arXiv:2611.32570v1 [math.NT] 24 Nov 2026

具有 Iwahori 层级的酉 Shimura 簇的算术 Siegel-Weil 公式

SUNGYOON CHO、QIAO HE、CHUL-HEE LEE 和 ZHIYU ZHANG

摘要。本文为具有 Iwahori 层结构的酉 Shimura 簇上特殊循环的算术交数提出猜想公式。我们首先介绍一个构造 Kudla-Rapoport 猜想的框架：发展一般抛物型子群级结构下的加权表示密度与特殊循环理论，证明解析侧和几何侧的降维公式，以及特殊循环的对偶关系。随后，我们基于这些性质，为 Iwahori 层结构提出 Kudla-Rapoport 猜想。最后，我们在 $n = 2$ 时证明该猜想。

目录

1. 引言 1
2. 加权表示密度 4
3. 酉 Rapoport-Zink 空间与特殊循环 19
4. 关于特殊循环算术交数的猜想 24
5. $n = 2$ 情形的证明 33
参考文献 38

1. 引言

在 [KR11]和 [KR14], 中，Kudla 和 Rapoport 为具有超特殊层结构的酉 Shimura 簇上的特殊循环的算术交数提出了猜想公式。这个猜想，即所谓的 Kudla-Rapoport 猜想，由 Li 和 Zhang 在 [LZ22] 中证明。此后，Kudla–Rapoport 猜想针对各种层结构被提出并得到证明（[Cho22], [LL22], [HSY23], [HLSY23], [CHZ23], [Yao24], [Luo25]）。

本文针对在一个非分歧素数处具有 Iwahori 层结构的酉 Shimura 簇，提出 Kudla–Rapoport 猜想。更确切地说，我们为与具有 Iwahori 层结构的酉 Shimura 簇相关的酉 Rapoport–Zink 空间上的特殊循环的算术交数提出猜想公式。

现在我们将更详细地描述我们的结果。固定一个奇素数 p。设 F_0 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限非分歧扩张，其整数环为 O_{F_0}，剩余域为 $\mathbb{F}_q$。设 F 是 F_0 的非分歧二次扩张，其整数环为 O_F，剩余域为 $\mathbb{F}_{q^2}$。固定 O_F 的一致化元 π，以及 $\mathcal{O}_{F_0}$。设 F 是 F 的最大非分歧扩张的完备化，其整数环为 $O_{\breve{F}}$，剩余域为 $\mathbb{F}$。我们用 * 表示 F 关于 F_0 的非平凡伽罗瓦自同构。

日期：2026年11月25日。

设 n 为正整数，并设 $\mathbf{h}=(h_1,\ldots\ldots,h_m)$ 为一个整数元组，使得 $0\le h_1<\cdots<h_m\le n$ 以及 $h_1\equiv\cdots\equiv h_m$（模 2）。于是，我们可以考虑定义在$\mathcal{N}_n^{[\mathbb{h}}$上的酉 Rapoport-Zink 空间，其中 Spf $O_{\breve{F}}$（定义 3.2）。这里，$\mathbb{h}$ 与相应酉 Shimura 簇的一般抛物型层结构有关。注意，存在一个对偶同构

$$\theta:\mathcal{N}_n^{[\mathbb{h}]}\to\mathcal{N}_n^{[\mathbb{h}^\vee]},$$

在这两个 Rapoport-Zink 空间之间，其中 $\mathbf{h}^\vee=(n-h_m,\ldots\ldots,n-h_1)$（定义 3.3）。令 $\mathbb{V}$表示特殊同态空间（定义 3.4）。对于每个非零特殊同态$x\in\mathbb{V}$以及 h_i、$1\le i\le m$，我们可以关联 Cartier 除子 $\mathcal{Z}^{h_i}(x)$ 和 $\mathcal{Y}^{h_i}(x)$（定义 3.6）。注意，通过对偶同构 θ，$\mathcal{N}_n^{[\mathbb{h}]}\to\mathcal{N}_n^{[\ \vee]}\mathbb{h}$，$\mathcal{Z}^{h_i}$与$\mathcal{Y}^{n-h_i}$之间存在对偶关系。

我们将 $\mathcal{E}_n^{\mathbb{h}}$记为所有满足条件 $-n\le\alpha_1\le\cdots\le\alpha_n\le n$, $\alpha_1\equiv\cdots\equiv\alpha_n$（模 2），并且对所有 i, $\alpha_i=-h_j$，或者对于某个 j，有 h_j。固定 $\alpha\in\mathcal{E}_{\mathbb{h}n}$，并假设 $\alpha_1\le\cdots\le\alpha_{h-1}<0\le\alpha_h\le\cdots\le\alpha_n$。令 $x_1,\ldots,x_{h-1},y_1,\ldots,y_{n-h+1}$ 为 $\mathbb{V}$ 中的特殊同态。接下来，我们考虑特殊循环

$$\mathcal{Z}^{-\alpha_1}(x_1),\ldots,\mathcal{Z}^{-\alpha_{h-1}}(x_{h-1}),\mathcal{Y}^{\alpha_h}(y_1),\ldots,\mathcal{Y}^{\alpha_n}(y_{n-h+1}),$$

在 $\mathcal{N}_n^{[\mathbb{h}]}$ 中。我们将

$$\mathcal{I}_\alpha^{\mathbb{h}}(x_1,\ldots,x_{h-1},y_1,\ldots,y_{n-h+1})$$

算术交数$\mathcal{Z}^{-\alpha_1}(x_1)$,$\mathcal{Z}^{-\alpha_2}(x_2)$,..,$\mathcal{Z}^{-\alpha_{h-1}}(x_{h-1})$,$\mathcal{Y}^{\alpha_h}(y_1)$,..,$\mathcal{Y}^{\alpha_n}(y_{n-h+1})$ 在 $\mathcal{N}_n^{[\mathbb{h}]}$(定义 3.10)。

Kudla–Rapoport 猜想将算术交数 $\mathcal{I}_\alpha^{\mathbb{h}}(x_1,\ldots\ldots,x_{h-1},y_1,\ldots\ldots,y_{n-h+1})$ 与加权表示密度联系起来，下面我们将定义加权表示密度。

记 $\mathcal{E}_n$ 为所有 n-元整数 $\alpha=(\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_n)$ 的集合，其中满足 $-n\le\alpha_1\le\cdots\le\alpha_n\le n$，$\alpha_1\equiv\ldots\ldots\equiv\alpha_n$（模 2）。对于每个 $\alpha\in\mathcal{E}_n$，我们定义一个加权表示密度 $W_\alpha(B,r)$，其中 B 是一个厄米矩阵，而 r 是一个非负整数（定义 2.1）。

我们证明加权表示密度的维数约化公式（命题 2.10 和命题 2.25）以及特殊循环的维数约化公式（命题 3.9 和命题3.11）。

我们预计，一般抛物子层级下的 Kudla–Rapoport 猜想将构成一个与维数约化公式相容的猜想体系，并具有如下形式：对于$\alpha\in\mathcal{E}_n^{\mathbb{h}}$,

$$\mathcal{I}_\alpha^{\mathbb{h}}(x_1,\ldots,x_{h-1},y_1,\ldots,y_{n-h+1})=C_{\mathbb{h}}\{W'_\alpha(B)+\text{correction terms}\},\tag{1.1}$$

其中 B 是厄米矩阵

$$B=\begin{pmatrix}h(x_i,x_j)&h(x_i,y_l)\\h(y_k,x_j)&h(y_k,y_l)\end{pmatrix}_{\substack{1\le i,j\le h-1\\1\le k,l\le n-h+1}},$$

而 $C_{\mathbb{h}}$ 是一个常数，与按照我们所选测度计算的、对应于 $\mathbf{h}$ 的抛物子群的体积有关。我们预期修正项是$W_\beta(B)$的线性组合，即非导数加权表示密度。

现在，假设 $\mathbf{h}=(1,3,\ldots\ldots,2n-1)$、$\alpha=(-2n+1,-2n+3,\ldots\ldots,-1,1,3,\ldots\ldots,2n-1)\in\mathcal{E}_{2n}^{\mathbb{h}}$。那么，$\mathcal{N}_{2n}^{[\mathbb{h}]}$ 是与具有 Iwahori 层结构的酉 Shimura 簇相关联的 Rapoport–Zink 空间。此外，$\mathcal{I}_\alpha^{\mathbb{h}}(x_1,\ldots\ldots,x_n,y_1,\ldots\ldots,y_n)$ 是特殊循环的算术交数

$\mathcal{Z}_{2n-1}(x_1)$……，$\mathcal{Z}_1(x_n)$，$\mathcal{Y}_1(y_1)$……，$\mathcal{Y}_{2n-1}(y_n)$。特别地，特殊循环的类型彼此均不相同。在这种情况下，我们猜想以下精确恒等式。

猜想 *1.1*（定理 *4.2*，猜想 *4.3*）。设 $h=(1,3,\dots,2n-1)$ 且 $\alpha=(-2n+1,-2n+3,\dots,-1,1,\dots,2n-1)\in E_{2n}^{\mathbb{h}}$。设 $\{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\}$ 是特殊同态空间 $\mathbb{V}$ 的一组基。那么，

$$\mathcal{I}_{\alpha}^{[\mathbb{h}]}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)=\frac{q^{6n^2-n}}{(q+1)^2(q^2-1)^{n-1}}\{W'_{\alpha}(B)-q^{-4n^2+2n}\sum_{\beta}C_{\beta,2n-1-\beta_{2n}}W_{\beta}(B,0)\},$$

其中 $C_{\beta,\ i}$ 定义为

$$C_{\beta,i}:=\begin{cases}q^{4n^2-2n\delta_{\beta}-\sum_{i=1}^{2n}\beta_i}(-1)^k\{\dfrac{1}{q^{2k-1}+1}+\dfrac{1}{q^{2k}-1}\} & if\ i=2k-1,\\ q^{4n^2-2n\delta_{\beta}-\sum_{i=1}^{2n}\beta_i}(-1)^k\{\dfrac{1}{q^{2k-2}-1}+\dfrac{1}{q^{2k-1}+1}\} & if\ i=2k-2,\\ 0 & if\ i=0.\end{cases}$$

这里，β 遍历满足以下条件的 E_{2n} 子集：

(1) 对所有 $1\le i\le 2n$，$\beta_i=-\beta_{2n+1-i}$。*(2)* $\alpha-\beta$ 递增，即对所有 $1\le i\le 2n-1$，$\alpha_i-\beta_i\le\alpha_{i+1}-\beta_{i+1}$。

我们注意到，根据维数约化公式，猜想 1.1 给出了所有 Iwahori 层级以及任意维数下特殊循环算术交数的猜想公式，其中特殊循环的类型两两不同。详情参见注4.6 。我们还证明了当 Rapoport-Zink 空间为 $\mathcal{N}_2^{[\mathbb{h}]}$ 时，即在维数 2 的情形下，该猜想成立。详情参见第 5节。

现在我们解释如何表述猜想 1.1。为确定修正项，我们使用特殊循环的对偶性（引理 3.12）。更准确地说，我们利用 Z^{h_i}与 Y^{n-h_i}之间通过对偶同构 $\theta\colon \mathrm{N}_n^{[\ ]}\to \mathrm{h}\ \mathrm{N}_n^{[\mathbb{h}^{\vee}]}$所给出的对偶关系。由于 θ 是一个同构，它保持特殊循环的交数不变。因此，式（ 1.1 ）的解析侧 $C_{\mathbb{h}}\{W'_{\alpha}(B)+$ 修正项 $\}$ 也应在这一变换下保持不变（注 4.1）。我们证明，当 $\mathrm{h}=(1,3,\dots,2n-1)$ 且 $\alpha=(-2n+1,-2n+3,\dots,-1,1,\dots,2n-1)\in \mathrm{E}_{2n}^{\mathbb{h}}$ 时，这一条件足以确定修正项（定理 4.2）。这就是我们表述猜想 1.1 的方式。

由于引理 3.12 对任意 $\mathbb{h}$ 和 α均成立，因此很自然地可以预期，我们通过特殊循环的对偶性来构造猜想系统的策略，也能够应用于任意抛物层级以及任意选择的特殊循环。关于这一点，请参阅注 4.7和注 4.8。尽管这一策略在许多情况下（如果不是所有情况下）都行之有效，并且这些公式具有许多有趣的性质，但由于涉及的情形数量庞大（例如，$n=6$有 1386 种情形，$n=8$有 19305 种情形），要给出统一的表述仍然十分困难。我们希望今后能重新研究这一问题。

记号。

（1）我们固定一个素数 $p>2$。令 F_0 为 $\mathbb{Q}_p$ 的有限非分歧扩张，其整数环为 O_{F_0}，剩余域为 $\mathbb{F}_q$。令 F 为 F_0 的非分歧二次扩张，其整数环为 $\breve{}$，剩余域为 $\mathbb{F}_{q^2}$。我们固定 O_F 和 O_{F_0} 的一致化元 π。令 F 为

F 的最大非分歧扩张的完备化，其整数环为 $O_{\breve{F}}$，剩余域为 $\mathbb{F}$。我们将 F 关于 F_0 的非平凡伽罗瓦自同构记为 *。

(2) 对于带有厄米形式（，）的格 L，我们将关于（，）的对偶格记为 $L^\vee$。

致谢。我们感谢 Chao Li、Yifeng Liu、Michael Rapoport 和 Wei Zhang 富有帮助的讨论与评论。S.C. 获得了由韩国政府（MSIT）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目资助（编号：RS-2026-25508638）、（编号：RS-2026-25485874）和（编号：RS-2021-NR060139）。C.-h. L. 通过韩国高等研究院人工智能与自然科学中心获得了 KIAS 个人资助（AP067301）。Q. H. 和 Z. Z. 获得了香港中文大学的研究启动经费支持。Q.H. 在准备本研究期间获得了 AMS-西蒙斯旅行资助计划的支持。

AI 使用声明。作者仅使用 AI 检查排版错误并改进稿件语言。

2. 加权表示密度

2.1. 加权表示密度。在本小节中，我们回顾加权表示密度的定义，并证明一些性质。记 * 为 F 关于 F_0 的非平凡伽罗瓦自同构。我们固定标准加法特征 $\psi : F_0 \to \mathbb{C}^\times$，其在 O_{F_0} 上平凡。设 V^+（分别为 V^-）是 F 上的一个分裂（分别为非分裂）n 维厄米向量空间。记 $\mathrm{S}((V^\pm)^n)$ 为 $(V^\pm)^n$ 上施瓦茨函数的空间。记 $V_{r,r}$ 为符号为 (r,r) 的分裂厄米空间，记 $L_{r,r}$ 为 $V_{r,r}$ 中的一个自对偶格。令 $\phi_{r,r}$ 为 $(L_{r,r})^n$ 的特征函数。令 $(V^\pm)^{[r]}$ 表示空间 $V^\pm \otimes V_{r,r}$。对于任意函数 $\phi \in \mathrm{S}((V^\pm)^n)$，我们通过 $\phi \otimes \phi_{r,r} \in \mathrm{S}(((V^\pm)^{[r]})^n)$ 定义函数 $\phi^{[r]}$。

我们将 Γ_n 记作伊wahori子群

$$\Gamma_n := \{\gamma = (\gamma_{ij}) \in GL_n(O_F) \mid \gamma_{ij} \in \pi O_F \text{ if } i > j\}.$$

我们如下定义集合 $V_n(F)$ 和 $X_n(F)$:

$$V_n(F) = \{Y \in M_{n,n}(F) \mid {}^tY^* = Y\},$$

$$X_n(F) = \{X \in GL_n(F) \mid {}^tX^* = X\}.$$

对于 $g \in GL_n(F)$ 和 $X \in X_n(F)$，我们定义 $GL_n(F)$ 在 $X_n(F)$ 上的群作用为 $g \cdot X = gX^t g^*$。对于 $X, Y \in V_n(F)$，我们用 $\langle X, Y\rangle = \mathrm{Tr}(XY)$ 表示。对于 $X \in M_{m,n}(F)$ 和 $A \in V_m(F)$，我们用 $A[X] = {}^t X^* AX$. 表示。对于厄米矩阵 $A \in X_m(F)$，我们定义

$$A^{[r]} = \begin{pmatrix} A & \\ & I_{2r} \end{pmatrix}.$$

现在，让我们回顾一下 [Cho22] 中加权表示密度的定义。

定义 2.1 (参见 [Cho22，定义 3。1])。设 t，n 为满足 $-n \le t \le n$的整数。

(1) 我们用 $\mathcal{E}_n$ 表示所有满足 $-n \le \alpha_1 \le$ 的 n 元整数元组 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ 的集合 $\cdots \le \alpha_n \le n$ 和 $\alpha_1 \equiv \cdots \equiv \alpha_n$（模 2）。我们称 $\alpha \in \mathcal{E}_n$ 为偶的（分别为奇的），如果所有的 α_i 都是偶的（分别为奇的）。此外，我们定义

$$\delta_\alpha := \begin{cases} 0 & \text{if } n-\alpha \text{ is even,} \\ 1 & \text{if } n-\alpha \text{ is odd.} \end{cases}$$

(2) 假设 n 为偶的。设 $\Lambda_{n,\ n}$（分别地，设 $\Lambda_{n-1,\ n}$）为 V^+（分别地，在 V^- 中）秩为 n 的格，其厄米形式为

$$A_{n,0} := \begin{pmatrix} & & \pi^{-1} \\ & \iddots & \\ \pi^{-1} & & \end{pmatrix} (\text{resp. } A_{n,1} := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \pi^{-1} \\ & \iddots & \\ & \pi^{-1} & \end{pmatrix}),$$

相对于一组基 $\{b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n\}$。

(3) 假设 n 为奇的。设 $\Lambda_{n,\ n}$（分别地，设 $\Lambda_{n-1,\ n}$）为 V^-（分别地，在 V^+ 中）秩为 n 的格，其厄米形式为

$$A_{n,0} := \begin{pmatrix} & & \pi^{-1} \\ & \iddots & \\ \pi^{-1} & & \end{pmatrix} (\text{resp. } A_{n,1} := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \pi^{-1} \\ & \iddots & \\ & \pi^{-1} & \end{pmatrix}),$$

相对于一组基 $\{b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n\}$。

(4) 对于 $t \equiv n$（模 2），我们将 $\Lambda_{t,\ n}$ 记作 $\Lambda_{n,\ n}$ 的子格，其基为

$$\{b_1, \ldots, b_{(n+t)/2}, \pi b_{(n+t+2)/2}, \ldots, \pi b_n\}.$$

(5) 对于 $t \not\equiv n$ (模 2)，我们用 $\Lambda_{t,n}$ 表示 $\Lambda_{n-1,n}$ 的子格，其基为

$$\{b_1, \ldots, b_{(n+t+1)/2}, \pi b_{(n+t+3)/2}, \ldots, \pi b_n\}$$

.

(6) 对于 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{E}_n$，我们用 $1_\alpha \in \mathcal{S}((V^{\pm})^n)$ 表示.....的特征函数

$$\Lambda_{\alpha_1,n} \times \Lambda_{\alpha_2,n} \times \cdots \times \Lambda_{\alpha_n,n}.$$

(7) 对于 $B \in X_n(F)$ 和 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$，我们定义

$$W_\alpha(B, r) := \int_{V_n(F)} \int_{M_{n+2r,n}(F)} \psi(\langle Y, A^{[r]}_{n,\delta_\alpha}[X] - B\rangle) 1^{[r]}_\alpha(X) dX dY.$$

这里，dY（分别为 dX）是 $V_n(F)$（分别为 $M_{n+2r,n}(F)$）上的 Haar 测度，使得

$$\int_{V_n(O_F)} dY = 1 \text{ (resp. } \int_{M_{n+2r,n}(O_F)} dX = 1).$$

(8) 对于 $A \in X_m(O_F)$ 和 $B \in X_n(O_F)$，我们将 $\mathrm{Den}(A, B)$ 定义为

$$\mathrm{Den}(A, B) = \lim_{d \to \infty} (q^{-d})^{n(2m-n)} |\{x \in M_{m,n}(O_F/\pi^d O_F) \mid A[x] \equiv B (\mathrm{mod} \pi^d)\}|.$$

注 2.2. 注意，对于 $0 \le t \le n$, $\Lambda_{t,\ n}$ 是一个满足 $\Lambda_{-t,\ n} = \Lambda^\vee_{t,\ n} \overset{t}{\subset} \Lambda_{t,\ n} \overset{n-t}{\subset} \pi^{-1}\Lambda^\vee_{t,\ n}$ 的顶点格。

命题 2.3（参见[Hir00], [Cho22，引理 3.5]）。对于 $A \in X_m(F)$， $B \in X_n(F)$ 和 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$，有

$$\mathrm{Den}(A,B) = \sum_{Y \in \Gamma_n \backslash X_n(F)} \frac{\mathcal{G}(Y,B)\mathcal{F}(Y,A)}{\alpha(Y;\Gamma_n)},$$

$$W_\alpha(B,r) = \sum_{Y \in \Gamma_n \backslash X_n(F)} \frac{\mathcal{G}(Y,B)\mathcal{F}_\alpha(Y,r)}{\alpha(Y;n)}.$$

在此，我们定义 F_α（Y、r）和 G（Y、B）如下：

$$\mathcal{F}(Y,A) := \int_{M_{m,n}(F)} \psi(\langle Y, A[X]\rangle) dX,$$
$$\mathcal{F}_\alpha(Y,r) := \int_{M_{n+2r,n}(F)} \psi(\langle Y, A^{[r]}_{n,\delta_\alpha}[X]\rangle) 1^{[r]}_\alpha(X) dX,$$
$$\mathcal{G}(Y,B) := \int_{\Gamma_n} \psi(\langle Y, -B[\gamma]\rangle) d\gamma,$$

其中，$d\gamma$ 是 $M_{n,n}(O_F)$ 上的 *Haar* 测度，使得 $\int_{M_{n,n}(O_F)} d\gamma = 1$。

此外，我们通过以下方式定义 $\alpha(Y;\ n)$：$\alpha(Y;\ n) := \lim_{d\to\infty} q^{-dn^2} N_d(Y;\ \Gamma_n)$，其中 $N_d(Y;\ \Gamma_n) = |\{\gamma \in \Gamma_n（模\ \pi^d）\ | \gamma \cdot Y \equiv Y（模\ \pi^d）\}|$。

定义 2.4。对于 $r \geq 0$、$\alpha \in \mathcal{E}_n$ 和 $B \in X_n(O_F)$，我们可以将 $\mathcal{F}_\alpha(Y、r)$ 和 $W_\alpha(B、r)$ 视为 $X = (-q)^{-2r}$ 的函数。我们定义

$$\mathcal{F}'_\alpha(Y) := -\frac{d}{dX}\mathcal{F}_\alpha(Y,r)|_{X=1}, \text{ and } W'_\alpha(B) := -\frac{d}{dX}W_\alpha(B,r)|_{X=1}.$$

定义 2.5。假设 $0 \leq h \leq n$。

（1）我们定义集合 $\mathcal{R}_n$ 为

$$\mathcal{R}_n := \{Y_{\sigma,e} \mid (\sigma,e) \in \mathcal{S}_n \times \mathbb{Z}^n, \sigma^2 = 1, e_i = e_{\sigma(i)},\ \forall i\},$$

其中，$\mathcal{S}_n$ 是 n 次对称群，且 $Y_{\sigma,e} := \sigma\mathrm{Diag}(\pi^{e_1}, \pi^{e_2}, \ldots\ldots, \pi^{e_n})$。

根据 [Hir00的定理 1]，，集合 $\mathcal{R}_n$ 构成 $\Gamma_n \backslash X_n$ 的完全代表系。(2) 对于 $Y = Y_{\sigma,e} \in \mathcal{R}_n$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，我们定义如下集合。

- $I^?_k(Y) := \{i \mid e_i ? k\}$, where $? \in \{>, <, =, \leq, \geq\}$.
- $A^h_1(Y) = A^h_1(\sigma) := \{1 \leq j \leq n-h \mid \sigma(j) = j\}$.
- $A^h_2(Y) = A^h_2(\sigma) := \{1 \leq j \leq n-h \mid \sigma(j) \neq j, 1 \leq \sigma(j) \leq n-h\}$.
- $B^h_1(Y) = B^h_1(\sigma) := \{1 \leq j \leq n-h \mid n-h+1 \leq \sigma(j) \leq n\}$.
- $B^h_2(Y) = B^h_2(\sigma) := \{n-h+1 \leq j \leq n \mid 1 \leq \sigma(j) \leq n-h\}$.
- $C^h_1(Y) = C^h_1(\sigma) := \{n-h+1 \leq j \leq n \mid \sigma(j) = j\}$.
- $C^h_2(Y) = C^h_2(\sigma) := \{n-h+1 \leq j \leq n \mid \sigma(j) \neq j, n-h+1 \leq \sigma(j) \leq n\}$.
- $A^h(Y) = A^h(\sigma) := A^h_1(Y) \cup A^h_2(Y)$
- $B^h(Y) = A^h(\sigma) := B^h_1(Y) \cup B^h_2(Y)$
- $C^h(Y) = A^h(\sigma) := C^h_1(Y) \cup C^h_2(Y)$

(3) 对于 $Y = Y_{\sigma,e} \in \mathcal{R}_n$，我们定义以下数。

- $d_1(Y) = d_1(\sigma) = |\{i \mid i = \sigma(i)\}|$.
- $d_2(Y) = d_2(\sigma) = \frac{1}{2}|\{i \mid i \neq \sigma(i)\}|$.
- For $k \in \mathbb{Z}$ and $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $t(\sigma, I) := |\{(i,j) \in I \times I \mid i < j < \sigma(i), \sigma(j) < \sigma(i)\}|$.

- $t(Y) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\{(i,j) \in I_k^{=}(Y) \times I_k^{=}(Y) \mid i < j < \sigma(i), \sigma(j) < \sigma(i)\}|$.

(4) 对于 $Y = Y_{\sigma,\ e} \in \mathcal{R}_n$，我们定义以下元素。

- 对于 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $? \in \{>,\ <,\ =,\ \geq,\ \leq\}$，我们定义 $Y^?_k$ 为

$$Y_k^? = Y_{\overline{\sigma},\overline{e}} \in \mathcal{R}_{\overline{n}},$$

其中 $\overline{n} = |I_k^?(Y)|$, $\overline{\sigma} = \sigma|_{I_k^?(Y)} \in \mathcal{S}_{\overline{n}}$，并且 $\overline{e} \in \mathbb{Z}^{\overline{n}}$ 满足 $e_i = (e_{\overline{i}})_{i\in I_k^?(Y)}$。

命题 2.6. 对于 $Y = Y_{\sigma,\ e} \in \mathcal{R}_n$ 和 $\alpha \in \mathcal{E}_n$，有

$$\mathcal{F}_\alpha(Y,r) = q^{-n^2+n\delta_\alpha+\sum_{j=1}^n \alpha_j} f_{n+2r}(Y) \quad \prod_{j=1}^n (-q)^{-\min(0,\alpha_j+\alpha_{\sigma(j)})(\min(0,e_j+1)-\min(0,e_j))/2} \times (-q)^{-\max(0,\alpha_j+\alpha_{\sigma(j)})(\min(0,e_j)-\min(0,e_j-1))/2},$$

其中 $f_k(Y) = \prod_{j=1}^n (-q)^{k\min(0,e_j)}$。

证明。 该命题的证明与 [Cho22，引理 3.15] 的证明类似。对于 $X \in M_{n+2r,\ n}(F)$ 和 $\tau \in \mathcal{S}_{n+2r}$, $a \in \mathcal{E}_{n+2r}$，其中 $A_{n,\ \delta_\alpha}^{[r]} = Y_{\tau,\ a}$，有

$$\langle Y, A_{n,\delta_\alpha}^{[r]}[X]\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n+2r} \pi^{e_i+a_k} X_{ki} X^*_{\tau(k)\sigma(i)}.$$

这里，当 n 为偶且 α 为奇时，有 $a = (0,\ -1,\ \ldots,\ -1)$, $\tau(1) = 1$, $\tau(i) = n+2-i$ 对所有 $2 \leq i \leq n$ 成立, $\tau(i) = i$ 对所有 $n+1 \leq i \leq n+2r$ 成立。此外，根据 $1_\alpha^{[r]}(X)$、$\Lambda_{\alpha_i,\ n}$ 的定义，我们有，在积分中

$$\mathcal{F}_\alpha(Y,r) := \int_{M_{n+2r,n}(F)} \psi(\langle Y, A_{n,\delta_\alpha}^{[r]}[X]\rangle) 1_\alpha^{[r]}(X) dX,$$

X_{kj} 遍历 O_F 若 $1 \leq k \leq (n+\alpha_j+1)/2$ 或 $n+1 \leq k$，并在 πO_F 若 $(n+\alpha_j+3)/2 \leq k \leq n$ 时遍历。现在，我们可以仿照 [Cho22，引理 315] 的证明，来证明当 n 为偶且 α 为奇时的命题。其他情形类似。□

命题 2.7 （[Hir00，命题 2.2]）。 对于 $Y = \sigma(\pi^e 1_n) \in \mathcal{R}_n$，我们有 e

$$\alpha(Y,n) = (q+1)^{d_1(\sigma)} (q(q^2-1))^{d_2(\sigma)} q^{2t(Y)+(e-1)n^2}.$$

命题 2.8。对于 $Y \in \mathcal{R}_n$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，我们有

$$\alpha(Y,n) = \alpha(Y_k^<, n_0)\alpha(Y_k^\geq, n_1) q^{2n_1(\sum_{i\in I_k^<(Y)} e_i) - 2(\sum_{i\in I_k^<(Y)} i) + n_0(n_0+1)}.$$

证明。 这由 [Hir00，定理 25] 直接推出。 □

2.2. **加权表示密度的约化公式 I**。 在本小节中，我们证明一些加权表示密度的约化公式。设 $B = Y_{\tau,\ \lambda}$ 满足 $\tau(h) = h, \lambda_h = -1$。此外，设 $\alpha \in \mathcal{E}_n$ 满足 $\alpha_{h-1} < 0 < \alpha_h$。我们首先介绍以下记号。

定义 2.9。 对于 $1 \leq h \leq n$，假设 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{E}_n$, $\alpha_{h-1} < 0 \leq \alpha_h$ 和 $0 < \alpha_{h+1}$。我们将 $\alpha^1 \in \mathcal{E}_{n-1}$ 定义为

$$\overline{\alpha}^1 := (\alpha_1+1, \ldots, \alpha_{h-1}+1, \alpha_{h+1}-1, \ldots, \alpha_n-1).$$

进一步假设 $1 \leq l \leq h-1 \leq n$、$-\alpha_{h-1} \leq \cdots \leq -\alpha_l < \alpha_h \leq -\alpha_{l-1}$。然后，我们定义 α^i 为 −

$$\overline{\alpha}^i := (\alpha_1+1, \ldots, \alpha_{h-i}+1, \alpha_{h-i+1}-1, \ldots, \alpha_{h-1}-1, \alpha_{h+1}-1, \ldots, \alpha_n-1),\ 2 \leq i \leq h-l+1.$$

命题 2.10。 对于 $1 \le h \le n$，假设 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_n$，且 $0 \le \alpha_h$。令 $B = Y_{\tau,\lambda}$，其中 $\tau(h) = h$ 且 $\lambda_h = -1$。令 B 为从 B 中删去第 h 行和第 h 列所得到的 $n-1 \times n-1$ 矩阵。则有如下结果。

(1) 若 $\alpha_h = 0$，则 $W_\alpha(B, r) = 0$。

(2) 若 $0 < \alpha_h \le -\alpha_{h-1}$，则有

$$W_\alpha(B,r) = q^{n\delta_\alpha - (n-1)\delta_{\overline{\alpha}^1} + \alpha_h - 3n + 1}(1 - (-q)^{-\alpha_h}) W_{\overline{\alpha}^1}(\overline{B}, r)$$

(3) 对于 $1 \le l \le h-1 \le n$，假设 $-\alpha_{h-1} \le \cdots \le -\alpha_l < \alpha_h \le -\alpha_{l-1}$。则有

$$\begin{aligned} W_\alpha(B,r) \quad &= q^{n\delta_\alpha - (n-1)\delta_{\overline{\alpha}^1} + \alpha_h - 3n + 1} \\ &\times \{((-q)^{-\alpha_h - \alpha_{h-1}} - (-q)^{-\alpha_h})) W_{\overline{\alpha}^1}(\overline{B}, r) \\ &+ \textstyle\sum_{j=2}^{h-l} ((-q)^{-\alpha_h - \alpha_{h-j}} - (-q)^{-\alpha_h - \alpha_{h-j+1}}) W_{\overline{\alpha}^j}(\overline{B}, r) \\ &+ (1 - (-q)^{-\alpha_h - \alpha_l}) W_{\overline{\alpha}^{h-l+1}}(\overline{B}, r)\}. \end{aligned}$$

这里，我们注意到，当 $\alpha^i \notin E_{n-1}$ 时，$W_{\overline{\alpha^i}}(B, r)$ 的系数为 0 。

我们将在本小节末尾证明这个命题。

注意，根据命题 2.3，我们有 $W_\alpha(B,r) = \sum_{Y \in} \mathrm{R}_n \mathrm{G}(Y,B) \mathrm{F}_\alpha(Y,r)\, \alpha(Y;\ n)$。此外，利用 Cho22 引理 3.8], 的证明中关于 $\mathrm{G}(Y,B)$ 的公式，我们可以证明，对于 $Y = Y_{\sigma,e} \in \mathrm{R}_n$，只有当 $e_h = 0$ 且 $\sigma(h) \le h$，或当 $e_h \ge 1$ 时，$\mathrm{G}(Y,B) \ne 0$。因此，我们只需考虑集合 $\{Y = Y_{\sigma,e} \in \mathrm{R}_n \mid e_h = 0, \sigma(h) \le h$ 或 $e_h \ge 1\}$。我们进一步将此集合分解如下。

定义 2.11。 假设 $Y = Y_{\widetilde{\sigma},\ \widetilde{e}} \in \{Y = Y_{\sigma,\ e} \in \mathcal{R}_n \mid e_h = 0,\ \sigma(h) \le h$ 或 $e_h \ge 1\}$

(1) 我们通过如下设定定义集合 $S_h(Y)$

$$S_h(\widetilde{Y}) := \{Y = Y_{\sigma,e} \mid \begin{array}{c} e_h = 0, \sigma(h) \le h \text{ or } e_h \ge 1, \text{ and } \sigma(i) = \widetilde{\sigma}(i), e_i = \widetilde{e}_i \\ \forall i \in I_0^{<}(\widetilde{Y}) \cup (I_0^{=}(\widetilde{Y}) \cap (B^{n-h+1}(\widetilde{Y}) \cup C^{n-h+1}(\widetilde{Y})), i \ne h, \sigma(h) \end{array}\}$$

(2) 对于 $\{i_1, i_2, \ldots, i_t\} = \{1, 2, \ldots, h-1\} \setminus (I_0^{<}(Y) \cup (I_0^{=}(Y) \cap B_1^{n-h+1}(Y)))$，$i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_t$，我们定义以下集合：

$$\begin{aligned} &S_h(\widetilde{Y})_0 := \{Y = Y_{\sigma,e} \in S_h(\widetilde{Y}) \mid e_h \ge 1\}; \\ &S_h(\widetilde{Y})_{i_k} := \{Y = Y_{\sigma,e} \in S_h(\widetilde{Y}) \mid e_h = e_{i_k} = 0, \sigma(h) = i_k\}, 1 \le k \le t; \\ &S_h(\widetilde{Y})_h := \{Y = Y_{\sigma,e} \in S_h(\widetilde{Y}) \mid e_h = 0, \sigma(h) = h\}. \end{aligned}$$

命题 2.12。对于 $1 \le n$，我们有 $\sum_{Y = Y_{\sigma\ e} \in,\ \mathcal{R}_n,\ \alpha} Y(,\ n) = \frac{q^n}{(q^2-1)^n} \cdot e_i \ge 1\ \forall 1 \le i \le n$

证明。 对于 $0 \le k \le n$，令 $A_k = \begin{pmatrix} I_{n-k} & \\ & \pi^{-1} I_k \end{pmatrix}$，并令 $B = \pi^{-1} I_n$。根据 [Cho23，命题 3, 1],我们有

$$\mathrm{Den}(A_k, B) = \sum_{Y \in \mathcal{R}_n} \frac{\mathcal{G}(Y,B)\mathcal{F}(Y,A_k)}{\alpha(Y,n)},$$

其中 $\mathcal{F}(Y,\ A_k)\ =\ \prod_{1\le i\le n}(-q)^{(n-k)\min(0,\ e_i)+k\min(0,\ e_i-1)}$。此外，我们有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Den}(A_i,B)=0,\ 0\le i\le n-1;\\&\mathrm{Den}(A_n,B)=\mathrm{Den}(\pi^{-1}I_n,\pi^{-1}I_n)=q^{-n^2}\textstyle\prod_{i=1}^n(1-(-q)^{-i}).\end{aligned}\tag{2.1}$$

现在，考虑 r $n+1\times n+1$ 范德蒙德矩阵 $\mathcal{A}\ =((-q)^{-(i-1)(j-1)})_{1\le i,j\le n+1}$ 并令 t

$$\begin{pmatrix}k_0\\k_1\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\mathcal{A}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

于是，我们有 $\sum_{i=0}^n k_i\mathcal{F}(Y,A_i)\ =$® $\begin{matrix}1 & e_i\ge 1\\ 0 & i\text{若,否}\end{matrix}$

则对所有 $=\ \sum_{Y=Y_{\sigma\ e}\in,\mathcal{R}_n,}\mathcal{G}(Y,B)\,\alpha(\underline{Y,n})$ ˙现在，结合（2.1）和$e_i\ge 1\ \forall 1\le i\le n$

因此，我们有 $\sum_{i=0}^n k_i\mathrm{Den}(A_i,B)$

以下事实： $k_n=\prod_{i=1}^n(1-(-q)^{-i})$，以及$\mathcal{G}(Y,B)\ =q^{-n(n-1}(1-q^{-2})^n$ 对所有 $Y=Y_{\sigma,e_i}\in\mathcal{R}_n$ 满足$e_i\ge 1$ 对所有 i (参见 [Hir00，命题M。2])，可得该命题。□

命题 2.13。对于 $2\le k\le t$，我们有$\sum_{Y\in S_h\ Y\ (\widetilde{\ })_{i_{k-1}}}\alpha\ \underline{Y\ (,\ n)}\ =\ q^2\sum_{Y\in S_h}{}_{(\widetilde{\ }Y)_{i_k}}\alpha\ \underline{Y\ (,\ n)}$.

‹ ‹ ‹证明。 我们考虑一个双射 $\widetilde{\tau}_{Y,\ k}$：$S_h(Y)_{i_k}\ \to\ S_h(Y)^{i_{k-1}}$，它将 $Y\ =Y_{\sigma,\ e}\ \in\ S_h(Y)^{i_k}$ 映射到下面的元素 $Y\prime\in S_h(Y)^{i_{k-1}}$:

(1) 如果 $\sigma(i_{k-1})\ =i_l\ne i_{k-1}$，我们定义 $Y'=Y_{\sigma',\ e'}$，其中

$$\begin{aligned}&\sigma'(h)=i_{k-1},e'_h=e'_{i_{k-1}}=0,\ \sigma'(i_k)=i_l,e'_{i_k}=e'_{i_l}=e_{i_l}=e_{i_{k-1}},;\\&\sigma(i)=\sigma'(i),e_i=e'_i\text{ for all }i\notin\{i_l,i_{k-1},i_k,h\}.\end{aligned}$$

(2) 如果 $\sigma(i_{k-1})\ =i_{k-1}$，我们定义 $Y'=Y_{\sigma',\ e'}$，其中

$$\begin{aligned}&\sigma'(h)=i_{k-1},e'_h=e'_{i_{k-1}}=0,\ \sigma'(i_k)=i_k,e_{i_k}=e_{i_{k-1}},;\\&\sigma(i)=\sigma'(i),e_i=e'_i\text{ for all }i\notin\{i_{k-1},i_k,h\}.\end{aligned}$$

~ ~现在注意到， $Y_0^<$和 $I_0^<(Y)$ 根据 $S_h(Y)^{i_k}$ 和 $S_h(Y)^{i_{k-1}}$的定义是不变的。此外，根据命题 2.8，我们有

$$\alpha(Y,n)=\alpha(Y_0^<,n_0)\alpha(Y_0^{\ge},n_1)q^{2n_1(\sum_{i\in I_0^<(Y)}e_i)-2(\sum_{i\in I_0^<}i)+n_0(n_0+1)},$$

其中 $n_0=|I_0^<(Y)|$，$n_1=n-n_0$。因此，我们得到该命题等价于

$$\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_{i_{k-1}}}\frac{1}{\alpha(Y_0^{\ge},n)}=\frac{1}{q^2}\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_{i_k}}\frac{1}{\alpha(Y_0^{\ge},n)}.$$

这表明只需假设 $Y=Y_0^{\ge}$，即 $I_0^<(\text{‹})\ =\emptyset$。

由命题2.8 再次可得

$$\alpha(Y,n)=\alpha(Y_0^{=},n_0)\alpha(Y_1^{\ge},n_1)q^{-2(\sum_{i\in I_0^{=}(Y)}i)+n_0(n_0+1)},$$

其中 $n_0 = |I_0^{=}(Y)|$, $n_1 = n - n_0$。

现在，我们考虑集合 $S_h(\widetilde{Y})_{i_k}(Y_0^{=}, I_0^{=}(Y))$，其中包含所有满足以下条件的 $\mathcal{Y} = Y_{\sigma,e} \in \mathcal{R}_n$：对所有 i，均有 $e_i \geq 0$ $\mathcal{Y}_0^{=} = Y_0^{=}$，且 $I_0^{=}(\mathcal{Y}) = I_0^{=}(Y)$。换言之，对于固定的 $Y_0^{=}, I_0^{=}(Y)$，我们让 $\mathcal{Y}_1^{\geq}$ 遍历 $\mathcal{R}_{n_1}$。

那么，由命题2.12，可得

$$\sum_{\mathcal{Y} \in S_h(\widetilde{Y})_{i_k}(Y_0^{=}, I_0^{=}(Y))} \frac{1}{\alpha(\mathcal{Y}, n)} = \frac{q^{2(\sum_{i \in I_0^{=}(Y)} i) - n_0(n_0+1)}}{\alpha(Y_0^{=}, n_0)} \times \frac{q^{n_1}}{(q^2-1)^{n_1}}.$$

类似地，对于 $Y' = \mathcal{T}_{\widetilde{Y},k}(Y)$、$Y'_0{}^{=}$以及 $I_0^{=}(Y')$，有

$$\sum_{\mathcal{Y}' \in \mathcal{T}_{\widetilde{Y},k}(Y)(S_h(\widetilde{Y})_{i_k}(Y_0^{=}, I_0^{=}(Y)))} \frac{1}{\alpha(\mathcal{Y}', n)} = \frac{q^{2(\sum_{i \in I_0^{=}(Y')} i) - n_0(n_0+1)}}{\alpha(Y_0'^{=}, n_0)} \times \frac{q^{n_1}}{(q^2-1)^{n_1}}.$$

因此，只需证明

$$\frac{q^{2(\sum_{i \in I_0^{=}(Y)} i}}{\alpha(Y_0^{=}, n_0)} = q^2 \times \frac{q^{2(\sum_{i \in I_0^{=}(Y')} i)}}{\alpha(Y_0'^{=}, n_0)}. \tag{2.2}$$

由命题2.7，可得

$$\alpha(Y_0^{=}, n_0) = (q+1)^{d_1(\overline{\sigma})}((q(q^2-1))^{d_2(\overline{\sigma})} q^{2t(\sigma, I_0^{=}(Y)) - n_0^2},$$
$$\alpha(Y_0'^{=}, n_0) = (q+1)^{d_1(\overline{\sigma'})}((q(q^2-1))^{d_2(\overline{\sigma'})} q^{2t(\sigma', I_0^{=}(Y')) - n_0^2},$$

其中 $\sigma^{=} = \sigma|_{I_0^{=}(Y)}$ 以及 $\sigma'^{=} = \sigma'|_{I_0^{=}(Y')}$。注意，$d_1(\sigma) = d_1(\sigma')$，且 $d_2(\sigma) = d_2(\sigma')$。现在，我们有以下两种情形。

(1)（情形 1）若 $e_{i_{k-1}} = 0$，则 $I_0^{=}(Y) = I_0^{=}(Y')$。此外，我们有 $t(\sigma, I_0^{=}(Y)) - t(\sigma', I_0^{=}(Y')) = -1$，从而 $\alpha(Y_0^{=}, n_0) = q^{-2}\alpha(Y'_0{}^{=}, n_0)$。这意味着 (2.2) 成立。(2)（情形 2）若 $e_{i_{k-1}} \geq 1$，则 $I_0^{=}(Y) \setminus \{i_k\} = I_0^{=}(Y') \setminus \{i_{k-1}\}$。此外，我们有 $t(\sigma, I_0^{=}(Y)) - t(\sigma', I_0^{=}(Y')) = i_k - i_{k-1} - 1$。这些都意味着 (2.2) 成立。

命题的证明到此完成。 □

命题 2.14。我们有 $\sum_{Y \in S_h(\widetilde{Y})_0} \frac{1}{\alpha(Y, n)} = \frac{1}{q^2-1} \sum_{Y \in S_h(\widetilde{Y})_{i_1}} \frac{1}{\alpha(Y, n)}$.

证明。与命题 2.13的证明一样，只需假设 $Y = Y_0^{\geq}$。此外，与该 $\ldots$ 证明一样，对于固定的 $Y = Y_{\sigma,\ e} \in S_h(Y)_{i_1}$，我们考虑集合 $S_h(Y)_{i_1}(Y_0^{=},\ I_0^{=}(Y))$，其中包含所有满足以下条件的 $\mathcal{Y} = Y_{\sigma',\ e'} \in \mathcal{R}_n$：$e'_i \geq 0$ 对所有 i，$\mathcal{Y}_0^{=} = Y_0^{=}$，且 $I_0^{=}(\mathcal{Y}) = I_0^{=}(Y)$。我们假设

$$\{i_2, \ldots, i_t\} = \{l_1, \ldots, l_u, j_1, \ldots, j_v\},\ l_1 \leq \cdots \leq l_u, j_1 \leq \cdots \leq j_v,$$
$$e_{l_k} = 0,\ 1 \leq k \leq u,\ e_{j_k} \geq 1,\ 1 \leq k \leq v.$$

$\ldots$ 现在考虑 $S_h(Y)_0$ 的以下子集：

$$S_h(\widetilde{Y})_0(Y_0^{=}, I_0^{=}(Y))_h = \{\mathcal{Y}' = Y_{\sigma',e'} \in \mathcal{R}_n \mid \begin{array}{l} e'_h \geq 1, \sigma'(i_1) = i_1, e'_{i_1} = 0,\ e'_j \geq 1 \text{ for } j \notin I_0^{=}(Y) \\ e'_i = e_i, \sigma'(i) = \sigma(i) \text{ for } i \in I_0^{=}(Y) \setminus \{i_1, h\} \end{array} \},$$

$$S_h(\widetilde{Y})_0(Y_0^{=}, I_0^{=}(Y))_0 = \{\mathcal{Y}' = Y_{\sigma',e'} \in \mathcal{R}_n \mid \begin{array}{l} e'_h \geq 1, e'_{i_1} \geq 1,\ e'_j \geq 1 \text{ for } j \notin I_0^{=}(Y) \\ e'_i = e_i, \sigma'(i) = \sigma(i) \text{ for } i \in I_0^{=}(Y) \setminus \{i_1, h\} \end{array} \},$$

$$S_h(\widetilde{Y})_0(Y_0^=, I_0^=(Y))_{j_k} = \{\mathcal{Y}' = Y_{\sigma',e'} \in \mathcal{R}_n \mid \begin{array}{l} e'_h \geq 1, \sigma(i_1) = j_k, e_{i_1} = e_{j_k} = 0, \\ e'_j \geq 1 \text{ for } j \notin I_0^=(Y) \cup \{j_k\}, \\ e'_i = e_i, \sigma'(i) = \sigma(i) \text{ for } i \in I_0^=(Y) \setminus \{i_1, h\} \end{array} \}.$$

First, 我们 [illegible]

$$\sum_{\mathcal{Y}' \in S_h(\widetilde{Y})_0(Y_0^=, I_0^=(Y))_h} \frac{1}{\alpha(\mathcal{Y}', n)} = \frac{1}{q^{2v+1}(q+1)} \sum_{\mathcal{Y} \in S_h(\widetilde{Y})_{i_1}(Y_0^=, I_0^=(Y))} \frac{1}{\alpha(\mathcal{Y}, n)}. \tag{2.3}$$

~由命题 2.8，对于 $\mathcal{Y} \in S_h(Y)_{i_1}(Y_0^=, I_0^=(Y))$，我们有

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{Y}, n) &= \alpha(\mathcal{Y}_0^=, n_0)\alpha(\mathcal{Y}_1^>, n_1) q^{-2(\sum_{i \in I_0^=(\mathcal{Y})} i) + n_0(n_0+1)} \\ &= \alpha(Y_0^=, n_0) q^{-2(\sum_{i \in I_0^=(Y)} i) + n_0(n_0+1)} \alpha(\mathcal{Y}_1^>, n_1) \end{aligned}$$

其中 $n_0 = |I_0^=(Y)|$, $n_1 = n - n_0$。

因此，由命题2.12，我们有

$$\sum_{\mathcal{Y} \in S_h(\widetilde{Y})_{i_1}(Y_0^=, I_0^=(Y))} \frac{1}{\alpha(\mathcal{Y}, n)} = \frac{q^{2(\sum_{i \in I_0^=(Y)} i) - n_0(n_0+1)}}{\alpha(Y_0^=, n_0)} \frac{q^{n_1}}{(q^2-1)^{n_1}} \tag{2.4}$$

‹ 类似地，对于任意 $Y' \in S_h(Y)_0(Y_0^=, I_0^=(Y))_h$，我们有

$$\sum_{\mathcal{Y}' \in S_h(\widetilde{Y})_0(Y_0^=, I_0^=(Y))_h} \frac{1}{\alpha(\mathcal{Y}', n)} = \frac{q^{2(\sum_{i \in I_0^=(Y) \setminus \{h\}} i) - (n_0-1)n_0}}{\alpha(Y_0'^=, n_0 - 1)} \frac{q^{n_1+1}}{(q^2-1)^{n_1+1}}. \tag{2.5}$$

现在，对于 $Y_0^= = Y_{\sigma,e} \in \mathcal{R}_{n_0}$ 和 $Y'^{=}_0 = Y_{\sigma',e'} \in \mathcal{R}_{n_0-1}$，我们有

$$d_1(\overline{\sigma}) = d_1(\overline{\sigma'}) - 1, d_2(\overline{\sigma}) = d_2(\overline{\sigma'}) + 1, t(Y_0^=) - t(Y_0'^=) = h - 2 - v.$$

将此与命题 2.7、(2.4)、(2.5)结合起来，可得(2.3)成立。

接下来，我们断言

$$\sum_{\mathcal{Y}' \in S_h(\widetilde{Y})_0(Y_0^=, I_0^=(Y))_{j_k}} \frac{1}{\alpha(\mathcal{Y}', n)} = \frac{1}{q^{2(v-k+1)}} \sum_{\mathcal{Y} \in S_h(\widetilde{Y})_{i_1}(Y_0^=, I_0^=(Y))} \frac{1}{\alpha(\mathcal{Y}, n)}. \tag{2.6}$$

‹ 如上，对于任意 $Y' \in S_h(Y)_0(Y_0^=, I_0^=(Y))_{j_k}$，我们有

$$\sum_{\mathcal{Y}' \in S_h(\widetilde{Y})_0(Y_0^=, I_0^=(Y))_{j_k}} \frac{1}{\alpha(\mathcal{Y}', n)} = \frac{q^{2(\sum_{i \in I_0^=(Y) \cup \{j_k\} \setminus \{h\}} i) - n_0(n_0+1)}}{\alpha(Y_0'^=, n_0)} \frac{q^{n_1}}{(q^2-1)^{n_1}}. \tag{2.7}$$

现在，对于 $Y_0^= = Y_{\sigma,\ e} \in \mathcal{R}_{n_0}$ 和 $Y'^{=}_0 = Y_{\sigma',\ e'} \in \mathcal{R}_{n_0}$，我们有

$$d_1(\overline{\sigma}) = d_1(\overline{\sigma'}), d_2(\overline{\sigma}) = d_2(\overline{\sigma'}), t(Y_0^=) - t(Y_0'^=) = h - v - j_k + k - 1.$$

将此与命题 2.7、（2.4）、（2.7）结合，我们得到（2.6）成立。

最后，我们断言

$$\sum_{\mathcal{Y}' \in S_h(\widetilde{Y})_0(Y_0^=, I_0^=(Y))_0} \frac{1}{\alpha(\mathcal{Y}', n)} = \frac{1}{q^{2v+1}(q^2-1)} \sum_{\mathcal{Y} \in S_h(\widetilde{Y})_{i_1}(Y_0^=, I_0^=(Y))} \frac{1}{\alpha(\mathcal{Y}, n)}. \tag{2.8}$$

‹ 与上文一样，对于任意 $Y\prime\in S_h(Y)_0(Y_0^{=},I_0^{=}(Y))_0$，，我们有

$$\sum_{\mathcal{Y}'\in S_h(\widetilde{Y})_0(Y_0^{=},I_0^{=}(Y))_0}\frac{1}{\alpha(\mathcal{Y}',n)}=\frac{q^{2(\sum_{i\in I_0^{=}(Y)\setminus\{i_1,h\}}i)-(n_0-2)(n_0-1)}}{\alpha(Y_0'^{=},n_0-2)}\frac{q^{n_1+2}}{(q^2-1)^{n_1+2}}. \tag{2.9}$$

现在，对于 $Y_0^{=}=Y_{\sigma,e}\in\mathcal{R}^{n_0}$ 和 $Y\prime 0^{=}=Y_{\sigma',e'}\in\mathcal{R}^{n_0-2}$，我们有

$$d_1(\overline{\sigma})=d_1(\overline{\sigma'}),d_2(\overline{\sigma})=d_2(\overline{\sigma'})+1,t(Y_0^{=})-t(Y_0'^{=})=h-v+i_1-3.$$

将此与命题 2.7,(2.4),(2.9)结合起来，可得（2.8)成立。

现在，将（2.3), (2.6)和（2.8)结合起来，即得命题的证明。 1 □

命题 2.15. 我们有 $\sum_{Y\in S_h}\alpha(\widetilde{Y})_h(Y,n)=\frac{q^2}{q+1}\sum_{Y\in S_h}\alpha(\widetilde{Y})_{i_t}(Y,n)$.

证明。 与命题 2.13 的证明相同，只需假设 $\widetilde{Y}=\widetilde{Y}_0^{\geq}$。此外，根据命题2.12和命题2.13，只需证明

$$\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_h}\frac{1}{\alpha(Y,n)}=q^{2t}(q-1)\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_0}\frac{1}{\alpha(Y,n)}$$

‹ ‹ 对于固定的 $Y=Y_{\sigma,e}\in S_h(Y)_h$，我们考虑由所有满足以下条件的 $\mathrm{Y}=Y_{\sigma',e'}\in\mathrm{R}^n$ 组成的集合 $S_h(Y)_h(Y_0^{=},I_0^{=}(Y))$：‹ 对所有 i，$\mathrm{Y}_0^{=}=Y_0^{=}$，且 $I_0^{=}(\mathrm{Y})=I_0^{=}(Y)$。此外，我们考虑由所有满足以下条件的 $\mathrm{Y}'=Y_{\sigma',e'}\in\mathrm{R}^n$ 组成的集合 $S_h(Y)_0(Y_0^{=},I_0^{=}(Y))$：对所有 i，$I_0^{=}(\mathrm{Y}')=I_0^{=}(Y)\setminus\{h\}$，且 $\mathrm{Y}_0'^{=}$ 是从 $Y_0^{=}$ 中删去第 h 行和第 h 列所得的矩阵。

‹ 如命题 2.14 的证明中所示，对于任意 $Y\prime\in S_h(Y)_0(Y_0^{=},I_0^{=}(Y))$，$n_0=|I_0^{=}(Y)|$，$n_1=n-n_0$，我们有

$$\sum_{\mathcal{Y}\in S_h(\widetilde{Y})_h(Y_0^{=},I_0^{=}(Y))}\frac{1}{\alpha(\mathcal{Y},n)}=\frac{q^{2(\sum_{i\in I_0^{=}(Y)}i)-n_0(n_0+1)}}{\alpha(Y_0'^{=},n_0)}\frac{q^{n_1}}{(q^2-1)^{n_1}},$$

$$\sum_{\mathcal{Y}'\in S_h(\widetilde{Y})_0(Y_0^{=},I_0^{=}(Y))}\frac{1}{\alpha(\mathcal{Y}',n)}=\frac{q^{2(\sum_{i\in I_0^{=}(Y)\setminus\{h\}}i)-(n_0-1)n_0}}{\alpha(Y_0'^{=},n_0-1)}\frac{q^{n_1+1}}{(q^2-1)^{n_1+1}}.$$

现在，对于 $Y_0^{=}=Y_{\sigma,e}\in\mathcal{R}^{n_0}$ 以及 $Y\prime 0^{=}=Y_{\sigma',e'}\in\mathcal{R}^{n_0-2}$，我们有

$$d_1(\overline{\sigma})=d_1(\overline{\sigma'})+1,d_2(\overline{\sigma})=d_2(\overline{\sigma'}),t(Y_0^{=})-t(Y_0'^{=})=h-1-t.$$

结合命题 2.7，命题得证。

□

命题 2.16 . 设 $B=Y_{\tau,\lambda}$, $\tau(h)=h$, $\lambda_h=-1$, $\lambda_1,\dots\lambda_{h-1}\geq 0$, $\lambda_{h+1},\dots,\lambda_n\geq -1$。则 ，

‹ ‹ *(1)* 对于 Y、$Y'\in\cup_{k=1}^{t}S_h(Y)_{i_k}\cup S_h(Y)_0$，，有 $G(Y,B)=G(Y'B)$。*(2)* 对于 $Y\in S_h(\langle Y)_h$、$Y'\in\cup_{k=1}^{t}S_h(\langle Y)_{i_k}\cup S_h(\langle Y)_0$，，有 $G(Y,B)=-(q-1)^{-1}G(Y'B)$。

证明。 根据 $\mathcal{G}(Y、\ B)$ 的证明中所用公式，见 [Hir00，命题 4.2] 或 [Cho22，引理 3.8]，可知对于 $Y = Y_{\sigma、\ e}$，

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(Y,B) \ &= (1-q^{-2})^n q^{-n(n-1)} \prod_{k<j,\tau(k)<\sigma(j)} (-q)^{\min(0,e_j+\lambda_k)} \prod_{\substack{k>j,\tau(k)<\sigma(j) \text{ or} \\ k<j,\tau(k)>\sigma(j)}} (-q)^{\min(0,e_j+\lambda_k+1)} \\ &\prod_{k>j,\tau(k)>\sigma(j)} (-q)^{\min(0,e_j+\lambda_k+2)} \prod_{k=j=\tau(k)=\sigma(j)} I_1^*(e_j+\lambda_k) \prod_{\substack{k=j,\tau(k)<\sigma(j) \text{ or} \\ k<j,\tau(k)=\sigma(j)}} J_1(e_j+\lambda_k)^{1/2} \\ &\prod_{\substack{k=j,\tau(k)>\sigma(j) \text{ or} \\ k>j,\tau(k)=\sigma(j)}} J_1(e_j+\lambda_k+1)^{1/2} \prod_{\substack{k=j,\tau(k)=\sigma(j) \text{ and} \\ k\neq\tau(k) \text{or } j\neq\sigma(j)}} \left(\frac{q^2 J_1(e_j+\lambda_k) - J_1(e_j+\lambda_k+1)}{q^2-1}\right)^{1/2},\end{aligned}$$

where $J_1(e) = \begin{cases} 1 & \text{if } e \geq 0 \\ 0 & \text{if } e \leq -1 \end{cases}$, $I_1^*(e) = \begin{cases} 1 & \text{if } e \geq 0 \\ -(q-1)^{-1} & \text{if } e = -1 \\ 0 & \text{if } e \leq -2 \end{cases}$

对于 $Y = Y_{\sigma,e}, Y' = Y_{\sigma',e'} \in \cup_{k=1}^t S_h(\widetilde{Y})_{i_k} \cup S_h(\widetilde{Y})_0,$，我们有 $e_i = e_i'$, $\sigma(i) = \sigma'(i)$，对所有$i \in \{i_1, \ldots, i_t, h\}$ 均成立。因此，我们只需比较包含 $e_i, e_i', i \in \{i_1, \ldots, i_t, h\}$ 的项。‹ 根据集合 $S_h(Y)_?$ 的定义，对于所有 $i \in \{i_1, \ldots, i_t, h\}$，有 $e_i \geq 0$。此外，有$\sigma(h) \leq h-1$或 $e_h \geq 1$，以及 $\sigma(h) \leq h-1$或 $e_h' \geq 1$。进一步地，$\lambda_1, \ldots, \lambda_{h-1} \geq 0, \lambda_h, \ldots \lambda_n \geq -1$。于是可以看出，在 $\mathsf{G}(Y,B)$（分别为 $\mathsf{G}(Y'B)$）中，包含 e_i（分别为 e_i'）、 $i \in \{i_1, \ldots, i_t, h\}$ 的各项均为 1。这就完成了(1)的证明。

‹ ‹ ‹ 同样，$Y = Y_{\sigma,\ e} \in S_h(Y)_h$ 以及 $Y\prime \in \cup_{k=1}^t S_h(Y)_{i_k} \cup S_h(Y)_0$, 在 $\mathcal{G}(Y,\ B)$ 中，唯一一个不等于 1 且包含 $e_i, i \in \{i_1, \ldots\ldots, i_t, h\}$ 的项是 $I_1^*(e_h + \lambda_h) = I_1^*(-1) = -(q-1)^{-1}$。这表明 (2) 成立。□

命题 *2.17*。对于 $1 \leq h \leq n$，假设 $\alpha = (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n) \in E_n$, $\alpha_{h-1} < 0 \leq \alpha_h$，并且$0 < \alpha_{h+1}$。此外，令 $B = Y_{\tau,\lambda}$ 满足 $\tau(h) = h$, $\lambda_h = -1$, $\lambda_1, \ldots \lambda_{h-1} \geq 0$, $\lambda_{h+1}, \ldots\ldots, \lambda_n \geq -1$。令$Y = Y_{\sigma,\ e}$ 满足 $\sigma(h) = h$, $e_h = 0$。令 B （分别为 $Y = \overline{Y}_{\sigma,e}$）表示通过从 B （分别为 Y）中删除第 h 行和第 h 列所得到的 $n-1 \times n-1$ 矩阵。则有

$$\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,r)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)} = q^{n\delta_\alpha - (n-1)\delta_{\overline{\alpha}^1} + \alpha_h - 3n + 1} (-(-q)^{-\alpha_h}) \frac{\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^1}(\overline{Y},r)\mathcal{G}(\overline{Y},\overline{B})}{\alpha(\overline{Y},n-1)}$$

证明。 首先，我们将 $n_0 := |I_0^<(Y)|$, $n_1 := |I_0^=(Y)|$, $k_1 := |I_0^<(Y) \cap \{1, \ldots, h-1\}|$, $k_2 := |I_0^<(Y) \cap \{h+1, \ldots, n\}|$, $k_3 := |I_0^=(Y) \cap \{h+1, \ldots, n\}|$。根据命题 2.16 的证明中 $\mathsf{G}(Y,B)$ 的公式，我们可以看到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathcal{G}(Y,B)}{\mathcal{G}(\overline{Y},\overline{B})} = (1-q^{-2})q^{-2(n-1)} \times (\text{terms containing } e_h \text{ or } \lambda_h) \\ &= (1-q^{-2})q^{-2(n-1)} I_1^*(-1)(-q)^{\sum_{i\in I_0^<(Y)} e_i + \sum_{i\in I_0^<(Y)\cap A^{n-h+1}(Y)} 1 - \sum_{i\in I_0^\leq(Y)\cap C^{n-h+1}(Y), i\neq h} 1} \\ &= (1-q^{-2})q^{-2(n-1)}(-(q-1)^{-1})(-q)^{\sum_{i\in I_0^<(Y)} e_i + (k_1-k_2) - |I_0^=(Y)\cap C^{n-h+1}(Y)| + 1}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

根据命题 2.6，我们有

$$\begin{aligned}(2.11)\quad &\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,r)}{\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^1}(\overline{Y},r)}\\ &=q^{n\delta_\alpha-(n-1)\delta_{\overline{\alpha}^1}+\alpha_h-n-2h+2}(-q)^{-\alpha_h+\sum_{i\in I_0^<(Y)}e_i+|I_0^<(Y)\cap A^{n-h+1}(Y)|-|(I_0^\leqslant(Y)\cap C^{n-h+1}(Y))\setminus\{h\}|}\\ &=q^{n\delta_\alpha-(n-1)\delta_{\overline{\alpha}^1}+\alpha_h-n-2h+2}(-q)^{-\alpha_h+\sum_{i\in I_0^<(Y)}e_i+(k_1-k_2)-|(I_0^=(Y)\cap C^{n-h+1}(Y))|+1}.\end{aligned}$$

现在，由命题 2.8 以及事实 $\sum_{i\in I_0^<(Y)} i=\sum_{iI_0^<(Y)}\underline{i}-k_2$，可得

$$(2.12)\qquad \frac{\alpha(Y,n)}{\alpha(\overline{Y},n-1)}=\frac{\alpha(Y_0^\geqslant,n-n_0)}{\alpha(\overline{Y}_0^\geqslant,n-n_0-1)}*q^{2\sum_{i\in I_0^<(Y)}e_i-2k_2}.$$

此外，由命题 2.7 和命题 2.8，可知对于 $\sigma_0:=\sigma|_{I_0^=(Y)}$，

(2.13)

$$\begin{aligned}&\alpha(Y_0^\geqslant,n-n_0)=\alpha(Y_0^=,n_1)\alpha(Y_0^>,n-n_0-n_1)q^{-2\sum_{i\in I_0^=(Y_0^\geqslant)}i+n_1(n_1+1)},\\ &\alpha(Y_0^\geqslant,n-n_0-1)=\alpha(\overline{Y_0^=},n_1-1)\alpha(Y_0^>,n-n_0-n_1)q^{-2\sum_{i\in I_0^=(Y_0^\geqslant)}i+2(h-k_1)+2k_3+(n_1-1)n_1},\\ &\alpha(Y_0^=,n_1)=(q+1)^{d_1(\sigma_0)}(q(q^2-1))^{d_2(\sigma_0)}q^{2t(\sigma,I_0^=(Y))-n_1^2},\\ &\alpha(\overline{Y_0^=},n_1-1)=(q+1)^{d_1(\sigma_0)-1}(q(q^2-1))^{d_2(\sigma_0)}q^{2t(\overline{\sigma},I_0^=(\overline{Y}))-(n_1-1)^2}.\end{aligned}$$

我们可以计算得 $t(\sigma,I_0^=(Y))-t(\sigma,I_0^=(Y))^{\frown}=|B_1^{n-h+1}(Y)\cap I_0^=(Y)|=|B_2^{n-h+1}(Y)\cap I_0^=(Y)|$。结合 (2.12)、(2.13) 以及事实 $|(C^{n-h+1}\cup B_2^{n-h+1}(Y))\cap I_0^=(Y)|=k_3+1$，可得

$$(2.14)\qquad \frac{\alpha(Y,n)}{\alpha(\overline{Y},n-1)}=(q+1)q^{-2h-2(k_2-k_1)-2|C^{n-h+1}(Y)\cap I_0^=(Y)|+2\sum_{i\in I_0^<(Y)}e_i+3}.$$

现在，结合（2.10）、（2.11）和（2.14），命题得证。 □

‹‹**定义 2.18.** 对于 $Y\in\{Y=Y_{\sigma,e}\in\mathcal{R}_n\mid e_h=0,\sigma(h)\leqslant h$ 或 $e_h\geqslant 1\}$ 以及 $S_h(Y)_h$，我们定义 ‹$S_h(Y)\subset\mathcal{R}_{n-1}$ 为

$$\overline{S}_h(\widetilde{Y}):=\left\{\overline{Y}\in\mathcal{R}_{n-1}\middle|\overline{Y}=\begin{array}{l}\text{the matrix obtained by removing}\\ \text{the h-th row and the h-th column from Y}\in S_h(\widetilde{Y})_h.\end{array}\right\}.$$

命题 2.19. 对于 $1\leqslant h\leqslant n$，假设 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in E^n$，$0\leqslant\alpha_h$。令 $B=Y_{\tau,\lambda}$ 满足 $\tau(h)=h$，$\lambda_h=-1$。令 B 为从 $B^{\frown}$ 中删去第 h 行和第 h 列后得到的 $n-1\times n-1$ 矩阵。以下结论成立。

(1) 若 $\alpha_h=0$，则

$$\sum_{j\in\{0,i_1,\dots,i_t,h\}}\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_j}\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,r)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)}=0.$$

(2) 如果 $\alpha_{h-1}<0<\alpha_h$，那么我们有

$$(2.15)\qquad \sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_h}\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,r)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)}=q^{n\delta_\alpha-(n-1)\delta_{\overline{\alpha}^1}+\alpha_h-3n+1}(-(-q)^{-\alpha_h})\sum_{\overline{Y}\in\overline{S}_h(\widetilde{Y})}\frac{\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^1}(\overline{Y},r)\mathcal{G}(\overline{Y},\overline{B})}{\alpha(\overline{Y},n-1)}$$

.

(3) 假设 $0<\alpha_h\le -\alpha_{h-1}$。那么，

$$\sum_{j\in\{0,i_1,\dots,i_t\}}\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_j}\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,r)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)}=q^{n\delta_\alpha-(n-1)\delta_{\overline{\alpha}^1}+\alpha_h-3n+1}\sum_{\overline{Y}\in\overline{S}_h(\widetilde{Y})}\frac{\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^1}(\overline{Y},r)\mathcal{G}(\overline{Y},\overline{B})}{\alpha(\overline{Y},n-1)}. \tag{2.16}$$

(4) 假设对于 $1\le l\le h-1$、 $-\alpha_l<\alpha_h\le -\alpha_{l-1}$。那么，

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\{0,i_1,\dots,i_t,h\}}\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_j}\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,r)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)}&=q^{n\delta_\alpha-(n-1)\delta_{\overline{\alpha}^1}+\alpha_h-3n+1}\sum_{\overline{Y}\in\overline{S}_h(\widetilde{Y})}\frac{\mathcal{G}(\overline{Y},\overline{B})}{\alpha(\overline{Y},n-1)}\\&\times\{\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^1}(\overline{Y},r)((-q)^{-\alpha_h-\alpha_{h-1}}-(-q)^{-\alpha_h})\\&+\textstyle\sum_{j=2}^{h-l}\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^j}(\overline{Y},r)((-q)^{-\alpha_h-\alpha_{h-j}}-(-q)^{-\alpha_h-\alpha_{h-j+1}})\\&+\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^{h-l+1}}(\overline{Y},r)(1-(-q)^{-\alpha_h-\alpha_l})\}.\end{aligned}$$

证明。 由命题 2.6，我们有 $\mathcal{F}_\alpha(Y,\ r)=\mathcal{F}_\alpha(Y\prime r)$ 对所有 Y， $Y\prime\in\cup_{j\in\{0,i_1,\dots,i_t,h\}}S_h(Y)_j$成立。因此，由命题2.13、2.14、 2.15以及2.16，我们有

$$\sum_{j\in\{0,i_1,\dots,i_t,h\}}\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_j}\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,r)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)}=\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_h}\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,r)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)}\{1-\frac{q^2-1}{q^2}-\cdots-\frac{q^2-1}{q^{2t}}-\frac{1}{q^{2t}}\}=0.$$

这就完成了(1)的证明。

(2)直接由命题 2.17得到。

由命题 2.6，对于 $Y\in S_h(Y)_h$、 $Y\prime\in S_h(Y)_j$， $j\in\{0,\ i_1,\ \dots,\ i_t\}$，我们有

$$\mathcal{F}_\alpha(Y',r)=\begin{cases}(-q)^{\min(-\alpha_i,\alpha_h)}\mathcal{F}_\alpha(Y,r) & \text{if } i\in\{i_1,\dots,i_t\},\\(-q)^{\alpha_h}\mathcal{F}_\alpha(Y,r) & \text{if } i=0.\end{cases} \tag{2.17}$$

此外，对于$Y\in S_h(Y)$ 和 $1\le k\le h-l+1$，我们有

$$\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^k}(\overline{Y},r)=(-q)^{-2|\{i_j|1\le j\le t,h-k+1\le i_j\le h-1\}|}\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^1}(\overline{Y},r). \tag{2.18}$$

结合（2.17）、命题2.13、2.14、2.15和2.16，可得

$$\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_{i_k}}\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,r)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)}=-\frac{q^2-1}{q^{2(t-k+1)}}(-q)^{\min(-\alpha_{i_k},\alpha_h)}\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_h}\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,r)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)}. \tag{2.19}$$

现在，假设$\alpha_h\le -\alpha_{h-1}$。由（2.17）、命题2.13、2.14、2.15和2.16，可得

$$\sum_{j\in\{0,i_1,\dots,i_t\}}\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_j}\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,r)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)}=-(-q)^{\alpha_h}\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_h}\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,r)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)}.$$

将此与（2.15）结合，即可证明（2.16）。

假设对于 $1\le l\le h-1$、 $-\alpha_l<\alpha_h\le -\alpha_{l-1}$ 和 $\alpha_{h-1}<0$。进一步假设 $l\le i_k$。

我们断言

$$\begin{aligned}\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_{i_k}}\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,r)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)}&=q^{n\delta_\alpha-(n-1)\delta_{\overline{\alpha}^1}+\alpha_h-3n+1}\sum_{\overline{Y}\in\overline{S}_h(\widetilde{Y})}\frac{\mathcal{G}(\overline{Y},\overline{B})}{\alpha(\overline{Y},n-1)}\\&\times\{\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^{h-i_{k+1}+1}}(\overline{Y},r)((-q)^{-\alpha_h-\alpha_{i_{k+1}-1}})\\&+\textstyle\sum_{j=2}^{i_{k+1}-i_k}\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^{h-i_{k+1}+j}}(\overline{Y},r)((-q)^{-\alpha_h-\alpha_{i_{k+1}-j}}-(-q)^{-\alpha_h-\alpha_{i_{k+1}-j+1}})\\&+\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^{h-i_k+1}}(\overline{Y},r)(-(-q)^{-\alpha_h-\alpha_{i_k}})\}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

由（2.18），可得

$$\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^{h-i_{k+1}+j}}(\overline{Y},r)=(-q)^{-2(t-k)}\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^{1}}(\overline{Y},r),\quad 1\le j\le i_{k+1}-i_k;$$
$$\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^{h-i_{k}+1}}(\overline{Y},r)=(-q)^{-2(t-k+1)}\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^{1}}(\overline{Y},r).$$

现在，(2.20) 的右端为

$$q^{n\delta_\alpha-(n-1)\delta_{\overline{\alpha}^1}+\alpha_h-3n+1}\sum_{\overline{Y}\in\overline{S}_h(\widetilde{Y})}\frac{\mathcal{G}(\overline{Y},\overline{B})}{\alpha(\overline{Y},n-1)}\times\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^1}(\overline{Y},r)\frac{q^2-1}{q^{2(t-k+1)}}(-q)^{-\alpha_{i_k}+\alpha_h}.$$

将其与(2.15)和(2.19)结合，便得到(2.20)的证明。

现在，假设 $i_k<l\le i_{k+1}$。我们断言

(2.21)

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\{0,i_1,\dots,i_k\}}\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_j}\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,r)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)}&=q^{n\delta_\alpha-(n-1)\delta_{\overline{\alpha}^1}+\alpha_h-3n+1}\sum_{\overline{Y}\in\overline{S}_h(\widetilde{Y})}\frac{\mathcal{G}(\overline{Y},\overline{B})}{\alpha(\overline{Y},n-1)}\\&\times\{\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^{h-i_{k+1}+1}}(\overline{Y},r)((-q)^{-\alpha_h-\alpha_{i_{k+1}-1}})\\&+\textstyle\sum_{j=2}^{i_{k+1}-i_k}\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^{h-i_{k+1}+j}}(\overline{Y},r)((-q)^{-\alpha_h-\alpha_{i_{k+1}-j}}-(-q)^{-\alpha_h-\alpha_{i_{k+1}-j+1}})\\&+\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^{h-l+1}}(\overline{Y},r)(1-(-q)^{-\alpha_h-\alpha_l})\}.\end{aligned}$$

由(2.17)、(2.18)、命题2.13、2.14、2.15和2.16，我们有

(2.22)
$$\sum_{j\in\{0,i_1,\dots,i_k\}}\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_j}\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,r)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)}=-\frac{1}{q^{2(t-k)}}(-q)^{\alpha_h}\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_h}\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,r)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)}$$

另一方面，由(2.18)，我们有

$$\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^{h-i_{k+1}+j}}(\overline{Y},r)=(-q)^{-2(t-k)}\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^{1}}(\overline{Y},r),\quad 1\le j\le i_{k+1}-l+1.$$

因此，(2.21) 的右端为

$$q^{n\delta_\alpha-(n-1)\delta_{\overline{\alpha}^1}+\alpha_h-3n+1}\sum_{\overline{Y}\in\overline{S}_h(\widetilde{Y})}\frac{\mathcal{G}(\overline{Y},\overline{B})}{\alpha(\overline{Y},n-1)}\times\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^1}(\overline{Y},r)\frac{1}{q^{2(t-k)}}.$$

将其与（2.15）和（2.22）结合，我们得到（2.21）的证明。将（2.20）与（2.21）结合，当 $\alpha_{h-1}<0$ 时，我们得到（4）的证明。

最后，设 $\alpha_{h-1}=0$。进一步设对于某个 $l\le m\le h-1$，有 $\alpha_{m-1}<0,\alpha_m=\cdots=\alpha_{h-1}=0$。在这种情况下，我们无法应用命题 2.17。因此，我们考虑$\alpha'=(\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1},-2,-2,\dots,-2,\alpha_h,\dots,\alpha_n)\in\mathrm{E}_n$，而不是 α。注意到 $\alpha'^1=\alpha^{h-m+1}$。设 $i_k<m\le i_{k+1}$。根据命题 2.6，对于 $Y\in S_h(Y)_j$，$j\in\{0,i_1,\dots,i_t,h\}$，我们有

$$\mathcal{F}_\alpha(Y,r)=\mathcal{F}_{\alpha'}(Y,r)(-q)^{2|\{i_j|1\le j\le t,m\le i_j\le h-1\}|}=\mathcal{F}_{\alpha'}(Y,r)(-q)^{2(t-k)}.$$

现在，根据命题2.17，我们有

(2.23)
$$\begin{aligned}\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_h}\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,r)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)}&=\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_h}\frac{\mathcal{F}_{\alpha'}(Y,r)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)}(-q)^{2(t-k)}\\&=q^{n\delta_\alpha-(n-1)\delta_{\overline{\alpha}^1}+\alpha_h-3n+1}(-(-q)^{-\alpha_h})(-q)^{2(t-k)}\sum_{\overline{Y}\in\overline{S}_h(\widetilde{Y})}\frac{\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^{h-m+1}}(\overline{Y},r)\mathcal{G}(\overline{Y},\overline{B})}{\alpha(\overline{Y},n-1)}.\end{aligned}$$

结合（2.17）、命题2.13、2.14、2.15以及2.16，我们有

$$\sum_{j\in\{i_{k+1},\dots,i_t,h\}}\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_h}\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,r)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)} = q^{n\delta_\alpha-(n-1)\delta_{\overline{\alpha}^1}+\alpha_h-3n+1}(-(-q)^{-\alpha_h})\sum_{\overline{Y}\in\overline{S}_h(\widetilde{Y})}\frac{\mathcal{F}_{\overline{\alpha}^{h-m+1}}(\overline{Y},r)\mathcal{G}(\overline{Y},\overline{B})}{\alpha(\overline{Y},n-1)}.$$

现在，当 $\alpha_{h-1}=0$ 时，我们可以按照上述论证证明 (4)。至此，命题的证明完成。□

‹命题 *2.10*的证明。 这由命题 2.3 和命题 2.19 推出，其中 Y 遍历集合 $\{Y=Y_{\sigma,e}\in\mathcal{R}_n \mid e_h=0,\sigma(h)\le h$ 或 $e_h\ge 1\}$。□

2.3. **加权表示密度的约化公式 II**。 本小节中，我们证明一些加权表示密度的约化公式。假设 $B=Y_{\tau,\lambda}$ 满足τ(1) $=1,\lambda_1=0$。我们先引入以下记号。

定义 2.20。令 $0\le k\le n$。

(1) 对于 $X=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in X_n(F)$，其中 $A\in M_{n-k,n-k}(F)\ B\in M_{n-k,k}(F)\ C\in M_{k,n-k}(F)\ D\in M_{k,k}(F)$，我们用 $X^{\vee_k}$ 表示元素 $X^{\vee_k}:=\begin{pmatrix}\pi D & C\\ B & \pi^{-1}A\end{pmatrix}$。此外，我们用 $X^{\wedge_k}$表示元素 $X^{\wedge_k}:=\begin{pmatrix}\pi^{-1}D & C\\ B & \pi A\end{pmatrix}$ (2) 对于 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathrm{E}_n$ 满足 $\alpha_{n-k}\le 0\le\alpha_{n-k+1}$，我们用 $\alpha^{\vee_k}$ 表示元素$\alpha^{\vee_k}=(\alpha_{n-k+1}-n,\dots,\alpha_n-n,\alpha_1+n,\dots,\alpha_{n-k}+n)\in\mathrm{E}_n$。

定义 2.21。 对于 $1\le h\le n$，假设 $\alpha=(\alpha_1、\dots\dots、\alpha_n)\in\mathcal{E}_n、-n<\alpha_1$ 和 $\alpha_{n-h+1}\le 0<\alpha_{n-h+2}$。我们将 ${}^1\alpha\in\mathcal{E}_{n-1}$ 定义为

$${}^1\overline{\alpha}:=(\alpha_2,\dots,\alpha_n).$$

As进一步假设 $n-h+2\le l\le n、\ -\alpha_l<\alpha_1\le-\alpha_{l-1}$。于是，我们将 ${}^i\alpha$ 定义为

$${}^i\overline{\alpha}:=(\alpha_2,\dots,\alpha_{n-i+1},\alpha_{n-i+2}-2,\dots,\alpha_n-2),\ 2\le i\le n-l+2.$$

命题 2。 **22**。 对于 $1\le k\le n$ 和满足 $\alpha_{n-k}\le 0\le\alpha_{n-k+1}$ 及 $Y\in R_n$ 的 $\alpha\in E_n$，有

$$\mathcal{F}_\alpha(Y,0)=\mathcal{F}_{\alpha^{\vee_k}}(Y^{\wedge_k},0)q^{n\delta_\alpha-n\delta_{\alpha^{\vee_k}}-n(n-2k)}.$$

命题 2.23（参见 [Cho22，引理 3。8]）。 对于 $1\le k\le n$，以及 $Y,\ B\in\mathcal{R}_n$，有

$$\mathcal{G}(Y,B)=\mathcal{G}(Y^{\wedge_k},B^{\vee_k}).$$

命题 2.24 ([Cho22，引理 3.9])。 对于 $1\le k\le n$ 和 $Y\in\mathcal{R}_n$，我们有

$$\alpha(Y^{\wedge_k},n)=q^{n(n-2k)}\alpha(Y,n).$$

命题 2.25。 对于 $1\le h\le n$，假设 $\alpha=(\alpha_1、\dots\dots、\alpha_n)\in E_n$ 且 $\alpha_{n-h+1}\le 0\le\alpha_{n-h+2}$。令 $B=Y_{\tau,\ \lambda}$ 满足 $\tau(1)=1,\lambda_1=0$。令 B 为从 B中删除第一行和第一列后得到的 $n-1\times n-1$ 矩阵。对于 $r\ge 0$，我们进一步假设：若 $r\ge 1$，则 $-n<\alpha_1,\alpha_n<n$。于是有如下结论。

(1) 如果 $\alpha_1 \le -\alpha_n$，则有

$$W_\alpha(B,r) = q^{n\delta_\alpha-(n-1)\delta_{1_{\overline{\alpha}}}+\alpha_1-2n+1}(1-(-q)^{-\alpha_1-n-2r})W_{1_{\overline{\alpha}}}(\overline{B},r)$$

(2) 对于 $n-h+2 \le l \le n$，假设 $-\alpha_l < \alpha_1 \le -\alpha_{l-1}$。那么，我们有

$$\begin{aligned} W_\alpha(B,r) &= q^{n\delta_\alpha-(n-1)\delta_{1_{\overline{\alpha}}}+\alpha_1-2n+1} \\ &\times\{((-q)^{-\alpha_1-\alpha_n}-(-q)^{-\alpha_1-n-2r}))W_{1_{\overline{\alpha}}}(\overline{B},r) \\ &+\textstyle\sum_{j=2}^{n-l+1}((-q)^{-\alpha_1-\alpha_{n+1-j}}-(-q)^{-\alpha_1-\alpha_{n+2-j}})W_{j_{\overline{\alpha}}}(\overline{B},r) \\ &+(1-(-q)^{-\alpha_1-\alpha_l})W_{n-l+2_{\overline{\alpha}}}(\overline{B},r)\}. \end{aligned}$$

证明。为简便起见，我们用 $^\vee$ 表示 $^{\vee_{h-1}}$。注意

$$\alpha^\vee = (\alpha_{n-h+2}-n,\dots,\alpha_n-n,\alpha_1+n,\dots,\alpha_{n-h+1}+n).$$

由命题 2.22、命题2.23和命题2.24，我们得到

$$\begin{aligned} W_\alpha(B,r) &= \sum_{Y\in\mathcal{R}_n}\frac{\mathcal{F}_\alpha(Y,0)f_{2r}(Y)\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,n)} \\ &= q^{n\delta_\alpha-n\delta_{\alpha^\vee}}\sum_{Y\in\mathcal{R}_n}\frac{\mathcal{F}_{\alpha^\vee}(Y^{\wedge_{h-1}},0)f_{2r}(Y)\mathcal{G}(Y^{\wedge_{h-1}},B^\vee)}{\alpha(Y^{\wedge_{h-1}},n)} \\ &= q^{n\delta_\alpha-n\delta_{\alpha^\vee}}\sum_{Y\in\mathcal{R}_n}\frac{\mathcal{F}_{\alpha^\vee}(Y,0)\mathcal{G}(Y,B^\vee)f_{2r}(Y^{\wedge_{n-h+1}})}{\alpha(Y,n)}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

类似地，我们有

$$W_{k_{\overline{\alpha}}}(\overline{B},r) = q^{(n-1)\delta_{k_{\overline{\alpha}}}-(n-1)\delta_{\underline{\alpha^\vee}^k}}\sum_{\overline{Y}\in\mathcal{R}_{n-1}}\frac{\mathcal{F}_{\underline{\alpha^\vee}^k}(\overline{Y},0)\mathcal{G}(\overline{Y},\overline{B}^\vee)f_{2r}(\overline{Y}^{\wedge_{n-h}})}{\alpha(\overline{Y},n-1)}. \tag{2.25}$$

当 $r=0$时，该命题由命题 2.10 结合式（2.24）和式（2.25）即可得出。

现在，假设 $r \ge 1$。由第 2.2 节中的相同论证可知，对于 $Y = Y_{\sigma,e} \in \mathrm{R}_n$，只有当 $e_h = 0$ 且 $\sigma(h) \le h$，或当 $e_h \ge 1$时，才有 $\mathsf{G}(Y,B^\vee) \ne 0$。因此，对于 $Y \in \{Y = Y_{\sigma,e} \in \mathrm{R}_n \mid e_h = 0, \sigma(h) \le h$ 或 $e_h \ge 1\}$，我们考察定义 2.11 中的集合 $S_h(Y)_j$, $j \in \{0,i_1,\dots,i_t,h\}$ 以及定义 2.18 中的 $\underline{S_h}(Y)$。注意，对于 $Y \in S_h(Y)_h, Y' \in S_h(Y)_j$, $j \in \{0,i_1,\dots,i_t\}$ 和 $Y \in S_h(Y)$，我们有

$$\begin{aligned} f_{2r}(Y^{\wedge_{n-h+1}}) &= (-q)^{-2r}f_{2r}(\overline{Y}^{\wedge_{n-h}}), \\ f_{2r}(Y'^{\wedge_{n-h+1}}) &= f_{2r}(\overline{Y}^{\wedge_{n-h}}). \end{aligned} \tag{2.26}$$

根据命题 2.17以及（2.24）、（2.25）和（2.26），可得

$$\begin{aligned} &\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_h}\frac{\mathcal{F}_{\alpha^\vee}(Y,0)\mathcal{G}(Y,B^\vee)}{\alpha(Y,n)}f_{2r}(Y^{\wedge_{n-h+1}}) \\ &= q^{n\delta_{\alpha^\vee}-(n-1)\delta_{\underline{\alpha^\vee}^1}+\alpha_1-2n+1}(-(-q)^{-\alpha_1-n-2r})\sum_{\overline{Y}\in\overline{S}_h(\widetilde{Y})}\frac{\mathcal{F}_{\underline{\alpha^\vee}^1}(\overline{Y},0)\mathcal{G}(\overline{Y},\overline{B}^\vee)}{\alpha(\overline{Y},n-1)}f_{2r}(\overline{Y}^{\wedge_{n-h}}). \end{aligned} \tag{2.27}$$

现在，由（2.26），我们知道 $f_{2r}(Y'^{\wedge_{n-h+1}})$ 对所有 $Y' \in S_h(Y)_j$, $j \in \{0, i_1, \dots, i_t\}$都取相同的值。因此，我们可以沿用命题 2.19 证明中的论证，得出以下结果。

(1) 若 $\alpha_1 \le -\alpha_n$，则有

$$\sum_{j\in\{0,i_1,\dots,i_t\}}\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_j}\frac{\mathcal{F}_{\alpha^\vee}(Y,0)\mathcal{G}(Y,B^\vee)}{\alpha(Y,n)}f_{2r}(Y^{\wedge_{n-h+1}})$$
$$=q^{n\delta_{\alpha^\vee}-(n-1)\delta_{\overline{\alpha^\vee}^1}+\alpha_1-2n+1}\sum_{\overline{Y}\in\overline{S}_h(\widetilde{Y})}\frac{\mathcal{F}_{\overline{\alpha^\vee}^1}(\overline{Y},0)\mathcal{G}(\overline{Y},\overline{B}^\vee)}{\alpha(\overline{Y},n-1)}f_{2r}(\overline{Y}^{\wedge_{n-h}}).$$

(2) 对于 $n-h+2\le l\le n$，假设 $-\alpha_l<\alpha_1\le-\alpha_{l-1}$。那么，我们有

$$\sum_{j\in\{0,i_1,\dots,i_t\}}\sum_{Y\in S_h(\widetilde{Y})_j}\frac{\mathcal{F}_{\alpha^\vee}(Y,0)\mathcal{G}(Y,B^\vee)}{\alpha(Y,n)}f_{2r}(Y^{\wedge_{n-h+1}})$$
$$=q^{n\delta_{\alpha^\vee}-(n-1)\delta_{\overline{\alpha^\vee}^1}+\alpha_1-2n+1}\sum_{\overline{Y}\in\overline{S}_h(\widetilde{Y})}\frac{\mathcal{G}(\overline{Y},\overline{B}^\vee)}{\alpha(\overline{Y},n-1)}f_{2r}(\overline{Y}^{\wedge_{n-h}})\times\{\mathcal{F}_{\overline{\alpha^\vee}^1}(\overline{Y},0)((-q)^{-\alpha_1-\alpha_n})$$
$$+\textstyle\sum_{j=2}^{n-l+1}\mathcal{F}_{\overline{\alpha^\vee}^j}(\overline{Y},0)((-q)^{-\alpha_1-\alpha_{n+1-j}}-(-q)^{-\alpha_1-\alpha_{n+2-j}})+\mathcal{F}_{\overline{\alpha^\vee}^{n-l+2}}(\overline{Y},0)(1-(-q)^{-\alpha_1-\alpha_l})\}.$$

根据（2.24）和（2.25），我们可以沿用命题2.10 证明中的论证来证明该命题。□

3. 酉 Rapoport-Zink 空间与特殊循环

3.1. **模空间 $\mathcal{N}_n^{[\mathbb{h}]}$。** 在本小节中，我们回顾 Rapoport-Zink 空间 $\mathcal{N}_n^{[\mathbb{h}]}$ 的定义。这里 $\mathbb{h}:=(h_1,h_2,\dots\dots,h_m)$ 是一个整数元组，使得 $0\le h_1<h_2<\cdots<h_m\le n$且 $h_1\equiv h_2\equiv\cdots\equiv h_m$（模 2）。在可能的情况下，我们沿用 [RZ96], [LRZ24], 和 [Muller] 的记号。

定义 3.1。 对于一个 Spf $O_{\breve{F}}$-概形 S，以及 $0\le h\le n$，定义在 S 上、符号为 $(1,n-1)$ 且类型为 h 的厄米形式形式 O_F-模是一个三元组 (X,i_X,λ_X)，其中

(1) X 是定义在 S 上的相对高度为 $2n$ 、维数为 n的严格形式O_{F_0}-模，(2) $i_X:O_F\to\mathrm{End}(X)$是 X 上 O_F 的作用，它扩张了O_{F_0} 的作用，并满足符号为 $(1,n-1)$ 的 Kottwitz 条件：对所有 $a\in O_F$，$\mathrm{Charpol}(i_X(a)\mid\mathrm{Lie}(X))=(T-a)(T-a^*)^{n-1}\in O_S[T]$，(3) $\lambda_X:X\to X^\vee$ 是一个极化，使得其 Rosati 对合在O_F上诱导出对合 *。我们还要求 $\ker(\lambda_X)\subset X[\pi]$，且其阶为 q^{2h}。

由 [Cho18，注 3。32], 一个符号为 $(1,n-1)$ 且类型为 h 的厄米形式 O_F-模，定义在$\mathbb{F}$ 上，在拟等*ogeny*意义下是唯一的。我们固定一个 $(\mathbb{X}_h,i_{\mathbb{X}_h},\lambda_{\mathbb{X}_h})$ 作为框架对象。

对于 $0\le h\le h'\le n$, $h\equiv h'$（模 2），存在一个同源

$$\alpha_{h',h}:\mathbb{X}_{h'}\to\mathbb{X}_h,$$

与极化相容，使得 $\ker(\alpha_{h',\ h})\subset\mathbb{X}_{h'}[\pi]$，并且当 $q^{h'-h}$ 时其阶为.....。我们固定 $\alpha_{h+2,\ h}$对每个 $0\le h\le n-2$，并且对于 $h'>h$, $h\equiv h'$（模 2），定义

$$\alpha_{h',h}:=\alpha_{h+2,h}\circ\cdots\circ\alpha_{h',h'-2}:\mathbb{X}_{h'}\to\mathbb{X}_{h'-2}\to\cdots\to\mathbb{X}_h.$$

定义 3.2。令 (Nilp) 为 $O_{\breve{F}}$-概形的范畴 S，其中 π 在S上局部幂零。令 $\mathbf{h}=(h_1,\ h_2,\ \ldots\ldots,\ h_m)$ 为满足 $0\leq h_1<h_2<\cdots<h_m\leq n$ 且 $h_1\equiv h_2\equiv\cdots\equiv h_m$（模 2）的整数元组。则函子 $\mathcal{N}_n^{[\mathbb{h}]}$将一个概形 $S\in$(Nilp) 关联到由元组 $(X_{h_i},\ i_{X_{h_i}},\ \lambda_{X_{h_i}},\ \rho_{X_{h_i}})_{1\leq i\leq m}$的同构类组成的集合，其中

(1) $(X_{h_i},\ i_{X_{h_i}},\ \lambda_{X_{h_i}})$ 是一个具有符号 $(1,\ n-1)$ 和类型 h_i、定义在 S 上的厄米形式概 O_F 模，(2) $\rho_{X_{h_i}}\colon\ X_{h_i}\times_S S\to\mathbb{X}_{h_i}\times_{\mathbb{F}} S$ 是定义在约化 $S=S\times_{O_{\breve{F}}}\mathbb{F}$ 上的高度 0 的 O_F-同源，使得 $\rho_{X_{h_i}}^*(\lambda_{\mathbb{X}_{h_i},\ \overline{S}})=\lambda_{X_{h_i},\ \overline{S}}$，(3) 对于 $1\leq i<m$、$\rho_{X_{h_i}}^{-1}\circ\alpha_{h_{i+1},\ h_i}\circ\rho_{X_{h_{i+1}}}$ 提升为同源 $\tilde{\alpha}_{h_{i+1},\ h_i}\colon\ X_{h_{i+1}}\to X_{h_i}$，

$$\begin{array}{ccc} X_{h_{i+1},\overline{S}} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_{h_{i+1},h_i,\overline{S}}} & X_{h_i,\overline{S}} \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_{X_{h_{i+1},\overline{S}}}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{X_{h_i,\overline{S}}}} \\ \mathbb{X}_{h_{i+1},\overline{S}} & \xrightarrow{\alpha_{h_{i+1},h_i,\overline{S}}} & \mathbb{X}_{h_i,\overline{S}} \end{array}$$

注意，如果 $\tilde{\alpha}_{h_{i+1},\ h_i}$ 存在，那么它是唯一的（[LRZ24，第 3 节4]）。该函子由一个定义在 Spf $O_{\breve{F}}$ 上的形式概形表示，该形式概形是局部形式有限型且正则的（[RZ96], [G¨ 或 01]）。

定义 3.3。设 $\mathbf{h}=(h_1、\ldots\ldots、h_m)$ 为一个整数元组，使得 $0\leq h_1<\cdots<h_m\leq n$ 且$h_1\equiv\cdots\equiv h_m$(模 2)。

（1）我们记 $\mathbb{h}^\vee:=(n-h_m,\ n-h_{m-1}、\ldots\ldots、n-h_1)$。（2）我们记 $\theta\colon\ \mathcal{N}_n^{[\ ]}\to\mathbb{h}\mathcal{N}_n^{[\mathbb{h}^\vee]}$为如下定义的同构（参见 [Cho18，注 5。2]）：对于 $S\in$（Nilp），

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_n^{[\mathbb{h}]}(S) & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{N}_n^{[\mathbb{h}^\vee]}(S) \\ (X_{h_i},i_{X_{h_i}},\lambda_{X_{h_i}},\rho_{X_{h_i}})_{1\leq i\leq m} & \mapsto & (X_{h_i}^\vee,\bar{i}_{X_{h_i}}^\vee,\lambda'_{X_{h_i}},(\rho_{X_{h_i}}^\vee)^{-1})_{1\leq i\leq m}, \end{array}$$

其中 $\lambda'_{X_{h_i}}\colon\ X_{h_i}^\vee\to X_{h_i}$ 是满足 $\lambda'_{X_{h_i}}\circ\lambda_{X_{h_i}}=i_{X_{h_i}}(\pi)$ 的唯一极化；对于$a\in O_F$，作用 $i_{X_{h_i}}^\vee$ 定义为 $\bar{i}_{X_{h_i}}^\vee(a)=i_{X_{h_i}}(a^*)^\vee$。

3.2. **特殊循环**。在本小节中，我们在 $\mathcal{N}_n^{[\mathbb{h}]}$ 中定义特殊循环。我们固定一个在 $\mathbb{F}$ 上符号为 $(0,\ 1)$、类型为 0 的厄米形式正式O_F-模 $(\mathbb{E},\ i_{\mathbb{E}},\ \lambda_{\mathbb{E}})$。更确切地说，$(\mathbb{E},\ i_{\mathbb{E}},\ \lambda_{\mathbb{E}})$ 是一个三元组，其中

(1) $\overline{\mathbb{E}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的相对高度为 2、维数为 1 的严格形式 O_{F_0}-模，(2) $i_{\mathbb{E}}$ 是满足 Kottwitz 符号条件 $(0,\ 1)$ 的 O_F-作用，(3) $\lambda_{\mathbb{E}}$ 是主极化，其 Rosati 对合在 O_F上诱导出对合 *。

随后，我们将这个三元组选作框架对象，并考虑相应的模空间，将其记为$\mathcal{N}^0$。

定义 3.4。令 $\mathbf{h}=(h_1,\ \ldots\ldots,\ h_m)$ 为一个整数元组，使得 $0\leq h_1<\cdots<h_m\leq n$ 且$h_1\equiv\cdots\equiv h_m$（模 2）。我们将特殊同态空间定义为 F-向量空间

$$\mathbb{V}:=\mathrm{Hom}_{O_F}(\overline{\mathbb{E}},\mathbb{X}_{h_m})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}.$$

对于 $x,\ y\in\mathbb{V}$，我们在 $\mathbb{V}$ 上定义一个厄米形式 h，其形式为

$$h(x,y)=\lambda_{\mathbb{E}}^{-1}\circ y^{\vee}\circ\lambda_{\mathbb{X}_{h_m}}\circ x\in \mathrm{End}_{O_F}(\mathbb{E})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\overset{i_{\mathbb{X}}^{-1}}{\simeq}F.$$

备注 3.5。特殊同态空间可以使用$\mathbb{X}_{h_i}$而不是 $\mathbb{X}_{h_m}$来定义。由于$\alpha_{h_m,\ h_i}:\ \mathbb{X}_{h_m}\to\mathbb{X}_{h_i}$与极化 $\lambda_{\mathbb{X}_{h_i}}$ 和 $\lambda_{\mathbb{X}_{h_m}}$相容，这两个定义是等距的。

定义 3.6。设 $\mathbb{h}=(h_1,\dots,h_m)$ 为一个整数元组，满足 $0\le h_1<\cdots<h_m\le n$ 并且$h_1\equiv\cdots\equiv h_m$ (模 2)。对于框架对象

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{X}_{h_m} & \xrightarrow{\alpha_{h_m,h_{m-1}}} & \mathbb{X}_{h_{m-1}} & \xrightarrow{\alpha_{h_{m-1},h_{m-2}}} & \cdots & \xrightarrow{\alpha_{h_3,h_2}} & \mathbb{X}_{h_2} & \xrightarrow{\alpha_{h_2,h_1}} & \mathbb{X}_{h_1} \\
\downarrow{\scriptstyle \lambda_{\mathbb{X}_{h_m}}} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{\mathbb{X}_{h_{m-1}}}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{\mathbb{X}_{h_2}}} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{\mathbb{X}_{h_1}}} \\
\mathbb{X}_{h_m}^{\vee} & \xleftarrow[\alpha^{\vee}_{h_m,h_{m-1}}]{} & \mathbb{X}_{h_{m-1}}^{\vee} & \xleftarrow[\alpha^{\vee}_{h_{m-1},h_{m-2}}]{} & \cdots & \xleftarrow[\alpha^{\vee}_{h_3,h_2}]{} & \mathbb{X}_{h_2}^{\vee} & \xleftarrow[\alpha^{\vee}_{h_2,h_1}]{} & \mathbb{X}_{h_1}^{\vee},
\end{array}$$

以及 $x\in\mathbb{V}=\mathrm{Hom}^{\overline{O}_F}(\mathbb{E},\mathbb{X}_{h_m})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$，我们如下定义特殊循环 $\mathcal{Z}^{h_m}(x)$、$\mathcal{Z}^{h_{m-1}}(x)$、$\dots$ $\mathcal{Z}^{h_1}(x)$、$\mathcal{Y}^{h_1}(x)$、$\mathcal{Y}^{h_2}(x)$、$\dots$以及 $\mathcal{Y}^{h_m}(x)$。

(1) 我们将特殊循环 $\mathcal{Z}^{h_i}(x)$ 定义为 $\mathcal{N}^0\times\mathcal{N}_n^{[\ ]_{\mathbb{h}}}$ 的闭形式子概形，其满足以下性质：对于任意 $O_{\breve{F}}$-概形 S，使得 π 局部幂零，$\mathcal{Z}^{h_i}(x)(S)$ 是 $\mathcal{N}^0\times\mathcal{N}_n^{[\ ]_{\mathbb{h}}}(S)$ 中所有点 $(\mathcal{E}\ i_{\mathcal{E}},\lambda_{\mathcal{E}},\rho_{\mathcal{E}},(X_{h_j},i_{X_{h_j}},\lambda_{X_{h_j}},\rho_{X_{h_j}})_{1\le j\le m})$ 的集合，这些点满足该拟同态

$$\rho_{X_{h_i}}^{-1}\circ\alpha_{h_m,h_i}\circ x\circ\rho_{\overline{\mathcal{E}}}:\overline{\mathcal{E}}\times_S\overline{S}\to X_{h_i}\times_S\overline{S}$$

扩张为从$\mathcal{E}$ 到 X_{h_i}的同态。

(2) 我们在$\mathcal{N}^0\times\mathcal{N}_n^{[\mathbb{h}]}$中定义特殊循环$\mathcal{Y}^{h_i}(x)$如下。首先，我们考虑$\mathcal{N}^0\times\mathcal{N}_n^{[\ ^{\vee}]_{\mathbb{h}}}$中的特殊循环$\mathcal{Z}^{n-h_i}(\lambda_{h_1}\circ\alpha_{h_m,h_1}\circ x)$。我们将$\mathcal{Y}^{h_i}(x)$定义为$\mathcal{N}^0\times\mathcal{N}_n^{[\mathbb{h}]}$中的$(id\times\theta^{-1})(\mathcal{Z}^{n-h_i}(\lambda_{h_1}\circ\alpha_{h_m,h_1}\circ x))$。

注意到$\mathcal{N}^0$可以与 Spf $O_{\breve{F}}$等同，因此$\mathcal{N}_n^{[\mathbb{h}]}$中的$\mathcal{Z}^{h_i}(x),\mathcal{Y}^{h_i}(x)$，$1\le i\le m$可以被识别为闭形式子概形。

命题 3.7 (参见 [Cho18，命题 5.9])。设$\mathbb{h}=(h_1,\dots,h_m)$ 为一个整数元组，使得$0\le h_1<\cdots<h_m\le n$ 且 $h_1\equiv\cdots\equiv h_m$(模2)。对于 $x\in\mathbb{V}\mid\{0\}$，函子 $Z^{h_i}(x)$和 $Y^{h_i}(x)$，$1\le i\le m$ 由$\mathbb{h}$上的 *Cartier* 除子表示。

证明。证明与 [Cho18命题 5 的证明几乎完全相同。9]。 □

命题 *3.8*（参见 [*Cho18*，命题 *5.*10]）。设 $\mathbb{h}=(h_1,\dots,h_m)$ 为满足$0\le h_1<\cdots<h_m\le n$ 且 $h_1\equiv\cdots\equiv h_m$（*mod 2*）的整数元组。设 $x,y\in\mathbb{V}\mid\{0\}$ 为特殊同态，满足 $val(h(x,x))=0$ 且 $val(h(y,y))=-1$。

(1) 若 $h_m<n$，则 $Z^{h_m}(x)\simeq N_{n-1}^{[\mathbb{h}]}$。*(2)* 若 $h_m=n$，则 $Z^{h_m}(x)=\emptyset$。*(3)* 若 $h_1>0$，则 $Y^{h_1}(y)\simeq N_{n-1}^{[\mathbb{h}-1]}$，其中 $\mathbb{h}-1=(h_1-1,h_2-1,\dots,h_m-1)$。*(4)* 若 $h_1=0$，则 $Y^{h_1}(y)=\emptyset$。

证明。 证明与 [Cho18，命题 5 的证明几乎完全相同。10]。事实上，从 $\mathcal{N}_{n-1}^{[\mathbb{h}]} \to \mathcal{Z}_{h_m}(x(S)$ 到

$$(X_{h_i},\ i_{X_{h_i}},\ \lambda_{X_{h_i}},\ \rho_{X_{h_i}})_{1\le i\le \overline{m}} \mapsto ((\mathcal{E}\ i_{\overline{\mathcal{E}}},\ \overline{\lambda}_{\mathcal{E}},\ \rho_{\mathcal{E}}),\ (\mathcal{E}\times X_{h_i},\ -i_{\mathcal{E}}\times i_{X_{h_i}},\ -\lambda_{\mathcal{E}}\times\lambda_{X_{h_i}},\ \rho_{\mathcal{E}}\times\rho_{X_{h_i}})_{1\le i\le \overline{m}}),$$

其中 $x=\mathrm{inc}_1:\ \mathbb{E}\to\mathbb{E}\times\mathbb{X}_{h_m}$。 □

命题 *3.9*（参见 [*Cho18*，命题 *5.*11]）。设 $h=(h_1,\ldots,\ h_m)$ 是一个整数元组，使得 $0\le h_1<\cdots<h_m\le n$ 且 $h_1\equiv\cdots\equiv h_m$（模 *2*）。假设 $x,y\in\mathbb{V}\setminus\{0\}$ 满足 $val(h(x,x))=0$ 且 $val(h(y,y))=-1$。进一步假设，通过用 $O_F^\times$ 中的一个元素进行重新缩放，$x^*\circ x=1$ 且 $(\lambda_{\mathbb{X}_{h_m}}\circ y)^*\circ(\lambda_{\mathbb{X}_{h_m}}\circ y)=1$，其中 $x^*=\lambda_{\mathbb{E}}^{-1}\circ x^\vee\circ\lambda_{\mathbb{X}_{h_m}}$ 且 $(\lambda_{\mathbb{X}_{h_m}}\circ y)^*=\lambda_{\mathbb{E}}^{-1}\circ(\lambda_{\mathbb{X}_{h_m}}\circ y)^\vee\circ\lambda'_{\mathbb{X}_{h_m}}$。定义 $e_x:=x\circ x^*$ 以及 $e_y:=(\lambda_{\mathbb{X}_{h_m}}\circ y)^*\circ(\lambda_{\mathbb{X}_{h_m}}\circ y)$。固定同构

$$\Phi:\mathcal{Z}_{h_m}(x)\simeq\mathcal{N}_{n-1}^{[\mathbb{h}]},$$
$$\Psi:\mathcal{Y}_{h_1}(y)\simeq\mathcal{N}_{n-1}^{[\mathbb{h}-1]},$$

如命题 *3.8*所述。于是，以下结论成立。

(1) 对于 $z\in\mathbb{V}$，其中 $h(x,z)=0$，设 $z':=(1-e_x)\circ z$。于是，我们有

$$\Phi(\mathcal{Z}_{h_m}(x)\cap\mathcal{Z}_{h_i}(z))=\mathcal{Z}_{h_i}(z')\ in\ \mathcal{N}_{n-1}^{[\mathbb{h}]},\ and\ h(z',z')=h(z,z).$$

(2) 对于 $w\in\mathbb{V}$，其中 $h(x,w)=0$，设 $w':=(1-e_x)\circ w$。于是，我们有

$$\Phi(\mathcal{Z}_{h_m}(x)\cap\mathcal{Y}_{h_i}(w))=\mathcal{Y}_{h_i}(w')\ in\ \mathcal{N}_{n-1}^{[\mathbb{h}]},\ and\ h(w',w')=h(w,w).$$

(3) 对于 $z\in\mathbb{V}$，其中 $h(y,z)=0$，设 $z':=(1-e_y^\vee)\circ z$。于是，我们有

$$\Psi(\mathcal{Y}_{h_1}(y)\cap\mathcal{Z}_{h_i}(z))=\mathcal{Z}_{h_i-1}(z')\ in\ \mathcal{N}_{n-1}^{[\mathbb{h}-1]},\ and\ h(z',z')=h(z,z).$$

(4) 对于 $w\in\mathbb{V}$，其中 $h(y,w)=0$，设 $w':=(1-e_y^\vee)\circ w$。于是，我们有

$$\Psi(\mathcal{Y}_{h_1}(y)\cap\mathcal{Y}_{h_i}(w))=\mathcal{Y}_{h_i-1}(w')\ in\ \mathcal{N}_{n-1}^{[\mathbb{h}-1]},\ and\ h(w',w')=h(w,w).$$

证明。 证明与 [Cho18，命题 5 的证明几乎完全相同。12]。 □

定义 3.10。设 $0<m\le n$ 为整数，且 $\mathbb{h}=(h_1,\ldots,h_m)$ 为整数元组，满足 $0\le h_1<\cdots<h_m\le n$ 以及 $h_1\equiv\cdots\equiv h_m$（模 2）。

(1) 我们将 $\mathcal{E}_n^{\mathbb{h}}$ 的$\mathcal{E}_n$ 子集定义为

$$\mathcal{E}_n^{\mathbb{h}}=\{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathcal{E}_n\mid\forall i,\ \alpha_i=-h_j\text{ or }h_j\text{ for some }j\}$$

(2) 固定 $\alpha\in\mathcal{E}_n^{\mathbb{h}}$。假设 $\alpha_1\le\alpha_2\le\ldots\alpha_{h-1}<0\le\alpha_h\cdots\le\alpha_n$。设 $x_1,\ldots,x_{h-1},y_1,\ldots,y_{n-h+1}\in\mathbb{V}$ 为特殊同态。我们考虑特殊循环

$$\mathcal{Z}_{-\alpha_1}(x_1),\mathcal{Z}_{-\alpha_2}(x_2),\ldots,\mathcal{Z}_{-\alpha_{h-1}}(x_{h-1}),\mathcal{Y}_{\alpha_h}(y_1),\ldots,\mathcal{Y}_{\alpha_n}(y_{n-h+1})$$

在 $\mathcal{N}:=\mathcal{N}_n^{[\ ]_{\mathbb{h}}}$ 中。我们用 $\mathcal{I}_\alpha^{\mathbb{h}}(x_1,\ldots,x_{h-1},y_1,\ldots,y_{n-h+1})$ 表示$\mathcal{Z}_{-\alpha_1}(x_1),\mathcal{Z}_{-\alpha_2}(x_2),\ldots,\mathcal{Z}_{-\alpha_{h-1}}(x_{h-1}),\mathcal{Y}_{\alpha_h}(y_1),\ldots,\mathcal{Y}_{\alpha_n}(y_{n-h+1})$ 在$\mathcal{N}$中的算术交数。更准确地说，

$$\mathcal{I}_\alpha^{\mathbb{h}}(x_1,\ldots,x_{h-1},y_1,\ldots,y_{n-h+1})$$
$$=\chi(O_{\mathcal{Z}_{-\alpha_1}(x_1)}\otimes^{\mathbb{L}}_{O_{\mathcal{N}}}\cdots\otimes^{\mathbb{L}}_{O_{\mathcal{N}}}O_{\mathcal{Z}_{-\alpha_{h-1}}(x_{h-1})}\otimes^{\mathbb{L}}_{O_{\mathcal{N}}}O_{\mathcal{Y}_{\alpha_h}(y_h)})\otimes^{\mathbb{L}}_{O_{\mathcal{N}}}\cdots\otimes^{\mathbb{L}}_{O_{\mathcal{N}}}O_{\mathcal{Y}_{\alpha_n}(y_{n-h+1})}).$$

这里，我们用 χ 表示欧拉-庞加莱示性数，用 $\otimes^{\mathbb{L}}_{O_{\mathcal{N}}}$ 表示 $O_{\mathcal{N}}$-模的导出张量积。

命题 3.11. 设 $0 < m \leq n$ 为整数，且$\mathbb{h} = (h_1, \ldots, h_m)$ 为一个整数元组，使得 $0 \leq h_1 < \cdots < h_m \leq n$ 且 $h_1 \equiv \cdots \equiv h_m$(模2)。假设 $\alpha \in E^{\mathbb{h}}_n$。假设 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \alpha_{h-1} < 0 \leq \alpha_h \cdots \leq \alpha_n$。设 $x_1, \ldots, x_{h-1}, y_1, \ldots, y_{n-h+1} \in \mathbb{V}$ 为特殊同态。那么，以下陈述成立。

(1) 假设$\mathrm{val}(h(x_1, x_1)) = 0$, $\alpha_1 = -h_m > -n$，且 $x_1 \perp \{x_2, \ldots, x_{h-1}, y_1, \ldots, y_{n-h+1}\}$。那么，

$$\mathcal{I}^{\mathbb{h}}_{\alpha}(x_1, \ldots, x_{h-1}, y_1, \ldots, y_{n-h+1}) = \mathcal{I}^{\mathbb{h}}_{\overline{\alpha}}(x_2, \ldots, x_{h-1}, y_1, \ldots, y_{n-h+1}).$$

这里，回顾定义*2.21* 中的结论： ${}^1\alpha := (\overline{\alpha}_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{E}^{\mathbb{h}}_{n-1}$

(2) 假设 $\mathrm{val}(h(x_1, x_1)) = 0$，且 $\alpha_1 = -h_m = -n$。则，

$$\mathcal{I}^{\mathbb{h}}_{\alpha}(x_1, \ldots, x_{h-1}, y_1, \ldots, y_{n-h+1}) = 0.$$

(3) 假设 $\mathrm{val}(h(y_1, y_1)) = -1$、 $\alpha_h = -h_1 > 0$，以及 $y_1 \perp \{x_1, \ldots, x_{h-1}, y_2, \ldots, y_{n-h+1}\}$。则，

$$\mathcal{I}^{\mathbb{h}}_{\alpha}(x_1, \ldots, x_{h-1}, y_1, \ldots, y_{n-h+1}) = \mathcal{I}^{\mathbb{h}-1}_{\overline{\alpha}^1}(x_1, \ldots, x_{h-1}, y_2, \ldots, y_{n-h+1}).$$

这里，回顾定义 *2.9* 可知 $\alpha^1 := (\alpha_1 \overline{+} 1, \ldots, \alpha_{h-1} + 1, \alpha_{h+1} - 1, \ldots, \alpha_n - 1) \in \mathcal{E}^{\mathbb{h}-1}_{n-1}$.

(4) 假设 $\mathrm{val}(h(y_1, y_1)) = -1$，且 $\alpha_h = h_1 = 0$。则，

$$\mathcal{I}^{\mathbb{h}}_{\alpha}(x_1, \ldots, x_{h-1}, y_1, \ldots, y_{n-h+1}) = 0.$$

证明。 这由命题3.8 和命题 3.9得到。 □

回顾定义 3.3中的对偶同构 $\theta\colon \mathcal{N}^{[\ ]}_n \to {}_{\mathbb{h}}\mathcal{N}^{[\mathbb{h}^\vee]}_n$，其中 $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_m)$，且 $\mathbf{h}^\vee = (n - h_m, \ldots, n - h_1)$。在此同构下，对于 $x, y \in \mathbb{V}$，有

$$\theta(\mathcal{Y}_{h_i}(y)) = \mathcal{Z}_{n-h_i}(\lambda_{h_1} \circ \alpha_{h_m,h_1} \circ y),$$
$$\theta(\mathcal{Z}_{h_i}(x)) = \mathcal{Y}_{n-h_i}(\pi^{-1}\lambda_{h_1} \circ \alpha_{h_m,h_1} \circ x).$$

这意味着以下引理。

引理 3.12。 设 $0 < m \leq n$ 为整数，且令 $\mathbb{h} = (h_1, \ldots, h_m)$ 为满足$0 \leq h_1 < \cdots < h_m \leq n$ 且 $h_1 \equiv \cdots \equiv h_m$(模 2) 的整数元组。假设 $\alpha \in E^{\mathbb{h}}_n$。假设 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \alpha_{h-1} < 0 \leq \alpha_h \cdots \leq \alpha_n$。令 $x_1, \ldots, x_{h-1}, y_1, \ldots, y_{n-h+1} \in \mathbb{V}$ 为特殊同态。对于特殊同态 $z \in \mathbb{V}$，记 $\check{}z$ 为 $\lambda_{h_1} \circ \alpha_{h_m,h_1} \circ z$。则有

$$\mathcal{I}^{\mathbb{h}}_{\alpha}(x_1, \ldots, x_{h-1}, y_1, \ldots, y_{n-h+1}) = \mathcal{I}^{\mathbb{h}^\vee}_{\alpha^{\vee_{n-h+1}}}(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_{n-h+1}, \pi^{-1}\check{x}_1, \ldots, \pi^{-1}\check{x}_{h-1}).$$

这里回顾一下定义*2.20* 中的内容:

$$\alpha^{\vee_{n-h+1}} = (\alpha_h - n, \ldots, \alpha_n - n, \alpha_1 + n, \ldots, \alpha_{h-1} + n) \in \mathcal{E}^{\mathbb{h}^\vee}_n.$$

注 3.13. 设 B 为 $n\times n$ 矩阵

$$B=\begin{pmatrix} h(x_i,x_j) & h(x_i,y_l)\\ h(y_k,x_j) & h(y_k,y_l)\end{pmatrix}_{\substack{1\le i,j\le h-1\\ 1\le k,l\le n-h+1}}.$$

于是，我们有

$$B^{\vee_{n-h+1}}=\begin{pmatrix} h'(\check{y}_k,\check{y}_l) & h'(\check{y}_k,\pi^{-1}\check{x}_j)\\ h'(\pi^{-1}\check{x}_i,\check{y}_l) & h'(\pi^{-1}\check{x}_i,\pi^{-1}\check{x}_j)\end{pmatrix}_{\substack{1\le k,l\le n-h+1\\ 1\le i,j\le h-1}},$$

其中， h' 是对偶侧特殊同态的厄米形式。在此，我们注意到$B^{\vee_{n-h+1}}$ 定义见定义 2.20。

4. 猜　想：特殊循环的算术交数

4.1. 猜想。在本小节中，我们考虑 $\mathbf{h}=(1,3,\dots,2n-1)$ 和 $\alpha=(-2n+1,-2n+3,\dots,-1,1,\dots,2n-1)\in \mathrm{E}^{\mathbb{h}}_{2n}$。在此背景下，我们用加权表示密度对 Iwahori 级 Rapoport–Zink 空间 $\mathrm{N}^{[\mathbb{h}]}_{2n}$ 中特殊循环 $\mathrm{Z}_{2n-1}(x_1),\dots,\mathrm{Z}_1(x_n)$, $\mathrm{Y}_1(y_1),\dots$ 以及 $\mathrm{Y}_{2n-1}(y_n)$ 的算术交数 $\mathrm{I}^{\mathbb{h}}_{\alpha}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$，$x_i$, $y_i\in\mathbb{V}$, 提出一个猜想。

我们从以下注开始。

注 4.1. 设 $0<m\le n$ 为整数，并设 $\mathbf{h}=(h_1,\dots,h_m)$ 为一个整数元组，满足 $0\le h_1<\cdots<h_m\le n$ 且 $h_1\equiv\cdots\equiv h_m$（模 2）。假设 $\alpha\in\mathrm{E}^{\mathbb{h}}_n$。设 $\{x_1,\dots,x_{h-1},y_1,\dots,y_{n-h+1}\}$ 是特殊同态空间 $\mathbb{V}$ 的一组基。正如超特殊层情形（[KR11]）和极大抛物层情形（[Cho22]）中一样，自然可以预期，在一般抛物层情形中，交叉数 $\mathrm{I}^{[\mathbb{h}]}_{\alpha}(x_1,\dots,x_{h-1},y_1,\dots,y_{n-h+1})$ 仅取决于矩阵 B:

$$B=\begin{pmatrix} h(x_i,x_j) & h(x_i,y_l)\\ h(y_k,x_j) & h(y_k,y_l)\end{pmatrix}_{\substack{1\le i,j\le h-1\\ 1\le k,l\le n-h+1}}.$$

在此假设下，我们记 $\mathcal{I}^{[\mathbb{h}]}_{\alpha}(B)$ 为 $\mathcal{I}^{[\mathbb{h}]}_{\alpha}(x_1,\ \dots,\ x_{h-1},\ y_1,\ \dots,\ y_{n-h+1})$。于是，引理 3.12 和注 3.13 表明

$$\mathcal{I}^{[\mathbb{h}]}_{\alpha}(B)=\mathcal{I}^{[\mathbb{h}^\vee]}_{\alpha^{\vee_{n-h+1}}}(B^{\vee_{n-h+1}}).$$

因此，当 $\mathbf{h}=(1,\ 3,\ \dots\dots,\ 2n-1)$ 且 $\alpha=(-2n+1,\ -2n+3,\ \dots\dots,\ -1,\ 1,\ \dots\dots,\ 2n-1)\in\mathcal{E}^{\mathbb{h}}_{2n}$ 时，我们预期

$$\mathcal{I}^{[\mathbb{h}]}_{\alpha}(B)=\mathcal{I}^{[\mathbb{h}^\vee]}_{\alpha^{\vee_n}}(B^{\vee_n})=\mathcal{I}^{[\mathbb{h}]}_{\alpha}(B^{\vee_n}).$$

这表明，$\mathcal{I}^{[\mathbb{h}]}_{\alpha}(B)$ 的猜想公式应当在变换 $B\leftrightarrow B^{\vee_n}$ 下保持不变。

Th定理 4.2。 对于 $\alpha=(-2n+1、\ -2n+3、\dots、\ -1、\ 1、\dots、\ 2n-1)\in E^{\mathbb{h}}_{2n}$，有

$$q^{4n^2-2n}W'_{\alpha}(B)-\sum_{\beta}C_{\beta,2n-1-\beta_{2n}}W_{\beta}(B,0)=q^{4n^2-2n}W'_{\alpha}(B^{\vee_n})-\sum_{\beta}C_{\beta,2n-1-\beta_{2n}}W_{\beta}(B^{\vee_n},0),$$

其中 $C_{\beta,\ i}$ 定义为

$$C_{\beta,i}:=\begin{cases} q^{4n^2-2n\delta_\beta-\sum_{i=1}^{2n}\beta_i}(-1)^k\{\frac{1}{q^{2k-1}+1}+\frac{1}{q^{2k}-1}\} & if\ i=2k-1,\\ q^{4n^2-2n\delta_\beta-\sum_{i=1}^{2n}\beta_i}(-1)^k\{\frac{1}{q^{2k-2}-1}+\frac{1}{q^{2k-1}+1}\} & if\ i=2k-2,\\ 0 & if\ i=0. \end{cases}$$

这里， β 遍历满足以下条件的 E_{2n} 子集：

(1) 对所有 $1\le i\le 2n$， $\beta_i=-\beta_{2n+1-i}$。 *(2)* $\alpha-\beta$ 递增，即对所有 $1\le i\le 2n-1$， $\alpha_i-\beta_i\le\alpha_{i+1}-\beta_{i+1}$。

证明。 根据命题2.3，我们有

$$\begin{aligned} &q^{4n^2-2n}W'_\alpha(B)-\sum_\beta C_{\beta,2n-1-\beta_{2n}}W_\beta(B,0)\\ &=\sum_{Y\in\mathcal{R}_{2n}}\frac{\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,2n)}\{q^{4n^2-2n}\mathcal{F}'_\alpha(Y)-\sum_\beta C_{\beta,2n-1-\beta_{2n}}\mathcal{F}_\beta(Y,0)\}, \end{aligned}\tag{4.1}$$

此外，根据命题2.3、命题 2.22、命题 2.23和命题2.24，我们有

$$\begin{aligned} &q^{4n^2-2n}W'_\alpha(B^{\vee_n})-\sum_\beta C_{\beta,2n-1-\beta_{2n}}W_\beta(B^{\vee_n},0)\\ &=\sum_{Y\in\mathcal{R}_{2n}}\frac{\mathcal{G}(Y,B^{\vee_n})}{\alpha(Y,n)}\{q^{4n^2-2n}\mathcal{F}'_\alpha(Y)-\sum_\beta C_{\beta,2n-1-\beta_{2n}}\mathcal{F}_\beta(Y,0)\}\\ &=\sum_{Y\in\mathcal{R}_{2n}}\frac{\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y,2n)}\{q^{4n^2-2n}\mathcal{F}'_\alpha(Y^{\wedge_n})-\sum_\beta C_{\beta,2n-1-\beta_{2n}}\mathcal{F}_\beta(Y^{\wedge_n},0)\}. \end{aligned}\tag{4.2}$$

因此，根据（2.1）和（2.2），只需证明

$$q^{4n^2-2n}\mathcal{F}'_\alpha(Y)-\sum_\beta C_{\beta,2n-1-\beta_{2n}}\mathcal{F}_\beta(Y,0)=q^{4n^2-2n}\mathcal{F}'_\alpha(Y^{\wedge_n})-\sum_\beta C_{\beta,2n-1-\beta_{2n}}\mathcal{F}_\beta(Y^{\wedge_n},0).$$

这个等式将在下面的引理 4.9 中证明。定理的证明至此完成。 □

猜想 4.3。 令 $\mathbb{h}=(1、3、\ldots、2n-1)$ 以及 $\alpha=(-2n+1、-2n+3、\ldots、-1、1、\ldots、2n-1)\in E_{2n}^{\mathbb{h}}$。令 $\{x_1、\ldots、x_n、y_1、\ldots、y_n\}$ 为特殊同态空间 $\mathbb{V}$ 的一组基。则有

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\alpha^{[\mathbb{h}]}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) &=\frac{1}{W_\alpha(A_{2n,1},0)}\{W'_\alpha(B)-q^{-4n^2+2n}\sum_\beta C_{\beta,2n-1-\beta_{2n}}W_\beta(B,0)\}\\ &=\frac{q^{6n^2-n}}{(q+1)^2(q^2-1)^{n-1}}\{W'_\alpha(B)-q^{-4n^2+2n}\sum_\beta C_{\beta,2n-1-\beta_{2n}}W_\beta(B,0)\}. \end{aligned}$$

这里， B 是 $2n\times 2n$ 矩阵

$$B=\begin{pmatrix} h(x_i,x_j) & h(x_i,y_l)\\ h(y_k,x_j) & h(y_k,y_l)\end{pmatrix}_{\substack{1\le i,j\le n\\ 1\le k,l\le n}}.$$

我们注意到，矩阵 $A_{2n、1}$ 定义于 *2.1*。

注记 4.4。 在猜想 4.3 中，常数 $W_\alpha(A_{2n,\ 1},\ 0)$ 与关于 $\mathbb{h}=(1,\ 3,\ \ldots,\ 2n-1)$ 的 Iwahori 群的体积有关，其中采用的是我们所选的测度。

注记 4.5。 对于 $\mathbb{h} = (h_1, \ldots, h_m)$，我们有 $h_1 \neq \mathrm{val}(\det(B))$（模 2）。因此，对于满足 $h_1 \equiv \beta_1$（模 2）的 $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathcal{E}_n$，我们有 $W_\beta(B, 0) = 0$。

注 4.6。 结合命题 3.11、引理 3.12及其解析对应物——命题2.19、命题2.25和定理4.2——猜想4.3给出了以下算术交数的猜想公式：

(1) $\mathcal{I}_{\alpha'}^{[\mathbb{h}']}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{n-1})$, $\alpha' = (-2n+2, -2n+4, \ldots, 0, \ldots, 2n-2)$, $\mathbb{h}' = (0, 2, \ldots, 2n-2)$;
(2) $\mathcal{I}_{\alpha'}^{[\mathbb{h}']}(x_1,\ldots,x_{n-1},y_1,\ldots,y_n)$, $\alpha' = (-2n+3, \ldots, -1, 1, \ldots, 2n-1)$, $\mathbb{h}' = (1, 3, \ldots, 2n-1)$;
(3) $\mathcal{I}_{\alpha'}^{[\mathbb{h}']}(x_1,\ldots,x_{n-1},y_1,\ldots,y_{n-1})$, $\alpha' = (-2n+4, \ldots, 0, 2, \ldots, 2n-2)$, $\mathbb{h}' = (0, 2, \ldots, 2n-2)$;
(4) $\mathcal{I}_{\alpha'}^{[\mathbb{h}']}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{n-1})$, $\alpha' = (-2n+1, \ldots, -1, 1, \ldots, 2n-3)$, $\mathbb{h}' = (1, 3, \ldots, 2n-3)$;
(5) $\mathcal{I}_{\alpha'}^{[\mathbb{h}']}(x_1,\ldots,x_{n-1},y_1,\ldots,y_{n-1})$, $\alpha' = (-2n+2, \ldots, 0, 2, \ldots, 2n-4)$, $\mathbb{h}' = (0, 2, \ldots, 2n-2)$.

因此，猜想 4.3 给出了任意 Iwahori 层级和任意维数下特殊循环算术交数的猜想公式，其中特殊循环的类型两两不同。

注 4.7。 令 $\mathbb{h} = (h_1, \ldots, h_m)$ 为满足 $0 \leq h_1 < \cdots < h_m \leq n$ 且 $h_1 \equiv \cdots \equiv h_m$（模 2）的整数元组。令 $\mathbb{h}' = (h'1, \ldots, h'l)$ 为满足 $l > m$、$0 \leq h'_1 < \cdots < h'_l \leq n$、$h'_1 \equiv \cdots \equiv h'l$（模 2）的整数元组。进一步假设，对于所有 $1 \leq i \leq m$、$h_i = h'j$，均存在某个 $1 \leq j \leq l$。例如，$\mathbb{h} = (1, 3)$ 且 $\mathbb{h}' = (1, 3, 5)$。令 $\alpha \in \mathrm{Eh}_n \subset \mathrm{Eh}'_n$，并假设 $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_{h-1} < 0 \leq \alpha_h \leq \cdots \leq \alpha_n$。令 x_1、……、x_{h-1}、y_1、……、$y_{n-h+1} \in \mathbb{V}$ 为特殊同态。则数目 $\mathrm{I}_\alpha^{[\ ]}\mathbb{h}(x_1$、……、$x_{h-1}$、$y_1$、……、$y_{n-h+1})$（分别为 $\mathrm{I}_\alpha^{[\ ]}\mathbb{h}'(x_1$、……、$x_{h-1}$、$y_1$、……、$y_{n-h+1})$）是特殊循环的算术交数

$$\mathcal{Z}_{-\alpha_1}(x_1), \ldots, \mathcal{Z}_{-\alpha_{h-1}}(x_{h-1}), \mathcal{Y}_{\alpha_h}(y_1), \ldots, \mathcal{Y}_{\alpha_n}(y_{n-h+1})$$

在 $\mathcal{N}_n^{[\mathbb{h}]}$（分别为 $\mathcal{N}_n^{[\ ']\mathbb{h}}$）中。因此，自然会问是否

$$\mathcal{I}_\alpha^{[\mathbb{h}']}(x_1, \ldots, x_{h-1}, y_1, \ldots, y_{n-h+1}) \stackrel{?}{=} \frac{\mathrm{Vol}(P^{[\mathbb{h}]})}{\mathrm{Vol}(P^{[\mathbb{h}']})} \mathcal{I}_\alpha^{[\mathbb{h}]}(x_1, \ldots, x_{h-1}, y_1, \ldots, y_{n-h+1}), \tag{4.3}$$

其中，$P^{[\mathbb{h}]}$（分别为 $P^{[\mathbb{h}']}$）是与 $\mathbb{h}$（分别为 $\mathbb{h}'$）相关联的抛物子群。

当 $n = 2$时，(4.3) 可由投影公式推出。

注 4.8。 自然可以预期，通过特殊循环的对偶性来表述猜想的策略也可应用于其他情形。例如，当 $\mathbb{h} = (1,3)$ 且 $\alpha = (-3, -3, 1, 3) \in \mathcal{E}_4^{\mathbb{h}}$ 时，采用类似的策略，我们猜想，特殊循环 $\mathcal{Z}_3(x_1), \mathcal{Z}_3(x_2), \mathcal{Y}_1(y_1), \mathcal{Y}_3(y_2)$ 在 $\mathcal{N}_4^{[\mathbb{h}]}$ 中的算术交数为

$$\mathcal{I}_\alpha^{[\mathbb{h}]}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{q^{22}}{(q+1)^2(q^2-1)} \{W'_\alpha(B) + \frac{q^5}{q^2-1} W_\beta(B, 0) - \frac{q^4}{q^2-1} W_\gamma(B, 0)\}, \tag{4.4}$$

其中，$\beta = (-2, -2, 0, 2)$ $\gamma = (-2, -2, 2, 2)$，且 B 是该 4×4 矩阵

$$B = \begin{pmatrix} h(x_i, x_j) & h(x_i, y_l) \\ h(y_k, x_j) & h(y_k, y_l) \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i,j \leq 2 \\ 1 \leq k,l \leq 2}}.$$

现在，假设 $\mathrm{val}(h(y_1, y_1)) = -1$ 并且 $B = Y_{\tau,\ \lambda}$其中 $\tau(3) = 3$ 且 $\lambda_3 = -1$。令 B 为从 3×3中删除第 3 行和第 3 列后得到的 B矩阵。根据命题26

3.9，$\mathrm{I}_{\alpha}^{[\mathbb{h}]}(x_1,x_2,y_1,y_2)$ 是 $\mathrm{N}_3^{[(0,2)]}$ 中特殊循环 $\mathrm{Z}_2(x_1')$、$\mathrm{Z}_2(x_2')$、$\mathrm{Y}_2(y_2')$ 的算术交数，其中 $\{x_1',x_2',y_2'\}$ 的厄米矩阵为 B。另一方面，根据命题 2.10，(4.4) 的解析侧等于

$$(q+1)\mathcal{I}^{[(2)]}_{(-2,-2,2)}(x_1',x_2',y_2')=\frac{\mathrm{Vol}(P^{[(2)]})}{\mathrm{Vol}(P^{[(0,2)]})}\mathcal{I}^{[(2)]}_{(-2,-2,2)}(x_1',x_2',y_2').$$

因此，若满足（4.3），则猜想公式（4.4与极大抛物层级下的 Kudla–Rapoport 猜想相一致。

引理 4.9。对于 α，β's，以及 $C_{\beta,\ i}$'s，在定理 4.2中，我们有

$$q^{4n^2-2n}\mathcal{F}'_{\alpha}(Y)-\sum_{\beta}C_{\beta,2n-1-\beta_{2n}}\mathcal{F}_{\beta}(Y,0)=q^{4n^2-2n}\mathcal{F}'_{\alpha}(Y^{\wedge_n})-\sum_{\beta}C_{\beta,2n-1-\beta_{2n}}\mathcal{F}_{\beta}(Y^{\wedge_n},0).$$

我们将在本小节末证明该引理。首先引入以下记号。

定义 4.10。(1) 对于 $i\geq 0$，我们定义 $C_{0,\ i}$ 如下

$$C_{0,i}=\begin{cases}(-1)^{(i+1)/2}(\frac{1}{q^i+1}+\frac{1}{q^{i+1}-1}) & \text{if } i \text{ is odd},\\ (-1)^{(i+2)/2}(\frac{1}{q^i-1}+\frac{1}{q^{i+1}+1}) & \text{if } i \text{ is even},\\ 0 & \text{if } i=0.\end{cases}$$

(2) 我们定义一个映射 $\mu:\ \mathcal{R}_{2n}\to\{0,\ 1\}^{2n}$ 如下

$$\begin{array}{rcl}\mu:\mathcal{R}_{2n} & \to & \{0,1\}^{2n}\\ Y=Y_{\sigma,e} & \mapsto & (\mu(Y)_i)_{1\leq i\leq 2n},\end{array}$$

使得

$$\mu(Y)_i=\begin{cases}1 & \text{if } i\in\{j\mid j+\sigma(j)\geq 2n+1,e_j\leq 0\}\cup\{j\mid j+\sigma(j)\leq 2n,e_j\leq -1\}\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

(3) 对于 $Y\in\mathcal{R}_{2n}$，我们定义 $\kappa(Y)=\kappa(\mu(Y)):=\sum_{i=n+1}^{2n}\mu(Y)_i-\sum_{i=1}^{n}\mu(Y)_i$.

(4) 对于 $\beta,\ \gamma\in\mathcal{E}_n$，其中

$$\beta_i=-\beta_{2n+1-i},\gamma_i=-\gamma_{2n+1-i},\ \text{for all } i,$$

我们定义 $\mathcal{F}_{\beta,\ \gamma}(Y,\ 0):=\prod_{j,\ \mu(Y)_j=1}(-q)^{\beta_j-\gamma_j}$.

命题 4.11。设 $Y=Y_{\sigma,\ e}\in R_{2n}$，$\alpha=(-(2n-1)\ -(2n-3)\ldots,-1,1,3,\ldots,2n-1)$，并设 $\beta\in E_{2n}$，其中对所有 i均有 $\beta_i=-\beta_{2n+1-i}$。则有以下公式。

(1) $\mathrm{F}'_{\alpha}(Y)=(\sum_{j=1}^{2n}\min(0,e_i))\mathrm{F}_{\alpha}(Y,0)$. (2)

$\mathrm{F}'_{\alpha}(Y)-\mathrm{F}'_{\alpha}(Y^{\wedge_n})=\kappa(Y)\mathrm{F}_{\alpha}(Y,0)$. (3)

$q^{2n-2n\delta_{\beta}}\mathrm{F}_{\beta}(Y,0)=\mathrm{F}_{\alpha}(Y,0)\mathrm{F}_{\alpha,\beta}(Y,0)$.

证明。(1) 这直接由命题 2.6得出。

（2）根据命题 2.6，有 $\mathcal{F}_{\alpha}(Y,\ r)=\mathcal{F}_{\alpha}(Y,\ 0)\ f_{2r}(Y)$。此外，根据命题 2.22 以及 $\alpha=\alpha^{\vee_n}$这一事实，有

$$\mathcal{F}_{\alpha}(Y,0)=\mathcal{F}_{\alpha^{\vee_n}}(Y^{\wedge_n},0)=\mathcal{F}_{\alpha}(Y^{\wedge_n},0).$$

因此，根据（1），有

$$\mathcal{F}'_\alpha(Y^{\wedge_n}) = \{\sum_{i\in A^n(Y)} \min(0,e_i+1) + \sum_{i\in B^n(Y)} \min(0,e_i) + \sum_{i\in C^n(Y)} \min(0,e_i-1)\}\mathcal{F}_\alpha(Y,0).$$

现在，只需证明

$$\sum_{i\in A^n(Y)} \min(0,e_i) - \min(0,e_i+1) + \sum_{i\in C^n(Y)} \min(0,e_i) - \min(0,e_i-1) = \kappa(Y). \tag{4.5}$$

若 $i\in A^n(Y)$，则有 $i+\sigma(i)\le 2n$，从而当 $e_i\le -1$ 时，$\mu(Y)_i=1$；当 $e_i\ge 0$ 时，$\mu(Y)_i=0$。这表明 $-\mu(Y)_i=\min(0,e_i)-\min(0,e_i+1)$。

类似地，若 $i\in C^n(Y)$，则有 $i+\sigma(i)\ge 2n$，从而当 $e_i\le 0$ 时，$\mu(Y)_i=1$；当 $e_i\ge 1$ 时，$\mu(Y)_i=0$。这表明 $\mu(Y)_i=\min(0,e_i)-\min(0,e_i-1)$。

最后，我们注意到，根据定义，$\mu(Y)_i=\mu(Y)_{\sigma(i)}$。因此，若 $i\in B^n(Y)$，则$\mu(Y)_i-\mu(Y)_{\sigma(i)}=0$。这就完成了(2)的证明。

(3) 根据命题 2.6，我们有

$$\mathcal{F}_\beta(Y,0) = q^{-4n^2+2n\delta_\beta} f_{2n}(Y) \prod_{\substack{1\le j\le 2n\\ j+\sigma(j)\le 2n}} (-q)^{-(\beta_i+\beta_{\sigma(i)})(\min(0,e_j+1)-\min(0,e_j))/2} \prod_{\substack{1\le j\le 2n\\ j+\sigma(j)\ge 2n+1}} (-q)^{-(\beta_i+\beta_{\sigma(i)})(\min(0,e_j)-\min(0,e_j-1))/2},$$

$$\mathcal{F}_\alpha(Y,0) = q^{-4n^2+2n} f_{2n}(Y) \prod_{\substack{1\le j\le 2n\\ j+\sigma(j)\le 2n}} (-q)^{-(\alpha_i+\alpha_{\sigma(i)})(\min(0,e_j+1)-\min(0,e_j))/2} \prod_{\substack{1\le j\le 2n\\ j+\sigma(j)\ge 2n+1}} (-q)^{-(\alpha_i+\alpha_{\sigma(i)})(\min(0,e_j)-\min(0,e_j-1))/2}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} q^{2n-2n\delta_\beta}\mathcal{F}_\beta(Y,0) &= \mathcal{F}_\alpha(Y,0) \prod_{\substack{1\le j\le 2n\\ j+\sigma(j)\le 2n\\ e_j\le -1}} (-q)^{(\alpha_i-\beta_i+\alpha_{\sigma(i)}-\beta_{\sigma(i)})/2} \prod_{\substack{1\le j\le 2n\\ j+\sigma(j)\le 2n\\ e_j\le -1}} (-q)^{(\alpha_i-\beta_i+\alpha_{\sigma(i)}-\beta_{\sigma(i)})/2} \\ &= \mathcal{F}_\alpha(Y,0)\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(Y,0). \end{aligned}$$

这就完成了该命题的证明。

□

现在，我们引入以下记号。

定义 4.12. (1) 我们定义 $\mathcal{E}_{2n,\alpha}$ 的一个子集 $\mathcal{E}_{2n}$，使得

$$\mathcal{E}_{2n,\alpha} := \left\{ \beta\in\mathcal{E}_{2n} \mid \begin{array}{l} (1)\ \beta_i = -\beta_{2n+1-i} \text{ for all } 1\le i\le 2n. \\ (2)\ \alpha_i-\beta_i \le \alpha_{i+1}-\beta_{i+1} \text{ for all } 1\le i\le 2n-1. \end{array} \right\}$$

(2) 对于 $0\le k\le 2n-1$ 和 $Y\in\mathcal{R}_{2n}$，我们定义 $A_{k,2n}(Y)$，使得

$$A_{k,2n}(Y) := \sum_{\substack{\beta\in\mathcal{E}_{2n,\alpha}\\ \beta_{2n}=k}} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(Y,0).$$

类似地，对于 $\lambda\in\{0,1\}^{2n}$，我们任取满足 $\mu(Y)=\lambda$ 的 $Y\in\mathcal{R}_{2n}$，并通过以下方式定义$A_{k,2n}(\lambda)$:

$$A_{k,2n}(\lambda) = A_{k,2n}(\mu(Y)) := A_{k,2n}(Y).$$

我们也采用如下约定：$A_{-1,\ 2n}(\lambda) = A_{-1,\ 2n}(Y) = 0$。

我们注意到，该定义不依赖于 Y 的选取，因为 $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(Y)$ 仅依赖于 $\mu(Y)$。我们还注意到，对于任意 Y，$A_{2n-1,2n}(Y) = \mathcal{F}_{\alpha,\alpha}(Y, 0) = 1$。

(3) 对于 $0 \le k \le 2n-1$ 和 $Y \in \mathcal{R}_{2n}$，我们定义 $A^{\vee}_{k,2n}(Y)$ 如下：

$$A^{\vee}_{k,2n}(Y) := \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{E}_{2n,\alpha} \\ \beta_{2n}=k}} \mathcal{F}_{\alpha,\beta^{\vee_n}}(Y, 0).$$

类似地，对于 $\lambda \in \{0,1\}^{2n}$，我们任取满足 $\mu(Y) = \lambda$ 的 $Y \in \mathcal{R}_{2n}$，并定义 $A^{\vee}_{k,2n}(\lambda)$ 如下：

$$A^{\vee}_{k,2n}(\lambda) = A^{\vee}_{k,2n}(\mu(Y)) := A^{\vee}_{k,2n}(Y).$$

注意，这一定义不依赖于 Y 的选择，因为 $\mathcal{F}_{\alpha,\beta^{\vee_n}}(Y)$ 仅取决于 $\mu(Y)$。

为证明引理 4.9，我们需要以下引理。

引理 4.13. 假设 设 $0 \le k \le n-1$，且 $\lambda \in \{0,1\}^{2n}$。那么，我们有以下公式 .

(1) $A_{2k+1,2n}(\lambda) = (-q)^{-\kappa(\lambda)} A_{2k,2n}(\lambda)$。 (2) $A^{\vee}_{2k,2n}(\lambda) = (-q)^{-(2n-2k)\kappa(\lambda)} A_{2k,2n}(\lambda)$。 (3) $A^{\vee}_{2k+1,2n}(\lambda) = (-q)^{-(2n-2k-2)\kappa(\lambda)} A_{2k+1,2n}(\lambda) = (-q)^{-(2n-2k-1)\kappa(\lambda)} A_{2k,2n}(\lambda)$。 (4) $A_{2k+1,2n}(\lambda) = (-q)^{2\kappa(\lambda)} A_{2k+1,2n-2}(\lambda) + A_{2k-1,2n-1}(\lambda)$，其中 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \overline{\lambda_{2n}}) \in \{0,1\}^{2\overline{n}}$，且 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_{n+2}, \ldots, \overline{\lambda_{2n}}) \in \{0,1\}^{2n-2}$。

证明。 （1）对于（1），我们考虑双射

$$\begin{array}{ccc} \{\beta \in \mathcal{E}_{2n,\alpha} \mid \beta_{2n} = 2k\} & \longrightarrow & \{\beta \in \mathcal{E}_{2n,\alpha} \mid \beta_{2n} = 2k+1\} \\ \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{2n}) & \mapsto & \beta' = (\beta_1 - 1, \ldots, \beta_n - 1, \beta_{n+1} + 1, \ldots, \beta_{2n} + 1). \end{array} \tag{4.6}$$

那么，对于任意 $Y \in \mathcal{R}_{2n}$ with $\mu(Y) = \lambda$，我们有

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(Y, 0) = (-q)^{-\kappa(\lambda)} \mathcal{F}_{\alpha,\beta'}(Y, 0).$$

由于（4.1）是一个双射，我们有

$$A_{2k+1,2n}(\lambda) = (-q)^{-\kappa(\lambda)} A_{2k,2n}(\lambda).$$

这证明了（1）成立。

（2）对于（2），我们考虑集合

$$\mathscr{S}_{2n,t} := \{(\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_{2n} - \beta_{2n}) \mid \beta \in \mathcal{E}_{2n,\alpha},\ \beta_{2n} = t\}.$$

那么，$\mathscr{S}_{2n,t}$ 是所有满足以下条件的 $2n$ 元整数组 $(d_1, \ldots, d_{2n})$ 的集合：

(a) $d_i = -d_{2n+1-i}$。 (b) $d_{2n} = 2n - 1 - t$。 (c) $d_{n+1} =$,

® t 为奇数时为 0，1 t .

为偶数时为 0（d）

$0 \le d_{i+1} - d_i \le 2, \quad i \ge n+1$。

（e） $d_1 \equiv d_2 \equiv \cdots \equiv d_{2n}$（模 2）。

同样地，我们考虑集合

$$\mathscr{S}^{\vee}_{2n,t} := \{(\alpha_1 - \beta_1^{\vee}, \ldots, \alpha_{2n} - \beta_{2n}^{\vee}) \mid \beta \in \mathcal{E}_{2n,\alpha},\ \beta_{2n} = t\}.$$

于是，$\mathscr{S}^{\vee}_{2n,\ t}$是所有满足以下条件的 $2n$元整数组（d'_1，……，d'_{2n}）的集合：

（a） $d'_i = -d'_{2n+1-i}$。（b）

$d'_{2n} = -$（$2n-1-t$）。（c）

$d'_{2n} =$® 0，当 t 为奇数时

-1 t .当为偶数时（d）

$0 \le d'_{i+1} - d'_i \le 2, \quad i \ge n+1$。

（e）$d'_1 \equiv d_2 \equiv \cdots \equiv d'_{2n}$（模 2）。

这两个集合之间存在一个双射，定义为

$$\mathscr{S}_{2n,t} \longrightarrow \mathscr{S}^{\vee}_{2n,t}$$
$$(d_1, \ldots, d_n, d_{n+1}, \ldots, d_{2n}) \mapsto$$
$$\begin{cases} (d_1 + (2n-1-t), \ldots, d_n + (2n-1-t), d_{n+1} - (2n-1-t), \ldots, d_{2n} - (2n-1-t)) & \text{if } t \text{ is odd,} \\ (d_1 + (2n-t), \ldots, d_n + (2n-t), d_{n+1} - (2n-t), \ldots, d_{2n} - (2n-t)) & \text{if } t \text{ is even.} \end{cases}$$

现在，（2）由这个双射推出。

（3）（3）中的陈述由（1）和（2）推出。

（4）对于（4），我们考虑$\mathcal{E}_{2n,\ \alpha}$的子集

$$\mathcal{E}_{2n,\alpha} = \{\beta \in \mathcal{E}_{2n,\alpha} \mid -\beta_{n-1} = \beta_{n+2} = 0 \text{ or } 1\} \sqcup \{\beta \in \mathcal{E}_{2n,\alpha} \mid -\beta_{n-1} = \beta_{n+2} \neq 0, 1\}.$$

Th对于 $\alpha \equiv$ (–(2$n-3$)…, -1，1，…，(2$n-3$))，我们有如下双射 s:

$$\begin{array}{rcl} \ell_1 : \mathcal{E}_{2n-2,\overline{\alpha}} & \to & \{\beta \in \mathcal{E}_{2n,\alpha} \mid -\beta_{n-1} = \beta_{n+2} = 0 \text{ or } 1\} \\ (\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_{2n-2}) & \mapsto & \begin{cases} (\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_{n-1}, 0, 0, \overline{\beta}_n, \ldots \overline{\beta}_{2n-2}) \text{ if } \overline{\beta}_{2n-2} \text{ is even,} \\ (\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_{n-1}, -1, 1, \overline{\beta}_n, \ldots \overline{\beta}_{2n-2}) \text{ if } \overline{\beta}_{2n-2} \text{ is odd,} \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \ell_2 : \mathcal{E}_{2n-2,\overline{\alpha}} & \to & \{\beta \in \mathcal{E}_{2n,\alpha} \mid -\beta_{n-1} = \beta_{n+2} \neq 0, 1\} \\ (\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_{n-2}) & \mapsto & \begin{cases} (\overline{\beta}_1 - 2, \ldots, \overline{\beta}_{n-1} - 2, 0, 0, \overline{\beta}_n + 2, \ldots \overline{\beta}_{n-2} + 2) \text{ if } \overline{\beta}_{2n-2} \text{ is even,} \\ (\overline{\beta}_1 - 2, \ldots, \overline{\beta}_{n-1} - 2, -1, 1, \overline{\beta}_n + 2, \ldots \overline{\beta}_{n-2} + 2) \text{ if } \overline{\beta}_{2n-2} \text{ is odd.} \end{cases} \end{array}$$

那么，很容易看出

$$\{\beta \in \mathcal{E}_{2n,\alpha} \mid \beta_{2n} = k\} = \ell_1(\{\beta \in \mathcal{E}_{2n-2,\overline{\alpha}} \mid \overline{\beta}_{2n-2} = k\}) \sqcup \ell_2(\{\beta \in \mathcal{E}_{2n-2,\overline{\alpha}} \mid \overline{\beta}_{2n-2} = k-2\}).$$

因此，(4) 中的陈述得证。

□

现在，我们准备证明引理4.9。

引理的证明 *ma 4.9*。根据命题4.11 （1）、（2），我们有引理 4.9 等价于

$$q^{4n^2-2n}(\mathcal{F}'_\alpha(Y) - \mathcal{F}'_\alpha(Y^{\wedge_n})) = \sum_\beta C_{\beta,2n-1-\beta_{2n}}(\mathcal{F}_\beta(Y,0) - \mathcal{F}_\beta(Y^{\wedge_n},0))$$
$$\iff \quad \kappa(Y)\mathcal{F}_\alpha(Y,0) = \sum_\beta q^{-4n^2+2n} C_{\beta,2n-1-\beta_{2n}}((\mathcal{F}_\beta(Y,0) - \mathcal{F}_\beta(Y^{\wedge_n},0))).$$

注意

$$q^{-4n^2+2n\delta_\beta}C_{\beta,2n-1-\beta_{2n}}=C_{0,2n-1-\beta_{2n}}.$$

此外，根据命题2.22和命题4.11，我们有

$$\begin{aligned}&q^{2n-2n\delta_\beta}\mathcal{F}_\beta(Y,0)=\mathcal{F}_\alpha(Y,0)\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(Y,0),\\&q^{2n-2n\delta_\beta}\mathcal{F}_\beta(Y^{\wedge_n},0)=q^{2n-2n\delta_{\beta^{\vee_n}}}\mathcal{F}_{\beta^{\vee_n}}(Y,0)=\mathcal{F}_\alpha(Y,0)\mathcal{F}_{\alpha,\beta^{\vee_n}}(Y,0).\end{aligned}$$

因此，引理4.9 等价于

$$\kappa(Y)=\sum_\beta C_{0,2n-1-\beta_{2n}}(\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(Y,0)-\mathcal{F}_{\alpha,\beta^{\vee_n}}(Y,0)). \tag{4.7}$$

根据定义4.12，(4.7)等价于

$$\begin{aligned}&\kappa(Y)=\textstyle\sum_{k=0}^{2n-1}C_{0,2n-1-k}(A_{k,2n}(Y)-A^\vee_{k,2n}(Y)),\ \forall Y\in\mathcal{R}_{2n}\\\iff\ &\kappa(\lambda)=\textstyle\sum_{k=0}^{2n-1}C_{0,2n-1-k}(A_{k,2n}(\lambda)-A^\vee_{k,2n}(\lambda)),\ \forall\lambda\in\{0,1\}^{2n}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

根据引理4.13(1)、(2)、(3)，我们有 (4.8)等价于

(4.9)

$$\begin{aligned}&\kappa(\lambda)=C_{0,1}(1-(-q)^{-2\kappa(\lambda)})A_{2n-2,2n}(\lambda)\\&+\sum_{k=0}^{n-2}\{C_{0,2n-2k-1}(1-(-q)^{-(2n-2k)\kappa(\lambda)})+C_{0,2n-2k-2}((-q)^{-\kappa(\lambda)}-(-q)^{-(2n-2k-1)\kappa(\lambda)})\}A_{2k,2n}(\lambda).\end{aligned}$$

当 $\kappa(\lambda)=0$时，很容易看出(4.9)成立。

现在，假设 $\kappa(\lambda)\neq 0$。

注意

$$\begin{aligned}&C_{0,2n-2k-1}(1-(-q)^{-(2n-2k)\kappa(\lambda)})+C_{0,2n-2k-2}((-q)^{-\kappa(\lambda)}-(-q)^{-(2n-2k-1)\kappa(\lambda)})\\&=(-1)^{n-k}(\tfrac{1}{q^{2n-2k-1}+1}+\tfrac{1}{q^{2n-2k}-1})(1-(-q)^{-(2n-2k)\kappa(\lambda)})\\&+(-1)^{n-k}(\tfrac{1}{q^{2n-2k-2}-1}+\tfrac{1}{q^{2n-2k-1}+1})((-q)^{-\kappa(\lambda)}-(-q)^{-(2n-2k-1)\kappa(\lambda)})\\&=(-1)^{n-k}\tfrac{1}{q^{2n-2k}-1}(1-(-q)^{-(2n-2k)\kappa(\lambda)})\\&-(-1)^{n-k}((-q)^{-\kappa(\lambda)}+1)\tfrac{1}{q^{2n-2k-1}+1}(1-(-q)^{-(2n-2k-1)\kappa(\lambda)})\\&+(-1)^{n-k}(-q)^{-\kappa(\lambda)}\tfrac{1}{q^{2n-2k-2}-1}(1-(-q)^{-(2n-2k-2)\kappa(\lambda)}).\end{aligned}$$

对于 $\kappa(\lambda)>0$，我们定义常数 $d_{j,\ \kappa(\lambda)}(k)$，$0\leq k\leq n-1$, $0\leq j\leq\kappa(\lambda)-1$ 如下

$$d_{j,\kappa(\lambda)}(k):=(-1)^{n-k}(-q)^{-(2n-2k)(j+1)}\{1-((-q)^{-\kappa(\lambda)}+1)(-q)^{j+1}+(-q)^{-\kappa(\lambda)}(-q)^{2(j+1)}\}.$$

对于 $\kappa(\lambda)<0$，我们定义常数 $d_{j,\ \kappa(\lambda)}(k)$，$0\leq k\leq n-1$, $0\leq j\leq-\kappa(\lambda)-1$ 如下

$$d_{j,\kappa(\lambda)}(k):=(-1)^{n-k}(-q)^{(2n-2k)j}\{-1+((-q)^{-\kappa(\lambda)}+1)(-q)^{-j}-(-q)^{-\kappa(\lambda)}(-q)^{-2j}\}.$$

那么，对于 $0\leq k\leq n-2$，我们有

$$\begin{aligned}&C_{0,2n-2k-1}(1-(-q)^{-(2n-2k)\kappa(\lambda)})+C_{0,2n-2k-2}((-q)^{-\kappa(\lambda)}-(-q)^{-(2n-2k-1)\kappa(\lambda)})\\&=\begin{cases}\sum_{j=0}^{\kappa(\lambda)-1}d_{j,\kappa(\lambda)}(k), & \text{if } \kappa(\lambda)>0,\\ \sum_{j=0}^{-\kappa(\lambda)-1}d_{j,\kappa(\lambda)}(k), & \text{if } \kappa(\lambda)<0.\end{cases}\end{aligned} \tag{4.10}$$

对于 $k=n-1$，我们有

$$C_{0,1}(1-(-q)^{-2\kappa(\lambda)})-\kappa(\lambda)(-q)^{-\kappa(\lambda)}=\begin{cases}\sum_{j=0}^{\kappa(\lambda)-1}d_{j,\kappa(\lambda)}(n-1), & \text{if } \kappa(\lambda)>0,\\ \sum_{j=0}^{-\kappa(\lambda)-1}d_{j,\kappa(\lambda)}(n-1), & \text{if } \kappa(\lambda)<0.\end{cases} \tag{4.11}$$

由（4.10）和（4.11），可知（4.9）等价于

$$0=\begin{cases}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\kappa(\lambda)-1}d_{j,\kappa(\lambda)}(i)A_{2i,2n}(\lambda) & \text{if } \kappa(\lambda)>0,\\ \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{-\kappa(\lambda)-1}d_{j,\kappa(\lambda)}(i)A_{2i,2n}(\lambda) & \text{if } \kappa(\lambda)<0.\end{cases}$$

要证明这一点，只需证明

$$0=\sum_{i=0}^{n-1}d_{j,\kappa(\lambda)}(i)A_{2i,2n}(\lambda) \tag{4.12}$$

当 $\kappa(\lambda)>0$、$0\le j\le\kappa(\lambda)-1$，或 $\kappa(\lambda)<0$、$-\kappa(\lambda)+1\le j\le 0$ 时。

对于 $\kappa(\lambda)>0$，我们有

$$d_{\kappa(\lambda)-1,\kappa(\lambda)}(i)=(-1)^{n-i}(-q)^{-(2n-2i)(\kappa(\lambda)}\{1-((-q)^{-\kappa(\lambda)}+1)(-q)^{\kappa(\lambda)}+(-q)^{-\kappa(\lambda)}(-q)^{2\kappa(\lambda)}\}=0.$$

类似地，对于 $\kappa(\lambda)<0$，我们有 $d_{0,\ \kappa(\lambda)}(i)=0$. 因此，当 $\kappa(\lambda)>0$、$j=\kappa(\lambda)-1$ 或 $\kappa(\lambda)<0$、$j=0$ 时，(4.12) 成立。现在，还需证明当 $\kappa(\lambda)\ge 2$、$0\le j\le\kappa(\lambda)-2$ 或 $\kappa(\lambda)\le -2$、$1\le j\le -\kappa(\lambda)-1$ 时，(4.12) 成立。

根据 $d_{j,\ \kappa(\lambda)}(i)$ 和引理 4.13 （1）的定义，只需证明

$$0=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i}(-q)^{-(2n-2i)j}A_{2i,2n}(\lambda)=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i}(-q)^{-(2n-2i)j}A_{2i+1,2n}(\lambda)(-q)^{\kappa(\lambda)}, \tag{4.13}$$

当 $\kappa(\lambda)>0$，$1\le j\le\kappa(\lambda)-1$，或 $\kappa(\lambda)<0$，$\kappa(\lambda)+1\le j\le -1$ 时。

我们对 n 归纳法证明（4.13）。

由于 $-n\le\kappa(\lambda)\le n$，当 $n=1$ 时无需证明。

当 $n=2$ 时，我们只需在以下两种情形下证明（4.13）：$(\kappa(\lambda)\ j)=(2,\ 1)$，$(-2,\ -1)$。

根据引理 4.13 （4）和定义 4.12（2），我们有

$$(1)A_{1,4}(\lambda)=(-q)^{2\kappa(\overline{\lambda})}A_{1,2}(\overline{\lambda})=\begin{cases}(-q)^2 & \text{if } \kappa(\lambda)=2, j=1,\\ (-q)^{-2} & \text{if } \kappa(\lambda)=-2, j=-1,\end{cases}$$

$$(2)A_{3,4}(\lambda)=1,$$

其中 $\lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4)$，且 $\lambda=(\lambda_1,\ \lambda_4)$。因此，我们有

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i}(-q)^{-(2n-2i)j}A_{2i+1,2n}(\lambda)=(-q)^{-4j}A_{1,4}(\lambda)-(-q)^{-2j}A_{3,4}(\lambda)=0.$$

这表明（4.13）对 $n=2$ 成立。

现在，我们假设（4.13）对 $n=N-1$成立。根据引理 4.13 （4），我们有

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^{N-i}(-q)^{-(2N-2i)j}A_{2i+1,2N}(\lambda)\\ &=\textstyle\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^{N-i}(-q)^{-(2N-2i)j+2\kappa(\overline{\lambda})}A_{2i+1,2N-2}(\overline{\lambda})+\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^{N-i}(-q)^{-(2N-2i)j}A_{2i-1,2N-2}(\overline{\lambda}),\end{aligned}$$

其中 $\lambda=(\lambda_1,\ \ldots\ldots,\ \lambda_{2N})$，且 $\lambda=(\lambda_1,\ \ldots\ldots,\ \lambda_{N-1},\ \lambda_{n+2},\ \ldots\lambda_{2N})$。

由于 $A_{2N-1,\ 2N-2}(\overline{\lambda})=A_{-1,\ 2N-2}(\overline{\lambda})=0$，我们有

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^{N-i}(-q)^{-(2N-2i)j}A_{2i+1,2N}(\lambda)\\ &=\textstyle\sum_{i=0}^{N-2}(-1)^{N-i}(-q)^{-(2N-2i)j+2\kappa(\overline{\lambda})}A_{2i+1,2N-2}(\overline{\lambda})+\sum_{i=0}^{N-2}(-1)^{N-i-1}(-q)^{-(2N-2i-2)j}A_{2i+1,2N-2}(\overline{\lambda})\\ &=\textstyle\sum_{i=0}^{N-2}(-1)^{N-1-i}(-q)^{-(2(N-1)-2i)j}A_{2i+1,2N-2}(\overline{\lambda})\{1-(-q)^{2\kappa(\overline{\lambda})-2j}\}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

注意，$\kappa(\lambda) \overline{=} \kappa(\lambda) - 1$，$\kappa(\lambda)$，或者 $\kappa(\lambda) + 1$。

我们首先假设 $\kappa(\lambda) \geq 2$，$1 \leq j \leq \kappa(\lambda) - 1$。

如果 $\overline{\kappa}(\lambda) \geq \kappa(\lambda)$，那么 $1 \leq j \leq \kappa(\lambda) - 1 \overline{\leq} \kappa(\lambda) - 1$，因此

$$\sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n-1-i} (-q)^{-(2(n-1)-2i)j} A_{2i+1,2n-2}(\overline{\lambda}) = 0,$$

根据我们的归纳假设。

如果 $\overline{\kappa}(\lambda) = \kappa(\lambda) - 1$，那么对于 $1 \leq j \leq \kappa(\lambda) - 2 \overline{=} \kappa(\lambda) - 1$，我们有

$$\sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n-1-i} (-q)^{-(2(n-1)-2i)j} A_{2i+1,2n-2}(\overline{\lambda}) = 0,$$

根据我们的归纳假设。

对于 $j = \kappa(\lambda) - 1 = \overline{\kappa}(\lambda)$，我们有 $\{1 - (-q)^{2\kappa(\lambda)-2\overline{j}}\} = 0$。

因此，根据（4.14），我们有（4.13）在 κ（λ） > 0，$1 \leq j \leq \kappa$（λ）成立 $- 1$.

现在，假设 $\kappa(\lambda) \leq -2$，$\kappa(\lambda) + 1 \leq j \leq -1$。

如果 $\overline{\kappa}(\lambda) \leq \kappa(\lambda)$，那么 $\overline{\kappa}(\lambda) + 1 \leq \kappa(\lambda) + 1 \leq j \leq -1$，因此

$$\sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n-1-i} (-q)^{-(2(n-1)-2i)j} A_{2i+1,2n-2}(\overline{\lambda}) = 0,$$

根据我们的归纳假设。

如果 $\overline{\kappa}(\lambda) = \kappa(\lambda) + 1$，那么对于 $\kappa(\lambda) + 2 = \overline{\kappa}(\lambda) + 1 \leq j \leq -1$，我们有

$$\sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n-1-i} (-q)^{-(2(n-1)-2i)j} A_{2i+1,2n-2}(\overline{\lambda}) = 0,$$

根据我们的归纳假设。

对于 $j = \kappa(\lambda) + 1 = \overline{\kappa}(\lambda)$，我们有 $\{1 - (-q)^{2\kappa(\lambda)-2\overline{j}}\} = 0$。

因此，根据（4.14），我们得到（4.13）在 κ（λ） < 0，κ（λ） $+ 1 \leq j \leq -1$。

引理的证明至此完成。 □

5. $n = 2$ 情形的证明

在本章节中，我们始终假设 $n = 2$ 且 $\mathbf{h} = (0, 2)$。为简便起见，我们省略 $\mathcal{N}_n^{[\mathbb{h}]}$ 中的下标 n。

5.1. **纯权情形**。在本小节中，我们考虑 $\alpha =$（0，0）或（2，2）的情形。以下是 [LM25，命题 35]的特殊情形。

命题 5.1. 自然遗忘态射

$$\pi_0 : \mathcal{N}^{[\mathbb{h}]} \to \mathcal{N}^{[0]}, \quad and \quad \pi_2 : \mathcal{N}^{[\mathbb{h}]} \to \mathcal{N}^{[2]}$$

是次数为 $q + 1$ 的有限平坦态射。

证明。由于 $\mathcal{N}^{[\mathbb{h}]}, \mathcal{N}^{[0]}$ 和 $\mathcal{N}^{[2]}$ 都是正则的，根据奇迹平坦性定理可知其平坦性。此外，由于众所周知 π 是适当的，一旦得知其是拟有限的，便可推出 π 是有限的。注意，通过 Serre 构造，$\mathcal{N}^{[0]}$ 与 $\mathcal{M}_2$ 之间存在自然同一，其中 $\mathcal{M}_2$ 是参数化形式 p-可除群的 Lubin-Tate 空间，群的

维数 1 且高度为 2。此外， $\mathcal{N}^{[\mathbb{h}]}$ 也自然同一于 $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$。于是， π_0 和 π_2 <style id='22'}的平坦性和有限性由 [LM25，命题 35]中得到证明。然后，事实 π_0和 π_2 的次数为 $q+1$ 可以在一般纤维上轻易验证。 □

利用命题 5.1，我们可以验证猜想的一个变体4.3。

定理 5.2。 假设 B 是一个秩为2 的非退化厄米矩阵，且 $\alpha=(0,\ 0)$。我们有

$$\mathcal{I}_{\alpha}^{[\mathbb{h}]}(B)=(q+1)\partial\,\mathrm{Den}_{2,0}(B).$$

这里 $\partial\mathrm{Den}^{2,0}(B)$ 是 [CHZ23] 中所述的归一化导出局部密度。

证明。 利用命题 5.1 和投影公式，我们知道 $\mathcal{I}_{\alpha}^{[\mathbb{h}]}(B)\ =(q+1)\mathcal{I}_{\alpha}^{[0]}(B$。于是，该定理归结为在 [KR11、LZ22] 中证明的 Kudla-Rapoport 猜想。 □

5.2. 混合权重情形。在本小节中，我们假设 $\alpha=(0,2)\ \in \mathrm{E}_2^{\mathbb{h}}$。设 $\{x,y\}$ 是与 Rapoport-Zink 空间 $\mathrm{N}_2^{[\mathbb{h}]}$ 相关的特殊同态空间 $(\mathbb{V},h)$ 的一组基。令 $B=$ Ç $h(x,x)\ h(x,y)\ h(y,x)\ h(y,y)$ å ˙ 。我们注意到 $\det B$的赋值是奇的。此外，根据定义 2.5，R_2 构成 $\Gamma_2\backslash X_2$ 的完全代表系。因此，对于某些 λ_1, $\lambda_2\in\mathbb{Z}$， B 与 Ç π^{λ_1} π^{λ_2} å 等价。

结合猜想4.3和注4.6，我们得到以下猜想 .

猜想 5.3。 假设 $n=2$、$\mathbb{h}\ =(0$、$2)$，以及 $\alpha=(0$、$2)\ \in E_2^{\mathbb{h}}$。则有

$$\mathcal{I}_{\alpha}^{[\mathbb{h}]}(x,y)=\frac{q^7}{q^2-1}W_{\alpha}'(B).$$

证明。 这由下述命题5.4和命题5.8得到。 □

首先，我们显式计算解析侧。

命题 5.4。 假设 $n=2$、$\mathbb{h}\ =(0$、$2)$，以及 $\alpha=(0$、$2)\ \in E_2^{\mathbb{h}}$。则有

$$\frac{q^7}{q^2-1}W_{\alpha}'(B)=\begin{cases}\dfrac{q+1}{2}\displaystyle\sum_{l=0}^{\lambda_2+1}q^l(\lambda_1+\lambda_2-2l+1)+\sum_{l=0}^{\lambda_2+1}q^l & \text{if } B\overset{\Gamma_2}{\simeq}\mathrm{Diag}(\pi^{\lambda_1},\pi^{\lambda_2}),\lambda_1>\lambda_2,\\ \dfrac{q+1}{2}\displaystyle\sum_{l=0}^{\lambda_1}q^l(\lambda_1+\lambda_2-2l+1)+\sum_{l=0}^{\lambda_1}q^l & \text{if } B\overset{\Gamma_2}{\simeq}\mathrm{Diag}(\pi^{\lambda_1},\pi^{\lambda_2}),\lambda_1<\lambda_2.\end{cases}$$

证明。 对于 $\beta=(0$、$0)\ \in\mathcal{E}_2^{\mathbb{h}}$， $W_{\beta}'(B)$ 是相对于我们所选测度的通常表示密度。因此，根据 [KR11，推论 9。5], 我们有

$$W_{\beta}'(B)=\begin{cases}\dfrac{1}{q^4}(1+\dfrac{1}{q})(1-\dfrac{1}{q^2})\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{l=0}^{\min(\lambda_1,\lambda_2)}q^l(\lambda_1+\lambda_2-2l+1) & \text{if } \lambda_1,\lambda_2\geq 0,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

根据命题 2.3，我们有

$$W_{\alpha}'(B)-W_{\beta}'(B)=\sum_{Y\in\mathcal{R}_2}\frac{\mathcal{G}(Y,B)}{\alpha(Y;2)}\{\mathcal{F}_{\alpha}'(Y)-\mathcal{F}_{\beta}'(Y)\}.$$

由命题 2.6，我们得到

$$\mathcal{F}'_{\alpha}(Y)-\mathcal{F}'_{\beta}(Y)=\begin{cases} e_1(-q)^{2e_1}(\frac{1}{q^2}-\frac{1}{q^4}) & \text{if } Y=\mathrm{Diag}(\pi^{e_1},\pi^{e_2}), e_1\le -1, e_2\ge 1,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

因此，我们只需考虑 $Y=\mathrm{Diag}(\pi^{e_1},\ \pi^{e_2})\in\mathcal{R}_2,\ \ e_1\le -1,\ \ e_2\ge 1$。对于这样的 Y，我们有

$$\begin{aligned}&\mathcal{G}(Y,B)=(1-\frac{1}{q^2})^2q^{-2}I_1^*(e_1+\lambda_1)(-q)^{\min(0,e_1+\lambda_2+2)},\\ &\alpha(Y;2)=(q+1)^2q^{-2+3e_1+e_2}.\end{aligned}$$

结合上述结果，我们证明该命题。 □

为计算 $\mathrm{I}_{\alpha}^{[\mathbb{h}]}(x,y)$，我们首先按照 [KR11]的做法，回顾一些关于拟典范提升的相关背景。令 G 为相对高度为 2、维数为 1 的严格形式 O_{F_0}-模，其定义在$\mathbb{F}$上。注意，$\mathrm{End}(G)=O_D$是 D 上的四元数除环中的极大阶。若固定一个嵌入 $i:O_F\hookrightarrow O_D$，则 G 成为一个严格形式 O_F-O_{F_0}-模，高度为 2。存在该形式 O_F-O_{F_0}-模到$O_{\breve{F}_0}$的唯一提升 F_0，我们称之为典范提升。令

$$O_{F,s}=O_{F_0}+\pi^sO_F.$$

为 O_F中导数为 s 的阶，其中 $s\ge 1$为整数。为简化记号，今后我们用 O 表示 $O_{\breve{F}_0}$。

令 F_s 表示 G的 s 级拟典范提升。更确切地说，它是将 G 提升到 O_{F_0} 的某个有限扩张 A上的提升，其端omorphism 环等于$O_{F,\ s}$；并且$O_{F,\ s}$ 在 Lie F_s 上的诱导作用经由嵌入 $O_{F,\ s}\subset O_{\breve{F}_0}\subset A$ 给出，同时$O_{F,\ s}$ 在 End(G) 中的像包含于将 O_F 固定嵌入到 O_D所得的像中。任意 s 级拟典范提升都定义在 O_s上，其中 O_s是$O_F^{\times}$的环类域 M_s 中的整数环，$_s$。更确切地说，M_s 是在互反同构下对应于 $O_F^{\times}$的子群 $O_{F,\ s}^{\times}$ 的 $M=\breve{F}_0$ 的有限阿贝尔扩张。注意，M_s 是 M 的完全分歧扩张，其次数为

$$e_s=q^{s-1}(q+1).$$

现在令 $X^{(s)}=O_F\otimes F_s$，它是定义在 O_s 上的严格形式 O_F-O_{F_0}-模。此外，Lie $X^{(s)}=O_F\otimes_{O_{F_0}}$Lie F_s，因此 $X^{(s)}$满足符号条件 (1, 1)。事实上，存在 Ä$X^{(s)},\iota,\lambda^{(s)}$ä，根据 KR11，引理 6.5]，它可以视为 $\mathrm{N}_2^{[0]}$ 的一个 O_s-点。我们用 $\mathrm{Z}_s^{[0]}$ 表示 $\mathrm{N}_2^{[0]}$ 的这个 W_s-点。通过对偶同构 $\mathrm{N}_2^{[0]}\cong\mathrm{N}_2^{[2]}$,，我们还可在 $\mathrm{N}_2^{[2]}$ 上得到相应的 W_s-点，并将其记为 $\mathrm{Z}_s^{[2]}$。令 Z_s^{+} 表示 $\mathrm{Z}_s^{[0]}\overset{\alpha_0^+}{\to}{}^2\mathrm{Z}_{s+1}^{[2]}$，我们将其视为 $\mathrm{N}_2^{[\mathbb{h}]}$ 的一个 O_{s+1}-点。同样，令 Z_s^{-} 表示 $\mathrm{Z}_s^{[0]}\overset{\alpha_0}{\to}{}^2\mathrm{Z}_{s-1}^{[2]}$，我们将其视为 $\mathrm{N}_2^{[\mathbb{h}]}$ 的一个 O_s-点。

命题 5.5。我们有

$$\begin{aligned}&\pi_0^*(\mathcal{Z}_s^{[0]})=\mathcal{Z}_s^{+}+\mathcal{Z}_s^{-},\\ &\pi_2^*(\mathcal{Z}_s^{[2]})=\mathcal{Z}_{s-1}^{+}+\mathcal{Z}_{s+1}^{-}.\end{aligned}$$

证明。容易验证，$\mathcal{Z}_s^+$和$\mathcal{Z}_s^-$包含于 $\pi_0^*(\mathcal{Z}_s^{[0]})$ 中。随后，由于 π_0 的次数为 $q+1$，$\mathcal{Z}_s^{[0]} \overset{\alpha_{0,2}^+}{\to} \mathcal{Z}_{s+1}^{[2]}$ 是 $\mathcal{N}_2^{[\ ]}, {}_{\mathbb{h}}\mathcal{Z}_s^{[0]} \overset{\alpha_{0,2}^-}{\to} \mathcal{Z}_{s-1}^{[2]}$ 是 $\mathcal{N}_2^{[\mathbb{h}]}$ 的 O_s-点，以及 $e_{s+1}/e_s = q$，即可得出该等式。

类似地，我们知道 $\mathcal{Z}_{s-1}^+$ 和 $\mathcal{Z}_{s+1}^-$ 包含于 $\pi_2^*(\mathcal{Z}_s)$ 中，再次比较次数即可得出第二个结论。□

设 $\mathrm{val}(x) = s$。为简化记号，令 $\mathcal{Z}_i(x)$ 表示 $\mathcal{Z}_i^{[\mathbb{h}]}$。由 [KR11][命题 8，1],我们有

$$\mathcal{Z}^{[0]}(x) - \mathcal{Z}^{[0]}(\pi^{-1}x) = \mathcal{Z}_s^{[0]}. \tag{5.1}$$

Then

$$\mathcal{Z}_0(x) - \mathcal{Z}_0(\pi^{-1}x) = \pi_0^*(\mathcal{Z}^{[0]}(x) - \mathcal{Z}^{[0]}(\pi^{-1}x)) = \mathcal{Z}_s^+ + \mathcal{Z}_s^-$$

由命题5.5。

注意，$\mathcal{Z}_0(\pi^{-1}x) \subset \mathcal{Y}_2(\pi^{-1}x) \subset \mathcal{Z}_0(x)$。自然地，我们会问 $\mathcal{Z}_0(x) - \mathcal{Y}_2(\pi^{-1}x)$ 以及 $\mathcal{Y}_2(\pi^{-1}x) - \mathcal{Z}_0(\pi^{-1}x)$ 是什么。下面的命题回答了这个问题。

命题 5.6。设 $\mathrm{val}(x) = s \geq 1$。我们有

$$\mathcal{Z}_0(x) - \mathcal{Y}_2(\pi^{-1}x) = \mathcal{Z}_s^+,$$
$$\mathcal{Y}_2(\pi^{-1}x) - \mathcal{Z}_0(\pi^{-1}x) = \mathcal{Z}_s^-.$$

证明。设 $X_2 \to X_0$ 位于 $\mathrm{Y}_2(\pi^{-1}x) - \mathrm{Z}_0(\pi^{-1}x) \subset \mathrm{Y}_2(\pi^{-1}x) - \mathrm{Y}_2(\pi^{-2}x)$ 上。特别地，$X_2 \in \mathrm{Y}^{[2]}(\pi^{-1}x) - \mathrm{Y}^{[2]}(\pi^{-2}x) \subset \mathrm{N}_2^{[2]}$。注意，由对偶性和（5.1），$\mathrm{Y}^{[2]}(\pi^{-1}x) - \mathrm{Y}^{[2]}(\pi^{-2}x) \cong \mathrm{Z}_{s-1}^{[2]}$。因此，我们知道 $\mathrm{Z}_s^- \subset \mathrm{Y}_2(\pi^{-1}x) - \mathrm{Z}_0(\pi^{-1}x)$ 以及 $\mathrm{Z}_s^+ \not\subset \mathrm{Y}_2(\pi^{-1}x) - \mathrm{Z}_0(\pi^{-1}x)$。另一方面，我们知道 $(\mathrm{Z}_0(x) - \mathrm{Y}_2(\pi^{-1}x)) + (\mathrm{Y}_2(\pi^{-1}x) - \mathrm{Z}_0(\pi^{-1}x)) = \mathrm{Z}_s^+ + \mathrm{Z}_s^-$. 因此，$\mathrm{Y}_2(\pi^{-1}x) - \mathrm{Z}_0(\pi^{-1}x) = \mathrm{Z}_s^-$，且 $\mathrm{Z}_0(x) - \mathrm{Y}_2(\pi^{-1}x) = \mathrm{Z}_s^+$。
□

为了计算特殊循环之间的交，我们回顾如下提升问题，该问题遵循 [KR11，§7]。设 A 是 O 的一个有限扩张，其一致化元为 λ，并令 $A_m = A/\lambda^{m+1}$。设 e 表示 A 在 O 上的分歧指数，并以 val 表示$_A$ 上的离散赋值，且 $\mathrm{val}_A(\lambda) = 1/e$。令

$$\mu : (O_F \otimes F_0) \otimes_W \mathbb{F} \longrightarrow (O_F \otimes F_s) \otimes_{W_s} \mathbb{F}$$

是一个同态。令 $m_s(\mu)$ 为最大的 m，使得 μ 能够提升为从 $(O_F \otimes F_0) \otimes_W A_m$ 到 $(O_F \otimes F_s) \otimes_{W_s} A_m$的同态。此外，如引理 6.1 的 (iii) 部分第一段所述，记

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix},$$

其中 $\mu_i \in \mathrm{Hom}\,(F_0 \otimes_W \mathbb{F},\ F_s \otimes_{W_s} \mathbb{F}) = O_D$。以下结果见 [KR11，定理 7。1]。

定理 5.7。将 μ 写成 *(7.1)* 中的形式，并假设

$$\mu_i \in \left(\Pi^s O_F + \Pi^{l_i} O_D\right) \setminus \left(\Pi^s O_F + \Pi^{l_i+1} O_D\right)$$

$l_i \geq 0$ 为整数。令 $l = \text{最小值}_i\{l_i\}$。那么

$$m_s(\mu) = e/e_s \cdot \begin{cases} \frac{q^{l+1}-1}{q-1} & if\ l < s, \\ \frac{q^s-1}{q-1} + \frac{1}{2}(l+1-s)e_s & if\ l \geq s. \end{cases}$$

为简化记号，从现在起，我们使用 $\cdot$ 表示先前通过导出张量积的 Euler 示性数所定义的交叉数。

命题 5.8。 假设 $\mathrm{val}(x) = a$ 且 $\mathrm{val}(y) = b$，使得 $a > b$。则有

$$(\mathcal{Y}_2(x) - \mathcal{Z}_0(x)) \cdot (\mathcal{Y}_2(y) - \mathcal{Y}_2(\pi^{-1}y)) = (q+1)q^{b+1},$$
$$(\mathcal{Z}_0(x) - \mathcal{Y}_2(\pi^{-1}x)) \cdot (\mathcal{Y}_2(y) - \mathcal{Y}_2(\pi^{-1}y)) = (q+1)q^{b}.$$

证明。 由命题5.6，我们有

$$\mathcal{Z}_0(x) - \mathcal{Y}_2(\pi^{-1}x) = \mathcal{Z}_a^+,$$
$$\mathcal{Y}_2(x) - \mathcal{Z}_0(x) = \mathcal{Z}_{a+2}^-.$$

根据对偶同构，

$$\begin{aligned}(\mathcal{Y}_2(x) - \mathcal{Z}_0(x)) \cdot (\mathcal{Y}_2(y) - \mathcal{Y}_2(\pi^{-1}y)) &= \mathcal{Z}_{a+2}^- \cdot (\mathcal{Y}_2(y) - \mathcal{Y}_2(\pi^{-1}y)) \\ &= \mathcal{Z}_{a+1}^+ \cdot (\mathcal{Z}_0(y') - \mathcal{Z}_0(\pi^{-1}y')),\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{val}(y') = b+1$。现在我们可以结合 [KR11, 《定理 7.1] 》以及 [KR11, 《命题 8.4] 》的相同证明，计算 $\mathrm{Z}_{a+1}^+ \cdot (\mathrm{Z}_0(y') - \mathrm{Z}_0(\pi^{-1}y'))$。唯一的区别在于，此处应用[KR11, 《定理 7.1] 》时，需要将在 [KR11, 《定理 7.1] 》中的 A取为 O_{a+2}，而不是O_{a+1}，因为 Z_{a+1}^+ 定义在 O_{a+2}上。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{a+1}^+ \cdot (\mathcal{Z}_0(y') - \mathcal{Z}_0(\pi^{-1}y')) &= e_{a+2}/e_{a+1}(\frac{q^{b+2}-1}{q-1} - \frac{q^b-1}{q-1}) = (q^{b+1}+q^b) \\ &= e_{a+2}/e_{a+1}(q+1)q^b \\ &= (q+1)q^{b+1}.\end{aligned}$$

同样，

$$\begin{aligned}(\mathcal{Z}_0(x) - \mathcal{Y}_2(\pi^{-1}x)) \cdot (\mathcal{Y}_2(y) - \mathcal{Y}_2(\pi^{-1}y)) &= \mathcal{Z}_a^+ \cdot (\mathcal{Y}_2(y) - \mathcal{Y}_2(\pi^{-1}y)) \\ &= \mathcal{Z}_{a+1}^- \cdot (\mathcal{Z}_0(y') - \mathcal{Z}_0(\pi^{-1}y')).\end{aligned}$$

注意，$\mathcal{Z}_{a+1}^-$ 定义在 O_{a+1} 上。由与之前相同的论证可知

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{a+1}^- \cdot (\mathcal{Z}_0(y') - \mathcal{Z}_0(\pi^{-1}y')) &= e_{a+1}/e_{a+1}(\frac{q^{b+2}-1}{q-1} - \frac{q^b-1}{q-1}) = (q^{b+1}+q^b) \\ &= (q+1)q^b.\end{aligned}$$

□

参考文献

[Cho18] *S. Cho*，《带抛物型层结构的酉 *Shimura* 簇的基本轨与特殊循环》，*2018*。↑19，*20*，*21*，*22*[Cho22] ，《带极小抛物型层结构的酉 *Shimura* 簇上的特殊循环》，数学年刊（*2022*），*1–67*。↑1，*4*，*6*，*7*，*8*，*13*，*17*，*24*[Cho23] ，《厄米形式的局部表示密度与特殊循环》，《国际数学研究通知》（*2023*）。↑8[CHZ23] *S. Cho*、*Q. He* 和 *Z. Zhang*，《关于非分歧素数处具有极大抛物层级结构的酉 *Shimura* 簇的 *Kudla-Rapoport* 猜想》，*2023*。↑1，*34*[Gör01] *U. Görtz*，《某些 *PEL*型志村簇模型的平坦性》，数学年刊 *321*（*2001*），*689–727*。↑20[Hir00] *Y. Hironaka*，《由伊*wahori*子群分类厄米形式及其局部密度》，《圣保罗大学数学评论》（*2000*）。↑6，*7*，*9*，*13*[HLSY23] *Q. He*、*C. Li*、*Y. Shi* 和 *T. Yang*，《*Krämer* 模型的 *Kudla–Rapoport* 猜想的证明》，《数学创见》*234*（*2023*），*721–817*。↑1[HSY23] *Q. He*、*Y. Shi* 和 *T. Yang*，《*Krämer* 模型的 *Kudla–Rapoport* 猜想》，《数学汇编》*159*（*2023*），第*8*期，*1673–1740*。↑1[KR11] *S. Kudla* 和 *M. Rapoport*，《酉 *Shimura* 簇上的特殊循环 *I*：非分歧局部理论》，*Invent. Math. 184*（*2011*），第*3*期，*629–682*。*MR*2800697 ↑1，*24*，*34*，*35*，*36*，*37*[KR14] ，《酉 *Shimura* 簇上的特殊循环 *II*：整体理论》，*J. Reine Angew. Math. 697*（*2014*），*91–157*。*MR*3281653 ↑1[LL22] *C. Li* 和 *Y. Liu*，《酉群自守动机的乔群与 *L*导数，*II*》，*Forum of Mathematics, Pi*，*2022*。↑1[LM25] *Q. Li* 和 *A. Mihatsch*，《关于线性*AFL*：非基本情形》，《数学汇编》*161*（*2025*），第*2*期，*385–425*。↑33，*34*[LRZ24] *C. Li*、*M. Rapoport* 和 *W. Zhang*，《抛物子层级上的拟典范*AFL*与算术转移猜想》，预印本（*2024*）。↑19，*20*[Luo25] *Y. Luo*，《非分歧极大抛物子层级的 *Kudla-Rapoport* 猜想》，*2025*。↑1[LZ22] *C. Li* 和 *W. Zhang*，《*Kudla–Rapoport* 循环与局部密度的导数》，《美国数学会杂志》*35*（*2022*），第*3*期，*705–797*。↑1，*34*[Muller] 《任意抛物层级下基本非分歧 *gu(1,n-1) Rapoport-Zink* 空间的 *Bruhat-Tits* 分层》。↑19[RZ96] *M. Rapoport* 和 *T. Zink*，《*p*可除群的周期空间》，普林斯顿大学出版社，*1996*。↑19，*20*[Yao24] *H. Yao*，《奇维数奇异光滑模型的 *Kudla-Rapoport* 公式》，*2024*。↑1

浦项科技大学数学系，*77, Cheongam-ro, Nam-gu*, 浦项市，庆尚北道，韩国 电子邮箱：sungyooncho@postech.ac.kr*Zhizhen* 跨学科数学科学学院，香港中文大学 电子邮箱：qiaohe@cuhk.edu.hk人工智能与自然科学中心，韩国高等研究院，*85 Hoegiro, Dongdaemun-gu*，首尔，韩国 电子邮箱：chlee@kias.re.kr*Zhizhen* 跨学科数学科学学院，香港中文大学 电子邮箱：zhiyuzhang@cuhk.edu.hk