')$，其中 $\gamma \in \Gamma$ 是唯一的，因为群在顶点上的作用是自由的。我们将商边 Γe 定向为从 Γi 到 Γj，并为其赋予增益 $\psi(\Gamma e) = \gamma$。对于环，端点的选定排序规定了其定向。这个增益赋值 $\psi: E \to \Gamma$ 是良定义的，并且 $\widetilde{G}$，二元组 (G, ψ) 称为 G 的商 Γ-标记图。反之，G 称为 (G, ψ) 的覆盖图。

请注意，增益赋值 ψ 取决于代表顶点的选择。通过选取另一组顶点轨道代表元，我们可以切换有向多重图 G 上的增益赋值。如果一个增益赋值可以通过这种切换操作从另一个增益赋值得到，我们就认为有向多重图 G 上的这两个增益赋值等价。增益赋值 ψ 也取决于 G 中每条边的定向选择。如果 G 中的一条边 Γe 反向定向，那么诱导出的增益 $\psi(\Gamma e)$ 将替换为 $\psi(\Gamma e)^{-1}$。

一般而言，对于一个群 Γ，有向多重图 G 与映射 $\psi: E \to \Gamma$ 构成的对 (G, ψ) 称为 Γ-标记图，如果它是 Γ-对称图 G 的商 Γ-标记图。由于假设 G 是简单的，(G, ψ) 不含具有相同增益的平行边，也不含具有平凡增益的环。若两个 Γ-标记图源自同一个 Γ-对称覆盖图，我们就认为它们等价。

我们将这一概念推广到框架。设 $\tau: \Gamma \to O(\mathbb{R}^d)$ 是一个同态。由于 Γ 是有限的，$\tau(\Gamma)$ 是 $O(\mathbb{R}^d)$ 的一个有限子群。对于关于 θ 的 Γ-对称图 $\widetilde{G}$，$\mathbb{R}^d$ 中的框架（$\widetilde{G}$, $\widetilde{p}$）若满足

$$\tau(\gamma)\widetilde{p}(i) = \widetilde{p}(\theta(\gamma)i) \qquad \text{for all } \gamma \in \Gamma \text{ and all } i \in \widetilde{V}. \tag{1}$$

设 $(G, \widetilde{p})$ 是一个 $\tau(\Gamma)$-对称框架，$G = (V, E)$ 是 G 的商 Γ-标记图。按照将 V 视为代表顶点集合 $\{1, \ldots, k\}$ 的约定，可以将商 $\tau(\Gamma)$-标记框架定义为三元组 (G, ψ, p)，其中对于每个代表顶点 i 都有 $p_i = \widetilde{p}_i$。一般而言，三元组 (G, ψ, p) 称为 $\tau(\Gamma)$-标记框架。(G, ψ, p) 的覆盖是 $\tau(\Gamma)$-对称框架

$\widetilde{(G,\ \widetilde{p})}$，其中 G 是 $(G,\ \psi)$ 的覆盖图，而 $\widetilde{p}$ 由 p 根据 (1) 唯一确定。

由于 Γ 是有限的，我们可以选取正交坐标，使矩阵 $\tau(\gamma)$、$\gamma \in \Gamma$ 的所有元素都在 $\mathbb{Q}$ 上代数。以下我们始终使用这样的坐标。这简化了一般性的定义。若一个 $\tau(\Gamma)$-标记框架 $(G,\ \psi,\ p)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上，且其坐标在 $\mathbb{Q}$ 上代数无关，则称它是一般位置的。若一个 $\tau(\Gamma)$-对称框架 $\widetilde{(G,\ \widetilde{p})}$ 的商 $\tau(\Gamma)$-标记框架 $(G,\ \psi,\ p)$ 是一般位置的，则称该框架为 $\tau(\Gamma)$-一般位置。

3 对称局部与整体刚性

3.1 强制对称局部与整体刚性

现在我们引入强制对称局部与整体刚性的概念。

~~Let~~ 设 Γ 是关于 θ 的一个 Γ-对称图，且 $(G,\widetilde{p})$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个 $\tau(\Gamma)$-对称框架。若存在 U 的开邻域 U，它位于 $\tau(\Gamma)$-对称的 $\widetilde{\qquad\qquad\qquad

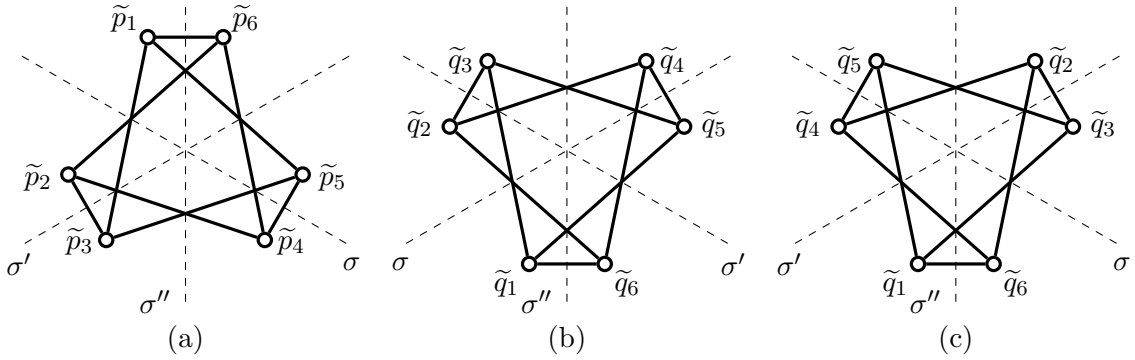

图1：具有6阶二面体对称性的平面框架。(b)是(a)关于 x轴的反射。(a)和(b)全等，其表示分别为 τ和 $\tau' \simeq \tau$。(c)是 τ(Γ)-对称的，并且与(a)等价但不全等。

~（G，$\widetilde{p}$），因为 $\widetilde{p}_1$ 与 $\widetilde{p}_2$ 之间的距离不同于 $\widetilde{q}_1$ 与 $\widetilde{q}_2$之间的距离。因此，~图(c)中的框架证明了（G，$\widetilde{p}$）不是 τ(Γ)-对称的全局刚性框架。

3.2 群标记图的局部与全局刚性

如第2.2节所述，一个 τ(Γ)-对称框架可通过其商 τ(Γ)-标记框架紧凑地表示。因此，直接从 τ(Γ)-标记框架的角度分析刚性通常更为方便。现在，我们为 τ(Γ)-标记框架引入局部刚性和全局刚性的概念，它们分别对应于 τ(Γ)-对称局部与整体刚性，并将在下文中采用这一表述。

对于一个具有 $V = \{1, \dots, k\}$ 且表示为 τ：$\Gamma \to O(\mathbb{R}^d)$的 Γ-标记图($G$，$\psi$)，我们定义对称边函数 $f_{G,\,\tau(\Gamma)}$：$\mathbb{R}^{dk} \to \mathbb{R}^{|E|}$ 为

$$f_{G,\tau(\Gamma)}(p) = \left(\|p_i - \tau(\psi(e))p_j\|^2\right)_{e=ij\in E} \qquad (p \in \mathbb{R}^{dk}).$$

对于有限集 V，定义 $f_{V,\,\tau(\Gamma)}$：$\mathbb{R}^{d|V|} \to \mathbb{R}^{|V|^2|\Gamma|}$ 为

$$f_{V,\tau(\Gamma)}(p) = \left(\|p_i - \tau(\gamma)p_j\|^2\right)_{(i,j,\gamma)\in V\times V\times\Gamma}.$$

如果 $f_{G,\tau(\Gamma)}(p) = f_{G,\tau(\Gamma)}(q)$，则称 τ(Γ)-标记框架 (G, ψ, q) 与另一个 τ(Γ)-标记框架 (G, ψ, p) 等价。此外，如果 $f_{V,\tau(\Gamma)}(p) = f_{V,\tau(\Gamma)}(q)$，则称 (G, ψ, p) 和 (G, ψ, q) 全等。由此得到 τ(Γ)-标记框架的局部刚性和全局刚性概念。

τ(Γ)-标记框架 (G, ψ, p) 在 $\mathbb{R}^d$ 中是（局部）刚性的，如果存在 p 在 $\mathbb{R}^{d|V|}$ 中的一个开邻域 U，使得对于每个 $q \in U$，若 (G, ψ, q) 与 (G, ψ, p) 等价，则二者全等。如果 $\mathbb{R}^d$ 中任何与 (G, ψ, p) 等价的 τ(Γ)-标记框架 (G, ψ, q) 都与 (G, ψ, p) 全等，则称其为全局刚性的。

引理 3.3. 设 $(\widetilde{G}, \widetilde{p})$ 是相对于 θ、在 $\mathbb{R}^d$ 中的一个 $\tau(\Gamma)$-对称框架，并令(G, ψ, p) 为其商 $\tau(\Gamma)$-标记框架。那么，$(G, \widetilde{p})$ 是 $\tau(\Gamma)$-对称局部刚性（分别为全局刚性）的，当且仅当(G, ψ, p) 是局部刚性（分别为全局刚性）。

证明。考虑一个映射 $q \mapsto \widetilde{q}$，它通过以下设定，将 $\mathbb{R}^d$ 中 $|V|$ 个点的构型 q 映射为 $\mathbb{R}^d$ 中 $|\widetilde{V}|$ 个点的构型 $\widetilde{q}$：

$$\widetilde{q}_{\gamma i} = \tau(\gamma) q_i \qquad (i \in V, \gamma \in \Gamma).$$

这是一个从 $\mathbb{R}^{d|V|}$ 到 $\tau(\Gamma)$-对称构型空间的线性同构，它将商框架的一个构型对应到覆盖框架的构型。通过这一对应，商框架等价与全等的条件分别等价于覆盖框架等价与全等的条件。

□

3.3 对称不变等距变换

对于顶点轨道代表元仿射张成 $\mathbb{R}^d$ 的框架，商框架的局部和整体刚性也可以使用保持指定对称性的等距变换来描述。若等距变换 h of $\mathbb{R}^d$ is $\tau(\Gamma)$-$invariant$if $h\tau(\gamma) = \tau(\gamma)h$ for every$\gamma \in \Gamma$，则称其为.....。我们将所有这类等距变换组成的群记为 $\mathrm{Euc}^{\tau(\Gamma)}$，即 $\mathrm{Euc}(d)$ 中 $\tau(\Gamma)$ 的中心化子。

引理 3.4。设 V 是一个有限集，设 p、q： $V \to \mathbb{R}^d$ 是两个映射，且设 τ： $\Gamma \to O(\mathbb{R}^d)$ 是一个同态。假设 $p(V)$ 仿射张成 $\mathbb{R}^d$。则 $f_{V,\ \tau(\Gamma)}(p) = f_{V,\ \tau(\Gamma)}(q)$ 当且仅当对于某个 $h \in \mathrm{Euc}^{\tau(\Gamma)}$， $q = h \circ p$ 。

证明。一个方向很容易：若 $q = h \circ p$ 对于一个 $\tau(\Gamma)$-不变等距变换 h成立，则对所有i， $j \in V$ 和 $\gamma \in \Gamma$, $\|q_i - \tau(\gamma)q_j\|^2 = \|h(p_i) - h(\tau(\gamma)p_j)\|^2 = \|p_i - \tau(\gamma)p_j\|^2$。因此$f_{V,\ \tau(\Gamma)}(p) = f_{V,\ \tau(\Gamma)}(q)$。

为证明反方向，假设 $f_{V,\ \tau(\Gamma)}(p) = f_{V,\ \tau(\Gamma)}(q)$。对应单位增益的坐标表明，对所有 i， $j \in V$，都有 $\|p_i - p_j\|^2 = \|q_i - q_j\|^2$。因此存在一个等距变换$h$ ，使得对每个 $i \in V$，都有 $q_i = h(p_i)$。

接下来证明 h是 $\tau(\Gamma)$-不变的。对所有 i， $j \in V$和 $\gamma \in \Gamma$,

$$\|p_i - \tau(\gamma)p_j\|^2 = \|q_i - \tau(\gamma)q_j\|^2 = \|p_i - h^{-1}(\tau(\gamma)h(p_j))\|^2. \tag{2}$$

固定 j和 γ，并记 $x = \tau(\gamma)p_j$以及 $y = h^{-1}(\tau(\gamma)h(p_j))$。展开式 (2) 中的距离平方，并减去任意固定 $i_0 \in V$对应的方程，得到 $\langle p_i - p_{i_0},\ x - y\rangle = 0$对每个 $i \in V$均成立。由于 $p(V)$仿射张成 $\mathbb{R}^d$，我们得到 $x = y$。由于这对所有 p_j均成立，且它们仿射张成 $\mathbb{R}^d$，因此对所有 $\gamma \in \Gamma$，我们得到 $h^{-1}\tau(\gamma)h = \tau(\gamma)$。 □

设 (G, ψ, p) 是 $\mathbb{R}^d$中的一个 $\tau(\Gamma)$-标记框架，其中 $p(V)$仿射张成 $\mathbb{R}^d$。引理 3.4 表明，当且仅当存在U，它是 p在 $\mathbb{R}^{d|V|}$中的一个邻域，使得每个满足 $q \in U$的等价 $\tau(\Gamma)$-标记框架 (G, ψ, q) 都满足 $q = h \circ p$，其中某个 $h \in \mathrm{Euc}^{\tau(\Gamma)}$ 存在时，(G, ψ, p) 是局部刚性的。当且仅当每个 $\mathbb{R}^d$ 中的等价$\tau(\Gamma)$-标记框架 (G, ψ, q) 都满足 $q = h \circ p$，其中某个 $h \in \mathrm{Euc}^{\tau(\Gamma)}$存在时，它是全局刚性的。

3.4 一般位置局部刚性的刻画

与普通刚性理论一样，一般位置局部刚性可以通过对称边函数的雅可比矩阵的秩来刻画，如下所示。

定理 3.5. 设 (G, ψ, p) 是 $\mathbb{R}^d$ 中一个具有 $|V| \geq d$ 的 $\tau(\Gamma)$-一般位置 $\tau(\Gamma)$-标记框架。那么 (G, ψ, p) 是局部刚性的，当且仅当

$$\operatorname{rank} df_{G,\tau(\Gamma)}(p) = d|V| - \dim \operatorname{Euc}_{\tau(\Gamma)}.$$

证明。 该结论可通过结合两个已知结果得出，这两个结果涉及 $\tau(\Gamma)$-对称无穷小刚性。事实上，与普通刚性理论中一样， $\tau(\Gamma)$-对称局部刚性有一个线性化对应概念，称为 $\tau(\Gamma)$-对称无穷小刚性；对于 $\tau(\Gamma)$-一般位置框架 [26]，局部刚性与无穷小刚性等价。另已知，当且仅当雅可比矩阵 $df_{G,\tau(\Gamma)}(p)$ 的秩为 $d|V|$ 减去平凡 $\tau(\Gamma)$-对称无穷小运动空间的维数 [27] 时，(G, ψ, p) 的覆盖框架才是 $\tau(\Gamma)$-对称无穷小刚性的。由于 p 是 $\tau(\Gamma)$-一般位置且 $|V| \geq d$，该维数等于 $\dim \operatorname{Euc}^{\tau(\Gamma)}$。结合引理 3.3，即可证明该定理。

□

由于雅可比矩阵在所有 $\tau(\Gamma)$-一般实现处的秩相同，定理 3.5 表明，对于 $|V| \geq d$，局部刚性是一个 $\tau(\Gamma)$-一般性性质，并且仅取决于 τ 和带 Γ 标记的图 (G, ψ)。

维数 $\dim \operatorname{Euc}^{\tau(\Gamma)}$ 仅取决于 Γ 及其表示 τ。在二维和三维中，可以利用标准特征标表进行计算；例如参见 [4]。

3.5 全局刚性与连通性

正如引言中所指出的，即使一个框架是非连通的，它也可能是 τ（Γ）-对称的全局刚性框架。图 2对此进行了说明。在本小节中，我们将更详细地阐明全局刚性与连通性之间的关系。

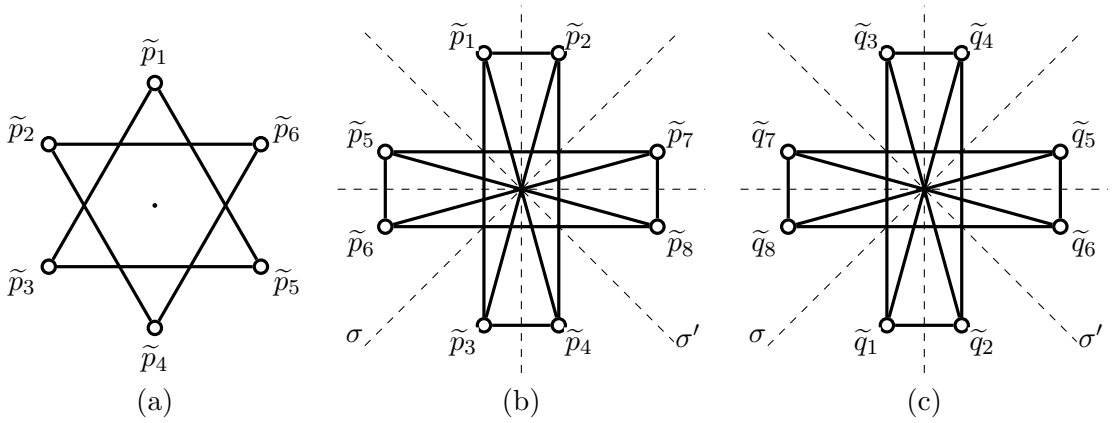

图 2：平面中具有非连通图的对称框架。令 $\mathcal{C}_n$ 和 $\mathcal{C}_{nv}$ 分别表示具有 n 重旋转对称性的群和阶为 $2n$ 的二面体群。(a) 是 $\mathcal{C}_6$-对称的全局刚性框架。在此情况下，对于每个连通分支 C， $\Gamma_C = \mathcal{C}_3$ 。另一方面，(b) 和 (c) 不是 $\mathcal{C}_{4v}$-对称的全局刚性框架，因为它们等价但不全等： $\|\widetilde{p}_1 - \widetilde{p}_5\| \neq \|\widetilde{q}_1 - \widetilde{q}_5\|$。在此情况下，对于每个连通分支 C， $\Gamma_C = \mathcal{C}_{2v}$ 。

我们首先指出，商 $\tau(\Gamma)$-标记图的连通性是全局刚性的必要条件。

命题 3.6。设 $(G,\widetilde{p})$ 是一个 $\tau(\Gamma)$-一般位置框架，并且在 $\mathbb{R}^d$ 中是 $\tau(\Gamma)$-对称的全局刚性框架。那么，商 Γ-标记图 (G,ψ) 是连通的。

证明。设 G 不连通，并令 X 为 G 的一个连通分支。于是我们定义一个新的商实现 q，其定义如下

$$q_i = \begin{cases} -p_i, & i \in V(X), \\ p_i, & i \notin V(X). \end{cases}$$

由于 $-I$ 与 $\tau(\Gamma)$ 中的每个元素都交换，X 内的所有边长都保持不变，而其他所有边均不变。因此，q 给出了一个 $\tau(\Gamma)$-对称的实现，并且与 p 等价。另一方面，对于 $i \in V(X)$ 和 $j \notin V(X)$，

$$\| - p_i - p_j\|^2 - \|p_i - p_j\|^2 = 4\langle p_i, p_j\rangle,$$

根据 $\tau(\Gamma)$-一般性，该值非零。因此，相应的覆盖框架不全等，这与 $\tau(\Gamma)$-对称全局刚性矛盾。因此，G 是连通的。 □

设商图 G 是连通的，并令 C 为 G 的一个连通分支 ~。群 Γ 在 G 的连通分支上迁移传递。令

$$\Gamma_C := \mathrm{Stab}_\Gamma(C) = \{\gamma \in \Gamma : \gamma C = C\}.$$

等价地，对于任意 $v \in V(C)$，子群 Γ_C 由满足以下条件的元素 γ 构成：v 和 γv 在 G 中由一条路径相连。我们可以在 C 中选择所有顶点轨道代表元。采用这一选择，(G,ψ) 中的每个增益都属于 Γ_C。

下一个命题说明，如何将判定整个框架是否全局刚性的问题，化简为判定每个连通分支是否全局刚性的问题。

命题 3.7. 设 $(\widetilde{G},\widetilde{p})$ 是 $\tau(\Gamma)$-对称框架，位于 $\mathbb{R}^d$ 中，且其商图 G 连通。设 C 是 G 的一个连通分支，且 $\Gamma_C =$ 稳定子$_\Gamma(C)$。假设 $\widetilde{p}(V(C))$ 仿射张成 $\mathbb{R}^d$。那么，$(\widetilde{G},\widetilde{p})$ 是 $\tau(\Gamma)$-对称且全局刚性的充要条件是

1. $(C,\widetilde{p}|_{V(C)})$ 是 $\tau(\Gamma_C)$-对称且全局刚性的，并且
2. 欧氏群$_{\tau(\Gamma_C)}$ =欧氏群$_{\tau(\Gamma)}$。

证明。由于商图 G 连通，因此我们有

$$\{\delta v : \delta \in \Gamma, v \in V(C)\} = \widetilde{V}. \tag{3}$$

首先，假设 $(G,\widetilde{p})$ 是 $\tau(\Gamma)$-对称且全局刚性的。为证明条件 1 成立，设 (C,r) 是一个与 $(C,\widetilde{p}|_{V(C)})$ 等价的 $\tau(\Gamma_C)$-对称框架。我们将 r 扩展为一个 $\tau(\Gamma)$-对称框架 $(G,\widetilde{q})$，方法是

$$\widetilde{q}(\delta v) = \tau(\delta) r(v) \qquad (\delta \in \Gamma,\ v \in V(C)).$$

我们应验证 $\widetilde{q}$ 定义良好。事实上，若对于某个 δ，$\delta' \in \Gamma$ 和 v，$v' \in V(C)$ 有 $\delta v = \delta' v'$，那么 $\delta^{-1}\delta' C$ 和 C 共享顶点 v，因此它们属于同一个连通分支。

因此 $\delta^{-1}\delta' \in \Gamma_C$。由于 r 是 $\tau(\Gamma_C)$-对称的，$r(v) = r(\delta^{-1}\delta' v') = \tau(\delta^{-1}\delta')r(v')$，从而 $\widetilde{q}(\delta v) = \tau(\delta)r(v) = \tau(\delta')r(v') = \widetilde{q}(\delta' v')$。

因此，根据 (3)，$\widetilde{q}$ 确实是 V 的一个定义良好的构型。由于 (C, r) 与 $(C, \widetilde{p}|_{V(C)})$ 等价，扩展框架 $(G, \widetilde{q})$ 与 $(G, \widetilde{p})$ 等价。根据 $(G, \widetilde{p})$ 的全局刚性，$(G, \widetilde{p})$ 与 $(G, \widetilde{q})$ 全等。对 C 的限制意味着 $(C, \widetilde{p}|_{V(C)})$ 与 (C, r) 全等，从而证明了条件 1。

为证明条件 2，设 h 为一个 $\tau(\Gamma_C)$-不变等距变换，并将 $r = h \circ \widetilde{p}|_{V(C)}$ 按照上述方式扩展 $\widetilde{q}$。根据全局刚性，$(G, \widetilde{q})$ 与 $(G, \widetilde{p})$ 全等，因此存在一个等距变换 g，使得 $\widetilde{q} = g \circ \widetilde{p}$ 在整个 V 上成立。由于 g 和 h 在仿射张成集 $\widetilde{p}(V(C))$ 上一致，所以二者相等。因此，对于每个 $\gamma \in \Gamma$ 和 $v \in V(C)$，

$$h\tau(\gamma)\widetilde{p}(v) = g\tau(\gamma)\widetilde{p}(v) = g\widetilde{p}(\gamma v) = \widetilde{q}(\gamma v) = \tau(\gamma)\widetilde{q}(v) = \tau(\gamma)h\widetilde{p}(v).$$

由于 $\widetilde{p}(V(C))$ 仿射张成 $\mathbb{R}^d$，这意味着 $h\tau(\gamma) = \tau(\gamma)h$，从而证明条件 2。

反之，设 $\widetilde{q}$ 是一个等价的 $\tau(\Gamma)$-对称框架。根据条件 1，存在一个等距变换 h，使得对于每个 $v \in V(C)$，$\widetilde{q}(v) = h\widetilde{p}(v)$。对于每个 $\gamma \in \Gamma_C$ 和 $v \in V(C)$，由对称性可得

$$h\tau(\gamma)\widetilde{p}(v) = h\widetilde{p}(\gamma v) = \widetilde{q}(\gamma v) = \tau(\gamma)h\widetilde{p}(v).$$

由于 $\widetilde{p}(V(C))$ 仿射张成 $\mathbb{R}^d$，因此对于所有 $\gamma \in \Gamma_C$，都有 $h\tau(\gamma) = \tau(\gamma)h$。所以 h 是 $\tau(\Gamma_C)$-不变的。根据条件 2，h 是 $\tau(\Gamma)$-不变的，因此对于每个 $\delta \in \Gamma$ 和 $v \in V(C)$，

$$\widetilde{q}(\delta v) = \tau(\delta)\widetilde{q}(v) = \tau(\delta)h\widetilde{p}(v) = h\tau(\delta)\widetilde{p}(v) = h\widetilde{p}(\delta v).$$

根据 (3)，这意味着对于所有 $v \in V(G)$，$\widetilde{q}(v) = h\widetilde{p}(v)$。 □

4 强制对称冗余刚性的必要性

假设 $(G, \widetilde{p})$ 是 $\tau(\Gamma)$-对称刚性的，并且移除任意边轨道后仍得到一个 $\sim\tau(\Gamma)$-对称刚性框架。则称 $(G, \widetilde{p})$ 为 $\tau(\Gamma)$-对称冗余刚性的。等价地，如果从 $E(G)$ 中移除任意边 e 后，得到一个刚性的 $\tau(\Gamma)$-标记框架，则商 $\tau(\Gamma)$-标记框架 (G, ψ, p) 是冗余刚性的 。

本节旨在证明以下强制对称版本的 Hendrickson 定理。

定理 4.1。 设 $(\widetilde{G}, \widetilde{p})$ 是 $\tau(\Gamma)$-一般位置框架，位于 $\mathbb{R}^d$ 中，并设 (G, ψ, p) 是商 $\tau(\Gamma)$-标记框架。此外，假设 $|V(G)| \geq d + 2$。如果 (G, ψ, p) 是全局刚性的，那么它就是冗余刚性的。

我们的证明策略沿用 Hendrickson 的原始方法，并在适当的连通性假设下利用构型空间的紧致性。

4.1 扩展 Hendrickson 的论证

为了证明定理 4.1，我们考虑一个在群作用下不变的多项式映射的更一般设置。

对于域 K 和扩张 K'，令 $td[K':K]$ 表示该扩张的超越次数。对于 d维实空间 $\mathbb{R}^k$ 中的向量 p，令 $\mathbb{Q}(p)$ 表示由 p 的各个分量和有理数域生成的域。

设 X 是一个光滑流形，且 $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ 是一个光滑映射。如果雅可比矩阵 $Jf(x)$ 的秩达到最大值，则称 $x \in X$ 为 f的正则点；否则称其为 f的临界点。此外，如果对于所有 $y \in f^{-1}(f(x))$，y都是 f的正则点，则称 $f(x)$为 f的正则值。否则，称 $f(x)$为 f的临界值。

考虑以下情形。设 $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{d|V|}$ 为 $\mathbb{R}^d$中由 $|V|$个点构成的构型空间。设 $\mathcal{V}_{\text{full}}$ 为满维构形的集合，即

$$\mathcal{V}_{\text{full}} = \{p \in \mathcal{V} : \operatorname{aff} p(V) = \mathbb{R}^d\}.$$

设 F是 d维欧几里得群欧氏群 Euc(d) 的一个闭子群，并假设 F 通过对角作用作用于 $\mathcal{V}$。由于 F 在$\mathcal{V}_{\text{full}}$上的作用是自由且适当的，商空间 $\mathcal{V}_{\text{full}}/F$ 是一个光滑流形。

设 $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$的一个有限扩张。设 $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$ 是一个 $\mathbb{Q}'$-多项式映射，且 $\hat{}$ 是 F-不变的。于是存在良定义的光滑映射 $f\colon \mathcal{V}_{\text{full}}/F \to \mathbb{R}^m$，使得 $\hat{}f|_{\mathcal{V}_{\text{full}}} = f \circ \pi$，其中 $\pi\colon \mathcal{V}_{\text{full}} \to \mathcal{V}_{\text{full}}/F$是商映射。

我们称 $p \in \mathcal{V}$ 是 $\mathbb{Q}'$-一般位置的，如果 p 的各个条目在 $\mathbb{Q}'$ 上代数无关。

我们需要以下引理。前两个引理在刚性理论中经常使用，而第三个引理的证明较为技术性，将在附录 A 中给出。

引理 4.2。（例如参见 *[16]*）在上述设定下，令 p 为 $\mathbb{Q}'$-一般位置的。则

$$td[\mathbb{Q}'(f(p)) : \mathbb{Q}'] \geq \operatorname{rank} Jf(p).$$

引理 4.3。（例如参见 *[12]*）在上述设定下，令 p 为 $\mathbb{Q}'$-一般位置的。则 f（p） 是 f 的正则值。

引理4.4。在上述设定下，令 $p = (p_1, \ldots, p_d) \in (\mathbb{R}^d)^d$。则存在 $g \in F$ 使得

$$td[\mathbb{Q}'(g \circ p) : \mathbb{Q}'] \leq d^2 - \dim(F).$$

定义 $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$。

The定理 4.5。在上述设定下，设 p 是 $\mathbb{Q}'$-一般位置的，并进一步假设 t

1. $|V| \geq d + 2$; *2.* $\hat{}\ f^{-1}(\hat{}f([p])) = \{[p]\}$; 以及 *3.* 对于每个 $e \in [m]$，$f_{\bar{e}}^{-1}(f_{\bar{e}}(p))/F$ 都是紧的，其中 $f_{\bar{e}}$ 表示通过从 f 中移除第 e 个坐标所得到的映射。

于是，对于每个 $e \in [m]$，我们有

$$\operatorname{rank} Jf_{\bar{e}}(p) = d|V| - \dim(F).$$

证明。根据 $|V| \geq d+2$ 和 p 是 $\mathbb{Q}'$-一般位置的假设，$p \in \mathcal{V}_{\text{full}}$，因此 $\hat{}[p] \in \mathcal{V}_{\text{full}}/F$。根据第二个假设，经过 $[p]$ 的 f 的纤维是一个单点集。由于 p 是 $\mathbb{Q}'$-一般位置，我们得到

$$\operatorname{rank} Jf(p) = d|V| - \dim(F). \tag{4}$$

反设对于某个 $e \in [m]$，$\operatorname{rank} Jf_{\bar{e}}(p) < d|V| - \dim(F)$。由(4)，并且由于删除一行至多使秩降低1，我们有

$$\operatorname{rank} Jf_{\bar{e}}(p) = d|V| - \dim(F) - 1, \tag{5}$$

且 $Jf(p)$ 的第 e 行不在其他行的张成空间中。令 f_e 表示由 f 得到的映射，该映射只返回第 e 个坐标。

我们断言如下:

断言4.6。$f_{\bar{e}}^{-1}(f_{\bar{e}}(p)) \subset \mathcal{V}_{\text{full}}$。

证明。反设存在 $q \in f_{\bar{e}}^{-1}(f_{\bar{e}}(p))$ 使得 $q \notin \mathcal{V}_{\text{full}}$。那么 q 包含于 $\mathbb{R}^d$ 的一个真仿射子空间中。不妨设 $\{q_1, \ldots, q_d\}$ 与 $\{q_1, \ldots, q_{|V|}\}$ 具有相同的仿射包。由引理4.4，存在 $g \in F$ 使得

$$td[\mathbb{Q}'(g \circ (q_1, \ldots, q_d)) : \mathbb{Q}'] \leq d^2 - \dim(F).$$

由于点 q_i（$d+1 \leq i \leq |V|$）中的每一个都是 $q_1, \ldots, q_d$ 的仿射组合，因此我们有

$$td[\mathbb{Q}'(g \circ q) : \mathbb{Q}'] \leq d^2 - \dim(F) + (d-1)(|V| - d). \tag{6}$$

另一方面，根据(5)和引理 4.2，我们有

$$td[\mathbb{Q}'(f_{\bar{e}}(p)) : \mathbb{Q}'] \geq \operatorname{rank} Jf_{\bar{e}}(p) = d|V| - \dim(F) - 1. \tag{7}$$

由于 $f_{\bar{e}}$ 是 F-不变的且为 $\mathbb{Q}'$-多项式的，我们还可得到

$$\begin{aligned} td[\mathbb{Q}'(f_{\bar{e}}(p)) : \mathbb{Q}'] &= td[\mathbb{Q}'(f_{\bar{e}}(q)) : \mathbb{Q}'] \\ &= td[\mathbb{Q}'(f_{\bar{e}}(g \circ q)) : \mathbb{Q}'] \\ &\leq td[\mathbb{Q}'(g \circ q) : \mathbb{Q}']. \end{aligned} \tag{8}$$

结合(6)、(7)和(8)，我们得到 $|V| \leq d+1$，这与 $|V| \geq d+2$ 的假设相矛盾。

□

断言4.6表明，F 在 $f_{\bar{e}}^{-1}(f_{\bar{e}}(p))$ 上自由且适当地作用。此外，根据引理 4.3，$\hat{}f_{\bar{e}}([p])$ 是 $\hat{}\, f_{\bar{e}}$ 的正则值。因此，(5) 表明 $f_{\bar{e}}^{-1}(f_{\bar{e}}(p))/F$ 是 $\mathcal{V}_{\text{full}}/F$ 的一维光滑嵌入子流形。由于根据第三个假设，$f_{\bar{e}}^{-1}(f_{\bar{e}}(p))/F$ 是紧的，因此根据一维流形分类，它由圆的不交并组成。令 $\mathcal{O}$ 为包含 $[p]$ 的连通分支。

根据 (5)，由 f_e 在 $\mathcal{O}$ 上诱导的函数在 $[p]$ 处有非零微分，因此存在 $[p']$ 和 $[p'']$，使得它们属于 $\mathcal{O}$，且 $f_e(p') < f_e(p) < f_e(p'')$。特别地，$[p'] \neq [p'']$。在 $\mathcal{O}$ 中，$[p']$ 与 $[p'']$ 之间有两条弧，其中一条不包含 $[p]$，因此由介值定理可知，存在一个 $[q] \in \mathcal{O}$，使得 $f_e(q) = f_e(p)$ 且$[q] \neq [p]$。$f_e(p) = f_e(q)$ 意味着 $f(p) = f(q)$，这与第二个假设矛盾。□

4.2 Hendrickson定理的对称版本

下面给出的 Hendrickson定理的对称版本，是将定理4.5应用于第3.2节中定义的对称边函数得到的。在此情形下，定理4.5的第三个假设所要求的紧性，由下面的引理保证。

引理4.7。 设 $(G,\widetilde{p})$ 是一个 $\tau(\Gamma)$-一般位置框架，它是 $\tau(\Gamma)$-对称全局刚性的，且位于 $\mathbb{R}^d$ 中。进一步假设 $d\geq 1$ 且 $|V|\geq d+2$。那么，对于商 Γ-标记图(G,ψ)的每条边 e，$f_{G-e}^{-1}\big(f_{G-e}(p)\big)$/欧氏群$^{\tau(\Gamma)}$ 有界。

证明。 取（G,ψ）的一条边 e，并记 $\mathcal{F}_{\bar{e}}\coloneqq f_{G-e}^{-1}\big(f_{G-e}(p)\big)$。我们将证明$\mathcal{F}_{\bar{e}}$/欧氏群$^{\tau(\Gamma)}$ 有界。

设 C 是 $G-e$的一个连通分支的顶点集。回顾一下， $\Gamma_C=\mathrm{Stab}_\Gamma(C)$表示保持 C不变的子群，参见第3.5节。我们将欧氏群$\mathrm{Euc}^{\tau(\Gamma)}$（分别地，$\mathrm{Euc}^{\tau(\Gamma_C)}$）的平移子群记为 $T_{\tau(\Gamma)}$（分别地，$T_{\tau(\Gamma_C)}$）。注意到

$$T_{\tau(\Gamma)}=\{t\in\mathbb{R}^d:\tau(\gamma)t=t \text{ for all } \gamma\in\Gamma\} \tag{9}$$

因为对于所有 $x\in\mathbb{R}^d$，$(t\circ\tau(\gamma))x=\tau(\gamma)x+t$ 以及 $(\tau(\gamma)\circ t)x=\tau(\gamma)(x+t)$。

断言 4.8。 存在常数 $M_C>0$，使得对于每个 $q\in\mathcal{F}_{\bar{e}}$，存在一个向量$t_{q,\,C}\in T_{\tau(\Gamma_C)}$，使得$\|\widetilde{q}_w-t_{q,\,C}\|\leq M_C$ 对于所有 $w\in C$ 均成立。

证明。 生成树中给定边长之和为 C 的直径提供了一个上界 M_C，其中直径为 $\widetilde{q}(C)$。由于每条给定边的边长由 p决定， M_C 与 $q\in\mathcal{F}_{\bar{e}}$的选择无关。

取 $v\in C$，并令

$$t_{q,C}:=\frac{1}{|\Gamma_C|}\sum_{\gamma\in\Gamma_C}\widetilde{q}_{\gamma v}=\frac{1}{|\Gamma_C|}\sum_{\gamma\in\Gamma_C}\tau(\gamma)\widetilde{q}_v.$$

该群平均在 $\tau(\Gamma_C)$ 的每个元素作用下都保持不变，因此根据（9），$t_{q,\,C}\in T_{\tau(\Gamma_C)}$。由于对于每个 $\gamma\in\Gamma_C$ 都有$\gamma v\in C$，所以对于每个 $w\in C$,

$$\|\widetilde{q}_w-t_{q,C}\|\leq\frac{1}{|\Gamma_C|}\sum_{\gamma\in\Gamma_C}\|\widetilde{q}_w-\widetilde{q}_{\gamma v}\|\leq M_C.$$

□

根据命题 3.6， G 是连通的，因此 $G-e$ 有一个或两个连通分支。我们分别讨论这两种情形。

情形*1*： $G-e$ 是连通的： 设 C 是 $G-e$的一个连通分支的顶点集。通过切换，我们不妨假设所有顶点轨道代表元都位于 C中。于是， $G-e$ 的每个增益都属于 Γ_C。

我们的目标是证明

$$T_{\tau(\Gamma_C)}=T_{\tau(\Gamma)}. \tag{10}$$

事实上，如果（10）成立，那么如断言 4.8 中所示，$t_{q,\,C}$ 对于每个$q\in\mathcal{F}_{\bar{e}}$都属于 $T_{\tau(\Gamma)}\subseteq$欧氏群$^{\tau(\Gamma)}$。因此，沿$t_{q,\,C}$ 的平移是一个 τ（Γ）-不变等距变换，而断言 4.8 中绝对有界的 M_C 的存在性意味着 $\mathcal{F}_{\bar{e}}$/欧氏群$^{\tau(\Gamma)}$ 是有界的。

为证明（10），反设$T_{\tau(\Gamma_C)}$ </style}严格大于。取一个向量） $\setminus T_{\tau(\Gamma)}$。根据（9），可以选择 t，使其坐标属于域$\mathbb{Q}$（τ（Γ））。我们定义构型 q 如下：

$$q_i := p_i + \varepsilon t \qquad (i \in V),$$

其中，$\varepsilon \in \mathbb{R}$ 将在后文中指定。由于 $G - e$ 的每个增益都属于 Γ_C，(9)意味着，对于 $G-e$的每条边 $f = ij$，都有$\|p_i - \tau(\psi(f))p_j\| = \|q_i - \tau(\psi(f))q_j\|$。换言之，对于 ε的任意选择，都有 $q \in \mathcal{F}_{\bar{e}}$。

下一步是选择 ε，使 $e = uv$ 的长度约束也得到满足，即 $\|q_u - \tau(\psi(e))q_v\| = \|p_u - \tau(\psi(e))p_v\|$。为此，令 $a := p_u - \tau(\psi(e))p_v$，并令 $b := t - \tau(\psi(e))t$。于是，e 的长度约束可写为 $\|a + \varepsilon b\|^2 = \|a\|^2$。

如果 $b = 0$，那么对于 ε 的任意选择，$\|a + \varepsilon b\|^2 = \|a\|^2$ 都会自动满足，我们可以任意选择 $\varepsilon \neq 0$。如果 $b \neq 0$，那么我们通过以下方式选择 ε：

$$\varepsilon = -\frac{2\langle a, b\rangle}{\|b\|^2},$$

从而 $\|a + \varepsilon b\|^2 = \|a\|^2$，且（$G$，$\psi$，$q$）与（$G$，$\psi$，$p$）等价。由于（$G$，$\psi$，$p$）是 τ(Γ)-对称全局刚性的，存在一个 τ(Γ)-不变的欧几里得等距变换 h，满足对所有 $i \in V$，$h(p_i) = q_i = p_i + \varepsilon t$。由于 $p(V)$ 仿射张成 $\mathbb{R}^d$，h 必须是平移 εt，这意味着 $\varepsilon t \in T_{\tau(\Gamma)}$。

由于 $t \notin T_{\tau(\Gamma)}$，我们必有 $\varepsilon = 0$。我们在 $b = 0$ 时取了 $\varepsilon \neq 0$，因此必有 $b \neq 0$，进而根据 ε 的定义可得 $\langle a, b\rangle = 0$。这与 p 的一般性矛盾，因为 t 的坐标属于 $\mathbb{Q}(\tau$(Γ))，且 $b \neq 0$。（若 e 是一个环，注意到 $\langle a, b\rangle = \langle p_u, w\rangle$，其中 $w = (2I - \tau(\psi(e)) - \tau(\psi(e))^{-1})t$，并且由于 $\langle t, w\rangle = \|b\|^2 \neq 0$，有 $w \neq 0$。）这就完成了情形 1 的证明。

情形 2：$G-e$ 有两个连通分支。令 $e = uv$，并令 V_1 和 V_2 为 $G - e$的两个连通分支的顶点集，其中 $u \in V_1$ 和 $v \in V_2$。$G - e$ 的每个连通分支的覆盖⌢由 $G - e$的连通分支组成。通过切换，我们可以假设 $\psi(e)$ =恒等，并且 V_i 中的所有顶点轨道代表元⌢对于每个 $i = 1, 2$ 都属于 $G - e$ 中的同一个连通分支 C_i。

我们的目标是证明

$$T_{\tau(\Gamma_{C_1})} = T_{\tau(\Gamma_{C_2})} = \{0\}. \tag{11}$$

如果情况如此，那么根据断言 4.8 $\|\widetilde{q_i}\| = \|q_i\| \leq \max\{M_{C_1}, M_{C_2}\}$ 对所有 $i \in V$ 以及所有 $q \in \mathcal{F}_{\bar{e}}$均成立。因此，$\mathcal{F}_{\bar{e}}$/欧氏群$\tau(\Gamma)$ 是有界的。

为证明（ 11 $T_{\tau(\Gamma_{C_1}}$ $0 \neq t \in$），反设）非零。选取），$T_{\tau(\Gamma_{C_1}}$ $\mathbb{Q}$ τ Γ q 使其坐标属于域（()）。我们定义一个构型如下：

$$q_i := \begin{cases} p_i + \varepsilon t, & (i \in V_1), \\ p_i, & (i \in V_2), \end{cases}$$

with

$$\varepsilon = -\frac{2\langle p_u - p_v, t\rangle}{\|t\|^2},$$

由于 p 处于一般位置，该量非零。由于 V_1 上每条边的增益都属于 Γ_{C_1}，由（9）可知，对于 $G-e$中的每条边 $f=ij$，都有 $\|p_i-\tau(\psi(f))p_j\|=\|q_i-\tau(\psi(f))q_j\|$。此外，对 ε 的选择保证了 $e=uv$ 的长度约束也得到满足。因此，(G,ψ,q) 与 (G,ψ,p) 等价。

为导出矛盾，我们证明（G，ψ，q）与（G，ψ，p）不全等。如果存在一个 $x\in V_1\setminus\{u\}$，那么

$$\begin{aligned}\|q_x-q_v\|^2-\|p_x-p_v\|^2&=\|p_x+\varepsilon t-p_v\|^2-\|p_x-p_v\|^2\\&=2\langle\varepsilon t,p_x-p_v\rangle+\varepsilon^2\|t\|^2\\&=2\varepsilon\langle t,p_x-p_u\rangle\neq 0\end{aligned}$$

由 p 的一般性可知。另一方面，如果 $V_1=\{u\}$，那么 $|V|\geq d+2$ 给出了一个顶点 $y\in V_2\setminus\{v\}$，相同的论证表明

$$\|q_u-q_y\|^2-\|p_u-p_y\|^2=2\varepsilon\langle t,p_v-p_y\rangle\neq 0.$$

这与（G，ψ，p）的全局刚性相矛盾。这个矛盾完成了情形 2 的证明，从而也完成了该引理的证明。 □

现在我们可以证明 Hendrickson定理的对称版本。

定理 *4.1* 的证明。 设 $f_{G,\ \tau(\Gamma)}$ 为对称边函数，并令 f_{G-e} 通过删除对应于 $e\in E(G)$ 的坐标得到。根据引理4.7，纤维 $f_{G-e}^{-1}(f_{G-e}(p))/\mathrm{Euc}^{\tau(\Gamma)}$是有界的。由于 f_{G-e} 是一个多项式映射，它是闭的。因此，该纤维是紧的。应用定理4.5，并令 $F=\mathrm{Euc}^{\tau(\Gamma)}$，

$$\operatorname{rank} df_{G-e}(p)=d|V|-\dim \mathrm{Euc}_{\tau(\Gamma)}$$

对于每个 $e\in E$。根据定理 3.5，$(G-e,\ \psi,\ p)$ 对每个 $e\in E$ 都是局部刚性的，因此 $(G,\ \psi,\ p)$ 是冗余刚性的。 □

4.3 关于对称Hendrickson型定理和一般性性质的备注

当 Γ 是平凡的时，定理 4.1 中的假设 $|V|\geq d+2$ 是必要的：一个 d -单纯形有 $d+1$ 个顶点且是全局刚性的，但不是冗余刚性的。对于非平凡对称群，较小的界是否足够仍是一个开放问题。我们目前的猜想是，对于所有非平凡对称群 τ（Γ），$|V|\geq d+1$ 是充分的。然而，确切的界可能取决于具体的对称群 τ（Γ）。例如，对于 $\mathbb{R}^2$ 中的反射群，如图3所示，$|V|\geq 3$ 是必要的（下文将对此进行详细解释）；而对于 $\mathbb{R}^2$ 中的三重旋转群，$|V|\geq 2$ 似乎是充分的。定理 4.1 的证明表明，降低该界的困难在于确保群 τ（Γ）-不变等距变换群在测量映射的一般位置纤维上的自由作用。

这在将 Gortler、Healy 和 Thurston 定理 [12] 推广到对称情形时似乎同样至关重要。Connelly 和 Terrell 首先将群表示理论用于对称框架的应力矩阵分块对角化 [9]。Oba 和 Tanigawa [24] 的对称性适配的分块分解使这一技术更加形式化。该分解的平凡等型分块将导出一个自然的

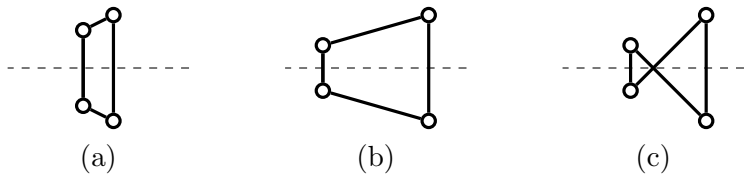

图3：(a)、(b) 循环图在 $\mathbb{R}^2$中的两个 $\mathcal{C}_s$-一般实现。图(a)中的框架是 $\mathcal{C}_s$-对称全局刚性的，而图(b)中的框架则不是，如(c)所示。

强制对称全局刚性的应力矩阵对应物。因此，自然会尝试将 Connelly [7], Gortler、Healy 和 Thurston [12]的应力矩阵理论调整到这一情形（正如对周期框架所做的那样 [11]）。然而，在对称情形中，当要求群 $\tau(\Gamma)$-不变等距变换的作用沿着强制对称测量映射的一般位置纤维自由作用时，会出现一个相关问题。

事实上，我们给出了一个反例，说明 $\tau(\Gamma)$-对称全局刚性并不具有 $\tau(\Gamma)$-一般性性质。图3展示了同一个 $\mathbb{Z}_2$-对称图的两种实现，它们都是具有反射对称性的一般实现，其中一种是强制对称全局刚性的，而另一种则不是。高维中的类似例子也很容易构造。然而，我们尚未能在 $\mathbb{R}^d$ 中找到顶点轨道数超过 d的此类例子，甚至提出了以下猜想。

猜想1. 对于 $\mathbb{R}^d$中的任意非平凡对称群 $\tau(\Gamma)$，若该群在顶点集上自由作用，且顶点轨道数至少为 $d+1$，则 $\tau(\Gamma)$-对称全局刚性是一个 $\tau(\Gamma)$-一般性性质。

请注意，如图4所示，当群作用在顶点集上不是自由作用时，上述猜想并不成立。这里，一般性是相对于满足指定对称性约束的构型空间而言的。

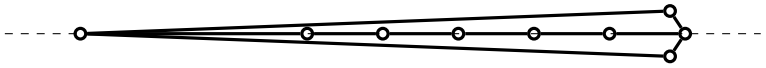

图4：一个在 $\mathbb{R}^2$ 中强制对称且全局刚性的反射对称框架（G,p）。然而，在 $\mathbb{R}^2$ 中存在一个并非全局刚性的反射对称框架（G,q）：将顶部和底部的顶点移得离镜像线更远，即可得到该框架；这样一来，镜像线上的顶点便可在不改变边长的情况下重新排列。

5 体-杆框架

5.1 对称体-杆框架

体-杆框架由杆连接的刚体构成。我们用一个包含其连接点的完全杆-节点框架来表示每个刚体。

设 $d \geq 1$，并设 H 为一个无环多重图，其顶点表示刚体，

其边表示杆。关联的 体-杆图 G_H 是按如下方式构造的简单图。

- 对于每个 $v \in V(H)$，取 $d+2$ 个核心顶点 $x_{v,\ 1}$，……，$x_{v,\ d+2}$。对于每条边 $e = uv \in E(H)$，取两个附着顶点 $x_{e,\ u}$，$x_{e,\ v}$。所有这些顶点两两不同。
- 该刚体 $B_H(v)$是一个完全图，其顶点为

$$\{x_{v,1}, \ldots, x_{v,d+2}\} \cup \{x_{e,v} : e \in \delta_H(v)\},$$

  其中，$\delta_H(v)$是与 v关联的边的集合。

- 对于每个 $e = uv \in E(H)$，在相应的刚体之间添加杆 $x_{e,\ u}x_{e,\ v}$。

因此，G_H 由这些完全刚体和杆组成，并具有 $(d+2)|V(H)| + 2|E(H)|$个顶点。若有一对 $(G_H,\ p)$，其中 $p\colon\ V(G_H) \to \mathbb{R}^d$，则称其为体-杆框架。

为定义对称模型，令 Γ 为一个有限群，并令 $(H,\ \psi)$ 为一个带 Γ标记的多重图。我们允许具有相同增益的平行边，以及具有非平凡增益的环。首先按如下方式构造相应的商 Γ标记的体-杆图$(G_H,\ \psi')$。

- 对于每个 $v \in V(H)$，取 $d+2$ 个核心顶点 $x_{v,\ 1}$，……，$x_{v,\ d+2}$。
- 对于每条有向边 $e = uv \in E(H)$，取两个不同的附着顶点 a_e，b_e，分别分配给物体 u，v。即使在 $u = v$ 时，这些顶点也彼此不同。在此构造中引入的所有核心顶点和附着顶点也都彼此不同。

- 刚体 $B_H(v)$是由 v 的核心顶点及分配给 v的所有附着顶点构成的完全图。为 $B_H(v)$的每条边赋予单位增益。
- 对于每个 $e = uv \in E(H)$，添加杆 a_eb_e，从 a_e 指向 b_e，增益为 $\psi(e)$。

因此 $|V(G_H)| = (d+2)|V(H)| + 2|E(H)|$。

Let $\widetilde{G_H}$是 $(G_H,\ \psi')$ 的覆盖图。那么，G_H 是通常意义下的体-杆图。示例见图5。

对于同态 $\tau\colon\ \Gamma \to O(\mathbb{R}^d)$ 和映射 $p\colon\ V(G_H) \to \mathbb{R}^d$，三元组 $\widetilde{(G_H, \psi', p)}$ 称为一个 τ (Γ)-标记体-杆框架。其覆盖框架 $(G_H, \widetilde{p})$ 是一个 τ(Γ)-对称体-杆框架。

5.2 一般强制对称全局刚性体-杆框架的刻画

现在我们刻画 $\mathbb{R}^d$ 中体-杆框架的一般强制对称全局刚性。首先给出以下辅助命题。

命题 5.1。设 Γ 为有限群，设（G、ψ）为一个 Γ-标记图，并设 $\tau\colon\ \Gamma \to O$（$\mathbb{R}^d$）为一个同态。设 K 为由 $\mathbb{Q}$ 以及 τ（γ）的各个条目生成的域，其中$\gamma \in \Gamma$。如果（G、ψ、p）是 τ（Γ）-一般位置的刚性框架，且位于 $\mathbb{R}^d$中，那么与其等价的 τ（Γ）-标记框架只有有限多个全等类。此外，每个全等类都包含一个实现，其坐标在 K（p）上代数。

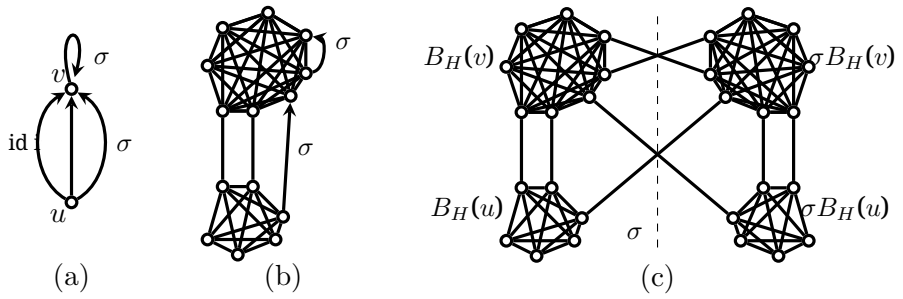

图5：（a）一个带有 $\mathcal{C}_s$ 标记的多重图（H，ψ），其中 $\mathcal{C}_s = \{\mathrm{id}\ \sigma\}$。（b）相应的带有$\sim\mathcal{C}_s$标记的体-杆图（$G_H$，$\psi'$）。（c）其覆盖体-杆图 G_H。在（b）和（c）中，每个刚体的一个核心顶点及其关联边均被省略。

证明。映射$f_{G,\tau(\Gamma)}$ 和 $f_{V,\tau(\Gamma)}$ 都是定义在 K上的多项式，而 $f_{G,\tau(\Gamma)}$ 则通过选取 $f_{V,\tau(\Gamma)}$的坐标得到。(G、ψ、p)的局部刚性与 p的一般性意味着秩$df_{V,\tau(\Gamma)}(p) =$秩 $df_{G,\tau(\Gamma)}(p)$。

令 Y 和 Z 分别为 $f_{G,\tau(\Gamma)}$ 和 $f_{V,\tau(\Gamma)}$ 的像的 Zariski 闭包。一般秩公式给出 $\dim Z = \dim Y$，因此，忽略不对应于 G 的边的坐标后得到的坐标投影 $Z \to Y$ 是一般位置有限的。根据全等的定义，与 (G、ψ、p) 等价的实现的不同全等类，在坐标投影 $Z \to Y$ 上方 $f_{G,\tau(\Gamma)}(p)$ 的纤维中对应于不同的点。由于 $f_{G,\tau(\Gamma)}(p)$ 在 K 上的 Y 中处于一般位置，该纤维是零维的，因而是有限的。因此，这样的全等类只有有限多个。

该纤维定义在 $K(p)$ 上，因此其中各点的坐标在 $K(p)$ 上代数。令 z 为该纤维中对应于这些全等类之一的点。实现 $q : V \to \mathbb{R}^d$ 属于该全等类，当且仅当

$$f_{V,\tau(\Gamma)}(q) = z.$$

这是一个关于 q 坐标的多项式方程组，定义在 $K(p,\ z)$ 上，而后者是 $K(p)$ 的有限代数扩张。由于该类非空，该方程组具有实解。根据 Tarski–Seidenberg 转移原理 [2, 定理 2.80], ，它具有一个坐标在 $K(p,\ z)$ 上代数、因而也在 $K(p)$ 上代数的实解。 □

定理 5.2。设 $d \geq 1$，设 Γ 为有限群，设 $(H,\ \psi)$ 为一个 Γ 标记的多重图，其中$V(H) \neq \varnothing$，并设 $\tau:\ \Gamma \to O(\mathbb{R}^d)$ 为一个同态。那么以下各项等价：

1。每个 $\tau(\Gamma)$-一般位置的刚体-杆实现 $(G_H,\ \psi')$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中都是全局刚性的；

2。某个 $\tau(\Gamma)$-一般位置的刚体-杆实现 $(G_H,\ \psi')$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中是全局刚性的；

3. H 是连通的，$(G_H,\ \psi')$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中具有冗余刚性，并且 欧氏群$_{\tau(\Gamma_C)}$ ＝欧氏群$_{\tau(\Gamma)}$，其中$\sim C$ 是 G_H 的一个连通分支，且 $\Gamma_C = \mathrm{Stab}_\Gamma(C)$。

证明。 </style} $1 \Rightarrow 2$ 这一推论显而易见。

假设条件 2 成立，并令 ($G_H,\ \psi',\ p$) 为一个一般位置的全局刚性实现。命题 3.6 蕴含 H 是连通的。覆盖图的每个连通分支 C 都包含一个满维刚体，因此命题 3.7 给出 Euc$_{\tau(\Gamma_C)}$ = Euc$_{\tau(\Gamma)}$。由于

$|V(G_H)| = (d+2)|V(H)| + 2|E(H)| \geq d+2$，定理 4.1 蕴含冗余刚性。因此$2 \Rightarrow 3$。

为证明 $3 \Rightarrow 1$，现在假设条件 3 成立。固定任意一个一般实现 (G_H, ψ', p)，并用 $K = \mathbb{Q}(\tau(\Gamma))$ 表示由该表示的矩阵元素生成的域。对于每个与 p 等价的实现 q 以及每个 $w \in V(H)$，令 h_q^w 为将 p 映射到 q （在 $B_H(w)$ 上）的唯一等距变换。该等距变换存在且唯一，因为刚体是完备的，且其核心顶点仿射张成 $\mathbb{R}^d$。

令 $e = uv$ 为 H 的任意一条边。图 G_{H-e} 是从 G_H 中删除两个顶点 a_e, b_e 后得到的。(G_H, ψ') 的冗余刚性意味着 $(G_H - a_e b_e, \psi')$ 是刚性的。由于 a_e 和 b_e 各自都与其所在刚体的 $d+1$ 个核心顶点相邻，(G_{H-e}, ψ') 也是刚性的。

令 $p_e = p|_{V(G_{H-e})}$。那么 (G_{H-e}, ψ', p_e) 是 G_{H-e} 的一般位置刚性实现。根据命题 5.1，我们可以选取一个有限集 $\mathcal{R}(G_{H-e}, p_e)$，其中包含与 (G_{H-e}, ψ', p_e) 全等的实现的代表元，其坐标在 $K(p_e)$ 上代数。

对于每个 $q_e \in \mathcal{R}(G_{H-e}, p_e)$ 和 $w \in V(H)$，完备刚体 $B_{H-e}(w)$ 确定一个唯一的等距变换

$$h_{q_e}^w(x) = A_{q_e}^w x + t_{q_e}^w \tag{12}$$

将该刚体上的 p_e 映射到 q_e。这使用了最初的 $d+1$ 个核心顶点，它们仿射无关，且仍然包含在 G_{H-e} 中。由于 q_e 在 $K(p_e)$ 上代数，$A_{q_e}^w$ 和 $t_{q_e}^w$ 的各项均在 $K(p_e)$ 上代数。

由 p 的一般性可知，$p(a_e)$ $p(b_e)$ 的坐标在 $K(p_e)$ 上代数无关，因此也在由添加所有这些等距变换的各项所得到的域上代数无关。

现在任取一个实现 q，它是 (G_H, ψ') 的实现，且与 p 等价。它在 G_{H-e} 上的限制与某个 $q_e \in \mathcal{R}(G_{H-e}, p_e)$ 全等。根据引理 3.4，在对 q 应用一个 $\tau(\Gamma)$-不变等距变换后，我们可以假设该限制等于 q_e。那么对于每个 $w \in V(H)$，都有 $h_q^w = h_{q_e}^w$，特别是

$$q(a_e) = A_{q_e}^u p(a_e) + t_{q_e}^u, \qquad q(b_e) = A_{q_e}^v p(b_e) + t_{q_e}^v.$$

G_H 对边 $e = uv$ 还有一个额外的边约束，这给出

$$\|p(a_e) - \tau(\psi(e))p(b_e)\|^2 = \|A_{q_e}^u p(a_e) + t_{q_e}^u - \tau(\psi(e))(A_{q_e}^v p(b_e) + t_{q_e}^v)\|^2.$$

由于两个连接点 $p(a_e)$ $p(b_e)$ 代数独立，这对于它们的坐标而言是一个多项式恒等式。比较双线性项和线性项可得

$$(A_{q_e}^u)^T \tau(\psi(e)) A_{q_e}^v = \tau(\psi(e)),$$
$$(A_{q_e}^u)^T (t_{q_e}^u - \tau(\psi(e)) t_{q_e}^v) = 0.$$

因此，$A_{q_e}^u = \tau(\psi(e)) A_{q_e}^v \tau(\psi(e))^{-1}$ 以及 $t_{q_e}^u = \tau(\psi(e)) t_{q_e}^v$。这意味着

$$h_q^u = \tau(\psi(e)) h_q^v \tau(\psi(e))^{-1}. \tag{13}$$

当我们撤销归一化时，该关系仍然保持不变，因为所施加的等距变换与 $\tau(\Gamma)$ 的每个元素交换。因此，对于每个 $e \in E(H)$ 以及每个 q of (G_H, ψ') 的等价实现，该关系都成立。

暂且假设 H 没有非环边。由于 H 是连通的，因此 $|V(H)| = 1$。令 $V(H) = \{u\}$。每个等价实现都可通过单个等距变换 h_q^u 在 $B_H(u)$ 上得到。对于每个环 e，(13) 给出

$$h_q^u \tau(\psi(e)) = \tau(\psi(e)) h_q^u. \tag{14}$$

由于环的增益 e生成 Γ_C（代表顶点的连通分支）C，(14) 表明 h_q^u与 $\tau(\Gamma_C)$ 中的每个元素都可交换。因此，根据中心化子条件，h_q^u 与 $\tau(\Gamma)$ 中的每个元素都可交换，故 h_q^u 是一个 $\tau(\Gamma)$-不变等距变换。由于 $q = h_q^u \circ p$，可得 q 与 p全等。

现在假设 H 至少有一条非环边。由于 H 连通，我们可以选取一棵生成树 T。通过切换，我们可以假设对于每个 $e \in E(T)$，$\psi(e) = \mathrm{id}$。现在假设 $e = uv \in E(T)$。那么，由 (13) 可知，对于每个等价的 q，$h_q^u = h_q^v$，因此这两个物体以相同的等距变换运动。由于这适用于 T的每条边，所有物体都以同一个等距变换 h_q运动。对于 H 中不属于 T的每条边 e，(13) 随即给出$h_q \tau(\psi(e)) = \tau(\psi(e)) h_q$，且这些边的增益生成 Γ_C。因此，恰如前一种情形，h_q 是一个 $\tau(\Gamma)$-不变等距变换，且 $q = h_q \circ p$ 与 p全等。由此完成了 $3 \Rightarrow 1$的证明。

□

注记 5.3. 若覆盖体-杆图连通，则 $\Gamma_C = \Gamma$，中心化子条件自动成立。在这种情况下，定理 *5.2* 简化为冗余刚性的刻画。

注记 5.4. $\tau(\Gamma)$-对称刚性对于 $\tau(\Gamma)$-一般位置体-杆框架可以在多项式时间内检验 *[30]*。更准确地说，由于删除刚体内部的一条边不会破坏刚性，(G_H, ψ') 是冗余刚性的，当且仅当它是刚性的，并且删除任意一根杆后仍保持刚性 $a_e b_e$, $e \in E(H)$，这至多需要进行 $|E(H)| + 1$ 次刚性检验。此外，经过切换使得 H 的一棵生成树具有单位增益后，Γ_C 由其余边的增益生成；对于固定的群 Γ 和表示τ，中心化子条件仅取决于子群 Γ_C。因此，对于固定的 Γ 和 τ，定理 *5.2* 的条件 *3* 可在关于 H规模的多项式时间内检验。

6 进一步评论与未来工作

未来工作有几个自然的方向。其中之一是研究体-铰框架的强制对称全局刚性，这类框架由满维刚体组成，其中每个铰链恰好连接两个刚体，并允许一个自由度。在非对称情形下，相应问题已由 [19], 解决，将其扩展到强制对称情形将是一个自然的下一步。这类结果也将与对称分子框架的研究相关（即所有与每个刚体相 incident 的铰链线都共点的体-铰框架）。然而，对于分子框架的一般强制对称全局刚性，要给出一种可在多项式时间内检验的组合刻画，似乎仍是一个较为遥远的目标，因为即使在非对称情形下，相应问题也尚未解决。

另一个自然的问题是：只要至少有 $d+1$ 个顶点轨道，强制对称全局刚性对于杆-节点框架是否是一种一般位置性质（回顾猜想 1）？ 尤其是，若能得到平面上 τ（Γ）-一般位置杆-节点框架的强制对称全局刚性的组合刻画，将会很有意义。A

经典的 Jackson–Jord´an 型归纳方法 [15], 若与应力矩阵的非对称版本（回顾第 4.3 节的讨论）或 [29, 21]，中提出的方法结合起来，似乎很有希望，不过归纳证明还面临一项额外难题：必须处理 4-正则回路。

致谢

我们感谢 BIRS 和 CMI 对 BIRS-CMI 几何约束系统的刚性、柔性与复杂性研讨会的支持，相关讨论在会上展开。

Bernd Schulze 部分获得了英国研究与创新署（资助编号 UKRI2397）通过 EPSRC 数学科学小额资助计划提供的支持。Csaba Kir´aly 获得了匈牙利国家研究、开发与创新办公室的支持，资助编号为 PD-138102 和 Advanced 152786。Shin-ichi Tanigawa 获得了日本科学技术振兴机构（JST）作为面向创新研究生态系统的可持续伙伴关系计划（ASPIRE）的一部分提供的支持，资助编号为 JPMJAP2520。

人工智能披露： 本工作的主体是在用于证明发现的人工智能工具问世之前完成的。因此，本文几乎所有的结果和证明都是作者在未使用人工智能的情况下获得的，只有一个例外。引理4.4的初始证明最初由 ChatGPT 生成。附录 A 中给出的当前证明是作者发展出的一种更为初等的改写。除此之外，人工智能仅被用于检查和润色稿件的部分内容。

参考文献

[1] J. Aspnes、T. Eren、D. K. Goldenberg、A. S. Morse、W. Whiteley、Y. R. Yang、B. D. O. Anderson 和 P. N. Belhumeur，网络定位理论，*IEEETrans. Mobile Comput.*，5(12):1663–1678，2006。[2] S. Basu、R. Pollack 和 M.-F. Roy，实代数几何中的算法，第二版，《算法与数学中的计算》，第 10 卷，Springer，2006。[3] D. I. Bernstein，一般对称性强制的无穷小刚性：平移与旋转，*SIAM J. Applied Algebra and Geometry* 6(2):190–215，2022。[4] D. M. Bishop，群论与化学，Clarendon Press，牛津，1973。[5] C. S. Borcea 和 I. Streinu，周期框架与柔性，*Proc. R. Soc. A*，466(2121):2633–2649，2010。[6] R. Connelly、T. Jord´an 和 W. Whiteley，一般位置全局刚性的刚体–杆框架，*J. Comb. Theory, B*，103:689–705，2013。[7] R. Connelly，刚性与能量，*Invent. Math.* 66:11–33，1982。[8] R. Connelly，关于一般位置全局刚性，载于*Applied Geometry and Discrete Mathematics*，《DIMACS 离散数学、理论计算机科学丛书》，第 4 卷，美国数学学会，147–155，1991。

[9] R. Connelly 和 M. Terrell，全局刚性对称张拉整体，*Structural Topology*，21:59–78，1995。[10] S. Dewar、G. Grasegger、E. Kastis 和 A. Nixon，对称刚性框架的商图，*Documenta Mathematica*，29(3):561–595，2024。[11] S. Dewar、B. Schulze、S. Tanigawa、L. Theran，唯一可实现的晶体结构，arxiv:2510.19529，2025。[12] S. Gortler、A. Healy 和 D. Thurston，一般位置全局刚性的刻画，*Amer-ican J. Math.*，132:897–939，2010。[13] B. Hendrickson，图的唯一实现条件，*SIAM J. Comput.* 21(1):65–84，1992。[14] S. M. A. Hermans、C. Pfleger、C. Nutschel、C. A. Hanke 和 H. Gohlke，生物分子的刚性理论：概念、软件与应用，*WIREs Comput. Mol.Sci.*，7(4)，2017。[15] B. Jackson 和 T. Jord´an，连通刚性拟阵与图的唯一实现，*J. Comb. Theory B*，94:1–29，2005。[16] B. Jackson、T. Jord´an 和 Z. Szabadka，等价图实现中的全局链接顶点对，*Discrete & Comp. Geom.*，35:493–512，2006。[17] B. Jackson、T. A. McCourt 和 A. Nixon，曲面上框架的一般位置全局刚性的必要条件。*Discrete Comput. Geom.*，52:344–360，2014。[18] T. Jord´an、V.E. Kaszanitzky 和 S. Tanigawa，平面中的增益稀疏性与对称性强制刚性，*Discrete & Comp. Geom.*，55(2):314–372，2016。[19] T. Jord´an、Cs. Kir´aly 和 S. Tanigawa，刚体–铰链框架的一般位置全局刚性，*J. Comb. Theory B*，117:59–76，2016。[20] V. Kaszanitzky、Cs. Kiraly 和 B. Schulze，周期图全局刚性的充分条件，*Discrete & Comp. Geom.*，67:1–16，2022。[21] V. Kaszanitzky、B. Schulze 和 S. Tanigawa，固定晶格表示下周期图的全局刚性，*J. Comb Theory B*，146:176–218，2021。[22] J. Malestein 和 L. Theran，周期框架作为环面上的图的一般位置组合刚性，*Advances in Math.*，233(1):291–331，2013。[23] J. Malestein 和 L. Theran，具有强制对称性的框架 I：反射与旋转。*Discrete Comput. Geom.*，54:339–367，2015。[24] R. Oba 和 S.-i. Tanigawa，一般位置张拉整体普适刚性的刻画，*Mathematical Programming*，197:109–145，2023。[25] E. Ross，周期框架作为环面上的图的几何与组合刚性，博士论文，约克大学，2011。

[26] B. Schulze，对称性作为有限柔性的充分条件，*SIAM J. Discr. Math.*，24(4):1291-1312，2010。[27] B. Schulze 和 W. Whiteley，对称框架的轨道刚性矩阵，*Discrete Comput. Geom.*，46(3):561-598，2011。[28] B. Schulze 和 W. Whiteley，对称框架的刚性，载于《离散与计算几何手册》，C.D.Toth、J.O'Rourke、J.Goodman 编，第三版，Chapman & Hall CRC，1633–1660，2017。[29] S. Tanigawa，图全局刚性的充分条件，*J. Comb. TheoryB*，113(C):123–140，2015。

[30] S. Tanigawa，应用离散几何中的增益图拟阵，*Trans. AMS*，367(12):8597–8641，2015。

引理4.4的证明

本节给出引理4.4的证明。

证明。 对于构型 $q=(q_1,\dots,q_d)$，定义

$$\Delta(q)=\begin{bmatrix} q_2-q_1 & \cdots & q_d-q_1 \end{bmatrix}\in M_{d,d-1}(\mathbb{R}).$$

Put

$$\begin{aligned} s&=\operatorname{rank}\Delta(p)=\dim\operatorname{aff}\{p_1,\dots,p_d\},\\ r&=\dim(F\cdot p). \end{aligned}$$

我们先证明 r 的下界 (15)。由于 F 是欧氏群 Euc(d) 的闭子群，其对角作用是适当的，并且 $F\cdot p$ 是一个与F/Stab(F,p)微分同胚的嵌入子流形，其中

$$\operatorname{Stab}(F,p)=\{g\in F: gp_i=p_i \text{ for all } i=1,\dots,d\}.$$

Stab(F,p) 的每个元素都逐点固定 aff$\{p_1,\dots,p_d\}$，因此 Stab(F,p) 是逐点固定 aff $\{p_1,\dots,p_d\}$ 这一 s 维仿射子空间的所有欧几里得等距变换构成的群的子群；该群同构于 $O(d-s)$。因此

$$\dim\operatorname{Stab}(F,p)\le\dim O(d-s)=\binom{d-s}{2}.$$

因此，我们得到

$$r=\dim(F\cdot p)=\dim(F)-\dim(\operatorname{Stab}(F,p))\ge\dim(F)-\binom{d-s}{2}. \tag{15}$$

接下来，考虑行列式簇

$$X_s=\left\{q=(q_1,\dots,q_d)\in(\mathbb{R}^d)^d:\operatorname{rank}\Delta(q)\le s\right\}.$$

它是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的代数簇。由于 q_1 可以自由选取，且秩至多为 s 的 $d\times(d-1)$ 矩阵所构成的簇的维数为 $s(2d-1-s)$，

$$\dim X_s = d + s(2d-1-s) = d^2 - (d-s)(d-s-1). \tag{16}$$

我们断言，存在一个线性映射 $\ell\colon (\mathbb{R}^d)^d \longrightarrow \mathbb{R}^r$ 其系数为有理系数，使得

$$d\ell\big|_{T_p(F\cdot p)} : T_p(F\cdot p) \longrightarrow \mathbb{R}^r \text{ is an isomorphism.} \tag{17}$$

事实上，由于 $\dim F\cdot p = r$，这样的映射存在且具有实系数，而满秩条件是开条件，因此可以选取其系数为有理数。

根据逆函数定理，存在 U 的一个开邻域 p in $F\cdot p$，ℓ 将其微分同胚地映射到 $W\subseteq\mathbb{R}^r$ 的一个开子集。取 $c\in W\cap\mathbb{Q}^r$，并令 $p'\in U$ 为满足 $\ell(p')=c$ 的点。由于 $p'\in F\cdot p$，存在 $g\in F$ 使得$p'=g\circ p$。

定义

$$Z = X_s\cap\ell^{-1}(c).$$

这是一个定义在 $\mathbb{Q}$ 上的代数集。此外，由于 $\ell\,|_U$ 是一个微分同胚，并且当 U 足够小时，rank $\Delta(p')$ =rank $\Delta(p)$ $=s$， Z 和 $F\cdot p$ 在 p'in X_s处横截地相交。特别地， p' 是 Z 的一个光滑点，其局部维数为 $\dim X_s - r$。将引理 2(c)] 应用于 p' 的一个充分小的邻域，我们得到

$$td[\mathbb{Q}(p'):\mathbb{Q}] \le \dim X_s - r.$$

因此，由(15)和(16)，我们有

$$\begin{aligned} td[\mathbb{Q}(p'):\mathbb{Q}] &\le \dim X_s - r \\ &\le d^2 - (d-s)(d-s-1) - \dim(F) + \binom{d-s}{2} \\ &= d^2 - \dim(F) - \binom{d-s}{2} \\ &\le d^2 - \dim(F). \end{aligned}$$

最后，由于 $\mathbb{Q}'/\mathbb{Q}$是有限代数扩张，添加 $\mathbb{Q}'$ 不会改变超越次数。因此

$$td[\mathbb{Q}'(p'):\mathbb{Q}'] = td[\mathbb{Q}(p'):\mathbb{Q}] \le d^2 - \dim(F),$$

正如所要求的。 □