低频稳定单源积分方程

Alessandro Zuccotti，*IEEE* 学生会员，Cedric M¨unger，*IEEE* 会员，Chien V. Le，*IEEE* 会员，Paul Olyslager，*IEEE* 学生会员，以及 Kristof Cools，*IEEE* 会员

arXiv:2611.32561v1 [cs.CE] 24 Nov 2026

摘要——**在均匀介电体散射的各类积分方程中，单源积分方程（SSIE）具有仅需一个电流或磁流未知量的优势。通过适当组合内域和外域的 Calder´on 公式，可以得到良态的 SSIE。良态 SSIE 中所得算子的条件数在低频下仍保持有界。然而，SSIE 仍会受到低频抵消的影响，导致解、右端项和系统矩阵中的有效数字损失。本文将基于准Helmholtz投影算子的重缩放策略应用于良态 SSIE。由于 SSIE 算子的离散化会用到原空间和对偶空间，因此需要原空间投影算子和对偶空间投影算子。我们表明，重标度 SSIE 的解在低频下不受灾难性抵消的影响。通过测试极低频率下辐射场的精度，数值实验验证了该方法。**

索引词—**计算电磁学、低频稳定化、准Helmholtz投影算子、单源方程。**

I. 引言

SCATTERING 均匀介质中的时谐电磁场可通过边界积分方程（BIE）高效建模。双源公式，例如 Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu-Tsai（PMCHWT）方程 [1]–[3] 和 M¨uller 方程 [4],，已得到广泛研究。另一方面，单源积分方程（SSIE） [5]–[7] 提供了一种颇具吸引力的替代方案，只需一个等效辅助电流（电流或磁流）未知量。该辅助未知量并非物理迹；通过对其应用内部 Calder´on 算子，可以恢复这些迹。通过适当组合内部和外部 Calder´on 公式，可得到良态的 SSIE [8]。此外，人们还提出了 SSIE 公式来解决高对比度失效问题 [9], [10]。SSIE 涉及 Maxwell 边界积分算子的乘积，精确离散化需要原始空间和对偶空间中的基函数 [11]。通常分别选用 Rao-Wilton-Glisson（RWG） [12]和 Buffa-Christiansen（BC） [13]基函数作为原始空间和对偶空间。尽管 SSIE 在低频下可以做到良态，但与电磁 BIE 中的常见情形一样，在极低频下仍会受到数值抵消的影响，这是由于未知量的环和星分量具有不同的尺度。与传统 BIE 不同，在 SSIE 公式中，这一问题不仅影响远场等次级量，还会影响由辅助未知量恢复物理迹的计算，例如电场迹和磁场迹。

本文提出了一种重标度 SSIE，在低频区域内，经过次数几乎与频率无关的 Krylov迭代后即可得到正确解。环和星分量分别在原空间和对偶空间中利用准 Helmholtz投影算子进行重标度。这些投影算子已用于重标度电场积分方程（EFIE） [14]–[17], 磁场积分方程和混合场积分方程（MFIE 和 CFIE） [18], [19],PMCHWT 方程 [20]–[23], 以及 M¨uller 方程 [24]。我们将该重标度方案扩展到协调SSIE离散化。与重缩放 PMCHWT [20],类似，但不同于 EFIE 和 CFIE，SSIE 的结构要求每个离散化积分算子都在其展开空间和像空间中进行重标度，即在应用 Gram矩阵逆后展开算子像的空间。这样既能确保辅助未知量和物理未知量均得到正确的缩放，又能在低频区域内保持有利的条件数。作为这种重标度的结果，重标度 SSIE 保留了静态零空间；该零空间是多重连通几何体中良态 SSIE 和 MFIE 的特征。因此，辅助解中可能会出现数值误差，但我们表明，这些误差不会传播到物理迹和远场。与上述文献不同，在多重连通几何体上，SSIE 重标度需要在投影双层算子中分别使用全局环路投影算子和局部环路投影算子。这样可以保持静态双层算子的一个恒等式；否则，该恒等式只能在求积精度范围内成立，从而导致低频仿真中出现显著误差。

II. 符号与背景

设 $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^3$ 是一个充满均匀介质的连通域，其介电常数为 $\epsilon_1 = \epsilon_r\epsilon_0$，磁导率为$\mu_1 = \mu_r\mu_0$；$\Omega_0 := \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_1$ 是外部区域，其介电常数为 ϵ_0，磁导率为 μ_0。我们考虑频率为 ω 的时谐入射电磁场（$\mathbf{e}^{\text{inc}}(\mathbf{r}),\mathbf{h}^{\text{inc}}(\mathbf{r})$）（其时间因子为 $e^{j\omega t}$）。边界$\Gamma := \partial\Omega_1$ 上的 Maxwell单层和双层积分算子为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\kappa_i} &= \mathcal{T}_{s,\kappa_i} + \mathcal{T}_{h,\kappa_i},\\
(\mathcal{T}_{s,\kappa_i}\ \mathbf{j})(\mathbf{r}) &= -j\kappa_i\hat{\mathbf{n}} \times \int_\Gamma \frac{e^{-j\kappa_i R}}{4\pi R}\mathbf{j}(\mathbf{r}')dS',\\
(\mathcal{T}_{h,\kappa_i}\ \mathbf{j})(\mathbf{r}) &= \frac{1}{j\kappa_i}\hat{\mathbf{n}} \times \text{p.v.} \int_\Gamma \nabla\frac{e^{-j\kappa_i R}}{4\pi R}\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')dS',\\
(\mathcal{K}_{\kappa_i}\ \mathbf{j})(\mathbf{r}) &= \hat{\mathbf{n}} \times \text{p.v.} \int_\Gamma \nabla\frac{e^{-j\kappa_i R}}{4\pi R} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')dS',
\end{aligned}
\tag{1}
$$

本研究得到欧洲研究委员会（ERC）欧盟“地平线2020”研究与创新计划项目（资助协议编号101001847）的资助，以及根特大学特别研究基金（BOF）项目（资助编号BOF.PDO.2024.0016.01）的资助。作者来自根特大学—imec的信息技术系IDLab，地址为比利时根特（通讯作者：Alessandro Zuccotti，电子邮箱：alessandro.zuccotti@ugent.be）。

其中 $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$，$\hat{\mathbf{n}}$ 为 Γ上的外向表面法向量，$\kappa_i=\omega\sqrt{\epsilon_i\mu_i}$ 为区域 Ω_i中的波数。特性阻抗为 $\eta_i=\sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}}$。假设只有外部源，通过将内部和外部 Calderón 公式相乘组合并利用其冗余性，可得到良态 SSIE：

$$\left[\left(\mathcal{K}_{\kappa_0}-\frac{1}{2}\right)\left(-\mathcal{K}_{\kappa_1}+\frac{1}{2}\right)+\frac{\eta_0}{\eta_1}\mathcal{T}_{\kappa_0}\mathcal{T}_{\kappa_1}\right]\mathbf{p}=\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{e}^{\mathrm{inc}}. \quad (2)$$

关于（2）的详细推导见 [8] 和 [25]。式（2）中的未知量 $\mathbf{p}$ 并不表示物理迹。应用内部算子可得到电迹和磁迹

$$\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{h}=-\frac{1}{\eta_1}\mathcal{T}_{\kappa_1}\mathbf{p},\quad \mathbf{e}\times\hat{\mathbf{n}}=\left(-\mathcal{K}_{\kappa_1}+\frac{1}{2}\right)\mathbf{p}. \quad (3)$$

III. 离散化

令$\mathbf{f}$ 和$\mathbf{g}$ 分别表示RWG基函数和BC基函数。式（2）中的辅助未知量$\mathbf{p}$ 在RWG空间中展开

$$\mathbf{p}(\mathbf{r})=\sum_i(\mathbf{p}^f)_i\mathbf{f}_i(\mathbf{r}), \quad (4)$$

其中$\mathbf{p}^f$ 是未知系数向量。式（2）中的每个算子均使用RWG或BC试函数以及旋转后的RWG或BC检验函数进行离散化。我们将与算子 $\mathcal{O}$相关的矩阵记为 $(\mathcal{O}_{xy})_{mn}=\langle\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{x}_m,\mathcal{O}\mathbf{y}_n\rangle$，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $L^2(\Gamma)$ 内积。我们还定义混合Gram矩阵 $(N_{xy})_{mn}=\langle\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{x}_m,\mathbf{y}_n\rangle$。其逆矩阵记为 N^{yx}。反对称性质 $N^{xy}=-N^{yx^T}$适用。式（2）离散化如下：

$$N^{fg}\left[\left(\mathcal{K}_{\kappa_0}-\frac{1}{2}\right)_{gf}N^{fg}\left(-\mathcal{K}_{\kappa_1}+\frac{1}{2}\right)_{gf}+\frac{\eta_0}{\eta_1}(\mathcal{T}_{\kappa_0})_{gg}(N^{gf})(\mathcal{T}_{\kappa_1})_{ff}\right]\mathbf{p}^f=N^{fg}(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{e}^{\mathrm{inc}})_g, \quad (5)$$

其中 $(\hat{\mathbf{n}}\times^{\mathrm{inc}})_{gi}=\langle\times_i\times^{\mathrm{inc}}\rangle$ $\left(\mathcal{K}_{\kappa_i}-\mathbf{e}\right)$ $\left(\frac{1}{2}\right)_{gf}=\left(\mathcal{K}_{\kappa_i}{}_{gf}-\frac{1}{2}N_{gf}\right)$ $\hat{\mathbf{n}}\mathbf{g}$，$\hat{\mathbf{n}}\mathbf{e}$，以及 $(\,)$。该协调格式能够对所有积分算子 [26]，进行精确离散化，并保持系统的谱性质。物理迹可恢复为

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{h})^g&=-\frac{1}{\eta_1}N^{gf}(\mathcal{T}_{\kappa_1})_{ff}\mathbf{p}^f,\\(\mathbf{e}\times\hat{\mathbf{n}})^f&=N^{fg}\left(-\mathcal{K}_{\kappa_1}+\tfrac{1}{2}\right)_{gf}\mathbf{p}^f.\end{aligned} \quad (6)$$

IV. 低频抵消

在低频下，计算（5）时会出现数值不稳定性。为分析相关量的频率特性，考虑其环-星分解十分方便。RWG 空间和 BC 空间中的系数向量可进行拟 Helmholtz分解 [20], [27]

$$\mathbf{j}^f=\Lambda_f\mathbf{l}_f+H_f\mathbf{h}_f+\Sigma_f\mathbf{s}_f,\quad \mathbf{j}^g=\Lambda_g\mathbf{l}_g+H_g\mathbf{h}_g+\Sigma_g\mathbf{s}_g.$$

矩阵（Λ_x、H_x、Σ_x）分别张成局部环（无散）、全局环（调和）和星子空间[20], [28]。对于所提出的重缩放策略，我们将需要仅使用 Σ_f 和 Λ_f 的定义，即从 [18], [20], 中移除一列，以计入相应的秩亏。这些是分别表示边与顶点、边与单元之间有向连接关系的矩阵。我们定义

$$\begin{aligned}(\Lambda_f)_{mn}&=\begin{cases}+1, & \text{if } v_n=v_m^+,\\-1, & \text{if } v_n=v_m^-,\\0, & \text{otherwise,}\end{cases}\quad\begin{matrix}m=1,\dots,N_{\mathrm{e}},\\n=1,\dots,N_{\mathrm{v}}-1,\end{matrix}\\(\Sigma_f)_{mn}&=\begin{cases}+1, & \text{if } c_n=c_m^+,\\-1, & \text{if } c_n=c_m^-,\\0, & \text{otherwise}\end{cases}\quad\begin{matrix}m=1,\dots,N_{\mathrm{e}},\\n=1,\dots,N_{\mathrm{c}}-1,\end{matrix}\end{aligned} \quad (7)$$

其中，v_m^+，v_m^- 和 c_m^+，c_m^- 分别是与该 m^{th} 边相连的顶点和单元对。相应的准Helmholtz投影算子与被移除的列无关。令

$$A_f=(\Lambda_f,H_f,\Sigma_f),\quad A_g=(\Lambda_g,H_g,\Sigma_g).$$

在平面波激励下，物理迹的环和星分量的低频缩放为 [20]

$$\begin{aligned}A_f^{-1}(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{e})^f&=(O(1),O(\omega),O(\omega))^T,\\A_g^{-1}(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{h})^g&=(O(1),O(\omega),O(\omega))^T,\end{aligned} \quad (8)$$

而辅助未知量 $\mathbf{p}^f$ 的缩放方式类似于 PEC 电流

$$A_f^{-1}\mathbf{p}^f=(O(1),O(1),O(\omega))^T, \quad (9)$$

因为当 $\kappa_0=\kappa_1$ 和 $\eta_0=\eta_1$时，(2) 化简为 MFIE。如果将物理迹的环和星分量存储在一起，则式 (8) 中的缩放会导致星分量中的有效数字损失，进而导致低频 [20]下辐射远场中的有效数字损失。此外，如果将辅助未知量的环和星分量存储在一起，则由 (6) 计算得到的物理迹已经会受到明显误差的影响。

V. 原始空间和对偶空间中的重新缩放

为防止低频下有效数字的损失，需要对辅助未知量和物理迹的环和星分量进行重新缩放。正确缩放这两个量至关重要，因为辅助未知量中的有效数字损失会传播到物理迹，而后者中的数字损失则会影响远场计算。

原空间准Helmholtz投影算子定义为

$$\begin{aligned}P_f^{\Sigma}&=\Sigma_f(\Sigma_f^T\Sigma_f)^{-1}\Sigma_f^T,\quad P_f^{\Lambda H}=Id-P_f^{\Sigma},\\P_f^{\Lambda}&=\Lambda_f(\Lambda_f^T\Lambda_f)^{-1}\Lambda_f^T,\quad P_f^{H}=P_f^{\Lambda H}-P_f^{\Lambda},\end{aligned} \quad (10)$$

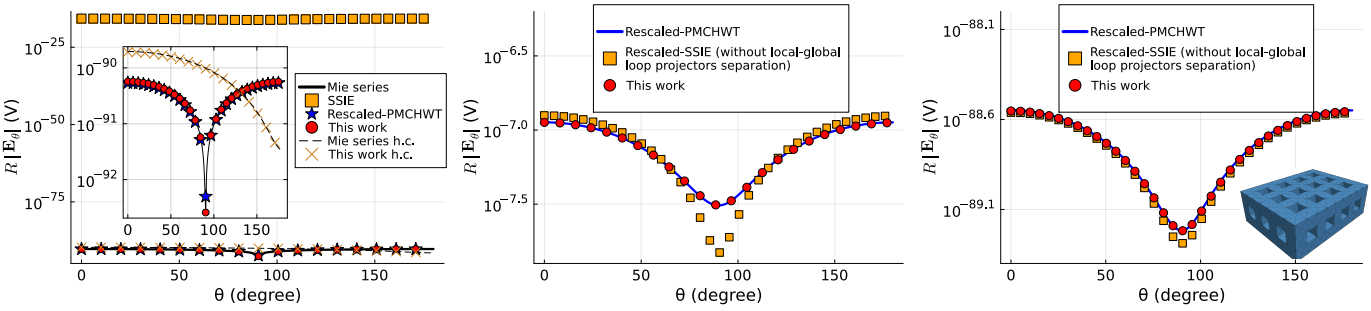
其中 Id 是单位矩阵。我们还将对偶空间中的准Helmholtz投影算子定义为

$$P_g^{\Sigma}=P_f^{\Lambda},\quad P_g^{\Lambda H}=Id-P_f^{\Lambda}. \quad (11)$$

这些定义体现了 RWG 空间与 BC 空间之间的对偶性：由于 RWG 和 BC 基函数分别表示流经网格边和沿网格边流动的电流，RWG 空间中与局部环对应的系数向量，在 BC 空间中对应于一个星形基函数。

RWG 和 BC 空间中的重缩放矩阵为

$$M_x=P_x^{\Lambda H}+j\frac{\kappa_0}{\kappa_*}P_x^{\Sigma},\quad M_x^{-1}=P_x^{\Lambda H}-j\frac{\kappa_*}{\kappa_0}P_x^{\Sigma}, \quad (12)$$



(a) (b) (c)

图 1： 远场：在距离 R 处，电场 θ 分量的远场幅值 $\lim_{R\to\infty} R|\mathbf{E}_\theta|$，作为位于包含传播方向和入射电场的平面内的角度 θ 的函数。a）球体：波数为 $\kappa_0 = 10^{-45}\mathrm{m}^{-1}$ 时的远场结果。插图显示了 10^{-91}V 附近的曲线。未标记的曲线对应于 $\epsilon_r = 5$、$\mu_r = 1$；标记为"h.c."的曲线对应于高对比度情形 $\epsilon_r = 80$、$\mu_r = 1000$。常规 SSIE 产生的远场比正确结果大几个数量级。重标度 SSIE 与米氏级数一致，即使在高对比度情形下也是如此。b）环面：波数为 $\kappa_0 = 10^{-4}\mathrm{m}^{-1}$ 时的远场结果。重标度 SSIE 与重缩放 PMCHWT 一致。在未强制满足（18）中的第二个条件时产生的远场，准确性明显较低，即使在中等低频下也是如此。c）M-长方体 g-43：波数为 $\kappa_0 = 10^{-45}\mathrm{m}^{-1}$ 时的远场结果。重标度 SSIE 与重缩放 PMCHWT 一致。在未强制满足（18）中的第二个条件时产生的远场，准确性明显较低。

其中 $x \in \{f, g\}$。引入参数 κ_* 以保证量纲一致性。可取 $\frac{1}{d}$，其中 d 为几何体的直径，后续内容中将省略该参数。

将重缩放矩阵代入 (5)，得到

$$\Big[\Big((\widetilde{\mathcal{K}}_{\kappa_0})^f{}_f - \frac{1}{2}Id\Big)\Big(-(\widetilde{\mathcal{K}}_{\kappa_1})^f{}_f + \frac{1}{2}Id\Big) + \frac{\eta_0}{\eta_1}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\kappa_0})^f{}_g(\widetilde{\mathcal{T}}_{\kappa_1})^g{}_f\Big]\widetilde{\mathbf{p}}^f = M_f^{-1}N^{fg}(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{e}^{\mathrm{inc}})_g, \tag{13}$$

其中 $\widetilde{\mathbf{p}}^f = M_f^{-1}\mathbf{p}^f$，并且

$$(\widetilde{\mathcal{K}}_{\kappa_i})^f{}_f = M_f^{-1}N^{fg}(\mathcal{K}_{\kappa_i})_{gf}M_f,$$
$$(\widetilde{\mathcal{T}}_{\kappa_i})^x{}_y = M_x^{-1}N^{xy}(\mathcal{T}_{\kappa_i})_{yy}M_y. \tag{14}$$

重缩放物理迹为

$$M_g^{-1}(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{h})^g = -\frac{1}{\eta_1}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\kappa_1})^g{}_f\widetilde{\mathbf{p}}^f,$$
$$M_f^{-1}(\mathbf{e}\times\hat{\mathbf{n}})^f = \big(-(\widetilde{\mathcal{K}}_{\kappa_1})^f{}_f + \tfrac{1}{2}Id\big)\widetilde{\mathbf{p}}^f. \tag{15}$$

重缩放后的未知量 $\widetilde{\mathbf{p}}^f$ 和物理迹的缩放方式为

$$A_f^{-1}\widetilde{\mathbf{p}}^f = (O(1), O(1), O(1))^T,$$
$$A_g^{-1}M_g^{-1}(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{h})^g = (O(1), O(\omega), O(1))^T, \tag{16}$$
$$A_f^{-1}M_f^{-1}(\mathbf{e}\times\hat{\mathbf{n}})^f = (O(1), O(\omega), O(1))^T.$$

现在，局部环和星分量具有相同的缩放。物理迹的全局环分量仍为$O(\omega)$，但相对于局部环和星分量的贡献，其远场贡献为 $O(\omega)$。

实现重缩放算子 $\widetilde{\ }$ 时，必须谨慎处理 $\mathcal{O}_{\kappa_i}$ 和右端项。特别是，重缩放后的内部单层算子需要按如下方式实现：

$$(\widetilde{\mathcal{T}}_{\kappa_1})^g{}_f = P_g^{\Sigma}N^{gf}(\mathcal{T}_{s,\kappa_1})_{ff}P_f^{\Sigma} - j\frac{1}{\kappa_0}P_g^{\Sigma}N^{gf}(\mathcal{T}_{s,\kappa_1})_{ff}P_f^{\Lambda H}$$
$$+ j\kappa_0 P_g^{\Lambda H}N^{gf}(\mathcal{T}_{\kappa_1})_{ff}P_f^{\Sigma} + P_g^{\Lambda H}N^{gf}(\mathcal{T}_{s,\kappa_1})_{ff}P_f^{\Lambda H},$$

而 $(\widetilde{\mathcal{T}}_{\kappa_0})^f{}_g$ 则通过交换 f和 g以类似方式实现。该方程强制执行 [20]

$$(\mathcal{T}_{h,\kappa_1})_{ff}P_f^{\Lambda H} = 0, \quad P_g^{\Sigma}N^{gf}(\mathcal{T}_{h,\kappa_1})_{ff} = 0. \tag{17}$$

重新缩放后的双层算子应实现为

$$(\widetilde{\mathcal{K}}_{\kappa_i})^f{}_f = P_f^{\Sigma}N^{fg}(\mathcal{K}_{\kappa_i})_{gf}P_f^{\Sigma} - j\frac{1}{\kappa_0}P_f^{\Sigma}N^{fg}(\mathcal{K}_{e,\kappa_i})_{gf}P_f^{\Lambda H}$$
$$+ j\kappa_0 P_f^{\Lambda H}N^{fg}(\mathcal{K}_{\kappa_i})_{gf}P_f^{\Sigma} + P_f^{\Lambda}N^{fg}(\mathcal{K}_{\kappa_i})_{gf}P_f^{\Lambda H}$$
$$+ P_f^{H}N^{fg}(\mathcal{K}_{\kappa_i})_{gf}P_f^{H} + P_f^{H}N^{fg}(\mathcal{K}_{e,\kappa_i})_{gf}P_f^{\Lambda},$$

其中 $\mathcal{K}_{e,\ \kappa_i} = \mathcal{K}_{\kappa_i} - \mathcal{K}_0$ 且 $\mathcal{K}_0$ 是双层算子的静态部分。该方程强制

$$(P_f^{\Sigma})N^{fg}(\mathcal{K}_0)_{gf}P_f^{\Lambda H} = 0, \quad (P_f^{H})N^{fg}(\mathcal{K}_0)_{gf}P_f^{\Lambda} = 0. \tag{18}$$

我们回顾一下，$\mathcal{K}_{e,\ \kappa_i} = O(\omega^2)$。必须满足式（18）中的两个条件，才能确保在 $\mathcal{K}_{e,\ \kappa_i}$ 中对 $O(\omega^2)$残差进行精确计算。第一个条件已在以往的公式中得到满足，例如 PMCHWT [20]，MFIE 和 M¨uller 方程 [24]，，因为违反该条件会引入乘以 ${\kappa_i}^{-1}$ 的求积误差。在 SSIE 中，第二个条件同样至关重要；否则，即使在中等低频下，我们也会在物理迹和远场中观察到显著误差。

要对 $(\mathcal{K}_{e,\ \kappa_i})_{gf}$ 进行精确计算，需要采用数值稳定的实现，以计算被积函数的高阶 $O(\omega^2)$残差。

假设采用平面波激励，式（13）的右端项计算如下

$$M_f^{-1}N^{fg}(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{e}^{\mathrm{inc}})_g = -j\frac{1}{\kappa_0}P_f^{\Sigma}N^{fg}(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{e}_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{inc}})_g +$$
$$+ P_f^{\Lambda H}N^{fg}(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{e}^{\mathrm{inc}})_g, \tag{19}$$

其中 $\mathbf{e}_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{inc}} = \hat{}\mathbf{e}(e^{-j\kappa_0\hat{\mathbf{\kappa}}_0\cdot\mathbf{r}} - 1)$。需要采用数值稳定的计算方法，例如使用 Python、MATLAB 和 Julia 中提供的 expm1 函数。

在静态极限 $\kappa_0 = \kappa_1 = 0$ 下，(5) 和 (13) 在多重连通几何体上具有相同的静态 MFIE 零空间。因此，(13) 中的算子具有与 $O(\omega^2)$ 成比例的 N_H 个特征值，其中 N_H 是散射体的把手数。然而，这组固定维数的特征值不会影响 Krylov迭代求解器的收敛性，即使对于具有大量把手的几何体，也能保持稳定的迭代次数。数值误差

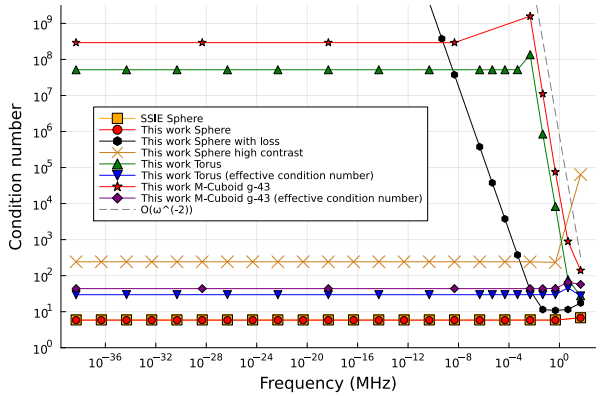


图2： 条件数与频率的关系。条件数是式(13)中左端算子最大奇异值与最小奇异值之比；有效条件数排除了最小的 N_H 个奇异值，这些奇异值对应于静态零空间。对于无损低对比度球体和高对比度球体，在低频区域内条件数保持稳定；对于有损球体，当频率进入涡流区域后，条件数增大。对于无损多重连通几何体，有效条件数保持稳定。

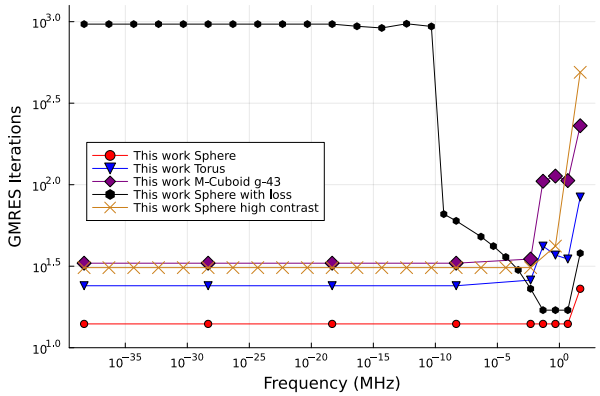


图 3： 对于所有无损物体，GMRES 迭代次数在极低频率下仍保持稳定。对于有损球体，当频率进入涡流区域后，迭代次数开始增加。

可能会因静态零空间而出现在辅助解 $\tilde{\mathbf{p}}^f$ 中。然而，我们预计此类误差不会传播到物理迹，因为可以证明，(15) 中的算子与 (13) 中整个左端算子具有相同的静态零空间。在计算物理迹时，辅助解中的任何伪内容都会受到强烈抑制。对这一数值效应的详细分析将留待未来研究。

VI. 数值结果

我们给出了三种几何体的散射数值结果：一个单位球、半径为1m和3m的环面，以及一个尺寸为7m $\times$ 9m $\times$ 3 m的拓扑非平凡一级门格尔长方体，其中包含 $3 \times 4 \times 1$ 个均匀间隔、相互正交且贯穿的管道，这些管道具有1 m $\times$ 1m的方形截面，因此亏格为 $g = 43$ （M-长方体 g-43），如图1c所示。对于球体，采用解析Mie级数解作为参考。对于环面和M-长方体 g-43，我们采用 [20]中给出的重缩放 PMCHWT方程作为参考。在所有实验中，除非另有说明，我们设定相对介电常数和磁导率分别为 $\epsilon_r = 5$、 $\mu_r = 1$ 。入射场为平面波。对于环面和M-长方体 g-43，极化方向相对于 z轴为 $45°$ ，传播方向沿 x轴。环面的轴线与 z轴对齐。M-长方体 g-43的最短边沿 z轴放置，最长边沿 y轴放置。在图1中，我们展示了三种几何体的远场。由式(6)的解计算得到的远场可能与正确值相差数个数量级。相比之下，使用式(15)得到的远场与Mie级数和重缩放 PMCHWT结果一致。在图1b和图1c中，我们还展示了未强制执行式(18)中第二个条件时得到的解。与同时强制执行式(18)中的两个条件时得到的远场相比，所得远场明显不够精确；当波数为 $\kappa_0 = 10^{-4}\mathrm{m}^{-1}$时便已如此。

图2展示了式（13）中左端算子的条件数随频率的变化。图2还展示了有损球体的结果，其中 $\epsilon_1 = \epsilon_0(\epsilon_r - j\frac{\sigma\eta_0}{\kappa_0})$、 $\sigma = 10^{-5}\,\mathrm{S/m}$，$\epsilon_r = 10$、 $\mu_r = 1$，以及高对比度球体的结果，其中 $\epsilon_r = 80$、$\mu_r = 1000$。对于无损物体，只要强制满足条件 $N^{fg}(\mathcal{T}_h)_{gg}N^{gf}(\mathcal{T}_h)_{ff} = 0$，标准 SSIE（5）在所有频率下都已具有良态。重标度 SSIE（13）保持了相同的特性。对于具有无损材料的多重连通几何体，由于静态零空间，条件数随 $O(\omega^{-2})$ 增长，并因求积精度而稳定在约 10^8 。然而，有效条件数定义为排除最小的 N_H 个奇异值后最大奇异值与最小奇异值之比，该数值在所有频率下都保持稳定。GMRES 迭代次数遵循这一有效条件数（见图3）。在有损情形下，只要 $\sigma\eta_0 < \kappa_0$，重标度就是有效的。对于$\kappa_0 < \sigma\eta_0$，内部域进入涡流区域，此时内部算子和解的尺度与无损情形 [22]不同。这会使条件数和 GMRES 迭代次数恶化，并且预计解中会损失若干位数字。然而，在 [22], 中已表明，PMCHWT方程的基于准亥姆霍兹投影子的重标度可以适应该区域。我们预计，类似的调整也可用于 SSIE。在高对比度情形下，重标度仍然有效：条件数高于低对比度情形，但在低频区域保持稳定；迭代次数略有增加，并且一直稳定到极低频率；远场仍保持精确（图1a）。

VII. 结论

我们提出了一种新颖的低频稳定单源积分方程，用于均匀无损介质的散射。通过使用准Helmholtz投影算子对辅助未知量和定义SSIE的算子进行重缩放，该方法在任意低频率下均可避免有效数字损失，同时保留单源公式的优点。与文献中的其他低频稳定化技术不同，该方法需要将局部环投影子与全局环投影子分离。针对单连通和多重连通几何体的数值结果表明，所提出的方法在宽频率范围内具有较高的精度、鲁棒性和良好的条件性。

参考文献

[1] A. J. Poggio 和 E. K. Miller，三维散射问题的积分方程解。MB Assoc.，1970年。[2] Y. Chang 和 R. Harrington，“材料体特征模的表面公式”，*IEEE*天线与传播学报，第25卷，第6期，第789–795页，1977年。[3] T.-K. Wu 和 L. L. Tsai，“任意形状有耗旋转介质体的散射”，《无线电科学》，第12卷，第5期，第709–718页，1977年。[4] C. M¨uller，电磁波数学理论基础，第155卷。Springer Science & Business Media，2013年。[5] E. Marx，“介质散射积分方程”，*IEEE*天线与传播学报，第32卷，第2期，第166–172页，1984年。[6] A. Glisson，“均匀介质体电磁散射的积分方程”，*IEEE*天线与传播学报，第32卷，第2期，第173–175页，1984年。[7] M. Costabel 和 F. Le Lou¨er，“关于电磁散射中介质体的Kleinman–Martin积分方程方法”，应用数学学会数学杂志，第71卷，2011年，第656页，第2期，第635–页。[8] F. Valdes、F. P. Andriulli、H. Bagci 和 E. Michielssen，“一种经Calder´on预条件的单源组合场积分方程，用于分析均匀可穿透物体的散射”，*IEEE*天线与传播学报，第59卷，2011年，第2328页，第6期，第2315–页。[9] M. Gossye、M. Huynen、D. Vande Ginste、D. De Zutter 和 H. Rogier，“高介电对比介质的Calder´on预条件子”，*IEEE*天线与传播学报，第66卷，第2期，第808–818页，2018年。[10] M. Gossye、D. Vande Ginste 和 H. Rogier，“利用Calder´on预条件对高磁对比介质进行电磁建模”，计算机与应用数学，第77卷，2019年，第1638页，第6期，第1626–页。[11] C. M¨unger 和 K. Cools，“可穿透结构的无共振多迹单源方程”，载于*2024*年国际先进应用电磁学会议（*ICEAA*），第511–514页，2024年。[12] S. Rao、D. Wilton 和 A. Glisson，“任意形状表面的电磁散射”，*IEEE*天线与传播学报，第30卷，第409–418页，1982年5月。会议名称：IEEE天线与传播学报。[13] A. Buffa 和 S. H. Christiansen，“重心细分上的对偶有限元复形”，数学论丛，第340卷，第6期，第461–464页，2005年。[14] F. P. Andriulli、K. Cools、I. Bogaert 和 E. Michielssen，“关于多重连通几何体上的良态电场积分算子”，*IEEE*天线与传播学报，第61卷，第4期，第2077–2087页，2013年。[15] Y. Beghein、K. Cools 和 F. P. Andriulli，“基于准Helmholtz投影算子的直流稳定、大时间步长平衡时域电场积分方程”，*IEEE*天线与传播学报，第63卷，第7期，第3087–3097页，2015年。[16] Y. Beghein、K. Cools 和 F. P. Andriulli，“一种直流稳定、良好平衡且经 Calder´on 预条件的时域电场积分方程”，*IEEE*天线与传播学报，第 63 卷，第 12 期，第 5650–5660 页，2015年。[17] B. Hofmann、T. F. Eibert、F. P. Andriulli 和 S. B. Adrian，“一种面向激励且自适应的频率归一化方法，用于低频稳定的电场积分方程公式”，*IEEE*天线与传播学报，第 71 卷，第 5 期，第 4301–4314 页，2023年。[18] A. Merlini、Y. Beghein、K. Cools、E. Michielssen 和 F. P. Andriulli，“基于准Helmholtz投影算子的磁场积分方程和混合场积分方程”，*IEEE*天线与传播学报，第 68 卷，第 5 期，第 3834–3846 页，2020年。[19] V. C. Le、P. Cordel、F. P. Andriulli 和 K. Cools，“使用准Helmholtz投影算子的稳定时域混合场积分方程”，*IEEE*天线与传播学报，第 72 卷，第 7 期，第 5852–5864 页，2024年。[20] Y. Beghein、R. Mitharwal、K. Cools 和 F. P. Andriulli，“利用准Helmholtz投影算子的低频和加密稳定PMCHWT积分方程”，*IEEE*天线与传播学报，第 65 卷，第 10 期，第 5365–5375 页，2017年。[21] J. E. O. Guzman、S. B. Adrian、R. Mitharwal、Y. Beghein、T. F. Eibert、K. Cools 和 F. P. Andriulli，“简单连通和多重连通几何体上PMCHWT积分方程的分层预条件”，*IEEE*天线与无线传播快报，第 16 卷，第 1044–1047 页，2017年。[22] V. Giunzioni、A. Scazzola、A. Merlini 和 F. P. Andriulli，“导电介质中PMCHWT方程的低频稳定化：涡流求解器的全波替代方案”，*IEEE*天线与传播学报，第 73 卷，第 8 期，第 5725–5740 页，2025年。[23] V. C. Le、C. M¨unger、F. P. Andriulli 和 K. Cools，“稳定、精确且良态的时域PMCHWT公式”，*IEEE Trans. Antennas Propag.*，第 74 卷，第 9 期，第 8687–8701 页，2026年。[24] C. V. Le 和 K. Cools，“利用MFIE、M¨uller和多迹M¨uller积分方程抑制远场计算中的低频抵消误差”，预印本，2026年。[25] A. Zuccotti 和 K. Cools，“可穿透物体散射的无加密单源公式”，载于*2024 IEEE*天线与传播国际研讨会和*INC/USNC-URSI*无线电科学会议（*AP-S/INC-USNC-URSI*），第 1327–1328 页，2024年。[26] K. Cools、F. P. Andriulli、D. De Zutter 和 E. Michielssen，“MFIE的精确且协调的混合离散化”，*IEEE*天线与无线传播快报，第 10 卷，第 528–531 页，2011年。[27] G. Vecchi，“EFIE离散化中基函数的环-星分解”，*IEEE*天线与传播学报，第 47 卷，第 2 期，第 339–346 页，1999年。[28] K. Cools、F. P. Andriulli、F. Olyslager 和 E. Michielssen，“应用于环面的MFIE和Calder´on预条件EFIE算子零空间”，*IEEE*天线与传播学报，第 57 卷，第 10 期，第 3205–3215 页，2009年。