arXiv:2611.32571v1 [math.AG] 24 Nov 2026

# LAURENT现象代数的θ函数与内在镜像

JIARUI FEI

Abstract. 我们通过在单个种子中最小化牛顿多面体，构造域上的上Laurent现象代数的基。对于指数上的任意平移不变全序，每个出现的最小指数 $a$都确定一个最小牛顿多面体$Q_a$。对于每个这样的 $a$，选取一个具有牛顿多面体 $Q_a$ 和最低项 $x^a$ 的元素。这些元素构成一个基。在每个可达种子图中，每个高斯赋值作用于非零基展开时，都等于其在非零直和项上的取值的最小值。

设该代数具有Laurent系数，并且在特征零代数闭域上的谱光滑。将曲线参数设为一之后，我们根据交换多项式计算内在镜像上的theta 乘积，并给出镜像代数的有限表示。若每个交换多项式都可以乘以系数环中的一个单位，从而得到常数项为一的多项式，则称一个种子具有多项式角。在这样的角上，按照坐标严格为正且有理独立的权重对指数排序。对于每个格指数 $a$和整数权重 $p$，以 $p$ 为指标的theta 函数在相应镜像图表中具有最小的 $a$-权重 $\min_{b\in Q_a}\langle b,\ p\rangle$ 。这种互反性对循环交换和任意极点阶均成立。

对于固定的交换支撑集和常数项 1，我们确定了镜像何时光滑，以及第二镜像何时能在选定的环面坐标中恢复原代数。满足这两个条件的系数元组构成一个可计算的有限集。它们的所有条目都是正整数。

## Contents

引言 2
1. 上Laurent现象代数及其环面 6
2. 正则函数的牛顿多面体 10
3. 由交换多项式导出的内在乘法 14
4. 正向 theta 函数的Laurent图表 20
5. 互反与返回 27
6. 多项式角处的互反性 30
7. 边界赋值与多项式冻结变量 37
8. 显式倒数函数与实现判据 42
9. 标记环面中的第二镜像 55
10. 恢复有效数值曲线类 60
11. 交换系数的变化 62
附录 A. 带标记的Laurent图表中的赋值独立性 75
附录B. 识别上LP代数的基 85
附录 C. 赋值检验、反向迹与镜像几何 93
生成式人工智能和人工智能辅助技术声明 106
参考文献 106

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：13F60，14J33；次要分类号：14M25，14C20。
*Key words and phrases.* Laurent现象代数，theta 基，牛顿多面体，内在镜像，对数Calabi–Yau簇，高斯赋值，除子赋值，赋值独立性，互反性，原子性。作者得到国家自然科学基金（编号：12571038）的部分资助。

## Introduction

Fomin 和 Zelevinsky 证明，每个簇变量都是任意一个簇中变量的 Laurent多项式 [16, 定理 3。1]。Berenstein、Fomin 和 Zelevinsky 通过对所有簇的 Laurent环取交集，定义了上簇代数 [3, 定义 1。6]。Lam 和 Pylyavskyy 引入了 *Laurent*现象代数 (LP代数)，并证明其变异规则具有 Laurent 现象。该规则允许含有两项以上的不可约交换式 [28, 定理 5。1]。LP 种子指定可变变量及其交换多项式。突变会替换一个可变变量，并更新这些多项式。所谓上*LP*代数 $\mathcal{U}$，又称完整上代数，是所有可通过突变到达的种子的 Laurent 环的交集。

交换关系限制了 Laurent多项式的支集。例如，如果 $xx' = 1+u+v$ with $u,\ v$ 可逆，则 $x^{-m}, m > 0$ 的系数必须能被 $(1+u+v)^m$ 整除，多项式才会在 $x',\ u,\ v$ 中为 Laurent 形式。固定最小指数后，指数的凸包可以有多小？我们证明，在一个域上存在这样的最小多面体。随着最小指数变化，在每个多面体上选取一个归一化代表元，即可得到 $\mathcal{U}$ 的一组基。

对于特征零代数闭域上具有适当种子图表的光滑仿射对数卡拉比–丘簇，同样的交换式决定了内在镜像上的 theta 乘法。镜像theta赋值何时能够恢复最小多面体上线性形式的最小值？如果每个交换多项式在用一个非零标量和可逆系数变量中的一个 Laurent 单项式进行缩放后，都变成具有非零常数项的多项式，则称一个种子具有 多项式角 。对于带有 Laurent系数的光滑完整上 LP 代数，我们证明，在这种角上，对于严格为正且能区分指数的序权，二者相等。交换式可以是循环的，极点阶也可以是任意的。

**最小牛顿多胞体与一个基**。在域 $k$上固定一个种子。其交换多项式也称为普通交换式。系数变量是冻结的，这意味着突变会固定它们。我们将可逆的冻结变量称为指定单位。其他冻结变量在每个图表中仅以非负幂出现。使用*Laurent* 系数时，所有冻结变量都可逆。

选定种子的坐标给出了标记。令 $M$ 为所有坐标均非零的环面的特征格，并令 $L = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$为其余特征格。非零 Laurent 多项式 $f$ 的支集$\mathrm{Supp}(f)$由具有非零系数的单项式 $x^a$ 的指数 $a \in M$ 组成。其牛顿多面体$\mathrm{Newt}(f)$是这些指数的凸包。在 $M$上的任意固定平移不变全序中，将 $e(f)$记为最小指数。其中一种序由分离权重 $\omega \in L_{\mathbb{R}} = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$给出；对于不同的 $a$，配对 $\langle a, \omega\rangle$彼此不同。

对于上代数中取得的每个最小指数 $a$，我们可以选择 $f_a$，使得 $e(f_a) = a$，从而

$$Q_a := \mathrm{Newt}(f_a) \subseteq \mathrm{Newt}(f) \qquad (f \in \mathcal{U},\ e(f) = a).$$

多面体 $Q_a$ 是唯一的，且 $Q_{na} = nQ_a$ 对每个整数 $n \geq 1$。将每个 $f_a$在 $x^a$处的系数归一化为一。任意此类选择构成一个基。在每个可达图表中，高斯赋值 $\nu$ 将权重对应的劳朗多项式映射为其各项的最小权重。该基对于所有这些赋值都具有赋值独立性，即 $\nu(\sum_a c_a f_a) = \min_{c_a \neq 0} \nu(f_a)$，对每个非零和式均成立（定理2.1）。[1] 每个簇单项式（同一种子中可变变量的非负幂之积）在按其最小指数归一化后，都属于每个这样的基；可达种子中的任意正则劳朗单项式也如此（推论2.2）。

[1]关于对数正则卡拉比–丘对在仿射开集上的相关基定理，参见 Blum 和 Liu [7, 定理 1。2]。它们的赋值具有零对数差异。对于正规双有理模型 $E$ 上的素除子 $\pi\colon\ X' \to X$，其 *log discrepancy* 为 $1 + \mathrm{ord}_E(K_{X'} - \pi^*(K_X + D))$，其中典范除子相容，并且 $K_X + D$ $\mathbb{R}$-Cartier。若这些数均为非负，则对 $(, D)$ 是对数典范的。

LP 海星定理将正则性归结为第一星，即初始图表及其直接邻域 [12, 定理 1。3]。在每个邻域中，正则性等价于被某个交换多项式的幂整除，如开篇示例所示。对数 Cartier 算子在正特征下保持这些条件。将表达这些条件的有限线性系统特化，即可得到特征零下的结果。从最小指数为 $a$的任意元素出发，通过有限次整除性检验即可确定 $Q_a$。多面体的法扇记录每个方向上的极小面。对于 Laurent 系数，若在某个可达种子处，每个交换式关于对方可变变量的次数之积至少为四，则对于任意固定的分离权重，不存在有限扇能细分所有 $Q_a$ 的法扇（定理11.10）。

有了 Laurent 系数，一个正则函数便可确保每个格指数都出现。若权重 在多面体上仅于一个顶点处取到最小值，则称该权重显露这个顶点。设某个分离权重显露了 Newt($g$) 的一个顶点，其中 $g$ 是某个正则函数，且该顶点在每个可变坐标上均为负。则每个 $a \in M$ 都会作为最小指数出现，并且上代数是有限生成的。对于每个有理多胞体 $\Delta$，支集包含于其各倍数中的截面所构成的分次代数 $n\Delta$ 都有一个有限的 ***Khovanskii*** 基。这是一组截面，其初始形式生成伴随分次代数。这里的初始形式记录次数和最小 Laurent 项（定理 2.5）。

第一星还可以检测沿冻结坐标除子的阶。在定理 7.7的赋值线性无关性假设下，这些阶可利用多项式冻结变量取逆后得到的基，从原始系数环上恢复出一个基。任何系数环为唯一分解整环的系数环上的完整上代数都是唯一分解的（命题 1.1）。在域上的正则有限生成唯一分解整环上，只要由普通交换式给出的代数是整环，定理 1.2 便会计算该代数的除子类群（Weil 除子模去主除子）。

由交换式得到的 Theta 乘法。设 $U$ 是代数闭域 $k$ （特征为零）上的光滑连通仿射簇。假设其稠密种子环面体积相容，也就是说，微分 $d\log\ x_j = dx_j/x_j$的楔积可延拓为 $U$上的处处非零体积形式。在此对数 Calabi–Yau 条件下， $U$ 的本质骨架可识别为种子环面 [27, §2 和引理 2.2]中 Gauss 权重的空间 $L_{\mathbb{R}}$ 。Keel 和 Yu 通过计数有理曲线构造一个代数。其基由以骨架整点 $L$ 为指标的 theta 函数组成。令数值曲线参数均为 1，即得到增广代数 $B_{\mathbb{Z}}(U)$。正向镜像为 $Y$ =Spec $B_k(U)$，其中 $B_k(U) = k \otimes_{\mathbb{Z}} B_{\mathbb{Z}}(U)$。

假设可变坐标 $x_i$ 在 $U$上正则，指定单位是$U$上的单位，且种子环面是所有 $x_i \neq 0$均成立的轨迹。假设一阶星环面在$U$ 的余维一部分覆盖，并且将所有其他可变变量求逆后，得到未改变坐标的 Laurent 环上的超曲面$x_iy_i = F_i$ ，其中 $F_i$ 为普通交换多项式（第3节）。这些方程描述了对 theta 乘积的迹 有贡献的曲线，即单位 theta 函数的系数。两个和三个 theta 函数乘积的迹给出一个有限的三角线性系统，其对角元素均为 1。求解该系统即可确定每一对标签的乘积（定理 3.1 和 3.2）。有限多个迹给出 $B_{\mathbb{Z}}(U)$ 的一个表示。在具有可计算域运算和相等性判定的定义域上，它们还给出 $Y$ 奇异轨迹的方程以及光滑性判定方法（定理 3.4 和推论3.5）。应用包括极小权格拉斯曼簇 [13] 和三点共形块 [14]。

我们何时能够恢复在增广下丢失的曲线类？设 $U$ 是定义在 $k$ 上的任意光滑仿射对数 Calabi–Yau 簇，具有稠密分裂环面以及平凡皮卡群 Pic($U$)，其中后者是线丛构成的群。theta 乘积的输入和输出标签随后确定每条参与曲线与光滑射影紧化的边界除子的交数，进而确定其数值类。增广乘法恢复

有效数值曲线类的幺半群环上的乘法，并且 $B_k(U)$ 是一个有限生成正规整环（推论 10.2 和 10.4）。

在我们的一星假设下，牛顿顶点为正向 theta 函数给出坐标。设 $g \in k[U]$ 的 Newt($g$) 中有一个在每个可变坐标上均为负的顶点。该顶点的法锥 $C$ 由在 Newt($g$) 上取得最小值于该顶点的权重组成。该锥确定了 $Y$ 上的一个 Laurent 图表，其坐标为 $z$，与 $U$ 上的标记坐标对偶（命题4.6）。在此图表中，正向 theta 基在每个实高斯权处均具有赋值独立性（定理4.10）。此外，还可以通过正性进行刻画。增广后，将一个整数元素称为正元素，如果其在骨架所有一般点处的局部展开都具有非负系数。theta 函数恰好是不能写成两个非零正元素之和的非零正元素（定理 A.11）。

**互反性与种子变换。** Fock 和 Goncharov 提出，一个簇空间的整数热带点为对偶空间上的典范基标记 [15, 猜想 4。1]Gross、Hacking、Keel 和 Kontsevich 从散射图构造了簇 theta 函数，并猜想通过交换对偶 theta 标签得到的热带赋值彼此一致。当一个标签位于簇复形中时，他们证明了这一点；簇复形是热带种子图表中具有非负可变坐标的锥的并集 [20, 引理 9.10(3) 和注 9。11]。Cheung、Magee、Mandel 和 Muller 证明了赋值独立性，并在两个赋值均为有限时，对手性对偶簇散射图建立了这一等式。他们的朗兰兹对偶表述要求交换矩阵满足整性条件 [8, 定理 1.1 和推论 4。20]。

这里的两个量分别是正向 theta 函数的赋值，以及线性形式在 $Q_a$上的最小值。记 $\Theta_p$ 为标签为$p \in L$ 的 theta 函数在由 $C$确定的图表中的 Laurent展开，并记 $\nu_a^z$ 为那里权重为 $a \in M$ 的高斯赋值。选择一个分离权重 $\omega$，使其位于 $C$ 的内部，以定义 $Q_a$。根据定理 5.4，对于每个 $a$，正向赋值确定一个格多面体 $P_a$，满足

$$P_a \subseteq Q_a, \qquad \nu_a^z(\Theta_p) = \min_{b \in P_a} \langle b, p \rangle \geq \min_{b \in Q_a} \langle b, p \rangle \qquad (p \in L).$$

现在令 $U$ 为一个带有 Laurent 系数的完整上 LP 代数的光滑谱，并假设标记种子具有一个多项式角。于是，一星假设成立，且非负正交象限在 $Y$上给出一个图表。对于每个 $\omega$ 在所有标记坐标特征上均严格为正的分离权重，定理6.1 给出 $P_a = Q_a$ 对于每个 $a \in M$。特别地，任意归一化代表元 $f_a$ 在 $Q_a$ 上满足

$$\nu_a^z(\Theta_p) = \nu_p^x(f_a) \qquad (a \in M,\ p \in L),$$

其中，$\nu_p^x$ 是 $U$的标记图表中的高斯赋值。两个评价标签均不受限制。

回到 $xx' = 1+u+v$。在 $a=(-m, 0, 0)$ 处，$m > 0$，函数 $(x')^m = x^{-m}(1+u+v)^m$具有最小的牛顿多面体 $Q_a = a + m\mathrm{conv}(0, e_u, e_v)$，其中 $e_u$、$e_v$是 $u$、$v$的指数向量。在 $p=(0, -n, 1)$ 处，$n > 0$，该三角形上的最小值为 $-mn$。在对偶坐标 $X$、$U_1$、$U_2$中，命题 4.4 给出 $\Theta_p = U_1^{-n}U_2(1+X)^n$，其最小 $a$-权重仍为 $-mn$。交换 $xx' = 1+u+v+2uv$ 给出了一个具有奇异正向镜像的例子（第 9 节）。

互反性的证明固定 $p$ 并令 $a$ 变化。于是，$p$ 在 $Q_a$ 上的最小值就是 $a$ 在格多面体 $T_p \subset L_{\mathbb{R}}$（命题2.4）上的最小值。(5.1)中的界给出 Newt($\Theta_p$) $\subseteq T_p$。为获得相反的包含关系，我们扰动 $p$，并选取正则函数，使其最小指数在扰动后的权重处以及 $\omega$处都构成格基。它们在函数域上的一条曲线上给出一个环带坐标。黎曼–罗赫定理和斜率公式将该环域截面延拓过一个圆盘（命题 6.5）。该圆盘对扰动后顶点处的系数作出贡献。固定一个暴露权重并令其取极限，表明 $T_p$ 的每个顶点都 $\Theta_p$出现。

对于在连续的变量组中仿射线性的交换式，我们还在 $Q_a$ 上构造了由主子式得到的代表元，这基于定理8.7的互素性假设。对于相互依赖的非线性交换，定理 8.9 给出了相应条件，使得 $Q_a$ 成为膨胀交换多胞体的平移凸包。例 8.10表明，即使互反性成立，这种特定描述也可能失效。

互反性还描述了固定截面的最小指数如何随变异而变化。Fomin 和 Zelevinsky 的分离公式用簇变量的 $F$-多项式及其 $g$-向量表示该簇变量 [17, 推论 6.3].[2] 在具有多项式角的种子 $t$ 的镜像图表中，$\Theta_p^t = z^p A_p^t$。这里，$z^p$ 是指数为 $p$的特征，而 $A_p^t$ 是可变镜像坐标中的一个常数项为 1 的多项式。它起到$F$-多项式的作用。在 $U$上，$f_a$的最小指数 $a$起到 $g$-向量的作用。假设在 $i$ 处变异$\widehat{\ }$后得到另一个多项式角，且交换 Laurent 多项式 $F_i = x_i x_i'$ 本身是一个常数项非零的多项式。用 $e_i$ 表示第 $i$个坐标余特征。因子 $H_i = A^t_{-e_i}$ 给出新的镜像坐标 $z_i' = H_i/z_i$（命题 4.11）。若每个种子中都有严格正的分离权重，则根据互反性，同一个 $f_a$ 在新种子中的最小指数 $a'$ 为 $a_i' = \nu_a^z(H_i) - a_i$，而对于 $j \neq i$，则为 $a_j' = a_j$（推论 6.6）。

**标记回返与系数的变化**。在多项式角处，互反性可从正向镜像恢复最小牛顿多面体。若 $Y$ 光滑，那么它的镜像也能在 $k[U]$ 原坐标中恢复它吗？对于光滑的 $Y$，该构造给出反向 *theta* 函数，其 Laurent 展开为 $\Phi_a$，位于 $U$的标记坐标中。Keel、White 和 Yu 猜想，原簇是第二镜像族的一个纤维，并将 θ 配对的对称性作为一个独立猜想提出 [26, 猜想 21.4 和 21.6]。在这种一般性下，关于族的猜想尚未解决。本文研究标记回返，即在指定的 Laurent 域内满足 $B_k(Y) = k[U]$ 的等式。

这些首次变异伴随对象是 $x_i'$，即在每个可变方向上对初始种子变异一次所得到的变量。在固定标记下，它们已经能够确定普通交换式（相差系数单位）（命题1.3）。它们也能检测标记回返。令 $a_i$ 为 $x_i'$ 关于严格正分离权重 $\omega$的最小指数，并令 $c_i$ 为其对应的系数。定理9.7 给出

$$B_k(Y) = k[U] \text{ in the marked field} \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi_{a_i} = c_i^{-1} x_i' \text{ for every mutable } i.$$

当标记回返成立时，$U$ 的可达种子中的每个归一化簇单项式都等于其最小指数处的反向 theta 函数（命题11.11）。

固定交换支撑集，并将常数项归一化为 1。只会出现有限多个标记增广前向代数（推论 11.3）。使正向镜像光滑且标记回返成立的系数元组构成一个可计算的正整数元组有限集。我们还可以允许对角环面平移，从而对标记坐标进行缩放。在这种情况下，光滑性和回返由系数特征决定，即在这些缩放下保持不变的交换系数 Laurent 单项式。它们的取值必须与该有限集中某个单一元组的取值一致（定理11.14）。

在每个至少为二的可变秩中，都存在这样的光滑簇：其光滑前向镜像在任意对角平移后都无法实现回归（定理 11.12）。前向 theta 基本身可能对系数不敏感。在一个具有固定支撑集的光滑多项式角源的不可约复族中，假设某个系数特征非常数。那么，在参数空间中任意给定的可数个真闭子集的并集之外，我们可以选取两个纤维，使它们具有相同的标记的前向θ基，而其上代数无法通过对角环面平移相互对应（定理11.1）。

[2]在 *principal coefficients*的条件下，扩展交换矩阵在初始交换矩阵下方有一个单位矩阵（$b_{ij}$）。记 $x_j$ 为初始可变变量，记 $y_j$ 为系数变量。将簇变量中的所有 $x_j = 1$ 都设为 1，得到它的 $F$多项式。它的 $g$向量是其关于 $\deg x_j = \epsilon_j$和 $\deg y_j = -\sum_i b_{ij}\epsilon_i$的多重次数，其中 $\epsilon_i$ 构成标准基（定义 3.1、3.3 和§6]。

## 1. Upper Laurent phenomenon algebras and their tori

**1.1.** 种子的第一星。设 $S$ 为一个唯一分解整环。我们采用 Lam 和 Pylyavskyy [28, §2]所定义的 LP 种子。一个秩为 $r$ 的种子 $t$ 具有代数独立的可变变量 $x_1$、……、$x_r$ 以及不可约交换多项式 $F_i \in S[x_1, \ldots, x_r]$。每个$F_i$ 都独立于 $x_i$，且没有可变变量整除它。交换 Laurent 多项式$\widetilde{F}_i$ 是 $F_i$ 乘以关于其他可变变量具有非正指数的单项式。其$\widehat{}$指数的选取满足：对每个 $j \neq i$，将 $x_j = F_j/y$ 代入 $F_i$ 后所得的 Laurent 多项式不被 $F_j$整除，其中 $y$ 是不定元。沿方向 $i$ 进行突变得到$\widehat{}$种子 $\mu_i t$，并将 $x_i$ 替换为 $x_i' = F_i/x_i$。当需要将其与 $F_i$区分开时，我们称 $F_i$ 为普通交换多项式$\widehat{}$。

设 $L(t) = S[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_r^{\pm 1}]$。第一星 由其初始图表及其 $r$ 相邻图表组成。它们的 Laurent 环包含于同一个有理函数域中。记

$$\mathcal{U}_\star(t) = L(t) \cap \bigcap_{i=1}^{r} L(\mu_i t).$$

上*LP*代数 $\mathcal{U}$ 是所有可达种子的 Laurent 环的交集。LP 海星定理表明，对于每个 LP 种子 $t$ [12, 定理 1.3]，$\mathcal{U}_\star(t)$ 与 $\mathcal{U}$ 相同。我们的系数环包括 Laurent 多项式环 $k[u_1^{\pm 1}, \ldots, u_c^{\pm 1}]$，简记为 $k[u^{\pm 1}]$，以及它们的多项式扩张。多项式冻结变量 是系数环的多项式生成元之一，在每个图表中仅允许出现非负幂。

**命题 1.1**。 $\mathcal{U}$ 是唯一分解环，并且每个可变种子变量都是 $\mathcal{U}$中的素元。对于 $C_i = S[x_j^{\pm 1}: j \neq i]$ 和 $s_i = \prod_{j \neq i} x_j$，有

$$\mathcal{U}[s_i^{-1}] = C_i[x_i, F_i/x_i] \simeq C_i[X, Y]/(XY - F_i).$$

相对*Laurent*图表 $\operatorname{Spec} L(t)$ 和 $\operatorname{Spec} L(\mu_i t)$，视为在 $\operatorname{Spec} S$上的图表时，覆盖任意系数唯一分解整环 $S$ 上 $\operatorname{Spec}\mathcal{U}$ 的所有高度一处。对于域上的*Laurent*系数，这些图表是该域上的环面。

证明。 唯一分解性以及对相伴元意义下素元的描述，由 [13,命题 2.2]得出。我们回顾 [32] 关于交集 $\mathcal{U}_\star(t)$ 的分解论证。令$L_0 = L(t)$，并令 $L_i = L(\mu_i t)$。在 $L_i$中，元素 $x_i$ 与素元 $F_i$相伴。事实上，将其他变量取逆不会改变 $F_i$的不可约性，而添加独立的Laurent变量 $x_i'$ 会保持素性。在 $L_j$ 中，当 $j \neq i$时，以及在 $L_0$中，元素 $x_i$ 是单位。若 $v_i$ 表示 $L_i$中 $F_i$ 处的阶，则 $v_i(x_j) = \delta_{ij}$。将 $F_i$ 取逆后，$L_i[F_i^{-1}]$ 与 $L_0[F_i^{-1}]$ 相同。因此，Laurent 多项式 $a \in L_0$ 属于 $\mathcal{U}$，当且仅当对每个$i$，$v_i(a) \geq 0$。特别地，$(x_i)\mathcal{U} = \mathcal{U} \cap (F_i)L_i$ 是素元。

对于任意素因子 $p$ in $L_0$，元素 $p^\circ = p \prod_i x_i^{-v_i(p)}$ 属于 $\mathcal{U}$，且其所有$v_i$ 均等于零。它在其中是素元。事实上，若它整除 $ab$，则根据在 $L_0$中的素性，$a/p^\circ$，$b/p^\circ$ 中必有一个在$L_0$ 中是 Laurent，而该商满足所有赋值不等式。将$a \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$ 在 $L_0$ 中因式分解，并用 $p^\circ$ 替换每个因子后，剩下一个 $S$ 的单位以及幂 $x^{v_i(a)}$。由此得到一个素元分解。同样的论证适用于任何可达种子。

Laurent 现象给出 $x_i' \in \mathcal{U}$。因此，将 $s_i$取逆后，该环包含$C_i[x_i, F_i/x_i]$。它包含于 $C_i[x_i^{\pm 1}]$ 与 $C_i[(F_i/x_i)^{\pm 1}]$的交集中；通过比较 $x_i$的幂可知，该交集恰为$C_i[x_i, F_i/x_i]$。包含 $x_i$ 的高度一素理想等于非零素理想 $(x_i)$。它既不包含任何满足 $j \neq i$ 的 $x_j$，也不包含第一个配对元素 $x_i'$，因为这些元素的 $v_i$值为零。将它们取逆后，得到第 $i$ 个相邻 Laurent 图表。不包含可变变量的素理想包含于初始图表中。秩为零时，上代数就是系数环。□

**1.2. 由普通交换式生成的代数**。设 $S$ 是域 $k$上的正则有限生成唯一分解整环，并设 $x_1, \ldots, x_r$ 是 $S$ 上的 LP 种子，具有

普通交换式 $F_i$。考虑如下表示

$$A_0 = S[x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r]/(x_i y_i - F_i : 1 \le i \le r).$$

对于一个簇种子，这个表示在初始 Laurent 环中的像是 Berenstein、Fomin 和 Zelevinsky 的下界。对于互素无环种子，他们证明下界等于上界 [3, 定理1。18]对于一个 LP 种子，以下理想描述了第一星所遗漏的分层。对于非空 $I \subseteq \{1, \dots, r\}$，记作

$$S_I = S[x_j^{\pm 1} : j \notin I], \qquad J_I = (F_i|_{x_a=0\ (a\in I)} : i \in I) \subseteq S_I.$$

在下文中，$x_I = 0$ 表示 $x_i = 0$ 对每个 $i \in I$。

**定理1.2**。将 $y_i$ 映射到 $F_i/x_i$ 的映射 $A_0 \to S[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}]$ 是单射，当且仅当$A_0$ 是整环；等价地，当且仅当每个 $J_I$ 都非零。在此情况下，$A_0$ 是正规且 ***Cohen–Macaulay*** 的。对于每个满足 $|I| \ge 2$ 的 $I$，以及 $J_I$的生成元所共有的每个素因子 $q$，在 $S_I$中视为相差一个单位，令 $H_{I,\,q}$为 $\operatorname{Spec} A_0$中 $\operatorname{Spec}((S_I/(q))[y_i\colon \ i \in I])$在分层 $x_I = 0$ 中的闭包，其中其他 $x_j$ 均可逆。这些是初始 ***Laurent***图表和相邻 ***Laurent***图表所遗漏的素除子。除子类群为

$$\operatorname{Cl}(A_0) = \bigoplus_{I,q} \mathbb{Z}[H_{I,q}].$$

若 $A_0$ 是整环，则以下条件等价：

(1) $A_0 = \mathcal{U}$。(2) $A_0$ 是唯一分解的。(3) 每个 $x_i$ 都是 $A_0$中的素元。

(4) 对于每个满足 $|I| \ge 2$的 $I$，$J_I$ 的生成元在 $S_I$中有单位最大公因数。

$\widehat{\ }$在这些条件下，$F_i = F_i$，但需遵循系数单位约定。特别地，任何包含初始变量及其首次变异伴随对象的 $\mathcal{U}$ 的$S$-子代数都是 $\mathcal{U}$。

证明。设 $c =$ 维数为 $S$。在恰好坐标 $I$ 为零的分层上，对 $j \notin I$ 消去$y_j$，得到环 $(S_I/J_I)[y_i :\ i \in I]$。由域上仿射整环的维数公式，这样的非空分层维数为$c + r - \operatorname{ht}\ J_I$。初始 Laurent 分层是维数为 $c + r$的整分层，因此 $A_0$ 具有此维数。由正则环境环中的高度定理，定义理想的每个极小素理想的高度均为 $r$。该理想由 $r$ 个高度为 $r$ 的元素生成，故局部上是完全交。因此，$A_0$ 是 Cohen–Macaulay 环，具有纯维数 $c + r$，且没有嵌入素理想。若对某个非空的 $I$有$J_I = 0$，则该分层的闭包给出一个与 Laurent 开集不相交的不可约分支。若所有 $J_I \ne 0$，则每个不可约分支都与此开集相交。于是只有一个不可约分支，且一般约化、没有嵌入素理想，因此 $A_0$ 是整环。将整环在非零的 $x_i$ 处局部化是单射，由此得证前述结论。

以下假设 $A_0$ 是一个整环。维数公式表明，每个边界除子的 一般点都位于形如 $\operatorname{Spec}((S_I/(q))[y_i :\ i \in I])$ 的分层上，其中 $(q)$ 是一个包含 $J_I$ 的高度一素理想。每一对这样的对象恰好出现一次。在该点处，在环境局部化中消去 $y_j$，令其对应 $j \notin I$。环境正则局部环的参数为 $q$ 和 $x_j$，对应于 $j \in I$。在它们的余切空间中，方程里 $x_j$ 的系数构成矩阵

$$\left( y_i\delta_{ij} - \left.\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right|_{x_I=0} \right)_{i,j\in I} \pmod q.$$

其行列式在 $\prod_{i\in I} y_i$ 处的系数为一，并且在该一般点处，$y_i$ 在 $\operatorname{Frac}(S_I/(q))$ 上代数独立。因此，这些方程的线性部分线性无关。商局部环是维数为一的正则局部环。Laurent 开集是正则的，因此 Serre 判据给出正规性。

对于 $I = \{i\}$，不可约元 $F_i$ 在 $S_I$ 中仍为素元，因为没有可变变量整除它。这给出一个除子 $E_i$。在其一般点 $y_i$ 处，$F_i$ 是一个单位，并且在带有坐标 $y_i,\ x_{j\ne i}$的 Laurent 环中具有一阶。因此 $\operatorname{ord}_{E_i}(x_j) = \delta_{ij}$。第 $i$ 个相邻图表

$\widehat{}$具有这个 Laurent 环，因为 $F_i/F_i$ 是未改变坐标中的单项式单位。每个$H_{I,\ q}$ 且满足 $|I| \geq 2$ 的对象都不属于任何图表，因为这要求初始坐标中至多一个不是单位。将 $A_0$ 在 $\prod_i x_i$ 处局部化，得到一个唯一分解整环，其单位恰好是满足 $s \in S^\times$、 $b \in \mathbb{Z}^r$的 $sx^b$。因此，除子局部化正合列在边界除子上给出了 Cl($A_0$)，其关系为 div($x_i$)。沿着 $E_j$ 的阶所成的单位矩阵消去了这些生成元，从而得到所声称的自由群。

因此，唯一分解性等价于：每个大小至少为二的分层上都不存在公素因子。若不存在这样的因子，则 $\mathrm{div}(x_i) = E_i$ ，而正规性给出 $(x_i) = \{f \in A_0 : \mathrm{ord}_{E_i} f \geq 1\}$，这是一个素理想。反过来，除子 $H_{I,q}$ 会包含 $(x_i)$，其中 $i \in I$，并且与 $E_i$不同，这就排除了 $x_i$的素性。若图表没有遗漏任何除子，则由正规性，它们的交集等于 $A_0$。此交集是 $\mathcal{U}_\star(t) = \mathcal{U}$。反过来$\mathcal{U}$ 根据命题 1.1 是唯一分解的。

$\widehat{}$最后，在 $F_i$ 中，$x_j$ 的非平凡正规化幂要求 $F_j$ 整除 LP 归一化检验中的代换 $F_i|_{x_j = F_j/t}$。模 $F_j$ 约化可得 $F_j \mid F_i|_{x_j=0}$。由于 $x_j \nmid F_i$，这个多项式非零，且与 $x_i$ 无关。由素性以及对可变单项式作局部化可知，该整除关系在多项式环中成立，因此 $F_j$ 也与 $x_i$ 无关。于是它仍会是 $J_{\{i,j\}}$ 的一个公非单位因子，这与最大公因子条件矛盾。因此，每个 $y_i$ 都是相应的第一伴随元，至多相差一个系数单位。这些元素与初始变量生成 $A_0 = \mathcal{U}$，从而证明了最后一个断言。□

**1.3. 恢复标记环面中的交换式。**设 $S$ 为唯一分解整环。考虑同一有理函数域上的两个 LP 种子，它们在$S$上具有相同的有序可变坐标 $x_1, \ldots, x_r$。用 $F_i, G_i$ 表示它们各自的普通交换式，用$\widetilde{}\,x'_{i,F} = F_i/x_i$ 表示第一个种子的首次变异伴随对象，并用 $\mathcal{U}_F, \mathcal{U}_G$ 表示它们的完整上代数。

**命题 1.3。**以下条件等价：

(1) 对每个 $i$，都有$x'_{i,F} \in \mathcal{U}_G$ ；(2) $\mathcal{U}_F \subseteq \mathcal{U}_G$；(3) $\mathcal{U}_F = \mathcal{U}_G$；(4) 对每个 $i$，存在单位 $e_i \in S^\times$ 使得 $F_i = e_i G_i$。

证明。由 Laurent 现象，每个$x'_{i,F}$ 都属于 $\mathcal{U}_F$。反过来，假设第一个条件成立，并写作 $C_i = S[x_j^{\pm 1} : j \neq i]$。在 $G$ 的第 $i$个相邻 Laurent 环中，$x'_{i,F}$ 里$x'_{i,G}$ 的系数为 $F_i/G_i$。此系数属于 $C_i$，因此 $G_i \mid F_i$ 在那里。两个普通交换式在 $C_i$中仍是不可约非单位：它们在局部化之前不可约，且都不能被任何可变变量整除。因此，它们在 $C_i$中相伴。在该处的单位是 $S$ 中的单位乘以一个可变 Laurent 单项式。两个交换式在每个未改变的可变变量上的最低次数均为零，因此该单项式的指数为零。这就证明了第四个条件。在该条件下，每个指标处的两个相邻 Laurent 环都相同，且它们的初始 Laurent 环也相同。因此，它们的一阶星交相同，进而它们的上 LP 代数也相同。□

现在令 $S = k[u_1^{\pm 1}, \ldots, u_c^{\pm 1}]$，其中 $k$是特征零的代数闭域。令 $M$为完整初始环面的特征格。点 $t \in \mathrm{Hom}(M,\ k^\times)$通过平移作用，将特征 $\chi^a$ 映射为 $t^a\chi^a$，其中 $t^a = t(a)$。令 $D \subset M$ 由所有满足 $a,\ b \in \mathrm{Supp}(F_i)$（对某个 $i$）的 $a - b$生成。我们从同一个交换中取两个指数，包括其单位坐标。

**推论 1.4。** 在其标记的 *Laurent* 域中保持 $\mathcal{U}_F$ 不变的对角平移构成$\mathrm{Hom}(M/D, k^\times)$。如果必须固定指定的系数特征，则在形成商之前，将它们的指数添入 $D$。

证明。 平移将第一星映射到其普通交换式为 $t(F_i)$（相差标量因子）的星。事实上，在每个

Laurent图表中，变量和归一化单项式仅发生标量变化。根据命题 1.3 环保持不变当且仅当 $t(F_i) = e_i F_i$对于 $e_i \in S^\times$成立。平移保持 $F_i$的有限支撑不变，而单项式单位 $e_i$ 的非零指数会平移该支集。因此 $e_i \in k^\times$，比较系数恰好得到所指示的各对 $t^{a-b} = 1$ 。□

我们对一个定义在特征零代数闭域上的、带有与体积相容的稠密分裂环面的光滑连通仿射对数 Calabi–Yau 簇使用计数源。

假设这两个标记种子给出计数源。环面平移将一个簇与其平移像相对应，并保持体积形式和余字符标记不变。紧化与评价点的传输将计数纤维对应起来。因此，在曲线类增广下，这两个带标记的正向代数相同。当它们的正向 Laurent 标记由相同的指定 theta 标记定义时，该标记也相同。随后，仅依赖于这个带标记的正向代数的反向构造，会在固定的反向 Laurent 域中给出相同的子代数。如果它在该域中恢复出两个上 LP代数，则该平移属于推论 1.4中的群。

现在取 $S = k[u_1^{\pm 1}, \dots, u_c^{\pm 1}]$，其中 $k$是特征零代数闭域。对于带有标记环面 $T$的仿射光滑完整上代数，对数体积形式 Ω 是 $T$上所有坐标的对数微分的楔积，其中包括$u_j$。$\widehat{}$突变将 Ω 保持至多一个符号，因为 $F_i$ 与 $x_i$无关。因此，Ω 在第一星的任何环面上都没有零点或极点。根据命题1.1，它延拓为光滑仿射簇上的处处不消失的正则顶形式。乘积$\prod_i x_i$ 切出初始环面的补集。

**1.4. 种子图中的高斯赋值**。对于分裂环面 $T = \mathrm{Spec}\ k[M]$，群代数$k[M]$ 以特征 $\chi^a$、$a \in M$为基，其中有 $\chi^a \chi^b = \chi^{a+b}$。记 $L = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$。对于$f = \sum_a f_a \chi^a \neq 0$ 令

$$\tau_f(w) = \min_{a : f_a \neq 0} \langle a, w \rangle, \qquad w \in L_{\mathbb{R}}.$$

在环面坐标 $x = (x_1, \dots, x_d)$ 中，我们将 $v_x$、$w(f) = \tau_f(w)$ 记为权重 $w$的高斯赋值。我们也称其为此图表中 $f$ 的热带化。 $w$ 处的初始形式是具有最小 $w$-权重的各项之和。两个非零 Laurent 多项式的初始形式的乘积非零，因此它们的赋值在乘法下相加。通过对商作减法，赋值可延拓到有理函数域 $K = k(x_1, \dots, x_d)$。如果$-\tau_f$ 在原点之外严格为正，我们称 $f$为强制的；等价地，0 位于 Newt($f$) 的内部。 [27, 引理 2.9 及推论 15.11]中有界性论证的以下形式给出了一个显式多面体。

**命题1.5**。 设 $U$ 是带有稠密环面 $T$的光滑仿射簇，并且对数环面体积形式可延拓为 $U$上的处处不为零的体积形式。在 $k[U]$的任意有限代数生成元集中加入1 。它们的 *Laurent* 支撑的凸包在 $M_{\mathbb{R}}$中包含0 作为内部点。在无限基域上，生成元与1 的 $f$ 一般线性组合在原点之外严格为正，并且具有有界的多面体次水平集。

证明。 否则，有理分离会给出一个非零本原 $v \in L$，使得它与每个指数的配对均非负。相应的赋值环包含 $k[U]$。在包含 $v$之射线的光滑托里克模型上，对数形式 Ω 沿其除子的阶为 $-1$ 。然而，从该模型到仿射簇 $U$ 的有理映射在该除子的一般点附近有定义，因为所有生成元都属于其赋值环。 $U$ 上的正则形式的拉回在此处是正则的，矛盾。避开导致某个指数发生消去的有限个线性方程，可得到具有所述牛顿多面体的 $f$ 。根据单位球面的紧性，其负支撑最小值支配范数的某个正倍数。关于次水平集的断言随即成立。□

**引理 1.6**。 设两组环面坐标相差 $x'_j = G/x_j$，其中 $G$ 是关于除 $x_j$ 之外的坐标的非零有理函数。令 $w'_j = v_{x,\ w}(G) - w_j$ 以及$w'_i = w_i$ 对 $i \neq j$。则在 $K$ 上有 $v_{x,\ w} = v_{x'}$。

证明。将 $E = k$ 写作 $x_i$ （ $i \neq j$），并令 $v = v_{x,\ w}$。按其$x_j$-指数对 Laurent多项式分组可得

$$v\left(\sum_r b_r x_j^r\right) = \min_{b_r \neq 0}\big(v(b_r) + r w_j\big) \qquad (b_r \in E).$$

对于有理的 $b_r$，只需在 $E$中通分即可得到该结论。代入（$x_j'$）$^r$ =$G^r x_j^{-r}$后，可得到相同的公式，其中用 $x_j'$，$w_j'$ 替代 $x_j$，$w_j$。取商即可证明该断言。□

^对于 LP 变异，取 $G = F_j$，包括其单项式分母。反复应用该引理，可沿任意有限的突变序列传递高斯赋值。在坐标的单项式变换下，新的权重就是旧权重在新指数上的取值。

## 2. Newton polytopes of regular functions

**2.1. 给定最小指数下最小的牛顿多面体。** 我们同时允许可逆冻结变量和多项式冻结变量。在域 $k$ 上，取系数环 $S$ =$k[u_1^{\pm 1}, \dots, u_c^{\pm 1}, s_1, \dots, s_l]$ 并令 $C_i = S[x_j^{\pm 1}\colon\ j \neq i]$。对于每个 $i$，选择一个非零的 $E_i \in C_i$并写成 $y_i = E_i/x_i$。我们使用一阶星交

$$A = S[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}] \cap \bigcap_{i=1}^{r} C_i[y_i^{\pm 1}].$$

^对于 LP 种子，可以取 $E_i = F_i$ 或 $F_i$，因为它们相差一个 $C_i$的单位。于是$A = \mathcal{U}_\star$(*t*) $= \mathcal{U}$。本节中的论证适用于所述交集，即使某个 $E_i$ 可约或为单位。所有环都包含于同一个有理函数域中。初始坐标将 $A$ 嵌入 $k[M]$，其中 $M$ 是具有坐标 $x_i$、$u_j$、$s_j$的环面的特征格。$s_j$ 在每个图表中都具有非负指数。固定 $M$上的一个平移不变总阶，使得对于每个 $c \in M$，$a < b$ 蕴含 $a + c < b + c$。对于非零 Laurent 多项式 $f$，记 $e$(*f*) 为其最小指数。在$A$中出现的指数集合为 $\Gamma = \{e(f)\colon\ 0 \neq f \in A\}$。若权重 $\omega \in M_{\mathbb{R}}^*$与不同格点的配对值均不相同，则称其具有分离性。这样的权重按配对值递增的顺序排列 $M$。我们记 $\nu_p = v_x$、$_p$为初始图表中的高斯赋值，并在涉及多个图表时使用 $\nu_p^x$。所谓支集包含于多面体 $\Delta$中的截面，是指属于 $A$ 且其支集包含于 $\Delta$的元素。首一截面的最小系数为一。下文中的多面体之和均指闵可夫斯基和，因此$P + Q = \{p + q\colon\ p \in P、\ q \in Q\}$。

**定理 2.1.** 对于每个 $a \in \Gamma$，存在某个 $f \in A$，其 $e(f) = a$ 的牛顿多面体 $Q_a$ 包含于任何其他此类函数的牛顿多面体中。这些最小多面体满足

$$Q_{na} = nQ_a \quad (n \geq 1), \qquad Q_{a+b} \subseteq Q_a + Q_b.$$

任取一个支集包含于 $Q_a$ 且在 $x^a$ 处系数为一的 $f_a \in A$。当 $a \in \Gamma$ 时，这些 $f_a$ 构成一个 $k$-基。对于每个实高斯权 $p$ 以及每个非零有限和，

$$\nu_p\Big(\sum_a c_a f_a\Big) = \min_{c_a \neq 0} \nu_p(f_a).$$

对于 *LP* 种子，同一个基在每个可达种子图中都满足该公式。

证明。 对于有限集 $E \subset M$，我们首先刻画支集包含于 $E$ 且具有指定最低项的截面。若 $j > 0$，则为了使该截面在第 $i$ 个相邻图表中是 Laurent 多项式，$x_i^{-j}$ 的系数 $h$ 必须属于 $E_i^j C_i$。这可通过代入 $x_i = E_i/y_i$ 得出。反过来，每个负切片都具有整除性便足够。记作 $h = E_i^j h'$。将 $h'$ 的系数作为辅助未知量。商的坐标最小值和最大值分别受切片相应极值减去除子的对应极值所界定，因为牛顿多面体在乘法下相加。多项式的冻结指数在每个

图表中也必须是非负的。对每个切片比较系数并指定最低项，便得到一个在 $k$ 上的有限线性方程组。

首先假设 $k$ 是特征为 $p>0$的完美域。对于 $q=p^l$， $l$重< शैली id='5'>对数 Cartier 算子 为

$$C_q\Big(\sum_m c_m x^m\Big)=\sum_{m\in qM} c_m^{1/q}x^{m/q}.$$

它保持不变 $A$。事实上，次数为 $-qj$ 的截面是 $E_i^{qj}h'$。其在次数 $-j$中的贡献为 $E_i^jC_q(h')$, 其中右侧的算子使用未改变的坐标。非负冻结指数仍保持非负。在非完美域上，我们可以在其代数闭包上进行这一构造，并将有限线性方程组的可解性下降到 $k$。Benito、Muller、Rajchgot 和 Smith 给出了上簇代数中相应的分裂 [5]。

固定 $a\in\Gamma$，从任意一个最低指数为 $a$的截面开始。在其牛顿多面体中支撑此类截面的格子子多胞体中，选择一个关于包含关系极小的，并将其记为 $Q$。令 $f$ 为 $Q$ 上最低指数为 $a$的一个截面。令 $h$为 $a$处的任意另一个截面，并写作 $R=$Newt($h$)。将两个最低系数都归一化为 1。若 $Q\not\subseteq R$，则存在一个整余向量 $v$，使得 $\min_Q v<\min_R v$。对于充分大的 $q$，由紧性和离散性，$(1-1/q)Q+(1/q)R$ 的每个格点都属于 $Q$。最小值的严格不等式排除了面 $Q^v$，在该面上 $v$ 于 $Q$上取得最小值。然而，$C_q(f^{q-1}h)$支集包含于这个更小的集合中，且其最低项为 $x^a$。这与在正特征下选择 $Q$相矛盾。

在特征零的情形下，使用允许支集 $(Q\cap M)\setminus Q^v$、 $a$ 处规定的系数以及其下方的零系数所对应的固定有限系统。若该系统不相容，则将其方程的一个线性组合（给出 $0=1$ ）纳入定义于一个有限生成 $\mathbb{Z}$-代数中的数据。将交换多项式的非零标量系数及其逆元，以及 $f$ 和 $h$ 的首星表达式的系数一并添加。根据 Spec $\mathbb{Z}$ 上的支配性与可构造性，该子代数存在到特征 $p$ 任意大的代数闭域上的特化。每个交换多项式的支集在特化后都保留下来，因此辅助系数的相同界定定义了特化后的系统。 $f$， $h$ 的支撑集可能缩小，但其最小系数仍为一，且其图恒等式依然成立。特别地，特化后 Supp$(f^{p-1}h)\subseteq(p-1)Q+R$。因此，带有 $q=p$ 的 Cartier 构造给出特化后系统的一个解，这与 $0=1$ 矛盾。由此证明了 $Q\subseteq R$ 对任意域均成立，并证明了 $Q_a$ 的唯一性。

乘积给出 $Q_{a+b}\subseteq Q_a+Q_b$。为证明伸缩的反向包含关系，选择一个在 $na$ 处的首一代表元 $u$，其多面体为 $S=Q_{na}$。记 $q=nt+r$、 $0\le r<n$。截面$C_q(u^tf^r)$ 的最小指数为 $a$，且支集包含于 $(tS+rQ_a)/q$ 中。这些体趋于 $S/n$，因此当 $q$ 足够大时，它们的所有格点都落在 $(S/n)\cap M$ 中。在特征零情形使用相同的有限系统论证，在正特征情形使用下降，可得到一个支集位于该处的 $a$ 截面。因此 $nQ_a\subseteq S$。

如果 $a$是 Laurent 多项式支集中的最小指数，那么它也是其牛顿多面体中的最小格点。事实上，对于多面体中的任意格点 $b$，在凸组合中消去分母后，可将$b-a$ 的正倍数表示为若干差的和，而这些差在所选阶下均为非负。因此 $b\ge a$。特别地， $f_a$ 的最低项是 $x^a$。对于 $0\neq h\in A$，减去$f_{e(h)}$的适当倍数。支集仍包含于 Newt($h$) 中，且最小指数增大，因此连续相减最终会终止。各个 $f_a$ 的最小指数互不相同，从而证明了线性无关性。在所得展开中，每个直和项的多面体都包含于各项之和的牛顿多面体中。反向的凸包包含关系由加法得到。取支撑最小值即可得到赋值公式。在种子突变下，高斯赋值被传输为高斯赋值，见引理 1.6。迭代即可证明最后一个断言。□

**推论 2.2.** 设 $A$ 是一个完整上 *LP* 代数。设 $h\in A$ 是可达种子的坐标中的一个 *Laurent* 单项式，且 $a=e(h)$ 属于初始图表。在定理*2.1*的任一基中，元素 $f_a$ 除以其在 $h$ 处的系数。 $x^a$。

证明。 将 $h$按所选的基展开。在可达图表中，对每个 Gauss权重，最小值公式都成立，因此 $h$的牛顿多面体是非零直和项的牛顿多面体的凸包。它是一个单点。因此，每个直和项都是同一个单项式的标量倍数，而线性无关性使得只剩下一个。它在初始图表中的最小指数和系数给出了所述结论。 □

对于完整上 LP 代数，最小多面体也决定了另一个种子中的最小指数。按照引理 1.6，令 $T$ 将来自初始种子 $t$ 的 Gauss 权重传递到可达种子 $t'$。对于 $Q_a$ 上的截面 $f_a$，在 $w'$ 处，$\mathrm{Newt}_{t'}(f_a)$ 上的最小值为 $\min_{b\in Q_a}\langle b, T^{-1}(w')\rangle$。在分离权重 $w'$ 处，该函数的斜率就是新的最小指数 $a'$。特别地，它只取决于 $Q_a$。新多面体仍然是其最小指数对应的最小多面体。事实上，按照定理 2.1，将 complete $f_a$ 补成一组基。其成员在 $t'$ 中有不同的最小指数，因为消去两个相同的最低项会与 $w'$ 处的赋值独立性矛盾。因此，最小指数为 $a'$ 的每个元素，其基展开中都含有 $f_a$。在 $t'$ 中所有权重处的赋值独立性给出了所述牛顿多面体包含关系。

我们可以从 $a$处的任意截面恢复 $Q_a$。从其牛顿多面体开始，移除一个不同于 $a$ 的顶点，并取剩余格点的凸包。如果其归一化一阶星系统有解，则接受这个较小的凸包。如果移除某个顶点失败，那么此后所有在 $a$ 处支撑截面的凸包仍必须包含该顶点。因此，每个格点至多需要进行一次测试。当无法再移除任何顶点时，每个真格子多面体都遗漏了一个不可或缺的顶点。根据定理，最终的凸包就是 $Q_a$。

对于多面体 $\Delta$，令 $V(\Delta)$表示支集在 $\Delta$中的 $A$ 元素空间。具有 $Q_b \subseteq \Delta$ 的代表元构成 $V(\Delta)$的一组基。它们各不相同的最小指数在这些指标上给出一个三角可逆系数矩阵。特别地，在 $Q_a$ 上存在一个归一化代表元，使得对于每个满足 $Q_b \subseteq Q_a$ 的其他 $b$，其系数均为零。

2.2. **与最小牛顿多胞体对偶的多面体**。 对于 Laurent 系数，假设某个 $g \in A$有一个顶点 $v$，它在每个可变坐标上都为负。对于任意$a \in M$，选择一个 $l \geq 0$，使得在所有可变指标处都有 $a_i - lv_i \geq 0$。将其首项系数归一化后， $R_a = x^{a-lv}g^l$ 在 $v$的法锥 $C$的内部处处具有最小指数 $a$。因此，在该内部的每个分离权重处都有 $\Gamma = M$。包含关系 $Q_a \subseteq \mathrm{Newt}(R_a)$使得 $a$ 在此处的唯一最小化顶点就是它自身。现在比较任意两个此类权重对应的最小多胞体，可得相同的 $Q_a$。

记作 $L = M^*$。对于每个 $p \in L$， $p$ 在 $Q_a$ 上的最小值随 $a$ 变化，并构成一个格多面体的支撑函数。我们采用取最小值约定。下一个引理是 Thurston 整数半范数定理 [35]的单边形式。关于支撑函数的论证，参见 [10, 引理 0.1 及定理 1]的证明。下文的证明使用了 Vershynin 的可微性论证，记录于 [24, 引理 4]中。

**引理 2.3**。 格上的一个整数值超可加函数，若在正整数伸缩下齐次，则它是唯一格多面体的最小支撑函数。

证明。 将 $h$记为该函数，并利用齐次性将其延拓到有理向量上。超可加性将 $h(x+y) - h(x)$ 限制在 $h(y)$ 和 $-h(-y)$ 之间。将其分解为带符号坐标向量可得 Lipschitz 界，因此延拓到实向量后，该函数是齐次且凹的。在可微点 $v$，取与 $Nv$ 距离有界的格点 $u_N$。对于基向量 $e_i$，在 $v$ 处的可微性给出 $h(u_N + e_i) - h(u_N) \to \partial_i h(v)$。事实上，将 $u_N = Nv + r_N$ 写成其中 $r_N$ 有界的形式。齐次性和可微性给出$h(u_N) = Nh(v) + Dh(v)(r_N) + o(1)$，将 $r_N$替换为 $r_N + e_i$即可得到 $h(u_N + e_i)$ 的相应展开式。这些差值都是整数。因此，梯度均为有界整数，所以只能有有限多个。每个梯度都给出一个线性上界，并在其可微点处取等号。由这些点的稠密性和连续性可知，它们的最小值处处等于 $h$。这些梯度的凸包就是所需的多面体。□

**命题 2.4**。 对于每个 $p \in L$，存在唯一的格多面体 $T_p$，属于 $L_{\mathbb{R}}$，使得

$$\min_{e \in T_p} \langle a, e \rangle = \min_{b \in Q_a} \langle b, p \rangle \qquad (a \in M). \tag{2.1}$$

它可以通过有限个*first-star*线性系统计算得到。对于 $n \geq 1$ 和 $T_{p+p'} \subseteq T_p + T_{p'}$，有 $T_{np} = nT_p$。

证明。 写作 $d_p(a)$ = 最小值$_{b \in Q_a} \langle b,\ p \rangle$。定理 2.1 使 $d_p$ 关于 $a$超可加且齐次。应用引理 2.3。伸缩和求和的结论现在由关于 $p$ 的齐次性和超可加性得出。对于给定的 $a$，上面的显式函数 $R_a$ 给出计算 $Q_a$所需的有限个可能指数。为了得到 $T_p$，使用下界和上界为 $d_p(e_i)$ 和 $-d_p(-e_i)$ 的坐标盒。在由其格点之差切分出的每个满维室中，内部格权与这些点的配对各不相同。其取值可以确定最小化顶点。每个顶点都会出现，而且该过程也适用于只含一个点的坐标盒。 □

2.3. **截面代数与有限生成**。 条件 $Q_a \subseteq \Delta$ 准确确定了在支集为 Δ的截面中会出现哪些最小指数。我们利用对偶多胞体通过有限个不等式来表达这一条件。下面关于负顶点的假设即使在秩为三时也具有实质内容。Speyer 构造了一个定义在非有限生成 [33]域上的一阶星交。因此，该定理排除了该例中的此类顶点。

**定理 2.5**。 设 $A$ 是上文的、系数环为 $k[u^{\pm 1}]$的一阶星交。假设某个 $g \in A$ 具有在每个可变坐标上均为负的牛顿顶点。固定一个位于其法锥内部的分离权重 $\omega$。设 $\Delta$ 是由不等式 $\langle b、\ p_j \rangle \geq c_j$、$1 \leq j \leq l$给出的非空有理多胞体，其法向量和截距均为整数，其中仿射包的每个方程都写成两个方向相反的不等式。对多胞体 $P$，将其顶点集记为 $\mathrm{Vert}(P)$。则最小指数体是有理多胞体

$$D_\omega(\Delta) = \{a \in M_{\mathbb{R}} : \langle a, v \rangle \geq c_j \quad (v \in \mathrm{Vert}(T_{p_j}),\ 1 \leq j \leq l)\},$$

这可能为空。对于 $n > 0$，$V(n\Delta)$的非零元素的最小指数恰为 $nD_\omega(\Delta) \cap M$。分次代数 $\bigoplus_{n \geq 0} V(n\Delta)t^n$ 是有限生成的。它有一个有限的 Khovanskii 基，其伴随分次代数是正规仿射半群代数。特别地，$A$ 在 $k$上有限生成。

证明。 对于 $n \geq 1$，$V(n\Delta)$ 中存在最小指数为 $a$ 的元素，当且仅当 $Q_a \subseteq n\Delta$。这等价于

$$\langle a, v \rangle \geq nc_j \qquad (v \in \mathrm{Vert}(T_{p_j}),\ 1 \leq j \leq l).$$

在 $n = 1$ 处，这些不等式定义了一个有理多面体。每个有理解都属于Δ：通分可将其归约为整数情形，此时 $a \in Q_a$。因此，由其有理点的稠密性可知，该集合有界。值半群 由满足 $0 \neq f \in V(n\Delta)$ 的数对 $(n, e(f))$ 组成。刚得到的有理多胞体是由这些数对生成的闭锥的次数一截面。在次数零时，齐次不等式也迫使 $a = 0$：对于一个整数解，它们意味着 $Q_a$ 属于 Δ的渐近锥，即满足 $\Delta + \mathbb{R}_{\geq 0} v \subseteq \Delta$的方向 $v$构成的集合。由于 Δ 有界，该锥只能是 $\{0\}$。有理多面体性对实数解也给出相同结论。

因此，值半群就是所指有理多面体锥中次数为 $n \geq 0$ 的所有格点。根据 Gordan引理，选取其有限的 希尔伯特基，即其最小的加性生成元集。对每个生成元，选取具有该最小指数的齐次截面，并将其最小系数归一化为 1。由于每个非零初始空间都是一维的，关于次数和最小指数的伴随分次代数就是该半群代数。半群的饱和化给出正规性。给定一个非零齐次截面，选取一个由具有相同次数和最小指数的提升元之乘积组成的元素。减去能够消去最低项的标量倍数。每次相减都会严格增大有限集 $n \geq 0$ 中的最小指数，因此这些提升元生成截面代数。

最后，选取一个包含 0 且 0 位于其内部的多面体 $\Delta$。 $A$ 中的每个元素都出现在某个 $V(n\Delta)$ 中，而在 $t=1$ 处的评价将截面代数映射到 $A$。□

**推论 2.6.** 设 $A$ 是关于 $k[u_1^{\pm1},\dots,u_c^{\pm1},s_1,\dots,s_l]$的一阶星交。若其局部化 $A^\circ = A[(s_1\cdots s_l)^{-1}]$ 存在一个在所有可变坐标上均具有负牛顿顶点的正则函数，则其原始多项式冻结截面代数及其自身均为有限生成。截面代数满足定理 2.5 的多面体值半群描述，但需对指数 $b\in\Delta$ 施加以下不等式。这里 $b_{s_j}$ 和$b_i$ 分别是其 $s_j$-坐标和 $x_i$-坐标，且 $\mathrm{ord}_{s_j}(E_i)$ 是 $s_j$ 在 $E_i$中的最小指数。

$$b_{s_j}\ge 0,\qquad b_{s_j}+\mathrm{ord}_{s_j}(E_i)b_i\ge 0\qquad (i\ mutable,\ 1\le j\le l).$$

这里的多面体 $T_p$ 是在局部化的一阶星交中计算的，无论原始交换是否变成单位元。

证明。 局部化与这个有限交可交换。事实上，对于每个局部化图表环中的元素，都存在一个共同的 $s_1\cdots s_l$幂，可以清除所有图表中的冻结分母。令 $H$ 为由所述不等式切出的锥。对于 $f\in A^\circ$，初始图表中的多项式性要求其支集满足第一组不等式。在方向为 $i$ 的可变切片 $-h<0$ 中，将其系数写作 $E_i^h B$，其中 $B$ 是在未改变坐标（包括局部化的冻结变量）中的 Laurent 多项式。对于每个 $j$，其冻结阶等于原始切片的最小冻结指数减去 $h\,\mathrm{ord}_{s_j}(E_i)$。因此，当且仅当第二组不等式在该切片上成立时， $B$才是所有冻结变量中的多项式。在非负可变切片中，相邻系数由乘以 $E_i$ 的非负次幂得到，这不会引入冻结极点。现在，有限的一阶星将由 $n\Delta$ 支集所支持的 $A$ 中的截面，与由 $n(\Delta\cap H)$ 支集所支持的 $A^\circ$ 中的截面对应起来。该定理适用于这个有理多胞体。若交集为空，则截面代数在零次为 $k$。再次取一个穷尽多胞体，即可得到 $A$ 的有限生成。□

对于满足 [7, 定理 12],假设的射影对数典范卡拉比–丘对，Blum 和 Liu 构造了一个适用于所有对数差异为零的赋值的基。他们还证明，由此得到的热带函数与此类基的选择无关 [7, 引理 320]。在 LP 情形中，Cartier 论证直接从交换多项式得到最小的 Newton 多胞体，即使存在多项式冻结变量时也是如此。

## 3. Intrinsic multiplication from the exchange polynomials

**3.1. 曲线计数的一阶星图表。** 为了计算 theta 乘积的迹，我们将用交换多项式来表达曲线延拓到簇 $U$ 的条件。设 $U$ 是代数闭域 $k$ 上特征零的光滑连通仿射对数 Calabi–Yau 簇。固定一个 LP 种子，其初始环面为 $T$，可变坐标为$x_1,\dots,x_r$，指定单位为 $u_1,\dots,u_c$。对于 $U$上的正则函数 $h$，记其主开子集为 $U_h=\{h\neq 0\}$。在本节中，我们始终作如下假设。

(1) $x_i$在 $U$上正则，$u_j$在 $U$上是单位元，并且$T=U_{x_1\cdots x_r}$。 $T$ 上的对数体积形式可延拓为 $U$上的处处不消失的体积形式。(2) $U_\star$ 由 $T$ 及其 $r$ 相邻环面组成，其在 $U$中的补集余维至少为二。(3) 对每个 $i$，将其他可变坐标求逆可得

$$U_{\prod_{j\neq i}x_j}=\operatorname{Spec} C_i[X,Y]/(XY-F_i),\qquad X=x_i,\quad Y=F_i/x_i.$$

这里 $F_i$ 是普通交换多项式，且 $C_i=k[u_1^{\pm1},\dots,u_c^{\pm1},x_j^{\pm1}(j\neq i)]$。

关联交换 Laurent 多项式与 $F_i$ 相差 $C_i$中的一个单位，因此 $X\neq 0$ 和$Y\neq 0$ 给出了此开集中的初始种子环面和相邻种子环面。正规性和余维假设给出 $k[U]=\mathcal{U}_\star(t)$。余特征格 $L=\mathbb{Z}^{r+c}$ 与整数

本质骨架的点 [27, 引理 2。2]。对于 $P \in L$，记 $P(v)$ 为特征 $v = \chi^b$ 在 $P$处的阶，即 $\langle b,\ P\rangle$。

光滑上 *LP* 源。设 $U$ 是定义在 $k[u^{\pm 1}]$ 上的完整上 LP 代数的光滑谱，且其标记种子具有一个多项式角。则前述假设成立。事实上，在多项式角处，我们可以将每个普通交换 $F_i$ 乘以一个标量和指定单位的 Laurent 单项式，从而得到一个多项式 $G_i$，其中 $G_i(0) = 1$。每个 $G_i/x_i$ 都是首次变异伴随对象与一个系数单位及其他可变元的非负指数单项式的乘积，因此是正则的。对于严格正权，乘积 $\prod_i (G_i/x_i$具有唯一的最小化指数，且每个可变元条目都等于$-1$。因此，定理 2.5 给出了有限生成性。命题 1.1给出了单交换图表及其在余维一处的覆盖。与第 1节一样，对数环面形式延拓后没有零点或极点。根据 [27, 定义 21]之前的判据，这给出了对数 Calabi–Yau 条件。

3.2. **迹的方程**。在内在代数中，单项式 $q^\beta$ 记录数值曲线类 $\beta$。令所有 $q^\beta = 1$ 取值为 $B_{\mathbb{Z}}$，得到$U$，其基为（$\theta_m$）$_{m\in L}$，单位元为 $\theta_0$。其迹 Tr 取该单位元的系数。对于 $a \geq 2$，记 $\mathsf{T}(P_1,\ \ldots\ldots,\ P_a) = \mathrm{Tr}(\theta_{P_1} \cdots \theta_{P_a})$。每个 $P_\ell$ 规定一个接触阶，即在第 $\ell$个标记点处环面坐标的阶向量。根据 Frobenius结构定理，该整数计数的是从具有这些接触阶的一般标记射影直线出发、且另一个标记点映射到 $U$ [27,一般点的映射，其结论见定理1.2和命题3.13]。

令评价标记为 $\infty$，并将 $p_1,\ \ldots\ldots,\ p_a$ 记为 $\mathbb{A}^1$中的接触标记点。我们可以令 $p_1 = 0$ 和 $p_2 = 1$。其余标记以及评价点的坐标（$b_1,\ \ldots\ldots,\ b_r,\ b'_1,\ \ldots\ldots,\ b'_c$）是代数独立的。以下所有次数均取在它们的有理函数域上。定义可变缺陷以及单位元的总阶如下：

$$\delta_i = -\sum_{\ell=1}^{a} P_\ell(x_i), \qquad \epsilon_j = \sum_{\ell=1}^{a} P_\ell(u_j).$$

如果 $\delta_i < 0$ 或 $\epsilon_j \neq 0$，则迹为零。事实上，除标记接触点外，正则坐标只能有零点，而单位元既没有零点也没有极点。每个拉回坐标在 $\mathbb{P}^1$ 上的除子次数为零。

以下设 $\delta_i \geq 0$ 且 $\epsilon_j = 0$。将 $t$ 用作标记直线上的仿射坐标。取次数为 $\delta_i$的首一多项式 $A_i$，当 $\delta_i = 0$ 时包括 $A_i = 1$。记

$$X_i(t) = b_i A_i(t) \prod_\ell (t - p_\ell)^{P_\ell(x_i)}, \qquad U_j(t) = b'_j \prod_\ell (t - p_\ell)^{P_\ell(u_j)}.$$

对于每个 $i$，将这些函数代入 $F_i$，并消去标记极点，以构造 $N_i(t)$。更确切地说，将代换乘以 $\prod_\ell (t-p_\ell)^{e_{\ell i}}$，其中 $e_{\ell i} = \max(0, -\min_{\mu\in \mathrm{Supp}(F_i)} \langle \mu, P_\ell\rangle)$。$F_i$ 中的可变变量指数均为非负数，因此 $N_i$ 是一个多项式。消去因子在 $A_i$的未标记根处是单位元。

**T定理 3.1**。迹 $\mathsf{T}(P_1, \ldots, P_a)$ 是约化解概形的次数 $o$ $f$

$$N_i \equiv 0 \pmod{A_i} \qquad (1 \leq i \leq r) \tag{3.1}$$

在由以下条件定义的开轨迹上。

(1) $A_i$ 无平方因子且两两互素，并且在任何标记点处都不为零。(2) 在 $A_i$ 的每个根处，$F_i(X, U)/X_i$ 的正则值均非零。(3) 若 $P_\ell = de_i$ 满足 $d > 0$，且 $e_i$ 是可变坐标向量，则 $p_\ell$ 处的未改变坐标位于超曲面 $F_i = 0$ 之外。

既约概形在一般参数域上是有限 *´étale*的。其方程涉及$\sum_i \delta_i$ 个未知系数以及数量相同的标量余式方程。

证明。 选择一个包含正可变射线和非零 $P_\ell$的射线的光滑完备扇 $T$ 。移除余维至少为二的托里克分层。在第 $i$条正可变射线的开除子轨道中，对轨迹 $F_i = 0$进行爆破。这些中心彼此不相交。每个非空中心都是光滑的，因为 $F_i = 0$ 的奇点会在 $X = Y = 0$处导致 $XY = F_i$ 的奇点。在坐标为 $Y = F_i/X$的爆破图表中，我们恢复所指定的单交换模型。因此，初始环面与相邻环面的并集为 $U_\star$，并带有其原坐标。

用接触射线的开除子轨道扩张 $U_\star$ 。对于正的可变接触射线，取位于 $F_i \neq 0$之上的严格变换部分。在其他每条接触射线上，取整个开轨道。等价地，添入相应的单射线环面开集，并在正的可变射线上删去交换中心。所得的爆破开子簇是光滑的。记其为 $W$，边界为 $D = W \setminus U_\star$。 $D$的不可约分支光滑且彼此不交。环面体积将 $K_W(D)$平凡化。在例外除子的一般点处，爆破亏格为一，且其中心位于唯一一个一阶极点的环面极点上，因此拉回的体积在那里具有零阶。

同余关系和前两个条件将有理映射 $(X(t)\ U(t))$ 延拓为 $U_\star$，其定义域避开接触点。在 $A_i$ 的根处，它位于相邻的 $i$阶环面中，坐标为$F_i/X_i$。在非零接触点处，写成 $P_\ell = dv$ ，其中 $v$ 为本原。与 $v$正交的特征在 $p_\ell$处具有非零有限值。与 $v$的配对为一且带有 $v$ 的特征具有 $d$阶。这些阶将映射延拓穿过 $p_\ell$ ，进入属于 $v$ 的开轨道，并具有所需的重数。在正的可变射线上，条件 (3) 使像位于所选的开轨道中。零接触点是一个内部标记点。反过来，映入这一对且与内部坐标除子简单、分别相交并避开标记点的映射，其坐标具有所指示的唯一表达式。这一描述对族成立。带标记的因子规定固定射影直线上的极点界，评价规定首项系数，而除以首一 $A_i$ 是在参数环上定义的。因此，这些方程描述了具有指定接触条件的固定定义域映射空间的一个开部分。

取 $U$的光滑射影简单正规交叉紧化，并按照 [27,§1 中 Frobenius 多线性形式的定义，通过对边界进行修改提取有限多个接触赋值对应的除子]。移除其他边界除子以及接触除子之间的交集。将所得开集记为 $Y'$。对 $W$和 $Y'$ 而言，它们具有一个公共开子集，其补集的余维至少为二。在内部，这由关于 $U_\star$的假设得出。在每个剩余边界除子的一般点处，两个局部环都是同一个标记单项式赋值的离散赋值环（DVR）。事实上，任一模型上某个仿射邻域的生成元都属于公共赋值环，因此两个方向的双有理映射在这些一般点附近都是正则的。它们的限制在此处确定了边界除子。

我们证明每个一般解都位于这个公共开集内。固定标记域，并令评价点 $b$ 变化。上述方程定义了一个有限型族。考虑其约化中支配 $T$的一个不可约分支。在该不可约分支的一般光滑点处，一般光滑性给出评价微分的满射性。对于相应的映射 $g$，固定接触的无穷小变形给出 $V = g^* T_W(-\log D)$ 的截面，其中 $T_W(-\log D)$ 是与 $D$相切的向量场层。在垂直接触除子的坐标中，这意味着 $(t - p_\ell)^d$ 乘以一个单位所得的变分仍可被 $(t - p_\ell)^d$整除。 $V$ 的截面的评价在 $\infty$处是满射的，并且 $\deg V = 0$，因为 $K_W(D)$ 是平凡的。在 $\mathbb{P}^1$ 上分裂 $V$后，首先可知每个直和项的次数均为非负，继而可知 $V$ 是平凡的。

在标记直线上固定接触的局部变形可在光滑坐标中沿平方零增厚提升，其中法向参数使用 $(t - p_\ell)^d$ 的一个单位倍。不同重叠区域上的提升之差是取值于 $V$并与平方零理想张量的截面。因此，障碍位于 $H^1(V) = 0$中，而切空间为 $H^0(V)$。由于这些方程描述了这一开映射函子，它在 $g$附近是维数为 $\dim W$ 的光滑空间。在任意固定的

内部整环点处，评价映射在该点是 ´étale的。随着内部点变化，评价映射的相对维数为一且光滑。因此，这类映射与 $W$ 中一个固定的余维二子集的关联的维数至多为 $\dim W-1$。在边界标记处，评价微分是从 $H^0(V)$到 $V$的纤维的满射，继而满射到其边界除子的切空间。因此，将该标记映入该除子的一个真闭子集的映射，其维数至多为 $\dim W-1$。通过内部评价，在内部标记处也有相同的估计。这些排除的子集不主导 $T$。主导分支只有有限多个，因此它们的一般纤维避开所有这些子集。

在另一个方向上，在适当紧化上计数的映射避开公共开集的补集，并在远离其标记处横截地交于内部坐标除子的既约并 [27, 引理3.6、3.9和3。12]。在 $U_\star$ 的零因子 $x_i$ 是既约的，因为它由相邻环面中的光滑超曲面 $F_i=0$ 切出。不同的初始坐标不可能在那里同时消失。因此，我们可以将这些避开性和横截性陈述应用于内部除子及其两两交集的闭包。每个被计数的映射都属于关联概形。只会出现有限多个类 [27, 引理3。8]。于是，两个一般约化纤维一致。根据 [27, 定理1.2和命题3。13], ，其次数就是所需的迹。□

定理3.1中的次数可以在定义域为有效特征零域上通过通常的多项式算术计算。对于三个开条件，使用判别式、在标记处的评价以及结式。对于条件（2），对 $A_i$与 $N_i$ 除以 $A_i$ 所得的商 $i$ 分别取 $\delta_i>0$的结式。用开因子的乘积饱和余式理想。所得的一般参数域上的代数是有限维的。其迹配对的秩就是其约化次数。事实上，经过代数闭包后，在长度为 $h$ 的局部Artin因子上，乘以 $l$ 的映射具有迹 $lh$（$\xi$），其中 $\xi$ 是其闭点。在特征零时，因此该配对在每个局部因子上的秩均为一。

3.3. **从迹恢复结构常数**。 取一个强制的正则函数 $f$ 如命题 1.5所述。其牛顿多面体的内部包含 0。若$\tau_f$ 是其最小支撑函数，则 $\rho_f=-\tau_f$ 的次水平集是紧有理多面体。

**T定理 3.2**。 设 $f$ 为强制的，并记 $\mathbb{N}=\mathbb{Z}_{\geq 0}$。对于 $p$、$q\in L$，构造有限的序 $t$

$$S=\{s\in L:\ \rho_f(s)\leq \rho_f(p)+\rho_f(q),\ s-p-q\in \mathbb{N}^r\times\{0\}^c\}.$$

阶 $S$ 按照可变坐标中坐标逐点序的任意线性扩张排列。其 $n$

$$\theta_p\theta_q=\sum_{t\in S} n_t\theta_t,\qquad \sum_{t\in S}\mathsf{T}(t,-s)n_t=\mathsf{T}(p,q,-s)\quad (s\in S). \tag{3.2}$$

系数矩阵是下三角矩阵，对角元素均为 *1*。此外 $n_{p+q}=1$。因此，定理 *3.1* 根据交换多项式和 $n_t$ 的 *Laurent* 支撑，计算出所有整数 $n_t$ ， $f$对每一对整数标记均如此。

证明。 令 $g$ 为非零正则函数。每当 $\theta_s$ 出现在 $\theta_p\theta_q$中时，主因子 $-\mathrm{div}(g)$ 的凸性给出 *Keel* 和 *Yu* 的正则函数不等式 [27, 定理 15.7(2)],

$$\tau_g(s)\geq \tau_g(p)+\tau_g(q). \tag{3.3}$$

先将其应用于 $f$，再应用于可变的 $x_i$，以及单位元 $u_j$ 和 $u_j^{-1}$。这些不等式限定了支集。乘以 $\theta_{-s}$ 后取迹，即得到线性系统。由缺陷条件，非零元素 T(*t*, $-s$) 要求 $t\leq s$ 属于可变坐标。更一般地，若迹的标签之和为零，则所有 $A_i=1$ ，且迹为一。事实上，所得映射具有指定的接触阶。在阶为 $de_i$的标记处， $d$ >0，每个未改变的坐标都等于其求值参数乘以标记之差的一个非零乘积。这些参数在该域上代数独立

标记，因此 $F_i$ 在那里非零。这证明了每个此类标记处的条件 (3)，包括同一射线上有多个标记的情形。其他开条件均为空。当所有接触都消失时，唯一的映射是常数映射。这给出了对角元素。在系统中取 $s = p + q$ 后，左边只剩下 $n_{p+q}$，而右边的三个标签之和为零。因此$n_{p+q} = 1$。□

当种子定义在有效域上时，还可以找到 $f$ 而无需列出 $k[U]$的生成元。将支集包含于 $[-b, b]^{r+c}$ 中的 Laurent 多项式空间与每个相邻 Laurent 环取交集。为在 $i$-图表上进行此操作，将其按 $x_i$的幂展开。对于 $d > 0$，$x_i^{-d}$的系数必须在 $C_i$ 中被 $F_i^d$整除，因为 $x_i = F_i/Y$。这些是对盒中系数施加的线性条件。它们通过在不变的 Laurent 变量中模 $F_i^d$约化来计算。$U$ 的正规性和余维二覆盖将此交集确定为支集包含于该盒中的正则函数。增大 $b$，直到交集的一组基的支集所共同生成的凸包内部包含 0 为止。命题 1.5保证该过程终止。随后，选取一个避开有限多个系数消去超平面的有理线性组合，即可得到 $f$。这就在任意有效定义域上，由普通交换式构造出了乘法。

**引理3.3**。 选取一个强制正则函数 $f$，并令 $\rho = -\tau_f$。由 $\rho$ 的线性扇的极大锥的 *Hilbert*基索引的 $\theta$ 函数生成$\mathbb{Z}$上的代数。

证明。 每个锥都是尖锥，因为 $\rho$ 在零点以外为正。将标签 $m$写成一个锥中的 Hilbert生成元之和。它们对应的 θ 函数的乘积在$m$处的系数为一。其他每个标签都具有形式 $s = m + d$, 其中 $d$是非零的非负可变移位，且单位坐标为零。此外，根据正则函数不等式以及函数在该锥上的线性性，$\rho(s) \le \rho(m)$。按 $\rho$递增的顺序排列标签，并在每个层级内按可变坐标之和递减的顺序排列，剩余的并列情况任意打破。这些层级都是有限的，并且 $\rho$是非负整数。乘积中的其他每个标签都排在 $m$之前。减去相应的项，即可通过归纳证明生成性。□

3.4. 正向镜像的表示与奇异轨迹。在定理3.2的增广代数中进行讨论。选取一个强制正则函数 $f$, 写作 $\rho = -\tau_f$，并令 $\Sigma$ 为它在标签格 $L$中的线性扇。令 $s(p) = \sum_{i=1}^{r} p_i$，其中求和仅对可变坐标进行。选取一个整数 $N$，使得对于 $p \neq 0$，$w(p) = N\rho(p) - s(p)$ 严格为正。只需检验 Σ的本原射线。令 $H$ 为极大锥幺半群的 Hilbert基的并集。在多项式环 $\mathbb{Z}[X_h$ 中赋予 $X_h$ 权重 $w(h)$: $h \in H]$。

用 $z^h$ 表示带有指数 $h$的群环 $\mathbb{Z}[L]$ 的基字符。构造如下有限集的齐次关系。对于每个极大锥，取该锥中字符 $z^h$、$h \in H$ 之间关系的整二项式生成元。对于 $H$ 的每个不包含于任何公共锥中的包含极小子集，取其变量的乘积。令 $D$ 为零点、变量权重以及这些关系的权重中的最大值，并令$S_D = \{p \in L : w(p) \le D\}$。

**定理 3.4**。 标签属于 $S_D \cup (-S_D)$ 的成对和三元组的迹，确定了由生成元 $\theta_h$、$h \in H$生成的增广整代数的有限表示。上述每个齐次关系都可通过减去权重严格更小的项，提升为这些生成元之间的关系。这些提升生成定义理想。伴随分次代数是 Σ的托里克面环。它的基为 $(e_p)_{p \in L}$；当 $p$、$q$ 属于 Σ的公共锥时，乘积为 $e_p e_q = e_{p+q}$，否则为零。

证明。 $\theta_p\theta_q$ 中出现的每个标签 $b$ 都带有 $d$ 非负可变移位和零单位部分。$f$ 的正则函数不等式给出 $w(b) \le w(p) + w(q) - s(d)$。因此，每个非零平移都会严格降低权重。定理 3.2 给出 $p + q$ 处的系数为一。仅当 $f$ 的支集在 $p$ 和 $q$ 处的最小值具有一个共同的最小化指数时，其权重才恰好为 $w(p) + w(q)$,

也就是说，当两个标签共享一个锥时。按权重不超过 $j$ 的标签张成的空间进行过滤，即得到所述的分次乘积。

上述关系给出了 $\mathbb{Z}$上的托里克面环。事实上，所有指标不具有公共锥的单项式都为零。如果两个不为零的单项式具有相同的标签和，那么它们的所有指标都位于包含该和的最小面中。因此，它们的差属于某个单独锥的托里克理想。现在按标签和进行分组，即可得到全部关系。

对于每个 $p \in S_D$，将 $p$ 分解为包含它的某个锥的Hilbert生成元。相应的乘积提升为 $e_p$，并具有总权重 $w(p)$。通过归纳，减去其权重较低的项，从而得到一个权重不超过 $w(p)$、表示 $\theta_p$的多项式。在每个次数上应用同样的论证，即可证明生成性。计算计数代数中每个次数为 $j \le D$ 的关系，并利用这些多项式减去其值；所得值的权重严格小于 $j$。提升后的关系生成该核。对于一个关系，其最高次齐次部分属于托里克面理想。将该部分表示为其次数下的齐次生成元的线性组合，并减去相应提升式的倍数。最高次数随之降低，因此该过程最终终止。

在上述每次评价中，一次只乘以一个生成元。两个因子的权重之和至多为 $D$，且每个乘积项都属于 $S_D$。在迹系统（3.2）中，只需取 $b \in S_D$，其中 $b-p-q$ 具有非负可变移位且单位部分为零。此集合包含乘积的支集。成对的迹在其上构成一个单位三角矩阵。其元素仅用到陈述中的标签。特别地，所用的每个关联概形至多有 $3\max_{p\in S_D}\sum_{i=1}^{r}|p_i|$ 个未知首一系数。□

**推论 3.5**。设 $U$ 是完整上 *LP* 代数的光滑谱。假设第 *3.1* 节的假设成立，并且种子定义在特征零的有效定义域上。普通交换式确定了增广正向镜像奇异轨迹的方程，并给出一种判定其是否光滑的算法。

证明。定理 3.2 之后的搜索给出了一个强制函数。定理 3.1 计算了定理 3.4表示所需的迹。在基域上，根据最小标签乘积规则，该代数是一个整环。其维数为 $n = $ 秩 $L$。事实上，权重不超过 $j$ 的滤子秩 $w(p) \le j$格点的计数，其增长量级为 $j^n$。带权表示通过多项式次数实现了这个滤子。根据雅可比判据，将提升关系的雅可比矩阵的 $|H|-n$ 阶子式加入后，所得理想定义了奇异轨迹。我们将零阶子式解释为一。镜像在几何上光滑，当且仅当所得理想包含 1。□

在求解关联方程组之前，也可以对这些乘积所需的整数系数作出界定。根据正性以及 $\mathsf{T}(b,-b) = 1$，$b$ 在 $\theta_p\theta_q$ 中的系数至多为$\mathsf{T}(p,q,-b)$。对于定理 3.4 中的每个迹，通过加入一个变量（该变量是开因子乘积的逆元）来施加其开条件。由此得到的多项式方程组中，方程数与未知数数目相同。根据仿射 B´ezout 界，其约化泛次数由这些方程总次数的乘积界定，其中零次替换为一次。具有负缺陷或不平衡单位阶数的消失迹无需建立方程组。

3.5. **关联方程中的种子变更**。 突变会在˜关联方程的泛解概形（3.1）上诱导坐标变换。记 $E = F_i$和 $x_i' = E/x_i$。根据引理 1.6，权重为 $P$ 的高斯赋值在相邻图表中的权重为 $P'$，其中 $P'(x_i') = \tau_E(P) - P(x_i)$，其余坐标保持一致。

**命题 3.6**。 设两个种子在同一个光滑簇上给出第一星图表$U$，如定理 *3.1*所述。通过 $b_i' = E(b)/b_i$识别它们的一般参数域，同时固定其他所有求值坐标和标记。对于接触阶 $P_1$、……、$P_a$ 及其变换 $P_1'$、……、$P_a'$，约化泛关联概形同构。在解轨迹上，未改变的首一多项式相同。变异变量对应的多项式是

变量为

$$A_i'(t) = \frac{E(X(t), U(t))}{b_i' X_i(t) \prod_\ell (t - p_\ell)^{P_\ell'(x_i')}}.$$

证明。 选择一个单一的边界细化来表示有限多个标记的除子赋值。对于每个星形图，定理 3.1 的证明将几何一般纤维与该紧化中具有那些接触和评价的映射对应起来。取定义域和评价上的两个一般条件的交。特别是，接触点避开其标记轨道的真闭子集。因此， $x_i'$ 在标记处的阶就是其除子阶 $P_\ell'(x_i')$。如果其初始形式的剩余类在此类轨道的某个真子集上消失，该子集便属于被避开的集合。在零接触处，标记是一个内部点，我们在那里使用普通评价。

在公共映射上， $E(X,\ U)/X_i$ 是正则函数$x_i'$的拉回。移除指定的标记因子后，它是 $t$中的一个多项式，其首项系数由无穷取值给出，为 $b_i'$。根据第二个星形图的一般横截性，其余所有零点都是单的，且不在标记点或未改变多项式的零点处。采用相同的系数单位选择进行逆交换，即可恢复原函数。这些几何点之间的逆双射与伽罗瓦作用相容。两个既约的一般概形都是有限 ´étale，因此这些双射在公共参数域上将它们对应起来。特别是，任一种子中的负缺陷都会使两个纤维都为空。□

$E$ 中的归一化单项式可以在未改变坐标的零点处，抵消代入后的分子所具有的零点。该公式记录了这些抵消，然后再将剩余的零点归于突变元。

### 3.6. **与分裂环面的乘积**。

**引理 3.7.** 设 $V$ 是定义在特征零代数闭域上的光滑连通仿射对数 *Calabi–Yau* 簇，并带有与体积形式相容的稠密分裂环面。设 $S$ 是余特征格为 $N$的分裂环面。对于乘积体积形式，存在一个同构

$$B_{\mathbb{Z}}(V \times S) \simeq B_{\mathbb{Z}}(V) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[N], \qquad \theta_{(p,a)} \longmapsto \theta_p \otimes z^a,$$

其中， $p$ 是 $V$ 的本质骨架中的一个整点，而 $z^a$ 是由 $a \in N$标记的群代数元素。

证明。只需每次添入一个 $\mathbb{G}_m$ 。选取 $V$的一个光滑射影紧化 $Y$，使其边界为简单正规交边界，并对乘积使用 $Y \times \mathbb{P}^1$ 。在 Frobenius 计数中的标记射影直线上，设 $a_i$ 为最后一个坐标在标记 $x_i$处的阶。存在除子为 $\sum_i a_i[x_i]$ 的有理函数，当且仅当 $\sum_i a_i = 0$。它在评价标记处的取值唯一确定该函数，其次数为 $\sum_i \max(a_i,\ 0)$。任一因子中的零接触，都是该因子中的普通内部标记。

因此，当各阶相互平衡且最后一个次数取此值时，投影将乘积的一般计数纤维对应于$V$ 。在其他所有情况下，乘积纤维均为空。这些计数是在乘积紧化中进行的，其中曲线类由用于表示接触的任意边界细化向前推送 [27,命题 17.3(1)]。在 $Y \times \mathbb{P}^1$ 上的有效数值类由其在 $Y$ 上的类以及其在 $\mathbb{P}^1$上的次数确定，并且每一对这样的数据都是有效的。因此，逐类而言，Frobenius 形式与两个因子的张量积的 Frobenius 形式一致。它们在有效系数环上确定乘法 [27, 定理 1。2]。将曲线单项式设为 1 即得到所断言的公式，这是因为 $\mathbb{G}_m$ 的增广代数就是其余特征群代数[27,引理 9。4]。 □

## 4. Laurent charts for the forward theta functions

### 4.1. **多项式角处的图表**。

我们保留定理3.1的假设。记$v = (x_1,\ \ldots,\ x_r,\ u_1,\ \ldots,\ u_c)$ 为初始环面上的坐标，并记 $L = \mathbb{Z}^{r+c}$为其

余特征格。设 $n = r + c$。如果对于每个可变 $i$，都存在一个指定单位中的 Laurent 单项式 $\rho_i$，乘以一个非零标量，使得 $G_i = \rho_i F_i$ 属于 $k[v_1, \dots, v_n]$ 且 $G_i(0) \neq 0$，则称该标记种子具有一个多项式角。

**定理 4.1.** 假设标记种子有一个多项式角。令 $z_j = \theta_{e_j}$ 为 $L$的标准基。元素$z_j$ 代数独立，局部化得到

$$B_{\mathbb{Z}}(U)[(z_1 \cdots z_n)^{-1}] = \mathbb{Z}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}].$$

在这个 *Laurent* 环中，$\theta_m$ 的像 $\Theta_m$ 为

$$\Theta_m = z^m A_m(z_1, \dots, z_r), \qquad A_m = \sum_{0 \le d_i \le D_i(m)} c_{m,d}\, z^{(d,0)}, \qquad D_i(m) = -\tau_{G_i}(m).$$

这里 $d \in \mathbb{N}^r$，且$(d,0)$ 补上 $d$的 $c$ 个零单位坐标。系数 $c_{m,d}$ 是非负整数，且 $c_{m,0} = 1$。特别地，$\Theta_m = z^m$ 在非负正交象限上。

证明。 定理 3.2 在 $\theta_p \theta_q$中，于 $\theta_{p+q}$ 处给出系数 1。所有其他标签的形式为$p + q + (d,0)$，其中 $d \in \mathbb{N}^r \setminus \{0\}$。

为了从上方约束这些修正项，我们使用正则函数 $t_i = G_i/x_i$。事实上$\frown F_i/F_i$ 是其他可变坐标中指数非负的单项式，相差一个$\widehat{}$系数单位，并且 $F_i/x_i$ 是实际的 LP 变异伙伴。Laurent 现象表明，这个伙伴在定理 3.1中的种子环面并集上是正则的。由正规性和余维假设，它可延拓到 $U$。对于非负正交象限中的每个 $a$，我们有$\tau_{t_i}(a) = -a_i$，因为 $G_i$ 有非零常数项。如果 $p, q$ 属于该正交象限，那么它们乘积中出现的每个标签也都属于该象限。对 $t_i$ 应用凸性可得 $-p_i - q_i - d_i \ge -p_i - q_i$，对所有 $i$均成立。由此得到的乘法规则为 $\theta_p \theta_q = \theta_{p+q}$。特别地，$z_j$ 生成一个多项式子代数，因为不同的单项式对应不同的基标签。

现在固定 $m$，并取带有 $b + m$ in 正正交象限中的 $b = N(1, \dots\dots, 1)$。乘积 $a = b + m + (d, 0)$ 中的每个可能标签 $\theta_b \theta_m$ 也都在该正正交象限中。对 $t_i$ 应用凸性可得 $-b_i - m_i - d_i \ge -b_i + \tau_{G_i}(m) - m_i$，或 $d_i \le D_i(m)$。因此，平移乘积是所述单项式 $z^{b+m+(d,0)}$ 的有限和，其系数为非负整数，并且当 $d = 0$ 时系数为 1。由此可知，局部化由 $z_j^{\pm 1}$ 生成。乘以 $z_1 \cdots z_n$ 是单射。事实上，先按照可变坐标之和、再按字典序排列这些标签。平移保持这一顺序，而任何非零平移（$d$，0）都会严格增大该顺序。因此，在一个非零的有限 theta 和中，最低标签在乘以 $\theta_{(1,\dots,1)}$ 后给出唯一的最低项，且系数保持不变。由此可知，$B_{\mathbb{Z}}(U)$ 嵌入局部化中。将平移乘积除以 $z^b$ 即得该公式。□

我们称 $A_m = z^{-m}\Theta_m$ 为该图表中 theta 函数的归一化多项式因子。对于标记种子处选定的图表 $t$，当种子变化时，我们记 $\Theta_m^t$ 和 $A_m^t$。因子$A_m^t$ 起到一个 $F$-多项式的作用。在簇代数中，Fomin 和 Zelevinsky 通过在具有主系数的代数中将初始簇变量设为 1，依据 $F$-多项式 [17, 定义 33]。这里的变量 $A_m^t$ 是正向镜像上的可变坐标。

**推论 4.2**。 对于 $m \in L$，令 $\mathcal{D}_m$ 为整格盒 $0 \le d_i \le D_i(m)$。取 $b = N(1, \dots, 1)$，其中 $N = 1 + \max(0, -m_1, \dots, -m_n)$，并记 $s_d = b + m + (d, 0)$。$A_m$的系数是以下方程组的唯一解：

$$\sum_{e \in \mathcal{D}_m} \mathsf{T}(s_e, -s_d) c_{m,e} = \mathsf{T}(b, m, -s_d) \qquad (d \in \mathcal{D}_m).$$

在逐分量序的任意线性扩张中，这是一个单位下三角整系数系统。如果 $s = \prod_i (1 + D_i(m))$，其评价至多使用 $s$ 个三元组迹和 $s(s-1)/2$ 个非对角线对迹，每个迹至多需要 $\sum_i D_i(m)$ 个多项式系数，即可在定理 *3.1* 中确定。

证明。 根据定理 4.1，平移乘积为 $\theta_b\theta_m = \sum_e c_{m,\ e}\theta_{s_e}$。对乘以 $\theta_{-s_d}$后的结果取迹即可得到这些方程。$(s_e,\ -s_d)$ 的可变缺陷为 $d-e$，而 $(b,\ m,\ -s_d)$ 的可变缺陷为 $d$。负缺陷给出零点，而如上所述，零缺陷对的次数为一次。每个关联系统中的系数数量等于其缺陷之和。□

因此，在有效域上，关联方程确定任意给定的 Laurent展开。要计算乘积，只需将两个展开相乘。正性和首项系数为 1 确保 Laurent 支撑包含 theta 展开中的每个标签，因此通过比较系数即可恢复 theta 展开。

4.2. **坐标轴和面上的系数。**

**引理 4.3.** 固定一个可变指标 $i$ 在定理 *3.1.* 的假设下。设 $G_i$ 是 $F_i$ 在未改变坐标中的任意 *Laurent* 单项式倍式，且相差一个非零标量。设接触 $P_1$、……、$P_a$ 具有总缺陷 $ke_i$，其中 $k \geq 0$，并且在单位元上的总阶为零。则

$$\mathsf{T}(P_1,\dots,P_a) = \binom{h}{k}, \qquad h = -\sum_{\alpha=1}^{a} \tau_{G_i}(P_\alpha).$$

其中 $h \geq 0$，且当 $k > h$时，二项式系数为零。

证明。 设 $T'$为除 $x_i$之外所有坐标上的环面。对于标记 $p_\alpha$ 以及在无穷远处的评价 $b' \in T'$，这些坐标由关联方程规定。在标记之外，它们具有 $b'g(t)$的形式，其中 $g(t)$的每个坐标都是 $t - p_\alpha$ 的幂的乘积。每个未改变坐标的总阶均为零，因此 $g(\infty) = 1$。由于 $G_i$ 与 $x_i$ 无关，有理函数 $H(t) = G_i(b'g(t))$ 现已确定。对于一般的 $b'$，它在 $p_\alpha$ 处的阶为 $\tau_{G_i}(P_\alpha)$。事实上，最低阶的各项具有 $b'$ 的不同特征，并且系数非零。此外， $H(\infty) = G_i(b') \neq 0$。根据 $\mathbb{P}^1$ 上的次数可知， $H$ 在标记之外有 $h$ 个零点，按重数计。

对于一般的 $b'$，这些零点都是单零点。超曲面 $G_i = 0$ in $T'$ 光滑，因为奇异点会在光滑的单交换开集 $XY = F_i$ 上给出一个带有 $X = Y = 0$ 的奇异点。在标记点补集上，映射 $(b', t) \mapsto b'g(t)$ 是光滑的。因此，该超曲面的逆像是光滑的，其维数为 dim $T'$。其非主导分支避开一般的 $b'$，而其主导分支在特征零下将一般地 ´etale 映射到 $T'$。其几何一般纤维由互不相同的单零点组成。

只有 $x_i$ 对应的首一多项式尚未确定。根据未标记根处的整除性，其根必须是 $k$ 中的 $h$ 零点。反之，每个这样的子集都给出一个首一多项式，并且由于零点是单零点，在每个选定根处的相邻商都非零。还需检查标记点的相交条件。在正 $i$轴上的标记点处，未改变的剩余类是一般的，而 $G_i \neq 0$。在另一个正的可变轴 $j$上的标记点处，将 $F_j$ 写成关于 $x_i$的多项式。其系数独立于 $x_j$，并且除 $x_i$、$x_j$ 之外的所有坐标在该处均为零阶。它们的首项留数是取值参数乘以非零常数。因此，至少有一个系数在该标记点处非零。 $x_i$ 在该标记点处的值是独立取值参数 $b_i$ 乘以选定根域上的非零标量。因此，对于一般的 $b_i$，上述结论同时对所有有限种选择成立。定理3.1 现在对每个子集恰好计数一次。□

**命题 4.4。** 对于每个 $m \in L$ 以及每个可变 $i$,

$$A_m(0,\dots,0,z_i,0,\dots,0) = (1+z_i)^{D_i(m)}.$$

特别地， $D_i(m)$ 正是 $A_m$ 在 $z_i$ 中的次数。对于规范化因子 $A_{-e_j} = z_j\Theta_{-e_j}$，第 $i$ 个坐标轴上的指数为次数$_{v_j}$ $G_i$，这对可变坐标和指定单位坐标同样适用。

证明。在推论4.2中，令 $s_0 = b + m$ 并取 $d = ae_i$，其中 $0 \leq a \leq D_i(m)$。左侧唯一的项满足 $e = le_i$， $0 \leq l \leq a$。多项式 $G_i$ 与 $x_i$无关，

因此，将接触项改变一个 $e_i$ 的倍数不会改变其热带值。此外$\tau_{G_i}(b) = \tau_{G_i}(s_0) = 0$。记 $w = -\tau_{G_i}(-s_0)$，引理4.3 恰好给出

$$\sum_{l=0}^{a} \binom{w}{a-l} c_{m,le_i} = \binom{w + D_i(m)}{a}.$$

对角元素均为一。在 $(1+y)^{w}(1+y)^{D_i(m)} = (1+y)^{w+D_i(m)}$ 中比较系数可得$c_{m,le_i} = \binom{D_i(m)}{m}$。定理 4.1 的上界排除了更高的幂，且上界处的系数为一。最后 $-\tau_{G_i}(-e_j) =$度$_{v_j} G_i$。□

**推论 4.5**。设 $I \subseteq \{1,\dots,r\}$，并假设对于所有 $i$、$j \in I$，$G_i$ 都与$x_j$ 独立。按照归一化交换式 $H = G_i/G_i(\mathbf{0})$ 对指标 $i \in I$ 进行分组。对于每个不同的 $H$，令 $I_H = \{i \in I : G_i/G_i(\mathbf{0}) = H\}$ 以及 $L_H = 1 + \sum_{i \in I_H} z_i$。于是

$$A_m|_{z_j=0\ (j\notin I,\ 1\le j\le r)} = \prod_H L_H^{-\tau_H(m)}.$$

证明。每个 $H$ 都是不可约的。事实上，$F_i$ 在含多项式可变变量的Laurent系数环中是不可约的。对其他可变坐标求逆会保持不可约性，而 $H(\mathbf{0}) = 1$ 排除了回到多项式环时出现坐标因子的可能性。

取负缺陷非负的接触 $\delta$ 且支集于 $I$，并具有平衡单位阶。未改变的坐标给出固定映射$b'g(t)$。与引理4.3中一样，函数 $H(b'g(t))$ 在标记之外有 $h_H = -\sum_\alpha \tau_H(P_\alpha$个单零点。对于互异的 $H$，一般情况下这些零点集合彼此不相交 $b'$。事实上，在未改变坐标构成的环面上，这两个超曲面的交集余维至少为二。它们在光滑映射 $(b',t) \mapsto b'g(t)$ 下的逆像，其维数小于该环面的维数。

每个 $H(b'g(t))$ 的零点都可以不予使用，也可以分配给一个 $A_i(t)$，其中 $i \in I_H$。两两互素性禁止将其重复分配。对规定次数的每一种分配都满足定理3.1的其余条件。在 $I$ 中的正轴上，交换只取决于一般未变化剩余类。在正轴 $j \notin I$上，将 $F_j$ 按由 $I$索引的变量展开。在未改变的剩余类处，某个系数非零。取值参数$b_i$、$i \in I$在选定根所生成的域上代数独立，因此在此标记处交换也非零。因此，迹为 $[z^\delta]\prod_H L_H^{h_H}$，其中 $[z^\delta]$ 提取 $z^\delta$的系数。

在推论4.2中，取 $d$ 支撑在 $I$上。缺陷条件将求和范围限制为 $e \le d$。记 $s_0 = b + m$ 和 $K = \prod_H L_H^{-\tau_H(-s_0)}$。每个 $H$ 都独立于活跃坐标，因此二重迹给出 $K$的系数。三重迹给出 $K\prod_H L_H^{-\tau_H(m)}$ 的系数，因为 $\tau_H(b) = \tau_H(s_0) = 0$。$K$ 的常数项为一，因此三角系统确定了限制的系数。对于 $i \in I_H$，它在 $z_i$ 中的预设次数为$-\tau_H(m) = D_i(m)$，符合要求。□

**4.3. 来自负 Newton 顶点的 Laurent 图表。** 现在我们给出一个也适用于没有多项式角的种子的判据。假设正则函数 $g \in k[U]$ 的牛顿多面体有一个顶点 $a$，且对每个可变坐标都满足 $a_i < 0$。令 $C \subset L_{\mathbb{R}}$为使 $a$ 取得最小值的满维法锥，并设 $\delta_g(m) = \langle a, m\rangle - \tau_g(m)$。在下述陈述中，$z^p$ 表示特征，其指数为标记源环面的对偶环面上的 $p$。我们称 $C$ 为所得图表的直锥，因为对 $p \in C \cap L$有$\theta_p = z^p$。

**命题 4.6**。在定理 *3.1*的假设下，选择 $g$、$a$ 如上所述，确定了一个 带标记的 Laurent 实现，即将 $B_{\mathbb{Z}}(U)$ 嵌入到 $\mathbb{Z}[L]$ 对偶环面的 *Laurent* 环中。它将 $\theta_p$ 映射为 $z^p$ 对于 $p \in C \cap L$，并将 $\theta_m$ 映射为一个 *Laurent*多项式，该多项式在 $z^m$处的系数为 *1*，具有非负整数系数，且支集包含于

$$m + \{(d,0) : d \in \mathbb{N}^r,\ \textstyle\sum_i(-a_i)d_i \le \delta_g(m)\}.$$

对于任意 $b \in L \cap$整数 $C$，该实现将 $B_{\mathbb{Z}}(U)[\theta_b^{-1}]$ 与 $\mathbb{Z}[L]$对应起来。

证明。 根据定理 3.2，每个乘积在其标签之和处的系数均为 1，且所有修正项都是非负可变移位。将正则函数不等式应用于 $g$ 中的$\theta_p\theta_m$，其中 $p \in C$。对于该乘积中的每个标签 $s = p + m + (d,\ 0)$，可得

$$\langle a, p\rangle + \tau_g(m) \le \tau_g(s) \le \langle a, p + m\rangle + \sum_i a_i d_i.$$

这就证明了 $d$ 所述的界。对于 $m \in C$，该界为零。因此， $C$上的直乘积 $\mathbb{Z}[C \cap L]$ 确定了 $B_{\mathbb{Z}}$（$U$）内的一个副本。根据定理 4.1证明中所使用的阶，利用系数为一的最低项规则，乘以 $\theta_b$ 是单射的。在半群环中对 $\theta_b$ 求逆，得到 $\mathbb{Z}[L]$，因为对于任意 $m$，都有 $m + Nb \in C$当 $N$足够大时成立。平移的有限界与 $p$无关。选取 $p = Nb$，使得乘积中的每个标签都属于 $C$，我们便得到 $\theta_b^N\theta_m$，它是直特征的正整数和。除以 $z^{Nb}$ 即得到所声称的 Laurent多项式，并证明局部化恒等式。□

命题 4.6 中的支撑界给出了一个多项式因子 $A_m = z^{-m}\Theta_m$，它在此图表中同样具有非负整数系数和常数项一。相同的面公式仍然适用。取一个独立集 $I$，如推论 4.5中所述。选取一个分离权重，使其属于 $\operatorname{int} C$。对于每个 $F_i$，将 $i \in I$ 除以其在该权重下的最低项。对于每个不同的商$H$，令 $I_H$ 由给出 $H$的指标组成。于是

$$A_m\big|_{z_j=0\ (j\notin I,\ 1\le j\le r)} = \prod_H L_H^{-\tau_H(m)}, \qquad L_H = 1 + \sum_{i\in I_H} z_i.$$

特别地，当 $I = \{i\}$ 时，限制为 $(1 + z_i)^{-\tau_H(m)}$。

事实上，未改变的坐标的总接触阶为零。因此，用其最低项除一个交换式不会改变其总接触阶。不同的归一化交换式在未改变的环面上是非相伴的不可约元，因此可以按照推论4.5中所述指定其零点。在围绕所选权重的 $C$ 的一个开子锥上，每个 $H$ 的最低项均为一。对于固定的 $d$，其支集位于 $I$上，取一个格点 $b$，使其在该开子锥中足够深，从而 $b + m$， $\theta_b\theta_m$中的所有标签，以及所有 $b + m + e$ 与 $0 \le e \le d$ 一起均位于其中。根据命题4.6的统一平移界，这是可能的。由于每个 $H$ 在 $b$ 和$b + m$处的热带值均为零，同样的三角迹方程给出 $d$处的系数。

4.4. **负 Newton 顶点的种子判据**。设 $A$ 是一个正可变秩标记种子的完整上代数，其可变坐标为 $x_1$、……、 $x_r$，指定单位为 $u_1$、……、 $u_c$。记 $F_i$ 为在 $i$处的普通交换式。这些 $g_i = F_i/x_i$ 函数是正则的。每一个函数都是归一化第一突变元乘以一个具有非负可变指数的单项式和一个系数单位。我们刻画这样一类种子：这些函数的乘积具有命题4.6所要求的顶点。

**命题 4.7.** 从 $S = \varnothing$ 开始，每当 $F_i\big|_{x_j=0\ (j\notin S)} \neq 0$ 是剩余可变变量上的一个多项式时，就添入一个指标 $i$。重复此过程，直到 $S$ 不再增长。以下条件等价。

(1) 最终的 $S$ 包含所有可变指标。(2) 某个乘积 $\prod_i g_i^{n_i}$，$n_i \in \mathbb{N}$ 有一个在所有可变坐标上都严格为负的牛顿顶点。(3) 不存在非空的可变指标集合 $J$，使得对每个$i \in J$，都有 $F_i \in (x_j :\ j \in J)$。(4) 普通交换表示

$$A_0 = k[u_1^{\pm1}, \dots, u_c^{\pm1}][x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r]/(x_iy_i - F_i : 1 \le i \le r)$$

是一个整环。

当这些条件成立时，顶点的可变投影可选为$(-1, \dots, -1)$。特别是，当 $A_0$ 是整环时，完整上代数是有限生成的，

根据定理 2.5。在定理 3.1的假设下， $A_0$ 的整性因此给出了命题4.6中的带标记的*Laurent*图表。

证明。 如果该过程提前停止，则令 $J$ 为其最终集合的补集。反之，形如第三个条件中的集合 $J$ 中的任何元素都不可能被添加。这就证明了第一个条件与第三个条件的等价性。对于每个非空 $J$，首先将多项式环 $k[u^{\pm 1}][x_1,\dots,x_r]$ 对（$x_j:\ \ j\in J$）取商。该商是 $k[u^{\pm 1}]$上的多项式环，因此嵌入到通过对剩余可变坐标取逆而得到的 Laurent 环中。第三个条件恰好说明，定理 $J_I$ 1.2 中的每个交换层理想都非零。该定理将这一点等同于 $A_0$的整性。

按照各指标的添加时间排序，时间相同的任意打破平局。在第一个条件下， $F_i$ 含有一个仅涉及较早可变变量的项。依次为 $x_i$ 赋予递增的正权重，其中每个新权重都大于仅涉及较早变量的任何交换项的权重。最初将单位元的权重设为零。对于每个 $F_i$ ，某个涉及较早变量的项的权重都小于任何涉及处于 $i$或其后的变量的项。对所有坐标施加一个小的一般扰动，可以保持这些严格不等式，并为每个 $F_i$选出唯一的最小化项。令 $M_{ji}$ 为该项中$x_j$ 的指数。矩阵 $M$ 按照所选顺序是严格三角矩阵。令 $I_r$ 为单位矩阵，并令 $\mathbf{1}$ 为全 $\mathbf{1}$ 列，则向量 $n=(I_r+M+\cdots+M^{r-1})\mathbf{1}$ 的各项均为正整数。$g_i^{n_i}$的乘积具有唯一的最小化指数，其可变投影为（$M-I_r$）$n=-\mathbf{1}$，如所要求。

对于逆向结论，取其法锥内部的一个一般权重，使乘积的顶点暴露出来，并如上根据选定的分子项定义 $M$ 。严格负性说明 $Mn<n$ 逐分量成立，因此每个 $n_i>0$。若一条边 $i\to j$ 满足 $M_{ji}>0$ ，则 $n_i<n_j$，所以不存在有向环。对顶点排序，使每个指标的出邻点都排在它前面。于是， $F_i$ 的选定项只使用更早出现的可变变量，从而满足第一个条件。□

归一化初次突变可能产生更多顶点。以下检验适用于任意有限个正则函数，包括来自更远种子的坐标。

**命题 4.8.** 固定非零正则 *Laurent* 函数 $h_1$、……、$h_t$。取其牛顿多面体的法扇的公共细分中的一个满维室，并令 $D$ 为该室中这些函数最小化指数的可变投影所组成的 $r\times t$ 矩阵。以下情形恰有一种成立。

(1) 乘积 $\prod_{j=1}^{t}h_j^{n_j}$ 在乘以初始可变变量的某个单项式后，在整个室内都具有可变投影为 $-\mathbf{1}$ 的暴露顶点。(2) 存在一个非零 $\lambda\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ ，使得 $D^t\lambda\geq 0$。

因此，对归一化的第一伙伴进行有限计算，就能检验这些伙伴的每个乘积。在室内取一个格分离权 $w$ 时，如果 $h_j$、初始可变变量以及单位特征标及其逆元的最小化指数生成 $A$ 在 $w$ 处的值半群，则第二个条件排除了 $A$ 的< 甚至每一个 正则函数具有这样的顶点。

证明。 由 $D$ 的各列生成的有理多面体锥与开负正交象限相交，当且仅当对于某个 $n\in\mathbb{N}^t$ 有 $Dn<0$；这由有理逼近和齐次性得到。若二者不相交，则分离定理给出一个非零泛函，它在该锥上非负、在开负正交象限上非正。其坐标均非负，并且这些有理不等式允许取具有整数坐标的这样的泛函。这两种情形互相排斥。对于满足 $d=Dn<0$ 的整数 $n$ ，将乘积乘以 $x^{-\mathbf{1}-d}$ ，即可使其可变指数恰好为 $-\mathbf{1}$。这一操作保持最小化室不变。

在值半群假设下，延拓泛函（λ,0）在每个正则 Laurent 多项式的最小指数处非负。它在可变坐标指数上非负，并在单位元上为零。若每个可变坐标都严格为负，则会得到负的配对，从而产生矛盾。引理 C.3 的初始理想检验是由正分次表示验证该半群假设的一种方法。 □

**推论 4.9.** 固定一个权重 $w$ ，使其分离源特征格的点 $M = \mathbb{Z}^{r+c}$。 $A$ 在 $w$ 处的初始代数是 $k[M]$ 中由其非零元素的最低项生成的子代数。下列各项等价。

(1) 一个正则函数在每个可变坐标上的 $w$最小化指数都严格为负。(2) $A$ 中非零元素的 $w$ 最小化指数构成整个格 $M$。(3) $A$ 在其标记劳朗环中的初始代数是 $k[M]$，或者等价地说，每个初始可变特征都是该初始代数中的单位。

如果这些条件不成立，则存在某个非零 $\lambda \in \mathbb{R}^r_{\geq 0}$ ，它与每个正则函数的$w$最小化指数的可变投影的配对均为非负。

证明。 指数半群包含非负的可变坐标向量，以及每个单位坐标向量的正负两个向量。如果它包含一个在可变坐标上严格为负的向量，则将这些已知元素相加可得 $-e_i$ 对每个可变 $i$。这就证明了前两个条件的等价性。由于 $w$ 将该格分离，初始代数就是这些指数所生成的半群代数，从而得到第三个条件。在不存在负指数的情况下，即使它们的实锥包也不包含开放负可变正交象限。事实上，位于该开放集中的一个锥组合可以用有理数锥组合逼近，然后消去其分母。如命题 4.8 中的分离论证所示，无需任何有限生成假设，即可得到所述泛函。 □

4.5. **正向基的高斯赋值**。

**定理 4.10.** 在由所有可变坐标均为负的牛顿顶点得到的 *Laurent* 图表中，对于特征零域上的每个实高斯权，正向 *theta* 基都是赋值独立的。等价地，非零有限带符号和的牛顿多面体是其各直和项对应多面体的凸包。

证明。 附录中的局部函数A 对骨架中具有指定入射方向和终点位置的解析曲线进行计数。它们的热带路径是单输入沓。命题 A.5 将这些函数与带标记的Laurent展开对应起来。在这些展开中，根据定理 A.8，不同的 theta 函数在一般权重下具有不同的最小权重单项式。因此，最小权重项不可能相互抵消。支撑最小值的连续性给出了对每个实权重均成立的结论。
□

假设正向镜像被识别为一个完整上 LP代数，其种子环面的对数体积形式与标记图表的对数体积形式成比例。那么，可达镜像种子中的每个正则劳朗单项式都是某个正向 theta 函数的标量倍。事实上，突变至多改变对数体积形式的符号，因此命题 A.13给出了该种子中的赋值独立性。该单项式在其中的牛顿多面体只有一个点。正如推论 2.2所示，其 theta 展开因而只有一项。

将初始标记为 $p$ 的路径缩放后，可得到初始标记为 $jp$的路径。在引理A.7 中，我们利用这一观察证明 $\nu_a^z(\Theta_{jp}) = j\nu_a^z(\Theta_p)$ 对每个正整数 $j$都成立。这正是构造 $P_a$ 所需的齐次性，见定理5.4。

4.6. **多项式因子的初始种子变换**。我们固定一个内在 theta 函数，并改变用来表示它的种子。关于 $F$-多项式的经典初始种子突变公式，参见 [17, (6.21)] 和 [18, 命题 3。4]。

令 $t'$ 通过在 $k$处突变由 $t$ 得到，并令 $E = F_k$ 为 $x_k x'_k = E$中的交换 Laurent 多项式。假设这两个种子都给出同一 $U$ 的第一星图表，如第 3.1 节所述。在每个标记中，选择一个由定理 4.1或命题 4.6给出的正向图表。记其坐标为 $z$、 $z'$ 。根据引理 1.6，在 $t$ 中具有坐标 $p$ 的骨架标签，在 $t'$中的坐标为 $p' = T(p)$，其中 $p'_j = p_j$ 对应于 $j \neq k$ ，且 $p'_k = \tau_E(p) - p_k$。

命题 *4.11*。 *</style}*令 $W_j$ 为 $z'_j$ 在 $z$坐标下的表达式。那么

$$A^{t'}_{p'}(W_1,\dots,W_r)=\frac{z^pA^t_p(z_1,\dots,z_r)}{\prod_{j=1}^n W_j^{p'_j}}.$$

若 $t'$ 的图表是其多项式角图，则$W_j = \Theta^t_{T^{-1}(e'_j)}$，其中$e'_j$ 是 $j$中的第 $j$个标准余字符。一般而言，在新的直锥中选取一个足够靠内的整数 $b'$ ，使得对每个 $j$， $b'+e'_j$ 也位于其中。于是

$$W_j=\frac{\Theta^t_{T^{-1}(b'+e'_j)}}{\Theta^t_{T^{-1}(b')}}.$$

假设两个图表都是多项式角图，且 $E$ 本身是一个常数项非零的多项式。令 $H_k=A^t_{-e_k}$，并令 $d=$次$_{z_k}A^t_p=-\tau_E(p)$。则 $H_k$ 与 $z_k$无关。将 $z_j=z'_j$ 与 $j\neq k$对应起来后，我们有

$$A^{t'}_{p'}(z'_1,\dots,z'_r)=(z'_k)^dH_k^{p_k}A^t_p(z'_1,\dots,z'_{k-1},H_k/z'_k,z'_{k+1},\dots,z'_r). \tag{4.1}$$

特别地，若 $A^t_p=\sum_{j=0}^d B_jz_k^j$，则$(z'_k)^{d-j}$ 在$A^{t'}_{p'}$ 中的系数为 $H_k^{p_k+j}B_j$。每当 $p_k+j<0$时，$H_k^{-p_k-j}$ 整除 $\mathbb{Z}[z_i:\ 1\le i\le r$中的 $B_j$， $i\neq k]$。

证明。 theta 函数的两种表达式表示增广代数中的同一个元素，因此有 $z^pA^t_p=W^{p'}A^{t'}_{p'}$(W1, ……， $W_r$)。 $W_j$代数独立，所以该恒等式确定了 $A^{t'}_{p'}$。在新的直锥中，theta 函数是特征。对 $b'+e'_j$ 和 $b'$ 取商得到 $z'_j$，而在多项式角处可以取 $b'=0$。

当 $E$ 是具有非零常数项的多项式时，对于每个 $j$都有 $\tau_E(e_j)=0$。因此，对于 $j\neq k$，$T^{-1}(e'_j)=e_j$，而 $T^{-1}(e'_k)=-e_k$。在旧的多项式角图中，这给出 $z'_j=z_j$（对于 $j\neq k$ 和 $z'_k=z_k^{-1}H_k$）。命题 4.4 中的次数公式适用于 $E$，因为 $E$和 $G_k$ 仅相差一个标量。它给出 $\deg_{z_k}A^t_p=-\tau_E(p)$ 和 $\deg_{z_k}H_k=-\tau_E(-e_k)=0$。将 $z_k=H_k/z'_k$ 代入 $z^pA^t_p$ 并除以 $(z')^{p'}$。由于 $p'_k=-p_k-d$，项 $B_jz_k^j$ 贡献 $H_k^{p_k+j}B_j(z'_k)^{d-j}$。整除性成立，因为新的因子是一个具有整数系数的多项式。□

例如，取类型为 $A_2$、具有交换式 $xx'=1+y$ 和$yy'=1+x$的无系数种子，并在 $x$ 处进行变异。对于 $p=(0,-1)$，命题4.4 给出 $A^t_p=1+z_x$ 和$H_x=1+z_y$。该标签的新坐标为（$-1,-1$）。将（4.1）代入得到$A^{t'}{}_{(-1,\ -1)}=z'_x(1+(1+z'_y)/z'_x)=1+z'_x+z'_y$。

## 5. Reciprocity and return

**5.1. 代数的标记嵌入所导出的互反性。** 我们把第二次取镜像所得到的 theta 函数称为反向 *theta* 函数。假设它们在 $U$ 及其标记环面坐标下是正则的。我们探讨它们何时张成 $k[U]$，以及反向 theta 函数在正向标签处的高斯赋值何时与正向 theta 函数在反向标签处的高斯赋值一致。

设 $M$ 和 $N$ 为对偶格，并在域 $k$ 上赋予平凡赋值，该赋值在 $k^\times$上为零点。记 $x^q$ 为指数为 $q\in M$ 的特征，记 $z^p$ 为指数为$p\in N$的特征。我们将 $\nu^x_p$记为 $k[M]$上权重为 $p$的高斯赋值，并将 $\nu^z_q$记为其在 $k[N]$上的对应物。二者均采用取最小值约定。

在几何情形中， $A$ 是源坐标环， $B$ 是其增广镜像代数，而 $C$是由 Spec $B$构造的代数。对于该判据，我们取 $k$-代数 $A$， $B$， $C$，其基分别为 $B$ 的（$\theta_p$）和 $C$ 的（$\varphi_q$），满足

$$A\subset k[M],\qquad B=\bigoplus_{p\in N}k\theta_p\subset k[N],\qquad C=\bigoplus_{q\in M}k\varphi_q\subseteq A.$$

假设存在满维有理多面锥 $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ 和 $\tau \subset M_{\mathbb{R}}$，使得

$$\theta_p = z^p \quad (p \in \sigma \cap N), \qquad \varphi_q = x^q \quad (q \in \tau \cap M).$$

对于每个 $p, q$，假设 $z^p$ 在 $\theta_p$ 中的系数和 $x^q$ 在 $\varphi_q$ 中的系数均为 1。其余指数分别属于 $p + (\tau^\vee \setminus \{0\})$ 和 $q + (\sigma^\vee \setminus \{0\})$。这里，对偶锥由在给定锥上取非负值的线性形式组成。

对于基 $(b_a)$ 上的实权重 $d(a)$，分裂滤子 的 $F^\lambda =$ 张成空间$_k\{b_a$ 为：$d(a) \geq \lambda\}$。其阶为 $v_d(\sum c_a b_a) = \min_{c_a \neq 0} d(a)$，其中 $v_d(0) = +\infty$。若 $v_d(uv) \geq v_d(u) + v_d(v)$，则其具有乘法性。我们要求以下两个滤子都具有乘法性。

(1) 每个 $0 \neq f \in A$ 都在 $B$ 的基上给出权重 $p \mapsto \nu_p^x(f)$。(2)

每个 $0 \neq g \in B$ 都在 $C$ 的基上给出权重 $q \mapsto \nu_q^z(g)$。

在几何情形中，正则函数不等式（3.3）表明，在非零 theta 乘积中，附加于任一输出标签的阶至少是附加于其输入的各阶之和。当反向函数在所选源图表中为正则函数时，将其应用于两侧，便得到这两个乘法滤子。

**引理 5.1**。设 $L$ 为一个格，$D \subset k[L]$ 为一个具有基 $(b_a)_{a \in L}$的子代数。假设$b_a = z^a$ 在满维有理锥 $\eta$的格点上。如果 $D$ 上的乘法分裂滤子对于实权重 $w \in L_{\mathbb{R}}^*$具有权重 $d(a) = \langle w, a \rangle$，则对于所有非零 $g \in D$，有 $v_d(g) \leq \nu_w(g)$，其中 $\nu_w$ 是 $z$-坐标下的高斯赋值。

证明。取 $b \in L \cap \operatorname{int} \eta$。当 $n$充分大时，$z^{nb} g$ 的指数全部位于 $\eta$中。因此，其 Laurent展开就是其基展开。乘法性给出

$$n\langle w, b \rangle + v_d(g) \leq v_d(z^{nb} g) = n\langle w, b \rangle + \nu_w(g).$$

□

**定理 5.2**。在上述假设下，这两个基满足

$$\nu_q^z(\theta_p) = \nu_p^x(\varphi_q) \qquad (p \in N,\ q \in M).$$

此外 $C = A$。若 $0 \neq f \in A$ 的牛顿多面体为 $P$，则其在基 $(\varphi_q)$中的展开至多需要 $|P \cap M|$次连续相减。所用的每个基元素的牛顿多面体都包含于 $P$。

证明。对于 $f = \varphi_q$，第一个滤子的权重为 $\langle p, q \rangle$ 在 $\sigma$上；这是由支撑条件得出的。将引理 5.1 应用于 $\theta_p$可得 $\nu_p^x(\varphi_q) \leq \nu_q^z(\theta_p)$。将同一引理应用于 $\tau$上的第二个滤子，并取 $g = \theta_p$。由此得到反向不等式。

选择 $\omega \in \operatorname{int} \sigma$，使其与 $M$ 的配对为单射，并令 $q_0$ 为 $f$ 中具有最小 $\omega$-权重的指数。锥

$$\eta = \{p \in \sigma : \langle p, e - q_0 \rangle \geq 0 \text{ for every } e \in \operatorname{Supp}(f)\}$$

是满维的，因为所有关于 $e \neq q_0$ 的不等式在 $\omega$处均为严格不等式。在 $\eta$ 上，由 $f$ 给出的权重是斜率为 $q_0$的线性函数。引理 5.1 以及已证明的互反性给出，对每个$p \in N$，

$$\nu_p^x(f) \leq \nu_{q_0}^z(\theta_p) = \nu_p^x(\varphi_{q_0}).$$

齐次性和连续性对所有实数 $p$都给出相同的不等式。多面体是由其最小支撑函数确定的闭半空间的交集。因此，$\operatorname{Newt}(\varphi_{q_0}) \subseteq P$。

单项式 $x^{q_0}$ 在 $\varphi_{q_0}$中的系数为一，其所有其他项的$\omega$-权重都严格更大。从 $f$ 中减去其 $x^{q_0}$-系数乘以 $\varphi_{q_0}$。余项属于 $A$。若余项非零，则其牛顿多面体位于 $P$ 中，且其最小权重严格增加。由于 $P \cap M$ 是有限集，迭代必然终止。这就证明了该界以及 $A = C$。□

**推论 5.3.** $\varphi_q$（$\varphi_q$）在 $A$ 的基，对于标记环面上的所有实 *Gauss* 赋值都是赋值独立的。若 $k$ 的特征为零，且对每个 $q$都有 $\varphi_q \in \mathbb{Z}[M]$，则 $A \cap \mathbb{Z}[M] = \bigoplus_q \mathbb{Z}\varphi_q$。

证明。对于非零和 $f = \sum c_q\varphi_q$，由展开的唯一性和定理可得，只要 $c_q \neq 0$，就有 Newt($\varphi_q$) $\subseteq$ Newt($f$)。这些多面体的凸包中的反向包含关系可由加法推出。取最小值可得 $\nu_p^x(f) = \min_{c_q\neq 0} \nu_p^x(\varphi_q)$。对于 $f \in \mathbb{Z}[M]$，证明中的每次相减所得系数均为整数，且结果仍为整数 Laurent多项式。□

5.2. **由正向镜像得到的倒数牛顿多面体**。设 $L$为源余特征格，且 $L^*$ 为其对偶格。在命题 4.6的图表中，记 $C \subset L_{\mathbb{R}}$ 为其满维直锥。使用定义在 int $C$ 中的格分离权来定义最小源多胞体 $Q_a$。对于 $a \in L^*$，前向基确定整数函数$h_a(p) = \nu_a^z(\Theta_p)$，其定义在 $L$上。环面 $U$ 上的 Laurent多项式若在每个 $p$ 处取互反值，则其牛顿多面体的最小支撑函数应为 $h_a$。

**定理 5.4**。存在唯一的格多面体 $P_a \subset L^*_{\mathbb{R}}$，其最小支撑函数为$h_a$。它可以由有限个正向 *theta* 函数计算得到。对于 $p$ 位于 $C$的内部，$P_a$ 的唯一最小化指数为 $a$。

设非零 $f \in k[U]$ 在某个 $\omega \in \text{int } C$处以 $a$ 作为其唯一最小化指数。则 $P_a \subseteq \text{Newt}(f)$。存在一个定义在 $U$ 上的正则函数，其牛顿多面体为 $P_a$，且在 $a$ 处的系数为 *1*，当且仅当 $P_a = Q_a$，其中 $Q_a$ 是定理 *2.1* 中的最小多面体。其可能的系数是 $P_a \cap L^*$ 上满足一阶星可除性方程的解，并在 $a$处规定系数为 *1*。

证明。$\theta_{p+q}$ 中的系数为 1。所有 Laurent 系数和结构常数的正性给出 $h_a(p+q) \geq h_a(p)+h_a(q)$。引理 A.7 对每个正整数 $j$给出 $h_a(jp) = jh_a(p)$。引理 2.3 给出了所述格多面体。在 $C$ 上，等式 $\Theta_p = z^p$ 给出$h_a(p) = \langle a, p\rangle$，因此每个内部点都暴露出 $a$。

的所有顶点都位于坐标界为 $h_a(e_i) \leq t_i \leq -h_a(-e_i)$ 内。如命题 2.4的证明所示，在由该盒中格点之差切出的每个室内进行一次评价，即可恢复所有顶点。我们利用定理 3.2 的乘法规则，并按照命题 4.6将其平移到 $C$，计算这些评价。

在 $C$内关于 $\omega$ 的一个满维锥上，最小支撑函数$\tau_f$ 的斜率为 $a$。正则函数不等式使得权重为 $\tau f(p)$ 的分裂滤子具有乘法性。在该锥上将引理 5.1 应用于 $\Theta_p$。它对每个 $p$给出 $\tau_f(p) \leq \nu_a^z(\Theta_p) = h_a(p)$。这正是 $P_a \subseteq$ Newt($f$)。一个支集位于 $P_a$ 且在 $a$ 处具有非零系数的解，在 $C$的每个内部点处都有唯一的最小化指数 $a$。因此，其牛顿多面体包含 $Q_a$。将该包含关系应用于 $Q_a$ 上的规范化截面，得到 $P_a \subseteq Q_a$，所以解迫使二者相等。反之，如果 $P_a = Q_a$，则该截面是一个解。初始图表和相邻图表在余维一处覆盖 $U$，因此正规性和引理 B.1 将正则性与所述整除性对应起来。定理 2.1 证明中的商界保证线性系统是有限的。□

因此，对于每个源标签 $a \in L^*$ 和正向标签 $p \in L$，

$$P_a \subseteq Q_a, \qquad \nu_a^z(\Theta_p) = h_a(p) = \min_{b\in P_a}\langle b, p\rangle \geq \min_{b\in Q_a}\langle b, p\rangle. \tag{5.1}$$

根据（2.1），最后一个最小值为 $\min_{e\in T_p}\langle a,\ e\rangle$。当 $a$ 变化时，因此该不等式给出 Newt($\Theta_p$) $\subseteq T_p$。对于每个 $P_a = Q_a$，等式成立 $a$ 等价于对每个 $\Theta_p$，Newt( $= T_p$ ) $p$。

我们将 $P_a$ 在 $a$处称为互反牛顿多面体。在 $a$ 处的归一化倒数函数是一个支集包含于 $P_a$ 中的正则函数，且其在 $x^a$ 处的系数为一。若存在这样的函数，我们就称标签 $a$是可实现的。该定理将可实现性与 $P_a = Q_a$等同起来。若Laurent多项式 $x^a$ 的系数为一，并且在整个$C$的内部中，$a$ 是其最小权重的唯一项，则称该Laurent多项式在此图表中以为尖点。特别地，每个在$a$处的归一化倒数函数在那里都是尖的。

**推论 5.5**。 如果定理 5.4中的检验对 $f_a$ 每个 $a$都有一个解，那么对每个 $a$ 任取一个解所得到的集合都是 $k[U]$ 的一个基，并满足$\tau_{f_a}(p) = \nu_a^z(\Theta_p)$。对于标记源环面的每个实高斯权，它都是赋值独立的。

证明。 这些解的牛顿多面体为 $P_a = Q_a$ ，最低项为 $x^a$ ，取值于分离权重处的 $\operatorname{int} C$。定理 2.1 给出该基及其赋值独立性。在 $P_a$ 上取最小值可得 $\tau_{f_a}(p) = h_a(p)$。 □

在多项式角处，依据定理 6.1的假设，所得源基存在。要将其中一个元素与指定的反向 theta 函数对应起来，还需要在标记图表中进行比较。

## 6. Reciprocity at a polynomial corner

设 $U$是定义在 $k[u_1^{\pm 1}, \dots, u_c^{\pm 1}]$上的完整上 LP 代数的光滑谱，其中 $k$是特征零的代数闭域。假设标记种子有一个多项式角。根据第 3.1节， $U$ 于是满足定理 3.1的几何假设。我们将普通交换式规范化为 $G_i(0) = 1$。记 $M$ 为源环面的特征格，记 $L = M^*$ 为其余特征格。我们记 $x^a$ 为源上的坐标，记 $z^p$ 为正向镜像的 Laurent 展开。固定一个权重 $\mu \in L_{\mathbb{R}}$ ，其坐标严格为正且有理独立。在 $M$ 上使用其阶，以处理最小源多胞体$Q_a$ 及其对偶多胞体 $T_p$ ，见命题 2.4。令 $P_a$ 为定理 5.4中多项式角处正向图表对应的多面体。

**定理 6.1**。 对于每个 $p \in L$ 和 $a \in M$，

$$\operatorname{Newt}(\Theta_p) = T_p, \qquad P_a = Q_a, \qquad \nu_a^z(\Theta_p) = \min_{b \in Q_a} \langle b, p \rangle. \tag{6.1}$$

特别地，在最小牛顿多胞体$Q_a$ 上对规范化源截面 $f_a$ 的任意选择都满足 $\nu_p^x（f_a） = \nu_a^z（\Theta_p）$。

交换式可能循环地相互依赖，且极点阶是任意的。我们证明 $T_p$ 的每个顶点都 $\Theta_p$出现于其中。引理 6.2 给出了 theta 系数为正的一个充分条件，该条件以交换多项式的单零点表示。命题 6.5 在函数域上的曲线中的一个圆盘上产生这些零点。我们在扰动 $p$之后应用该命题，然后通过连续性恢复所需的顶点。

### 6.1. theta 系数正性的判据。

记 $r$ 为可变坐标的数量， $n =$为秩 $M$。设 $w$， $Y_1$，……， $Y_n$ 为不定元，并记 $Y =(Y_1$，……， $Y_n)$。对于 $p \in L$ 和 $1 \le i \le r$，定义

$$D_i = -\min_{\alpha \in \operatorname{Supp} G_i} \langle \alpha, p \rangle, \qquad H_i(Y, w) = w^{D_i} G_i((w^{p_j} Y_j)_{1 \le j \le n}).$$

每个 $H_i$ 都是一个多项式，其中 $H_i(0$， $w) = w^{D_i}$。我们在指定坐标上用零延拓可变向量。对于实值加性赋值 val，我们使用绝对值$|h| = \exp(-\operatorname{val}(h))$，其中 $|0| = 0$。

**引理 6.2**。 设 Ω 是平凡赋值域 $k$的完备代数闭赋值扩张，并带有实值绝对值。对于每个可变 $i$，令 $A_i \in \Omega[w]$ 为一个次数为 $d_i$ 且具有 $0 \le d_i \le D_i$的首一多项式。假设 $\prod_i A_i$ 的根都是单的、非零且范数小于一。取 $Y_i = A_i C_i$，其中 $C_i$ 是一个系数范数小于一的多项式。令指定 $Y_j$ 为范数小于一的常数。如果$H_i（Y（w） w）$ 在 $A_i$的每个根处都有一个简单零点，则 $[z^{p+d}]\Theta_p > 0$。

证明。 如果所有 $d_i$ 均为零，则根据定理 4.1，系数为一。否则，选取 $m_i \ge 0$，使得次数为 $C_i \le m_i$，允许 $C_i = 0$，并将一个界增大到至少为一。于是，下面的一般标记直线将至少有三个边界接触。独立地改变

the $C_i$ 和指定常数，参数列表为 $c$。令 $u$ 表示首一 $A_i$的低阶系数。在 $R = k[[c]]$ 上考虑

$$\mathcal{B} = k[[c, u]]/\big(\text{coefficients of } H_i(Y, w) \bmod A_i(w),\ 1 \le i \le r\big).$$

在 $c = 0$ 处，条件为 $A_i \mid w^{D_i}$。因此，闭纤维的支集位于 $A_i = w^{d_i}$。在正则局部环 $k[[c, u]]$ 中，余式系数与 $c$ 依次构成一个参数系，因而构成正则序列。 $\mathcal{B}$ 的某个极大理想幂包含于 $(c)$ 中，因此完备性将闭纤维的生成元提升为有限个 $R$- 模生成元。正则序列 $c$ 作用于 $\mathcal{B}$，从而使这个有限模成为正则局部环 $R$ 上的自由模。

对于 $d_i > 0$，取 $A_i$ 的常数项与判别式的乘积，以及它与 $H_i(Y,\ w)/A_i$ 的结式。再将这些乘积与 $A_i$ 的两两结式相乘。将所得结果记为 $\Delta \in \mathcal{B}$。所假定的解将 $\Delta$ 映射为一个非零值。由于所有形式参数的范数都小于一，这个代换是收敛的。自由性意味着，在一般纤维上 $\Delta$ 仍然不是幂零元。因此，在 Frac $R$ 的任意代数闭扩张上，我们可以选择一个满足 $\Delta \neq 0$ 的解。

为指定整环的标记点，取独立不定元 $h_{ij}$ 并令$L_i(w) = 1 + \sum_{j=1}^{m_i} h_{ij} w^j$。赋予 $K_0 = k(h_{ij})$ 平凡赋值。在代数独立变量上的有理函数域 $K_0(b_1$、……、$b_n,\ b_*)$ 上取具有正有理独立权重的单项式高斯赋值。将此赋值域扩张为完备代数闭扩张。以 $j > r$代换 $C_i = b_i L_i$ 和 $Y_j = b_j$。这些代换嵌入 $R$。事实上，$b_i$ 中的不同多重次数具有不同的值。在任一固定多重次数下，$h_{ij}$ 的指数可区分各个系数单项式，并且每个非空的出现多重次数集合都有一个最小值。相对于此嵌入，选取满足$\Delta \neq 0$ 的一般解。其系数 $u$ 由整性可知范数至多为一，而由闭纤维上的幂零性可知范数小于一。 $A_i$ 的所有根现在范数都小于一。

取乘积 $U \times \mathbb{G}_m$ 并再指定一个坐标。记 $z_*$ 为对偶特征，引理 3.7 给出标记展开 $\Theta^{U\times\mathbb{G}_m}_{(q,h)} = \Theta^U_q z^h_*$。这个额外坐标确保两个端接触以及我们将要切开的斜率均非零。

记 $m = (m_1, \ldots, m_r, 0, \ldots, 0)$ 和 $d = (d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0)$。在标记射影直线上取坐标函数 $w^{p_i} Y_i(w)$ 和 $b_* w$，并在 $w = 1$ 处求值。$0, \infty$ 处的接触分别为 $(p, 1)$ 和 $(-p - d - m, -1)$。 $L_i$ 的每个根都给出一个额外接触 $(e_i, 0)$。这些根的剩余类互不相同，且均不等于 0、1、 $\infty$。将它们排序后，便得到一个一般标记域。事实上，它们的初等对称函数可恢复 $L_i$ 的独立系数，而添入这些根构成有限扩张。在这样的根处，未改变坐标的范数小于一，因此 $G_i$ 的剩余类为一。在 $A_i$ 的根处，条件 $\Delta \neq 0$ 使普通伙伴正则且非零。两个端接触均不在正可变坐标轴上。这证明了定理 3.1 中所有开条件。

令 $\xi$ 为所有 $b_j$的赋值向量，包括 $b_*$。我们将 $\xi$ 与求值环面的高斯点相对应，即由其单项式高斯赋值给出的乘法半范数。在 $w = 1$处，因子 $A_i$（1）和 $L_i$（1）的范数均为 1。在标记构型的域上，赋值是平凡的。求值坐标中的不同 Laurent 单项式具有不同的值，因此，关于标记域的多项式关系将有唯一一个取最小值的项。由此，求值坐标在该域上代数独立。该整环及其求值给出了标记直线（每个标记对应一条腿）的星形树上乘积骨架的典范点，以及高斯点 $\xi$，如 [27, 命题 8.8 和 §141]中所述。该纤维位于一般有限 ´étale 轨迹中。选择一个满足 [27, 假设 24]的紧化，并对规定的接触射线以及下方切口处由$\pm(p + d,$ 1）生成的两条环面尾射线取一个共同的环面精化，如引理 A.4的证明中所述。令 $\beta$ 为该模型上映射的数值类。根据每个映射的脊对纤维进行划分。由

具有给定脊的映射所贡献的次数是其 骨架次数，并计入剩余域次数。因此，根据 [27,Construction 9.2、引理 8.20–822]，我们的映射的脊具有正次数 。

取 $A$ 足够大，使其适用于 $\beta$ 在 [27, 定义 428],的意义下$_A$ 的每个有效加项，并令 Wall $\xi$ 为相应的墙的并集。在每条臂上，一个逐点固定墙的有理剪切会将弯折处的入射斜率变为出射斜率。由于 $\mathbb{Q}$的坐标在上代数无关，Lemma A.4 证明中的横截性论证适用于每条臂及其在一般切点处的直线延拓。

评价腿被压缩，边界腿的凸包是稳定的，因为其数量为 $2+\sum_i m_i \geq 3$。记 $S^B$ 为这个凸包，并带有诱导映射。其中心顶点仍映射到 $\xi$。根据 [27, 定理 914], ，其骨架次数等于原标记骨架的正固定评价次数。

朝向 $w=0$ 时，初始斜率为（$p+d$，1）。事实上，在高斯线段上， $A_i$ 的每个因子 $w-a$ 的赋值为 min(val($w$), val($a$))，其初始导数为 1。 $L_i$ 的因子在那里导数为零。在其他臂上进行相同计算，可得在 $L_i$ 的根处的斜率为（$e_i$，0），以及朝向无穷远的斜率为（$-p-d-m$，$-1$）。Wall$_A$ 中的墙以及环面扇的余维一锥都位于有限个有理超平面中。由于 $\xi$ 不在这些超平面中的任何一个上，关于 $\xi$ 的充分小球同时避开 Wall$_A$ 和扇的余维一骨架。将 $S^B$ 朝向 $w=0$ 的臂切得足够靠近 $\xi$ ，使得从 $\xi$ 到切口的线段为直线段且位于该球内。切口处相反的导数满足拼接公式 [27, 定理 12.4]的假设。该公式将正骨架次数表示为有效类分解上非负次数的乘积之和。因此，通往 0 的臂在某个类中具有正次数。根据 [27, 引理 12.3]，这条短直线段在零类中的次数为 1，在其他每个类中的次数为 0。将其拼接回 $\xi$ 不会改变次数 [27, 定理 12.4]。按照 [27, 构造 9.3、Lemma 9.12 和定义 20.20] ，通过直线环面尾部延续有限端，从而得到一个贡献，其输入为（$p$，1），指数为（$p+d$，1）。点 $\xi$ 位于直线正正交象限的内部。命题 A.5 将该处的增广局部展开与标记 Laurent多项式对应起来。现在应用环面乘积恒等式，即可得到所述系数。□

6.2. **圆盘的高斯赋值与斜率判据。** 记 $A=k[U]$ 和 $K=\mathrm{Frac}\,A$。对于非零 Laurent 多项式 $h$，令 $\ell(h$为其最小 $\mu$-权重对应的唯一指数。乘积 $\prod_{i=1}^{r} G_i/x_i$ 是正则的，且其最小指数在每个可变坐标上均为负。因此，根据定理 $Q_a$ ，对所有 $a\in M$，最小牛顿多胞体均存在。定理 2.1。对于 $v\in T_p$ 和 $0\neq h\in A$ ，其极小性给出

$$\nu_p^x(h)\leq \min_{b\in Q_{\ell(h)}} \langle b,p\rangle \leq \langle \ell(h),v\rangle. \tag{6.2}$$

为了得到函数域上的曲线，我们寻找使（6.2）中的两个不等式均取等号的正则函数。当它们的最小指数线性独立时， $\nu_p^x$在这些函数上限制为一个高斯赋值。

**引理 6.3**。 假设 $s_1,\ldots,s_n\in A$ 的最小指数 $a_j=\ell(s_j)$线性独立，且 $\nu_p^x(s_j)=J_j=\langle a_j,v\rangle$ 对于 $v\in T_p$成立。那么这些$s_j$ 代数独立，并且 $\nu_p^x$在$k(s_1,\ldots,s_n)$ 上的权重为 $J=(J_1,\ldots,J_n)$的高斯赋值就是它们的高斯赋值。

证明。 其中不同的单项式 $s_j$ 具有不同的最小指数。对于这些函数的任意多项式，令 $h$ 为最小 $J$-权重 $b$项之和 $\langle \ell(h)\ v\rangle = b$。它的最小指数来自这些项之一，因此 $\langle \ell(h)\ v\rangle = b$。式（6.2）给出 $\nu_p^x(h)\leq b$，而赋值不等式给出反向不等式。其余所有项的值都严格较大。该公式可扩展到分式。□

在一般曲线上， $\nu_p^x$ 将是点 $P$ 处阶的一个正倍数。比较此阶与环域上的斜率，可得到一个判据，用于判断有理参数 $t$ 的环带逆映射能否延拓到一个圆盘，且该圆盘的中心映射到 $P$。我们使用

Berkovich解析化，记作上标 an。在环带坐标 $t$中，半径为 $s$ 的高斯点是半范数 $|\sum_j c_j t^j|_s = \max_j |c_j| s^j$。这些点构成环域的骨架 。在代数闭域 Ω 上，当 $s \in |\Omega^\times|$时，它们是 II 型；否则为 III 型 [4, §2]。

**引理6.4**（圆盘的斜率判据）。 设Ω 是一个完备代数闭的非¯阿基米德域，带有非平凡的实值绝对值。设 $C$ 是定义在Ω上的光滑连通射影曲线，且 $C$ 是一个有限点集的补集。假设¯ $t \in \mathcal{O}(C)^\times$ 在 $P \in C \setminus C$处有一个简单零点。假设 $C^{\mathrm{an}}$ 中的一个开环域通过 $t$ 同构映射到 $r_1 < |t| < r_2$上。对于满足 $\rho \notin |\Omega^\times|$的 $r_1 < \rho < r_2$ ，令 $b$ 对应于半径为 $\rho$的高斯点。对于一个非零有理函数 $h$，令 $\sigma_b(h)$ 表示 $-\log|h|$ 在此环域骨架上的斜率，其中长度坐标为 $-\log|t|$，并且当半径减小时递增。

¯假设对于每个 $0 \neq h \in \mathcal{O}(C)$，都有 $\mathrm{ord}_P(h) \leq \sigma_b(h)$ 。那么， $C^{\mathrm{an}} \setminus \{b\}$朝较小半径方向的不可约分支包含 $P$，并且在 $t$ 下同构映射到开圆盘 $|t| < \rho$。在这一侧，逆映射在 $b$ 附近与给定的环域截面一致。

¯证明。 取一个不同于 $P$ 的 $D \in C \setminus C$。这样的点存在，因为 $t$ 有一个极点。选取带 puncture 曲线的骨架，使其有朝向 $D$ 和 $P$ 的腿，并使 $b$ 位于给定的环带边内。半稳定顶点集是一个由有限个 II 型点组成的集合，其补集是若干开圆盘和有限个开环域的并；在曲线缺失的点处也允许出现穿孔圆盘。根据命题3.13(3)和推论 5.10], 我们可以将 $b$ 两侧附近的两个 II 型点纳入这样的顶点集 [4, 。截短这些腿，得到一个有限连通度量图。

¯设 $\gamma$ 表示 $C$的亏格。对于每个 $N > 0$，黎曼–罗赫定理给出一个非零的 $h_N$ ，它在 $P$处有一个阶至少为 $N$的零点，并且仅在 $D$处有极点，总阶至多为 $N + \gamma$。其除子为$N(P - D)$，再加上至多 $\gamma$ 个点对之差，并按重数计数。对于每一对点，考虑从极点指向零点、且两端都缩回到图上的单位电流。它是一个连续分段仿射势函数的梯度，除这两个点外处处调和，并在极点处有一个单位电流流入、在零点处流出。斜率公式 [4, 定理 5.15] 将 $\sigma_b(h_N)$与沿选定方向穿过 $b$ 的这些电流之和对应起来，并按重数计数。事实上，可以先将指向所有零点和极点的腿附加上去，然后沿新增的树对平衡方程求和。这样便为所有 $N$在同一个固定图上得到这些电流。

对于每一对点，任意一条边上的绝对电流至多为一。事实上，如果某条边上的电流非零，则取一个严格介于其两个端点势之间的正则水平集。穿过该水平集、朝势增大的方向定向的电流总和为一。因此，除子中的剩余点对 $h_N$ 对穿过$b$的电流的贡献至多为 $\gamma$ ，且与 $N$无关。记 $I$为从 $D$到 $P$穿过 $b$的带符号单位电流。由于 $h_N$在 $C$上是正则的，假设给出 $N \leq \mathrm{ord}_P(h_N) \leq \sigma_b(h_N) \leq NI + \gamma$。令 $N$趋于无穷，得到 $I = 1$。

经过 $b$ 的边必须将 $D$ 与 $P$分隔开。否则，要么没有电流通过该边，要么存在一条连接其两个端点且避开其内部的路径。这样的路径会穿过一个中间正则势水平集，并在已经穿过该边的单位电流之外贡献正电流。 $I$ 的符号将 $P$ 置于较小 $|t|$所在的一侧。每个补开圆盘都在单一点处附着于骨架，而 III 型点 $b$恰好有两个切向方向 [4, 引理 5.12(2)]。因此， $b$也在解析曲线上将 $P$ 与 $D$ 分隔开。

将此应用于每个边界点 $D \neq P$。在朝向较小半径的不可约分支 $B$ 上， $t$没有极点，且其唯一的零点是 $P$。事实上， $|t| < \rho$ 在整个 $B$上均成立。再次在半径为 $\rho' < \rho$的某个邻近 II 型点处切开环带边。在第二个切口之外的不可约分支的闭包上，由最大值原理可得 $|t| \leq \rho'$，因为其唯一的边界点的半径为$\rho'$。在两个切口之间的部分，环带坐标直接给出严格界。¯ $B$ 在 $C^{\mathrm{an}}$ 中的边界是 $\{b\}$，因此 $B$ 是圆盘的逆像中的开闭集

$|t| < \rho$。因此，有限平坦映射 $\bar{C}^{\mathrm{an}} \to (\mathbb{P}^1_\Omega)^{\mathrm{an}}$ 限制为从 $B$ 到该圆盘的有限平坦映射。其次数是零点处纤维的长度，由于 $P$ 是一个简单零点，该长度为一。因此，该限制是一个同构。其逆元在 $r_1 < |t| < \rho$ 上与原截面一致，而原截面在该处的像位于 $B$中。□

6.3. **在一般曲线上构造圆盘**。我们构造一个圆盘，使可变坐标的零点给出引理 6.2所需的多项式。权重$p$ 选取一般曲线完备化上的一个点。在 $\mu$ 处的最小指数给出环域上的一个截面，我们将其延拓到包含该点的圆盘上。

**命题 6.5**。假设 $0 \neq p \in L$, $v \in T_p$，以及 $s_1, \dots, s_n$ 满足引理 *6.3*。假设它们的最小指数 $a_j$ 构成一个格基，且每个$s_j$ 都有唯一的 $p$-最小指数，并且这些后者的指数也构成一个格基。若每个指定单位在相差一个标量的意义下都是 $s_j$ 中的 *Laurent* 单项式，则 $v \in L$ 且 $[z^v]\Theta_p > 0$。

证明。环面的情形由 $\Theta_p = z^p$得出。因此我们可以假设 $n \geq 2$，因为在一维情形中，与唯一坐标无关的交换必为常数。由于$p \neq 0$ 且 $p$-最小指数构成一个基，某个 $J_j$ 非零。令 $g =$ 为 $\gcd(J_1, \dots, J_n) > 0$。等式 $\langle a_j, v\rangle = J_j$ 给出 $v/g \in L$，因为 $a_j$ 构成 $M$的一个基。对于$b \in \mathbb{Z}^n$，$s^b$的次数为 $J(b) = \sum_j b_j J_j$。在 $s_j$ 中取单项式坐标 $y_1, \dots, y_{n-1}, t$，它们对应于 $\ker J$的一个基和一个次数为 $g$的向量。写作 $E = k(y_1, \dots, y_{n-1})$。由引理可知，$E$的 $p$-赋值平凡，且 $k(s_1, \dots, s_n) = E(t)$。$p$- 最小指数构成一个格基。因此，$s_j$ 中的零次单项式的剩余类生成所有环面剩余特征，而约化将 $E$与剩余域 $\kappa(\nu_p^x)$ 等同。相同的基给出 $\nu_p^x(K^\times) = g\mathbb{Z}$。

在 $A$ 中将$s_j$ 里的非零齐次多项式取逆，并将所得结果记为 $S$。这是一个 $E$上的有限型正则曲线环。事实上，$k[s_1, \dots, s_n]$ 的相应局部化为 $E[t^{\pm 1}]$，而 $K/E$的超越次数为一。$K$ 中任何代数于 $E$ 的子域都具有平凡的 $p$赋值，因此约化将其嵌入 $E$上的 $E$ 中。于是，$E$ 在 $K$中是代数闭的。在特征零时，曲线 $C = \operatorname{Spec} S$ 是光滑且几何整的。$p$赋值给出一个 $E$-有理点 $P$，位于光滑射影完备化 $C$上，并满足$\nu_p^x = g \operatorname{ord}_P$ 以及 $\operatorname{ord}_P(t) = 1$。由于 $t$ 在 $C$上可逆，该点属于 $C \setminus C$。

现在给出由 $\mu$诱导的 $E$ 赋值，并令 $\rho = |t|_\mu$。$y_1$的 $\mu$最小指数、……、$y_{n-1}$、$t$ 构成一个格基，因此 $\rho$的非零次幂都不属于 $|E^\times|$。在 $\widehat{E}$的完备化上、半径 $\rho$ 附近的环域中，存在 $C \to \mathbb{P}^1_t$ 的一个截面。为构造它，将$s_j(x)$替换为它们的 $\mu$最小单项式，并保留其系数。将这一单项式坐标变换求逆，得到 $x_i^0(y, t)$。将 $x_i = x_i^0 U_i$ 代入$s_j$的原方程，并将每个方程除以其在 $y$、$t$中规定的单项式。在半径 $\rho$处，这些方程约化为 $U^{a_j} = 1$，且每个省略的系数的范数都严格小于一。在 $\rho$附近的一个小闭环域上，同样的严格界也成立。在 $U = (1, \dots, 1)$处，约化方程的雅可比矩阵的各行是$a_j$，其行列式为 $\pm 1$。$U_1, \dots, U_n$ 中完整方程的雅可比矩阵与之相差一个范数小于一的矩阵，因此其行列式是环域代数中的单位。该代数中的牛顿迭代给出一个满足 $\|U_i - 1\| < 1$的截面。逆函数定理使其像在中心圆附近为开集。取实数环域半径可使系数$\widehat{\ }$保持在 $E$中。

$\widehat{\ }$设 $\Omega$ 为 $E$的完备代数闭包。半径为 $\rho$ 的截面上的高斯点 $b$ 是 III 型，因为 $|\Omega^\times|$ 是 $|E^\times|$的可除包。将环域定向为朝向 $|t|$减小的方向。对于有理函数 $h$，令 $\sigma(h)$ 表示相对于 $-\log|t|$，$-\log|h|$ 在 $b$处的出射斜率。$x_i^0$的 $t$-指数为 $v_i/g$，因为 $\langle a_j, v\rangle = J_j$。唯一的 $\mu$-最小 Laurent 单项式在一个短环域上仍保持主导。因此，对于 $h \in A \setminus \{0\}$，有 $\sigma(h) = \langle \ell(h), v\rangle/g$。对于 $S$中的每个齐次分母，根据引理 6.3，界（6.2）都是等式。由此可得

$$\operatorname{ord}_P(h) \leq \sigma(h) \qquad (0 \neq h \in S). \tag{6.3}$$

^我们先将斜率界扩展到完备化 $E$，再扩展到其完备代数闭包 Ω。只需考察一个有限维的 $E$-子空间 $V \subset S$，因为 $S \otimes_E \Omega$中的每个元素都属于某个 $V \otimes_E \Omega$。对于整数 $j$，其子空间 $V_j$ 由在 $P$ 处阶至少为 $j$ 的函数组成，是该有理^光滑点处有限个 Laurent系数泛函的核。因此， $V_j$ 与基变换交换。在 $V_j \otimes_E E$ 中，由稠密性，每个非零函数的斜率仍至少为 $j$。事实上，在 $\rho$这一 III 型半径处，非零环带级数具有唯一的主导幂，而 Gauss 范数中的充分小扰动会保持该幂不变。限制到该环域的映射是单射的，因为它在一个几何整^解析曲线中是开集。取 $V_j \otimes_E E$ 中的一个非零向量，并取其主导幂的系数所对应的核。重复此过程，可得到一个具有不同主导幂 $t^{k_i}$的基，且这些幂全部为 $k_i \geq j$。在随后以 $\Omega^\times$中的元素进行任意标量乘法后，这些基向量的 Gauss范数属于不同的陪集 $\rho^{k_i}|\Omega^\times|$。因此，在任意非零线性组合中，最大的项都会保留下来，其斜率至少为 $j$。这就证明了基变换后的（6.3）。

记 $r_1 < |t| < r_2$ 为 Ω 上环域截面的定义域，其中 $r_1 < \rho < r_2$。函数 $t$ 在 $C_\Omega$ 上是单位，并在 $P$处有一个简单零点。由于（6.3）对 $C_\Omega$上的每个非零正则函数都成立，引理 6.4 给出了 $t$ 在 $|t| < \rho$上的逆元。此逆元与 $r_1 < |t| < \rho$上的环域截面一致。将二者粘合，得到 $|t| < r_2$ 上的一个截面，它将 0 映到 $P$，并将穿孔圆盘映入 $C_\Omega$。

将赋值域扩张为一个包含范数为 $\rho$的 $t_0$ 的完备代数闭域，并代入 $t = t_0 w^g$。现在，该截面定义在 $|w| < (r_2/\rho)^{1/g}$上，这是一个半径大于 1 的圆盘。由于 $g\,\mathrm{ord}_P(x_i) = p_i$，函数 $w^{-p_i} x_i(w)$可解析地延拓穿过 $w = 0$，且在该处取非零值。在闭单位圆盘的高斯点处，它的严格主导幂为 $w^{v_i - p_i}$，范数为 $|x_i|_\mu < 1$。根据 Weierstrass预备定理，它在开圆盘内恰有 $v_i - p_i$个根，且都非零。对于指定单位，归一化函数是常数，因为该单位是 $y$、$t$的单项式。为证明这些根都是简单且互不相同的，考虑所有$s_j$ 均可逆的开集。在此处，代数独立的$y_j$ 定义了到 $\mathbb{G}_m^{n-1}$的支配映射，其一般纤维为 $C$。该开集中第一星之外的轨迹维数至多为 $n-2$，因此其像不包含一般点。在第一星上， $x_i$ 的一个零点位于第 $i$个相邻环面中，此处其他可变坐标和 $G_i/x_i$都是单位。根据命题 1.1，除子 $x_i = 0$ 是既约的，其在 $C$ 上的限制是一个局部化。它的闭点在 $E$上的剩余域可分，因此基变换后该除子仍然既约。 $t$ 的截面局部是同构，而幂映射$w \mapsto t_0 w^g$ 在零点之外非分歧。

令 $A_i$ 为所得因子的首一乘积，对应于 $x_i$。解析商 $C_i = w^{-p_i} x_i(w)/A_i$ 的 Gauss 范数小于 1，因为 $\|A_i\| = 1$。若 $A_* = \prod_i A_i$ 的次数为正，则将每个可变商替换为模 $A_*^2$的多项式余式。用这个 Gauss 范数为 1 的首一多项式作除法，不会增大余式的范数；这首先对多项式成立，再由闭圆盘上的连续性推广而得。该替换在每个根处都与原式一阶相同。在 $A_i$ 的每个根处，普通伙伴正则且非零，因此代入后的交换在那里有一个简单零点。最后，$d_i = v_i - p_i$ 介于零与$D_i$之间。事实上， $Q_{e_i} = \{e_i\}$，而 $G_i/x_i$ 的最小指数为 $-e_i$。在 $e_i$、$-e_i$ 处检验恒等式 (2.1)，即可得到这两个界。指定坐标的两种符号都是正则单位。由引理 6.2 可得 $[z^v]\Theta_p > 0$。当 $A_* = 1$时，该系数就是定理 4.1 中的直系数 1。□

6.4. **实现对偶多胞体的顶点。**

定理 *6.1* 的证明。由（2.1）和（5.1），$\mathrm{Newt}(\Theta_p) \subseteq T_p$，我们必须比较的两个支撑函数为

$$\min_{e \in T_p} \langle a, e \rangle = \min_{b \in Q_a} \langle b, p \rangle, \qquad \nu_a^z(\Theta_p) = \min_{b \in P_a} \langle b, p \rangle.$$

对于固定的 $a$，右侧关于 $p$ 连续且齐次。对于 $p = 0$，定理第一条断言中的两个多面体都是 $\{0\}$。固定 $p \neq 0$ 以及 $T_p$ 的一个顶点 $v$。

选择 $L$ 的一组基 $q_1, \ldots, q_n$。按照指数与 $p$、$q_1$、…、$q_n$ 的配对对指数进行字典序排序。令 $m(a)$ 表示 $Q_a$ 按此顺序排列的最小指数。这些比较中的每个有限集，在用权重 $p_\epsilon = p + \epsilon q_1 + \cdots + \epsilon^n q_n$ 替代该顺序后，对于充分小的正有理数 $\epsilon$ 仍然成立。选择如定理 2.1 中的归一化截面 $f_a$。映射 $a \mapsto m(a)$ 是单射。否则，选择 $p_\epsilon$，使不同的 $f_a$、$f_b$ 具有一个共同的最小指数，并在线性组合中消去其系数。赋值的增加将与赋值独立性矛盾。因此，每个非零正则函数的字典序最小指数都等于其基展开中某个标签 $b$ 对应的 $m(b)$。此外，对于每个整数 $k > 0$，$m(ka) = km(a)$。乘以指定单位 $x^c$ 及其逆元得到 $Q_{a+c} = Q_a + c$，因此 $m(a + c) = m(a) + c$。

我们首先在$v$处的极小法锥内找到一个满维开凸锥 $\mathcal{V}$，在该锥上，对于整线性变换 $B$，$m(a) = Ba$。我们可以在可变标签的张成空间中进行处理。根据支撑公式和 $Q_{a+c} = Q_a + c$，指定平移属于法锥的线性空间部分，即其最大的向量子空间。在该法锥的内部，$Q_a$ 上的主最小值是线性函数 $\langle a,\ v\rangle$。我们依次针对 $q_1$，……，$q_n$细化该锥。利用齐次性定义有理标签处的多面体。在所有先前的最小值均为线性的锥上，相应的极小面满足与原多面体相同的闵可夫斯基包含关系。事实上，当两个最小值相等时，$Q_{a+b} \subseteq Q_a + Q_b$ 会传递到极小面，而和的极小面就是各极小面的和。重复这一过程，即可得到包含关系，直至所有先前的权重。

对该锥中的每个有理标签 $a$，令 $F_a$ 为由前述权重选出的面，并设 $h(a) = \min_{b \in F_a} \langle b, q_j \rangle$。这些面之间的包含关系使 $h$ 超可加。它是齐次的，且在格点上取整数值。其绝对值局部有界，因为 $Q_a$ 包含于坐标多面体 $Q_{\pm e_i}$ 之和，其中系数 $|a_i|$ 的符号与相应项一致。通过凹性，该函数可延拓为开锥上的局部利普希茨函数。与引理 2.3 中一样，它在可微点处的梯度都是整数。事实上，在这样的点 $u$ 处，选取与 $ku$ 距离有界的可变格点 $b_k$。当$k$ 足够大时，$b_k$ 和 $b_k + e_i$ 都位于该锥中。整数 $h(b_k + e_i) - h(b_k)$ 由齐次性和可微性趋于 $\partial_i h(u)$。在较小的内部球上只会出现有限多个梯度。由凹性以及可微点的稠密性，可将该处的 $h$ 表示为这些支撑线性形式的最小值。因此，$h$ 在较小的开球上线性，并由齐次性可知，它在该球的开锥张成上也线性。经过最后一次细化后，$q_j$ 确定 $m(a)$，从而在可变标签上得到一个整数矩阵。将其在指定标签上扩展为单位矩阵，并将它们的实张成整体加到该锥中。由此得到 $B$ 和 $\mathcal{V}$。若所有坐标都是指定的，则该断言可直接在环面上得出。

事实上，$B$ 是幺模的。$m$ 的单射性迫使 $B$ 具有满秩，因为位于 $\mathcal{V}$ 内部足够深处的一个格点与其经某个固定整数核向量平移后的像相同。令 $D = |\det B|$，并选取 $\mathcal{V}$的一个内部格点 $a$。对任意坐标特征$e_j$，正则函数 $x_j f_{ka}$ 的最小指数为 $kBa + e_j = m(b)$，对某个$b$。当 $k$ 充分大时，它落在 $B\mathcal{V}$中。于是 $c = DB^{-1}m(b)$属于 $\mathcal{V} \cap M$，且$m(c) = Bc = Dm(b) = m(Db)$。由单射性得 $b \in \mathcal{V}$ 以及 $e_j = B(b - ka)$。因此 $BM = M$。在 $\mathcal{V}$上，主最小值现在给出 $\langle a, v\rangle = \langle Ba, p\rangle$，故 $v = B^* p$，其中 $B^* :\ L \to L$ 是对偶格映射。

选取最后一个可变锥内可变特征格的一组基 $a_1, \ldots, a_r$。为找到这样一组基，将一个本原内部向量扩充为格基，并把该向量的较大倍数加到其余每个向量上。再用指定的坐标特征$a_{r+1}, \ldots, a_n$将其补全。取 $s_j = f_{a_j}$作为 $j \le r$，取 $s_j = x^{a_j}$作为 $j > r$。令 $a_0 = \sum_{j=1}^n a_j$。它位于 $\mathcal{V}$中，并在 $T_p$上暴露 $v$。对所有 $0 \le j \le n$，利用坐标特征的指定平移，有 $m(a_j) = Ba_j$。

对于每个充分小的正有理数 $\epsilon$，$Q_{a_j}$ 的唯一 $p_\epsilon$最小指数对于所有 $0 \le j \le n$均为 $Ba_j$。取 $N_\epsilon \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $p' = N_\epsilon p_\epsilon \in L \setminus \{0\}$。$T_{p'}$ 上在 $a_j$ 处的最小值为 $\langle Ba_j,\ p'\rangle$。由于 $a_0 = \sum_{j=1}^n a_j$ 且 $B$ 是线性的，$a_0$ 处的最小值等于各项

这些 $n$单独最小值之和。在 $a_0$ 处的任一极小元 $n$因而同时达到所有 $v' = B^*p'$最小值，所以它是唯一的，且等于 $s_j$ 的最小指数构成$a_j$ 在 $\mu$ 处的基，以及 $Ba_j$ 在$p'$处的基。我们还有 $\nu^x_{p'}(s_j) = \langle a_j,\ v'\rangle$。命题 6.5 现在给出 $[z^{v'}]\Theta_{p'} > 0$。

由于 $v'$ 在 $T_{p'}$ 上使 $a_0$ 达到最小值，且出现在 $\Theta_{p'}$中，包含关系 Newt($\Theta_{p'}$) $\subseteq T_{p'}$ 便给出了在 $a_0$处两个最小值相等。根据证明开头的支撑恒等式， $P_{a_0}$和 $Q_{a_0}$ 因此在 $p'$处具有相同的最小值，并且根据 $p_\epsilon$处的齐次性也如此。固定 $a_0$并令 $\epsilon$ 趋于零，可得在 $p$处相等。因此，Newt($\Theta_p$)与 $T_p$ 的面相交，在该面上 $a_0$ 取最小值。该面是 $\{v\}$。这证明了 Newt($\Theta_p$) $= T_p$，因为 $v$ 是任意顶点。现在，相同的支撑恒等式对每个 $a$ 给出 $P_a = Q_a$ 以及所断言的赋值相等性。□

互反性还决定了截面在 $Q_a$ 上的最小指数如何随初始种子变化。令 $t$、$t'$为 $U$的两个具有多项式角的可达种子。记 $x$、$x'$为它们的坐标，并记 $z$、$z'$为相应的前向坐标。记 $M_t$、$M_{t'}$为两个种子环面的特征格，并记 $L_t$、$L_{t'}$为它们的对偶格。令 $T\colon\ L_{t,\,\mathbb{R}} \to L_{t',\,\mathbb{R}}$ 为引理 1.6中从 $t$ 到 $t'$ 的Gauss权重变换。在每个种子中选取一个严格为正的分离权重。

**推论 6.6.** 设 $f_a$ 是 $t$ 中最小牛顿多面体 $Q_a$ 上的一个规范化截面。它在 $t'$ 中的最小指数 $a'$ 为

$$a'_j = \nu^z_a\big(\Theta^t_{T^{-1}(e'_j)}\big),$$

其中， $e'_j$ 是 $t'$ 的坐标余特征，且 *theta* 函数在 $t$ 的正向图表中展开。映射 $a \mapsto a'$ 可扩张为一个整数分片线性同胚 $M_{t,\,\mathbb{R}} \to M_{t',\,\mathbb{R}}$，并且在有限有理扇的锥上为线性映射。

若 $t'$ 是通过在 $i$ 处突变得到的，且交换 *Laurent* 多项式 $F_i$ 是常数项非零的多项式，令 $H_i = z_i\Theta^t_{-e_i}$。则

$$a'_j = a_j \quad (j \neq i), \qquad a'_i = -a_i + \tau_{H_i}(a).$$

证明. 根据第 2.1 节， $f_a$ 支集于 $t'$ 中 $a'$ 处的最小牛顿多面体上。乘以一个标量可将其在该处的最小系数规范化，同时保持其高斯赋值。在 $t'$ 的正向图表中，标签为 $e'_j$ 的 theta 函数由定理 4.1 得为 $z'_j$。在 $t'$ 中，互反性 (6.1) 给出 $a'_j = \nu^{x'}_{e'_j}(f_a)$。将赋值传递到 $t$ 并在那里应用互反性，便得到第一个公式。每个坐标都是有限个整数线性形式的最小值。交换两个种子可得到格点上的逆映射，因此由齐次性和连续性，该映射也在实空间上为逆映射。对于所述突变，当 $j \neq i$ 时， $T^{-1}(e'_j) = e_j$，且 $T^{-1}(e'_i) = -e_i$。代入即可得到第二个公式。□

例如，取类型 $A_2$ 交换式 $xx' = 1 + y$和 $yy' = 1 + x$。 $y'$在（$x$，$y$）中的最小指数为（0，$-1$）。在（$x'$，$y$）中，同一个函数为（$x' + 1 + y$）/（$x'y$），其最小指数为（$-1$，$-1$）。因此，其第一个坐标从 0 变为 $-1$。对于使用主系数定义的簇 $g$-向量，改变初始种子会使变异后的坐标取反 [17,命题 6.8，（6.15）]。

## 7. Boundary valuations and polynomial frozen variables

设 $D_1$、.....、$D_b$ 是正规簇 $X$ 上的不同素除子，且 $X$ 定义在 $k$ 上，并设 $U = X \setminus \bigcup_i D_i$。 $\mathcal{O}(U)$ 中的函数当且仅当沿每个 $D_i$ 的阶均为非负时，才能延拓到 $X$。记 ord$_{D_i}$ 为在 $D_i$ 的一般点处的消失阶，其中极点的阶计为负值。对于以集合 $M$ 为指标、由 $\vartheta_m$ 构成的 $\mathcal{O}(U)$ 的 $k$-基 $_{m\in M}$，我们考察每个这样的阶何时满足 带符号最小值公式。这意味着，任意非零有限线性组合的阶，等于其中非零项的阶的最小值。当最小阶项的初始形式不能相互抵消时，该性质恰好成立。对于多项式冻结变量，我们必须考虑其零因子的每个素分量。

**7.1. 在 Laurent 图表中计算阶**。在环面坐标 $x = (x_1、\ldots\ldots、x_d)$ 中，令 $v_{x、w}$ 表示权重为 $w$ 的高斯赋值。我们首先给出一个条件，在该条件下，基展开中具有最小权重的各项不能相互抵消。

**引理7.1.** 设$(b_m)_{m\in M}$ 为 $x$中的非零*Laurent* 多项式。假设它们的展开具有如下形式

$$b_m = x^{p_m}\left(c_m + \sum_{u\neq 0} c_{m,u}x^u\right), \qquad c_m \in k^\times,$$

其中各 $p_m$互不相同。设 $w$ 为实权重。假设所有修正项满足 $\langle w、 u\rangle \geq 0$，并且存在一个实线性泛函 $a$ ，使得对每一个满足$\langle w、 u\rangle = 0$的修正项，都有 $a(u) > 0$ 。则对任意非零有限和，

$$v_{x,w}\left(\sum_m d_m b_m\right) = \min_{d_m\neq 0}\langle w, p_m\rangle.$$

证明. 将和中出现的指数先按 $w$排序，再按 $a$排序，最后按给定格坐标的字典序排序。该序与平移相容。 $b_m$ 的支集中的首个指数为 $p_m$。因此，满足 $d_m \neq 0$ 的 $p_m$ 中的最小者在和中只出现一次，且具有非零系数。其 $w$-权重即为所断言的最小值。□

一个包含修正向量的公共尖有理多面锥，只要 $w$ 在该锥上非负，便给出泛函 $a$。也可以直接检验线性无关性。对于在 $k$上平凡的离散赋值 $v$ ，令 $F^j = \{g : v(g) \geq j\}$，且 $v(0) = +\infty$。一族元素对所有有限线性组合满足最小值公式，当且仅当对每个 $j$，取值为 $j$的元素的类在 $F^j/F^{j+1}$ 中线性无关。事实上，最小取值项的抵消恰好是该商中的一个线性关系。

通过比较成对的牛顿多面体，可以刻画所有实 Gauss 赋值下的线性无关性。对于多面体 $P$ 的顶点 $a$，记 $N_P(a)$ 为在 $P$ 上于 $a$ 处取得最小值的权重所构成的锥。其在完整权重空间中的内部由使 $a$ 成为唯一极小值点的权重构成。此约定适用于任意维数的多面体。

**命题 7.2**。 设$(b_m)_{m\in M}$ 是一个图表中的 *Laurent* 多项式线性无关族，且 $\Delta_m$ 是 $b_m$ 的牛顿多面体。以下各项等价。

(1) 对于每个实 *Gauss* 权重 $w$，每个非零有限和都满足

$$v_{x,w}\Big(\sum_m d_m b_m\Big) = \min_{d_m\neq 0} v_{x,w}(b_m).$$

(2) 对于任意两个不同的标签 $m$、$n$ 以及 $\Delta_m$ 和 $\Delta_n$ 的任意公共顶点 $a$ ， $N_{\Delta_m}(a)$ 与 $N_{\Delta_n}(a)$ 的内部不相交。

在这些条件下，任意此类组合的牛顿多面体都是其非零直和项的多面体之并的凸包。

证明。 如果某个权重同时位于两个内部，则这两个初始形式分别都是 $x^a$ 的非零标量倍。选取两个系数使其抵消该单项式。线性无关性确保该组合非零，且其值严格大于共同的最小值。

反之，固定一个有限组合。对于权重的一个稠密开集，所涉及的每个多面体都有唯一的最小化顶点。根据条件（2），这些顶点彼此不同。因此，该组合的初始形式在其权重中最小者处非零。最小值公式的两边关于 $w$都是连续的，因为它们是有限个线性函数的最小值，所以该公式处处成立。最后的断言源于：一个多面体由其在每个方向上的最小值唯一确定。□

**推论7.3**。 设有一族 *Laurent*多项式，在由初始图表通过倒数交换和单项式的整变换得到的一组图表中的每一个图表里都是 *Laurent*多项式。在每个这样的图表中，假设展开具有彼此不同的特定指数，并且它们的所有修正项都属于其指数空间中的同一个尖有理多面锥 $C$ 。该锥可以随图表而变化。根据引理传输来自初始图表的权重 *1.6*。如果对偶锥的逆像的并集 $C^\vee$ 在初始实权空间中是稠密的，则该族在初始图表以及每一个其中该族为 *Laurent*多项式的可达图表中都满足命题*7.2*（*1*）。

证明。 对于所指并集中的任意权重，使用相应的图表。在该图表中，该权重对每个修正项均为非负，并且一个在线性泛函上严格为正的 $C\setminus\{0\}$ 给出次级序。引理 7.1 和 1.6 给出初始图表中的带符号最小值。每个有限组合的连续性将其延拓到每个实权重。沿逆词应用引理1.6，即可得到其他图表中的断言。□

在单个图表中，带指向的展开在整个范围内给出最小值公式 $C^\vee$。

7.2. **跨越边界的延拓**。 对于 $X$上的整Weil除子 $D$ ，除子层 $\mathcal{O}_X(D)$ 的非零整体截面是满足 $\mathrm{div}_X(g)+D\geq 0$ 的有理函数 $g$。

**命题 7.4**。 记 $h_i(m)=\mathrm{ord}_{D_i}(\vartheta_m)$。对于每个 $\mathrm{ord}_{D_i}$ ，预设基的带符号最小值公式成立，当且仅当对于每个整数元组 $(b_i)$，

$$\Gamma\left(X,\mathcal{O}_X\left(-\sum_i b_iD_i\right)\right)=\bigoplus_{\substack{m\in M\\ h_i(m)\geq b_i\ \text{for every } i}} k\vartheta_m.$$

特别地，所有 $h_i(m)\geq 0$ 的标签构成 $\mathcal{O}(X)$ 的一组基。

证明。 由正规性可知，左侧的截面是 $\mathcal{O}(U)$ 中满足指定阶阈值的函数。对各直和项的阶取最小值，即得该等式。反过来，若抵消使非零和在 $D_i$处的阶升高，则令 $b_i$ 等于升高后的阶。将其他阈值取为小于该处每个直和项的阶。于是该和属于左侧，但它唯一的基直和项之一却不属于右侧。□

对于每个 $i$，假设某个环面图表将 $\mathrm{ord}_{D_i}$ 识别为 Gauss 权重 $w_i$ ，并且满足引理7.1，其中特定指数为 $p_i(m)$。那么最小值公式成立，且$h_i(m)=\langle w_i,p_i(m)\rangle$。每个除子都可以在其自身的图表中处理。假设 $D_i$的一般点有一个开邻域 Spec $k[t,y_2^{\pm1},\dots,y_d^{\pm1}]$，其中 $D_i$由 $t=0$切出。沿 $D_i$的归一化阶是这些坐标下权重为 (1, 0, . . . , 0) 的高斯赋值。事实上， $t$的最低次幂的系数是剩余域 $k(y_2,\dots,y_d)$中的一个非零有理函数。引理 1.6 随后给出由倒数交换和单项式的整变换连接到此图表的任何图表中的相同阶。

假设固定图表中的标签构成一个格，并且已经确定了一个标记镜像函数 $W_i=\sum_{u\in E_i}c_uz^u$。其热带化为 $W_i^{\mathrm{trop}}(m)=\min_{u\in E_i}\langle u,\ m\rangle$。其牛顿不等式描述了命题 7.4 中的阶，其中 $\langle w_i,\ p_i(m)\rangle=W_i^{\mathrm{trop}}(m)$。当指数映射 $p_i$ 由实标签空间上的有限齐次分段线性映射给出时，可以在与 $W_i^{\mathrm{trop}}$ 的线性区域进行公共细分所得的锥的生成元上验证这一等式，其中包括其线性空间部分的生成元。两边在每个锥上都是线性的。在这一识别下，正规标签满足以下逐项不等式 $\langle u,\ m\rangle\geq 0$ 对所有 $u\in E_i$ 以及所有 $i$。

*Rees* 过滤。 设 $\mathcal{O}(X)$ 是 $k$-代数 $B$ 上某个穷尽递增乘法过滤的 Rees代数 $R=\bigoplus_{\ell\geq 0}z^\ell F_\ell B$ ，其中 $1\in F_0B$ 且 $\mathrm{div}_X(z)=D_1$。假设 Rees分次扩展到 $\mathcal{O}(U)$，其基为齐次基，且带符号最小值

公式在边界除子处成立。由于 $R[z^{-1}] = B[z^{\pm 1}]$，命题 7.4 给出了 $B$ 的一组基，该基由满足 $h_i(m) \geq 0$ 的零次 $\vartheta_m$ 组成。满足 $-h_1(m) \leq \ell$ 的那些元素构成 $F_\ell B$ 的一组基，因为 $\vartheta_m \in F_\ell B$ 等价于 $z^\ell \vartheta_m \in R$。这样的 $\ell$ 的最小值是 $-h_1(m)$。事实上，若 $h_1(m) > 0$，则 $z^{-1}\vartheta_m$ 将是 Rees 次数为 $-1$ 的正则元素。若 $h_1 = W_1^{\mathrm{trop}}$，此阈值等于 $\max_{u \in \mathrm{Supp}(W_1)} \langle -u,\ m \rangle$。对于具有齐次基且满足 $\deg z = 0$ 的相容的辅助分次，在给定次数下计数阈值为 $\ell$ 的标签，即得 $F_\ell B / F_{\ell-1} B$ 中该不可约分支的维数，其中 $F_{-1}B = 0$。

7.3. **乘以冻结变量**。 其除子支集包含于被移除边界上的正则函数，是 $U$ 上的单位。在正性条件下，可以直接检验这个单位何时会置换 theta 基。

**引理 7.5.** 假设 $k$ 具有特征零，且一个 $k$-代数的某个基的结构常数均为非负整数。如果 $f$ 和 $f^{-1}$ 都属于由基元素的非负整数线性组合构成的加法幺半群，那么乘以 $f$ 会置换该基。如果在某个图表中，基元素相对于某个共同的平移不变序具有互不相同的特定指数，且 $f = x^v$，那么该置换会将这些指数平移 $v$ 。

证明。这两个乘法映射是基上自由交换加法幺半群的互逆自同构。其不可分解的非零元素恰好是各个基向量。最后一个断言可由将 Laurent展开乘以 $x^v$ 并取其最小指数得出。□

**命题 7.6.** 将边界素除子划分为非空集合 $I_1$、……、$I_s$。假设边界阶满足带符号最小值公式，且存在正则函数，其除子 $_X(f_i) = \sum_{D \in I_i} e_D D$、 $e_D > 0$。如果乘以每个 $f_i$ 都会置换 $U$ 上的基线，即一维空间 $k\vartheta_m$，则令

$$h_i(m) = \min_{D \in I_i} \left\lfloor \frac{\mathrm{ord}_D(\vartheta_m)}{e_D} \right\rfloor, \qquad M_0 = \{m : h_i(m) = 0 \ \textit{for every}\ i\}.$$

这些 $f_i$ 代数独立，并且

$$\mathcal{O}(X) = \bigoplus_{m \in M_0} k[f_1, \ldots, f_s]\, \vartheta_m.$$

在从 $k[f_1, \ldots, f_s]$进行任意基变换后， $m \in M_0$ 的 $\vartheta_m$ 的像构成新系数环上的一个基。

证明。 正规标签是满足以下条件的标签： $h_i \geq 0$对每个 $i$，根据命题 7.4，由 $f_j$ 诱导的交换置换将 $\delta_{ij}$ 加到 $h_i$。因此，每个轨道中都有且仅有一条线的全部 $h_i = 0$，而该轨道中的正规线恰好是它的非负平移。所得向量是不同基向量的非零倍数。在任一轨道中，这证明了的代数独立性。取遍所有轨道即得到直和，对其进行张量化便证明了基变换。□

推论 *7.6a*。在命题 *7.6* 中，设标签构成格 $M$ ，并且存在一个 *Laurent* 图表，其中 $\vartheta_m$ 相对于 $M$上的某个固定平移不变全序具有最小指数 $m$ 。假设对于每个 $i$、 $m \in M$ 以及整数 $n \geq 1$， $h_i(nm) = nh_i(m)$。对于任意 $J \subseteq \{1, \ldots, s\}$，商 $\mathcal{O}(X)/(f_j :\ j \in J)$ 是几何约化的。满足对于每个 $j \in J$ 均有 $h_j(m) = 0$ 的正则基元素的像，构成该商的一个基。

证明。 乘法 $f_j$ 将正则基线映射到满足 $h_j(m) > 0$的基线，这由命题 7.6中的阶平移得到。因此，该理想由满足 $h_j(m) > 0$ 的正则基向量张成，其中 $j \in J$。这就给出了基域的每个延拓上的所述商基。

在这样的延拓上，将一个非零类提升为幸存基向量之和，并令其 $m$ 为最小指数。对于 $n \geq 1$ ，提升元的 $n$次幂的最小指数为 $nm$。由于基向量的最小指数彼此不同，其基展开在 $m$ 处具有一个非零

系数。 $h_i$ 的齐次性使该标签正则，并对 $j \in J$给出 $h_j(nm) = 0$。因此，该类的每个幂都非零。□

**7.4. 来自第一星的边界阶**。对于具有多项式冻结变量的上LP代数，初始种子及其第一次突变决定所有所需的边界阶。这里的Gauss权重包括冻结坐标。

**定理 7.7**。设 $k$ 为一个域，设 $\mathcal{U}_S$ 为定义在 $S = k[f_1, \dots, f_s, u_1^{\pm 1}, \dots, u_c^{\pm 1}]$ 上的*LP* 种子的完整上代数。设 $F = \prod_i f_i$，并假设 $B = \mathcal{U}_S[F^{-1}]$ 具有一个给定的 $k$-基 $(\vartheta_m)_{m \in M}$。对于每个第一星图表 $t$，令 $v_{t,i}$ 对 $f_i$ 赋予权重 *1*，并对其他每个坐标赋予权重 *0*。在初始环面中选取一个能区分格点的权重 $w$ 。假设基在 $w$ 处、正负坐标权重以及 $v_{t,i}$ 上满足带符号最小值公式。定义

$$h_i(m) = \min_t v_{t,i}(\vartheta_m), \qquad M_0 = \{m : h_i(m) = 0 \text{ for all } i\}.$$

*Then*

$$\mathcal{U}_S = \bigoplus_{m \in M_0} k[f_1, \dots, f_s]\, \vartheta_m.$$

将 $E(m)$ 记为 $\vartheta_m$ 在 $w$ 处的最小指数。集合 $E(M_0)$ 在 $u_j$ 的指数格的平移下保持不变。从每个轨道中选取一个代表元，得到 $\mathcal{U}_S$ 的 $S$-基。对于每个 $S$-代数 $S'$，其像构成 $S' \otimes_S \mathcal{U}_S$ 的 $S'$-基。

这些边界阶是显式的。设 $J_i$ 为可变指标 $j$ ，使得普通交换 $F_j$ 是 $f_i$的相伴元。在 $\Delta_m = \mathrm{Newt}(\vartheta_m)$ 下，有

$$h_i(m) = \min\big(\{\tau_{\Delta_m}(e_i)\} \cup \{\tau_{\Delta_m}(e_i + e_{x_j}) : j \in J_i\}\big), \qquad \tau_\Delta(v) = \min_{a \in \Delta} \langle v, a \rangle,$$

其中 $e_i$ 是纯 $f_i$-权重，而$e_{x_j}$ 是初始环面的第 $j$个可变权重。

证明。 设 $L_t$ 为第一星中、在 $S$ 之上的Laurent环。LP 海星定理给出$\mathcal{U}_S = \bigcap_t L_t$。消去公分母得到 $B = \bigcap_t L_t[F^{-1}]$。 $B$ 中的元素属于 $L_t$ ，当且仅当每个 $v_{t,\ i}$ 非负。在第 $j$ 个邻点处，该赋值具有初始权重 $e_i + d_{ij} e_{x_j}$ ，据引理 1.6，其中 $d_{ij}$ 是最小 $f_i$-指数，取自 $F_j$。其归一化单项式仅使用可变变量，且 $F_j$ 不可约。因此 $d_{ij} = 1$ 对 $j \in J_i$ 成立，否则为零点。带符号最小值公式现在将正则子空间等同于满足每一个 $h_i \geq 0$ 的标签所张成的空间。

不同标签在 $w$处具有不同的最小指数，否则它们的首项就可能相互抵消。这些指数恰好是 $B$中非零元素的最小指数。对于由 $f_i$、$u_j$ 及其逆元生成的每个系数特征 $z^a$ ，乘以 $z^a$ 会将这个集合双射到自身。记 $\sigma_a m$ 为满足 $E(\sigma_a m) = a + E(m)$的唯一标签。在 $z^a \vartheta_m$ 的展开中，标签 $\sigma_a m$ 出现了，并且所有其他最小指数的$w$-权重都严格更大。在每个测试赋值 $v$处，带符号最小值给出 $v(\vartheta_{\sigma_a m}) \geq v(z^a) + v(\vartheta_m)$。逆平移给出等式。特别地，平移 $f_j$ 会将 $\delta_{ij}$ 加到 $h_i$上，而通过$u_j$ 的平移保留每个 $h_i$。

在 $f_i$作用下的每个轨道中，取唯一的零阶标签。它在非负幂下的平移恰好标记该轨道中的正规标签。如果同时使用 $u_j$ ，则模去它们的自由平移后，只保留一个零阶标签。无论哪种情况，令 $b$为正规标签 $m$ 所选取的代表元，令 $z^a$ 为唯一的平移单项式，使得 $m = \sigma_a b$。置 $g_m = z^a \vartheta_b$。这些函数都是正则的，而它们不同的最小指数证明了它们的线性无关性。

对于张成，Laurent多项式的坐标盒定义为包含其坐标指数的最小闭区间的乘积。每个方向上的两个坐标权重相等，意味着 $g_m$ 和 $\vartheta_m$ 具有相同的坐标盒。根据带符号最小值公式，$g_m$ 的每个组成部分的坐标盒都包含在这个坐标盒内。它在正规标签中的展开在 $\vartheta_m$ 处的系数非零，而在其他位置的最小指数都严格靠后。由于 $E$ 是单射，任何固定坐标盒内只有有限个可能的标签。因此，三角代换

将每个 $\vartheta_m$ 表示为有限个 $g_n$之和，从而证明它们都是模基。对自由模作张量积即可得到所述基变换。□

特别地，冻结除子具有显式的约化分支。在命题 1.1 的因式分解论证中，将素规范化应用于 $f_i$ 在初始 Laurent 环中。其在与$x_j$ 相邻的素元处的阶对于 $j \in J_i$ 为一，对于其他情形则为零。因此$f_i = p_i \prod_{j\in J_i} x_j$ 其中 $p_i$，且所指示的 $x_j$ 是两两不相伴的素元。根据相同的首个星比较，它们在初始图表中的阶分别为 $e_i$ 和 $e_i + e_{x_j}$。

当结构常数是特征零中的非负整数且 1 属于基时，系数特征也会置换基线本身。两个坐标检验将特征及其逆元的每个成分都限制在其单元素盒内。因此，每个成分都是某个基元素的标量倍。用这两个元素进行乘法所得到的非负整矩阵，在乘以一个正标量后互为逆矩阵。它们保持有限非负基展开所成实锥的极射线不变。若该基关于某个共同的平移不变序是首一的，则每个特征都会在此归一化下平移基向量。

例如，交换式为 $s$ 且定义在 $k[s]$ 上的秩一种子，其上代数为 $k[x,y]$，满足$xy = s$。它在 $x^m s^n$ 上的两个边界阶数分别为 $n$ 和 $m+n$。将定理 7.7 在 $s = 0$ 处特化自由模，可得 $k[x,y]/(xy)$ 的一组基。特化后的交换式为零。一般而言，要将张量积与上代数等同起来，需要纤维中的一个 LP 种子，并比较其 Laurent 环。

## 8. Explicit reciprocal functions and criteria for realization

在多项式角处，定理 6.1 确定每个标签对应的牛顿多面体。每个可达种子都确定一个权重锥，该锥由其可变坐标的斜率以及其指定单位的斜率的正负两种方向生成（推论8.4）。对于每个这样的源种子锥，我们确定与该多面体对应的唯一归一化函数。对于种子锥之外的某些标签，我们直接根据交换式构造函数。在由负 Newton 顶点定义的图表中，我们给出 $P_a \subseteq Q_a$取等号的判据。

8.1. **主开集与源种子锥。** Keel、White 和 Yu 证明，由正则函数定义的滤子的伴随分次代数与其非零轨迹的镜像代数相同 [26, 推论 15.3、注记 15.4 和命题 21.11(1)]。我们在曲线类增广后使用这一识别来计算高斯赋值。设 $U$ 是定义在特征零代数闭域上的光滑仿射对数 Calabi–Yau 簇，且带有一个体积相容环面，并记 $V = U_f = \{f \neq 0\}$ 为由 定义的主开子集 $0 \neq f \in k[U]$。假设 $V$ 包含一个体积相容环面 $T$。其余特征格将 $U$ 与 $V$ 的整骨架识别起来。由于 $f|_T$可逆，它是一个标量乘以一个特征。因此，$\tau_f$ 在此图表中是整数值且线性的。

对于 $j \in \mathbb{Z}$，令 $F^j$为由满足 $\tau_f(p) \geq j$的 $\theta_p$所张成的 $\mathbb{Z}$。将 $\operatorname{gr}_f B_{\mathbb{Z}}(U) = \bigoplus_j F^j/F^{j+1}$ 记作伴随分次代数，并将 $\operatorname{in}_f(\theta_p)$ 记作 $\theta_p$ 在次数 $\tau_f(p)$ 中的像。我们将 $V$ 在相同标签处的 theta 函数记为 $\theta_p^V$。

**命题 8.1。** *$B_{\mathbb{Z}}(U)$ 的滤子 $F^\bullet$ 具有乘法性，并且存在一个保持 theta 基的同构*

$$\operatorname{gr}_f B_{\mathbb{Z}}(U) \;\simeq\; B_{\mathbb{Z}}(V), \qquad \operatorname{in}_f(\theta_p) \longmapsto \theta_p^V .$$

*当 $V = T$ 时，分次代数是 $T$ 的余特征格的群代数。*

证明。 对于每个非零的乘积系数，正则函数不等式给出 $\tau_f(r) \geq \sum_i \tau_f(p_i)$。我们确定等号成立的项。选择一个光滑射影紧化 $Y$，使其边界经过细化，从而 $U$ 的闭包不包含本质边界分层，如 [27, 引理 183]之后的段落所述。记 $\operatorname{div}_Y(f) = Z + D_f$，其中 $Z$ 是 $U$ 中零因子的闭包（连同其重数），并且

$D_f$ 支集位于边界上。在表示一个标签的每个边界赋值上， $D_f$ 所给出的阶为 $\tau_f$。因此，边界分次给出

$$Z \cdot \beta = -D_f \cdot \beta = \tau_f(r) - \sum_i \tau_f(p_i)$$

对于每个贡献类 $\beta$。根据 Keel 和 Yu 的开限制公式 [27, 命题 18.1(1),(4)], , 带有 $Z \cdot \beta = 0$ 的项计数 $V$ 中的稳定圆盘及其重数。增广将它们的系数沿边界细化求和 [27, 命题 17.3(1) 和注 17。8]这些恰好是分次乘积中保留下来的项。θ基分裂了滤子，从而证明了所述同构在底层模上也成立。对于环面，乘法将两个标签相加，系数为一 [27, 引理 9.4 和§18]。 □

8.1.1. 来自主开集的高斯赋值。 一个正则函数若在其非零轨迹中的体积相容环面上变为可逆，则定义了正向镜像代数的一个滤子。我们首先给出一个判据，以确定其阶何时与高斯赋值一致。令$L$为一个格，且令 $B \subset k[L]$具有基 $(\theta_p)_{p\in L}$。设 $\theta_p = z^p$ 定义在满维有理多面锥 $\sigma$ 的格点上。令 $\rho : L \to \mathbb{Z}$ 给出一个乘法递减滤过，其分裂阶为 $v_\rho(\sum c_p\theta_p) = \min_{c_p\neq 0} \rho(p)$。记 $\mathrm{in}_\rho$ 为关联分次环中的符号。

**引理 8.2**。 设 $\rho(p) = \langle a, p\rangle$ 位于一个满维有理锥 $\eta \subseteq \sigma$上，并选取$b \in L \cap$ 内部 $\eta$。以下条件等价：

(1) 在$\rho(\theta_b)$ 中是非零因子。(2) $B$ 上的分裂阶等于给定图表中权重为 $a$ 的高斯赋值。(3) $\mathrm{gr}_\rho B$ 是整环。

证明。 根据第一个条件，按照初始形式乘法的定义， $\theta_b$ 的乘法使每个非零元素的阶恰好增加 $\rho(b)$。对于 $g \in B \setminus \{0\}$以及充分大的 $n$， $z^{nb}g$ 的支集位于 $\eta$中。在那里，单项式展开就是基展开。因此

$$n\langle a, b\rangle + v_\rho(g) = v_\rho(z^{nb}g) = n\langle a, b\rangle + \nu_a^z(g).$$

这证明了第二个条件。整环上赋值的关联分次环是整环，而第三个条件蕴含第一个条件。□

**定理 8.3**。 设 $U$ 是代数闭域 $k$ 上特征零的光滑仿射对数 *Calabi–Yau* 簇，具有 皮卡群$(U) = 0$ 以及一个标记的体积相容环面。假设 $B_k(U)$ 如上具有 *Laurent* 实现，在 $\sigma$上是直的，并以标记源环面的余特征格作为其标签格 $L$。对于 $0 \neq f \in k[U]$，假设 $U_f$ 包含一个体积相容环面。则 $\tau_f$ 在 $\sigma$上是线性的，具有整数斜率 $a_f \in L^*$，并且对于每个非零有限和

$$\nu_{a_f}^z\Big(\sum_p c_p\theta_p\Big) = \min_{c_p\neq 0} \tau_f(p). \tag{8.1}$$

特别地，对于每个标签， $\nu_{a_f}^z(\theta_p) = \tau_f(p)$。更一般地，如果 $f_1$、……、 $f_l$ 是在某个体积相容源环面上可逆的正则函数，那么对于任意 $\lambda_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ， *Gauss*权重$a = \sum_j \lambda_j a_{f_j}$ 满足

$$\nu_a^z\Big(\sum_p c_p\theta_p\Big) = \min_{c_p\neq 0} \sum_j \lambda_j \tau_{f_j}(p).$$

证明。 设定 $V = U_f$并选取一个体积相容环面 $T' \subset V$。环 $k[U]$是唯一分解的，因为 $U$ 光滑且具有平凡皮卡群，而 $k[V]$ 是它的局部化。选取 $V\setminus T'$中有限个素除子的方程，并令 $g$ 为它们的乘积；当边界为空时，令 $g = 1$。于是 $T'$ 是 $V_g$ 中的开集，其补集的余维至少为二。正规性

给出 $k[V_g] = k[T']$。这两个开集都是仿射的，因此 $V_g = T'$。两次应用命题 8.1得到

$$\mathrm{gr}_f B_k(U) = B_k(V), \qquad \mathrm{gr}_g B_k(V) = B_k(T'),$$

其中下标 $k$ 表示将增广代数延拓到 $k$。第二个分次代数是一个格的群代数，因而是整环。分裂阶在每个非零元素上都取有限值。现在将初始形式相乘可知， $B_k(V)$ 也是整环。因此， $B_k(U)$ 上的分裂 $f$-阶是一个赋值。

在 $\sigma$ 上，我们有 $\theta_p\theta_q = \theta_{p+q}$，因此对于 $p$、 $q \in \sigma \cap L$， $\tau_f(p+q) = \tau_f(p) + \tau_f(q)$。这个幺半群作为群生成 $L$ 。因此，其上的加性函数可唯一延拓为一个 $a_f \in L^*$，而 $\tau_f$ 的连续性和齐次性在 $\sigma$ 上给出线性性。利用带有 $\eta = \sigma$ 的引理 8.2 可证明第一个公式。对于整数 $\lambda_j \geq 0$，将该公式应用于 $\prod_j f_j^{\lambda_j}$ ；它在同一个环面上可逆。它在 $p$ 处的值为 $\sum_j \lambda_j \tau_{f_j}(p)$。齐次性给出有理系数。对于每个有限和，两边都是关于 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ 的连续函数，从而得到关于 $\mathbb{R}$ 的断言。□

更一般地，式（8.1）的证明只要求 $U_f$ 包含一个体积相容环面，并且 $B_k$（$U_f$）是一个整环。特别地，无论皮卡群如何，只要这样的环面是 $U_f$的主开集，该结论便适用。对于已经是 $U$中主开集的公共环面，这一观察可同时应用于每一个在该环面上可逆的正则函数的乘积。

对于体积相容环面 $T' \subset U$，这给出了一个有限生成的 Gauss权重锥。事实上，在 $T'$ 上可逆的每个正则函数，都是 $k[U]$ 的一个单位元乘以 $U \setminus T'$的除子分支的素方程之积。模去标量后的单位元构成 $T'$ 的特征格的一个子群，因而是有限生成的。该锥由素方程的斜率，以及单位元某个基的斜率的正负两个方向生成。对环面的某种选择取这些锥的并，所得权重所对应的基具有赋值独立性。如果这个并是稠密的，则由连续性可知，每个实高斯权都具有赋值独立性。

**推论 8.4**。 设 $k[U]$ 是带有 *Laurent* 系数的完整上 *LP* 代数，并使用定理 *8.3*中的直镜像图表。对于每个可达源种子 $(y_1, \ldots, y_r, u_1 \ldots, u_c)$，函数 $\tau_{y_i}$ 和 $\tau_{u_j}$ 在整个 $\sigma$上都是线性的。它们的斜率构成 $L^*$的一个整数基。因此，该种子给出了一个由可变斜率以及冻结斜率的正负两种取值生成的满维镜像 *Gauss*权重锥，在此锥上赋值独立性成立。

证明。根据 Laurent 现象，该种子的变量是正则的。对可变变量取逆得到其 Laurent 环，因此其环面是 $U$的一个开子集。每个归一化交换式都将对数体积形式保持至多相差一个符号。因此，断言中的函数是同一个体积相容环面上的单位元，而定理 8.3 给出了线性性和最小值公式。根据引理 1.6，将源 Gauss权重映射到新坐标取值的映射，是归一化交换式的热带化的复合。每个交换将改变的项 $p_i$ 映射为 $\tau_{\widehat{F}_i}(p) - p_i$ ，并固定其余项。 $\widehat{\ }$由于 $F_i$ 与 $x_i$ 线性无关，这在每个线性锥上都是一个整单模映射。该复合映射的一个满维锥与 $\mathrm{int}\,\sigma$ 相交于一个开集。斜率向量就是这个单模矩阵的各行。 □

**推论 8.5**。 在定理 *4.1*的多项式角点假设下，给定的函数 $\Theta_m$ 在至多一个负可变坐标、冻结坐标任意的每个权重下都是赋值独立的。如果 $w_i \leq 0$ 且其余可变权重均为非负数，则

$$\nu_w^z(\Theta_m) = \langle w, m\rangle + (-w_i)\tau_{G_i}(m).$$

证明。 根据命题 1.1，Pic$(U) = 0$。初始环面通过取 $x_j$ 和单位元 $u_a^{\pm 1}$，给出具有非负可变坐标的权重。在第 $i$ 个相邻种子环面上，函数 $t_i = G_i/x_i$ 是一个单位元。事实上，定理 4.1 的证明将其表示为实际的

突变元乘以未改变坐标中的一个单项式。它在 $U$上是正则的。在平直非负象限上， $G_i$ 的常数项给出 $a_{t_i} = -e_i$。每个带有 $x_j$ 和 $j \neq i$ 的 $u_a^{\pm 1}$在同一个环面上都是可逆的，其斜率为 $e_j$ 和 $\pm e_{r+a}$。定理 8.3中的多函数公式，对 $-w_i$ 取系数 $t_i$，即得所述结论。□

8.1.2. 源种子锥上的唯一性。 在源种子锥上，每个归一化倒数函数都是一个种子单项式。这也确定了多个种子锥共有的面上的函数。

**定理 8.6**。 设 $y_1, \dots, y_r, u_1, \dots, u_c$ 是源的一个可达种子，并设 $K \subset L^*_{\mathbb{R}}$为由推论 *8.4* 的可变斜率及其单位斜率的正负两者生成的闭锥。对于每个 $a \in K \cap L^*$，支集包含于 $P_a$ 中的正则函数空间是一维的。其在 $x^a$ 处系数为一的元素，是斜率为$a$的归一化种子单项式，其牛顿多面体为 $P_a$。因此，锥包含 $a$的种子给出相同的归一化函数。此外，对于任意 $b \in L^*$，若 $P_b \subseteq P_a$ 则有 $b = a$。

证明。记 $d = r + c$，将所有种子坐标列为 $Y = (y_1, \dots, y_r, u_1, \dots, u_c)$，并令 $g_j$ 为$\tau_{Y_j}$ 在直锥 $C = \sigma$上的斜率。映射 $G\colon\ L \longrightarrow \mathbb{Z}^d$，其分量为$p \mapsto \langle g_j, p\rangle$，是幺模的。根据引理 1.6沿突变字应用，种子的热带变换 $T(p) = (\tau_{Y_1}(p), \dots, \tau_{Y_d}(p))$是一个分段幺模双射。特别地，$E = G^{-1}T$ 将 $L$ 映射到 $L$上。

对于固定的 $p \in L$，定理 8.3给出 $h_a(p) = \langle a, E(p)\rangle$，对所有实数 $a \in K$均成立。事实上， $a = G^t\lambda$在可变指标处取 $\lambda_j \geq 0$，而 $\langle \lambda, T(p)\rangle$ 正是该定理给出的值。由于 $K$ 是满维的，一般内部权重会显露出 $\Theta_p$的唯一指数。其值在一个开集上与 $\langle a, E(p)\rangle$ 一致，因此该指数为 $E(p)$。所以，在 $K$的每个边界权重处， $E(p)$仍然达到最小值。

现在设 $a \in K \cap L^*$ 和 $P_b \subseteq P_a$。比较最小支撑函数可得，对所有 $p \in L$，

$$\langle a, E(p)\rangle = h_a(p) \leq h_b(p) \leq \langle b, E(p)\rangle.$$

满射性 $E$ 给出 $b = a$。如果一个非零正则函数 $f$ 的支集包含于 $P_a$中，则选取 $C$ 的一个内部权重，使其指数彼此分离，并令 $b$ 为其最小化指数。定理5.4给出 $P_b \subseteq \mathrm{Newt}(f) \subseteq P_a$。因此 $b = a$ 以及 $\mathrm{Newt}(f) = P_a$。特别地，对于每一个这样的 $f$， $x^a$ 处的系数都非零，这证明该空间的维数至多为一。

最后， $\lambda = (G^t)^{-1}a$ 是整数且具有非负的可变项。因此，种子单项式$Y^\lambda$在 $U$上是正则的。它在 $p$ 处的最小值为 $\langle \lambda, T(p)\rangle = h_a(p)$，因此其牛顿多面体为 $P_a$。除以其在 $x^a$ 处的系数即可得到所述归一化。□

8.2. **多项式角处的显式公式**。 对于带负指数的变量进行线性交换时，主子式给出了倒数函数的候选式。对于非线性交换，则可以通过消失阶直接确定牛顿多面体。

8.2.1. 主子式。 设 $A = k[U]$ 是一个带有多项式角的光滑仿射满上 LP 代数。定理 6.1 确定了每个标签处的互反牛顿多面体。对于下面的交换多项式，我们还可以将一个倒数函数表示为主子式的乘积。选取普通交换的多项式代表元 $G_i$，使得$G_i(0) = 1$，其中包括角坐标中的指定单位。记 $t_i = G_i/x_i$为相应的正则函数。固定一组 $S$ 可变指标，并将其作有序划分 $S = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_\ell$。假设对于 $i \in S_h$ 有

$$G_i = b_i + \sum_{j \in S_h} c_{ij} x_j, \qquad c_{ii} = 0,$$

其中 $b_i, c_{ij}$ 是在 $S$ 之外的坐标以及前面各部分的变量 $S_1, \dots, S_{h-1}$中的多项式。这些多项式在这些坐标上的次数不受限制。对于 $J \subseteq S_h$

定义正规主子式

$$d_J = \det\big(\delta_{ij}t_i - c_{ij}\big)_{i,j\in J}, \qquad d_\varnothing = 1.$$

对于图 LP 代数，这些是 Lam 和 Pylyavskyy 的行列式 [29,§4.2，命题 4。5]。Daisey [9, §4] 对一般线性交换使用相同的主子式。在这里，这些子式给出了环面上的坐标，在这些环面上可以计算倒数函数的赋值。将 $d_J$ 乘以 $\prod_{i\in J} x_i$ 会得到常数项为一的多项式，因为所得矩阵的常数部分等于单位矩阵。因此 $d_J$ 在正正交象限的内部以 $-\mathbf{1}_J$ 为尖点，其中 $\mathbf{1}_J = \sum_{i\in J} e_i$。

**定理 8.7**。令 $a \in M$，并令 $S$ 由满足 $a_i < 0$ 的可变指标组成。假设由 $S$ 标记的交换式具有上述有序划分。对于每个部分 $S_h$，按 $\lambda_{hj} = -a_{i_{hj}}$ 递减的顺序排列其指标 $i_{h1}$、……、$i_{hm_h}$，其中 $m_h = |S_h|$。令 $J_{hj}$ 由前 $j$ 个指标组成，其中 $J_{h0} = \varnothing$，并设 $\lambda_{h,\,m_h+1} = 0$。定义

$$\eta_{hj} = d_{J_{hj}}/d_{J_{h,j-1}}, \qquad R = k[\eta_{hj}^{\pm 1}, x_i^{\pm 1}\ (i \notin S), u^{\pm 1}].$$

在下文中，外部 $x_i$ 仅遍历可变指标。令 $s$ 为这些外部变量与所有非空前缀子式的乘积。则 $R$ 是一个 *Laurent* 多项式环。对于每个 $i \in S$，克拉默法则给出原坐标 $x_i$的 $X_i \in R$ 。当且仅当 $X_i$ 中的任意一对在 $R$中没有公共不可约因子时， $A[s^{-1}] = R$成立。在这些等价条件成立时， $a$ 处的归一化倒数函数为

$$f_a = \prod_{k=1}^{c} u_k^{a_{r+k}} \prod_{i\notin S} x_i^{a_i} \prod_{h=1}^{\ell} \prod_{j=1}^{m_h} d_{J_{hj}}^{\lambda_{hj}-\lambda_{h,j+1}}.$$

对于每个 $p \in L$，它满足 $\nu_p^x(f_a) = \nu_a^z(\Theta_p)$ 。

证明。 $S = \varnothing$ 的情形由初始环面得出。否则写成 $D_h = \mathrm{diag}(t_i)_{i\in S_h} - (c_{ij})_{i,j\in S_h}$。在部分 $h$ 中，交换方程变为 $D_h x_{S_h} = b_{S_h}$。所有$\eta_{hj}$ 及其逆元都属于 $A[s^{-1}]$。按照各部分规定的顺序进行。恢复较早的变量后，部分 $h$的系统的所有系数都已知为 Laurent 多项式。将前缀子式在其最后一个对角元素处展开，得到$d_{J_{hj}} = t_{i_{hj}} d_{J_{h,j-1}} + H_{hj}$，其中 $H_{hj}$ 仅取决于已经恢复的变量以及该部分中较早的对角元素。从$\eta_{hj}$ 中减去$H_{hj}/d_{J_{h,j-1}}$ ，得到$t_{i_{hj}}$。处理完该部分的所有元素后，利用分母为 $d_{S_h}$ 的克拉默法则，将 $x_{S_h}$ 恢复为所指示坐标中的 Laurent 多项式 $X_i$ 。其计算仅使用普通交换和前缀顺序。这些坐标生成整个有理函数域，因为它们恢复了全部$x_i$,$u_j$。它们的数量等于该有理函数域的超越次数，因此它们代数独立。于是， $R \subseteq A[s^{-1}]$ 就是所断言的 Laurent 多项式环，并且 $s$的所有因子都是 $R$中的单位元，因为$d_{J_{hj}} = \prod_{l=1}^{j} \eta_{hl}$。

若 $R = A[s^{-1}]$，则互不相同的非相伴素元 $x_i$ （命题1.1 ）在局部化后仍为互不相同的素元，或成为单位元。这证明了最大公因子条件。反之，考虑 $R$的一个高度一素理想。当没有 $X_i$ 在该处为零时，每一个 $f \in A$都凭借初始 Laurent 表达式属于其局部环。若仅有 $X_i$ 在该处为零，则未改变坐标在该处为单位元，并且 $t_i = G_i/x_i$ 属于 $R$ ，这由同一递归得到。命题1.1 表明 $f$ 属于由 $x_i$、 $t_i$ 在未改变的 Laurent 环上生成的秩一环。因此 $f$ 在该处再次为正则。最大公因子条件穷尽了所有高度一素理想，故由正规性得到 $f \in R$。由于 $s$ 在 $R$中是单位，这便证明了 $A[s^{-1}] = R$。

固定外部坐标后， $t_S$ 在 $x_S$ 中的雅可比矩阵按分块呈下三角形。其第 $h$个对角矩阵为 $-\mathrm{diag}(x_i^{-1})_{i\in S_h} D_h$。从 $\eta$ 到 $t_S$ 的变换在每个分块内也呈三角形，对角元素均为一，并且$\prod_{h,j} \eta_{hj} = \prod_h d_{S_h}$。现在与外部坐标的对数微分楔积，即可将两个环面的对数体积形式对应起来，至多相差一个符号。所有$d_{J_{hj}}$、外部变量以及指定单位特征标的两种符号，在所构造的环面上均可逆。它们的乘积 $f_a$ 是正则的，并且具有

其最小指数处的系数为一 $a$ ，这是由行列式计算得出的。将定理8.3 应用于$f_a$ 在此环面的直正交象限上的斜率为 $a$，由此得到所断言的Gauss值。□

gcd 检验的另一种充分条件是：将外部可变变量取逆后，由初始坐标、其指定逆元、外部逆元以及普通伙伴生成 $t_i$ 的 $i \in S$。事实上，递归将所有这些生成元都置于 $R$中，因此 $A[s^{-1}] = R$。将外部可变坐标视为单位元。对于 $S$ 的一阶星交等于在这些坐标处的局部化：局部化与有限交可交换，而局部化后的外部相邻环包含初始 Laurent 环。对于其余方向，正规化子可能因未改变坐标的单项式而改变，但这不会改变相邻 Laurent 环。如果对每个 $J \subseteq S$ 至少有两个元素的分层，其中受限的普通交换式具有单位最大公因数，那么定理 1.2 便给出所需的生成性。角代表元的常数项保证层理想非零。

**推论 8.8.** 若 $G_i$ 依赖于 $x_j$，则画一条边 $j \to i$ 。强连通分量是这样的极大指标集：其中每个指标都能沿有向边从其他每个指标到达。假设每个 $G_i$ 关于包含 $i$的强连通分量中的可变变量联合仿射线性。主子式公式在每个标签处给出归一化倒数函数，当且仅当初始可变坐标及其普通伙伴在指定 *Laurent* 环上生成完整上代数。在这种情况下，这些函数构成具有带符号最小值性质的倒数基。交换式对其他分量中变量的依赖不受限制。

证明。 按照拓扑顺序排列强连通分量，使得对于某个交换所依赖的分量之外的每个变量，都位于更早的分量中。对每个标签，将此划分与负可变指标相交，并舍弃空集。负集之外的变量在整个过程中保持不变。将它们求逆后，可利用交换关系从普通表示中消去其伙伴。因此，刚刚证明的充分条件适用于每个标签。推论5.5 给出了基和带符号最小值性质。反过来，所有系数$c_{ij}$ 都是初始坐标的多项式。每个主子式，以及因此这些乘积中的每一个，都属于普通交换子代数。如果这些乘积实现了每个标签，那么同一推论就表明它们张成 $A$，从而迫使普通生成成立。在这个多项式角中，每个受限分层理想都包含一个常数项非零的多项式，因此根据定理1.2，普通表示嵌入函数域。 □

8.2.2. 非线性交换的牛顿多面体。 在定理 4.1的多项式角中进行讨论，并对普通交换进行缩放，使得 $G_i(0) = 1$。对于 $a \in M$，令 $S = \{i : \ a_i < 0, \ \ i \text{ 可变}\}$ 且 $\lambda_i = -a_i$ 对于 $i \in S$。假设 $S \neq \varnothing$。对于互不相同的 $i$，$j \in S$ 定义

$$d_{ij} = \operatorname{ord}_{x_i}(G_j - 1), \qquad K_a = a + \operatorname{conv}\bigcup_{i \in S} \lambda_i \operatorname{Newt}(G_i).$$

这里， $d_{ij}$ 是 $G_j - 1$各项中最小的 $x_i$-指数。每个 $G_j$ 都不是常数，且其常数项为一，因此其牛顿多面体包含原点。

**定理 8.9**。 在定理 *5.4*的假设下，设对于 $S$ 中的每一对不同指标，阶 $d_{ij}$，$d_{ji}$ 均为正数，并且

$$\frac{\lambda_i}{d_{ij}\lambda_j} + \frac{\lambda_j}{d_{ji}\lambda_i} \leq 1. \tag{8.2}$$

于是 $P_a = Q_a = K_a$。特别地，所有方向上的正向赋值都是

$$\nu_a^z(\Theta_p) = \langle a, p \rangle + \min_{i \in S} \lambda_i \tau_{G_i}(p). \tag{8.3}$$

在替代假设下，同样的结论成立

$$G_i^{\lambda_i} \equiv G_j^{\lambda_j} \pmod{(x_i^{\lambda_i}, x_j^{\lambda_j})} \qquad (i, j \in S), \tag{8.4}$$

并且对满足该条件的任意标签的每个正整数倍也成立。特别地，若对所有不同的 $i$、$j \in S$ 均有 $d_{ij} \geq \lambda_i$，则这些同余关系成立。除所指明的阶之外，对各项的次数不作任何限制。

证明。根据命题 4.4，平移 $D_i(p)e_i$ 处的轴系数为一，其中 $D_i(p) = -\tau_{G_i}(p)$。因此，对每个 $p$ 和 $i \in S$，都有 $h_a(p) \leq \langle a, p\rangle + \lambda_i \tau_{G_i}(p)$。取最小支撑函数可得 $K_a \subseteq P_a$。只需构造一个正则函数，使其在 $x^a$ 处的系数为一，且其所有指数都属于 $K_a$；这是因为 $P_a \subseteq Q_a$，并且每个严格正权在 $K_a$ 上都有唯一的最小值，且该值在 $a$ 处取得。

取不定元 $U_i$, $i \in S$，以及有限集 $\Gamma = \{k \in \mathbb{N}^S : \sum_i k_i/\lambda_i \leq 1\}$。我们构造满足 $h_0 = 1$ 的 $H = \sum_{k\in\Gamma} h_k U^k$。固定出现在 $\Gamma$ 中的指数 $k_j$, $j \neq i$，则 $k_i$ 的可能取值为从零到 $N_i = \left\lfloor \lambda_i \left(1 - \sum_{j\neq i} k_j/\lambda_j\right) \right\rfloor$ 的整数。要求相应的 $U_i$ 中的多项式可被 $(1+U_i)^{r_i}$ 整除，其中 $r_i = [\lambda_i - \sum_{j\neq i} d_{ij}k_j]_+$，且 $[t]_+ = \max(t,0)$。记作 $c_{ij} = d_{ij} - \lambda_i/\lambda_j$。成对假设给出 $c_{ij} > 0$ 和$c_{ij}c_{ji} \geq 1$。特别地 $r_i \leq N_i$。当 $r_i > 0$ 时，最后 $r_i$ 个系数由满足 $k_i \leq N_i - r_i$ 的系数唯一确定。事实上，它们对应的 $U_i$ 的连续幂在模 $(1+U_i)^{r_i}$ 下构成一组基，因为 $U_i$ 在商中可逆。最后这部分中的一个指数满足

$$k_i > N_i - r_i = \left\lfloor \sum_{j\neq i} c_{ij}k_j \right\rfloor, \qquad \text{hence} \quad k_i > \sum_{j\neq i} c_{ij}k_j.$$

它也不可能属于方向 $j$ 的最后一部分，因为这两个严格不等式将推出 $k_i > c_{ij}c_{ji}k_i$。原点不属于这些部分中的任何一个。除 $h_0 = 1$ 外，将未指定的系数设为零，并按总次数递增的顺序计算其余系数。决定这些系数的系数，其总次数都更小。这样便同时满足所有整除性条件。

代入 $u_i' = G_i - 1$，并令 $f = x^a H((u_i')_{i\in S})$。在方向 $i$ 上，含有固定外部幂 $k_j$、$j \neq i$ 的项，在乘以 $x^a$ 之前含有因子 $x_i^s G_i^{r_i}$，其中$s = \sum_{j\neq i} d_{ij}k_j$。由于 $s + r_i \geq \lambda_i$，这一部分的 $f$ 只需要用到一个分母为 $x_i$ 的表达式，即正则普通伙伴 $G_i/x_i$ 的幂。因此，$f$ 属于第 $i$ 个相邻 Laurent 环。在 $S$ 之外的方向上，它已经具有非负可变指数，因此一阶星交给出 $f \in k[U]$。每个 $u_i'$ 的常数项均为零，因此 $x^a$ 的系数为一。对于 $k \in \Gamma$，我们有

$$\sum_i k_i \,\mathrm{Newt}(G_i) \;\subseteq\; \mathrm{conv}\bigcup_i \lambda_i \,\mathrm{Newt}(G_i),$$

通过取凸系数 $k_i/\lambda_i$ 并将其未使用的和分配给零点。因此，$\mathrm{Newt}(f) \subseteq K_a$，如所要求。

在替代假设下，构造多项式 $H_0$ 如下。对于任意满足 $b_i < \lambda_i$（其中某个 $i \in S$）的非负指数 $b$，从 $G_i^{\lambda_i}$中取其系数。为所有其他指数赋予零系数。由于同余关系恰好确定了公共范围 $b_i < \lambda_i$，$b_j < \lambda_j$中的系数，因此这两种规定是一致的。$H_0$ 的支集包含于所规定的各个幂的支集的有限并中，并且对于每个 $i$，$H_0 \equiv G_i^{\lambda_i} \bmod x_i^{\lambda_i}$。因此，$x^a H_0$ 是正则的，并具有所要求的支集和最小系数。若对于每个有序对都有 $d_{ij} \geq \lambda_i$，则每个成对同余关系的两边在商中都等于一。通过取幂，利用 $P_a$的齐次性即可得到关于倍数的断言。□

不等式（8.2）在整个 $\max_i \lambda_i \leq 2\min_i \lambda_i$ 范围内成立，只要所有 $d_{ij} \geq 3$均满足条件。这为每个秩下内度无界的光滑源给出了一个满维锥。对每个交换取一个不同的指定单位 $u_j$，并取任意非零多项式 $B_j$（$x_{\neq j}$）。这些交换式 $G_j = 1 + u_j B_j \prod_{i\neq j} x_i^3$均不可约，所有双零点分层均为空，并且

$\partial G_j/\partial u_j$ 在 $G_j = 0$上非零。因此，定理 1.2 给出完整的上表示，而单交换超曲面开集则保证光滑性。

**例 8.10.** 考虑一个具有两个可变坐标的循环种子 $x$， $y$ 以及三个可逆坐标 $u$， $v$， $w$。取 $G_x = 1+(u+v)y^3$ 和 $G_y = 1+wx^3$。由于分别关于 $u$ 和 $w$的线性性，以及关于其余坐标的本原性，两种交换均不可约。在普通交换表示中，轨迹 $x = y = 0$ 为空。因此，定理1.2将其与完整上代数等同。两个单交换开集都是光滑的，因为沿着$G_x = 0$，有 $\partial G_x/\partial u = y^3 \neq 0$；沿着 $G_y = 0$，有 $\partial G_y/\partial w = x^3 \neq 0$。

取 $a = (-1, -m, 0, 0, 0)$，其中 $m \geq 4$。不等式 (8.2) 不成立，因为 $m/3+1/(3m) > 1$。同余关系 (8.4) 也不成立，因为 $G_x - G_y^m \equiv (u+v)y^3$ 模 $(x, y^m)$。先在 $y$ 处变异，再在 $x$ 处变异，得到 $y' = G_y/y$ 和 $x'' = ((y')^3 + u + v)/x$。种子单项式 $x''(y')^{m-3}$ 的最小指数为 $a$，因此定理 8.6 将其确定为归一化倒数函数。其 Laurent展开为

$$x''(y')^{m-3} = \frac{(1+wx^3)^m + (u+v)y^3(1+wx^3)^{m-3}}{xy^m}.$$

设 $q = 3e_x + e_w$ 和 $J = [3e_y + e_u, 3e_y + e_v]$。两个分子项的牛顿多面体分别为 $[0, mq]$ 和 $J + [0, (m-3)q]$。它们的支集具有不同的 $y$- 次数。因此， $Q_a = P_a$ 是 $a$ 加上它们并集的凸包。在 $p = (0, 0, -m, -m, -1)$ 处，其最小值为 $3 - 2m$，而在 $K_a = a + \mathrm{conv}([0, mq] \cup J)$ 上的最小值为 $-m$。因此，仅使用两个膨胀的交换多胞体所得的公式少了 $m-3$ 这一最小值，尽管互反性成立。

赋值公式 (8.3) 确定了正向牛顿多胞体的一个投影。固定 $p$，选取一组可变指标 $S$，使得对于 $i \in S$ 有 $D_i(p) > 0$，并令 $\lambda_i$ 与 $1/D_i(p)$ 成比例，同时消去分母。若成对不等式成立，则多项式因子 $A_p$ 的牛顿多面体在这些坐标上的投影恰好是 $\mathrm{conv}\big(0,\ D_i(p)e_i :\quad i \in S\big)$。事实上，在 $S$ 上取 $a_i = -\lambda_i$，其余位置取零。赋值公式给出，对于每个修正指数 $e'$，$\sum_{i \in S} e'_i/D_i(p) \leq 1$，并且原点和每个 $D_i(p)e_i$ 都出现在该投影中。

8.3. **带标记的Laurent图表中的实现判据。** 在一个代数闭域 $k$ 上工作，该域的特征为零，并满足定理 5.4 的假设。记 $M = L^*$。根据定理 5.4，标签 $a$ 可实现当且仅当 $P_a = Q_a$。在多项式角处，每个标签都可实现（定理 6.1）。

要检验一般标记图表中的实现，只需通过对正则截面的支撑集进行缩放来逼近 $P_a$。在 $M_{\mathbb{R}}$ 上固定一个欧几里得范数，其闭单位球为 $D$，并在 $L_{\mathbb{R}}$ 上赋予对偶范数。

**命题 8.11。** 对于 $a \in M$，以下条件等价。

(1) 标签 $a$ 可实现。(2) 对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个整数 $n \geq 1$、一个满足 $\|b/n - a\| \leq \epsilon$的标签 $b \in M$，以及一个以 $b$ 为尖点的正则多项式，其支集包含于 $n(P_a + \epsilon D)$。

特别地， $a$ 当且仅当 $na$ 对任意指定的整数 $n \geq 1$均可实现时，才可实现。如果 $b_j$是可实现的标签，并且 $b_j/n_j \to a$ 对于正整数$n_j$，那么 $a$ 可实现。特别地，推论*8.4* 中源种子锥并集的闭包中的每个整点都是可实现的。

证明。 对于 $K_a = Q_a$ 以及 $K_a = P_a$，赋值 $a \mapsto K_a$ 在正整数伸缩下是齐次的，并满足 $K_{a+b} \subseteq K_a + K_b$。对于 $Q_a$，这是定理 2.1。对于 $P_a$，对每个 $p$，在 Newt($\Theta_p$) 上取最小值即可得出。有限集 $K_{\pm e_i}$ 因此将 $K_d$ 限制在半径为 $c\|d\|_1$的球内。利用 $a = b + (a-b)$ 和 $b = a + (b-a)$ 的包含关系，可得相同的 Hausdorff 距离 Lipschitz 界。由齐次性可知，该界在有理点处也成立。

若 $H$ 在任意分离 $\omega \in$ 整数集$C$处具有最小指数 $b$，则其多面体包含 $Q_b$。将此包含关系应用于逼近截面并取 Hausdorff 极限，可得 $Q_a \subseteq P_a$。反向包含关系由定理 5.4给出。取 $Q_a$ 上的一个代表元，其幂便给出了另一方向上的逼近，从而得到实现。同样的连续性表明，在缩放后的实现标签的所有极限处，等式仍然成立。最后，在每个源种子锥上应用定理8.6，并用有理点逼近实点。□

对于原多项式系数环，只要所有逼近函数在其中都是正则的，同样的极限断言也成立。事实上，它们的支集满足推论 2.6 的闭齐次冻结不等式。在极限中，整体 $Q_a$ 满足这些不等式，因为每个逼近支集都包含局部化代数中与之对应的最小多面体。因而， $Q_a$ 上的每个代表元都会下降到原环。

对于单个倒数函数，可以直接通过其牛顿多面体检验其向多项式系数环的下降。

**推论 8.12**。 保留多项式种子、其标记环面以及定理 $v_t$中的原始首星权重$i$ 。对于每个冻结变量 $f_i$，令 $J_i$ 由可变指标$j$ 组成，其中 $F_j$ 是 $f_i$的相伴元。设在$B = \mathcal{U}_S[F^{-1}]$ 上的标记的正向计数构造 $P_a$ 在一个标签 $a$下，并在同一个源特征格中给出倒数多面体。假设在 $B$ 中的每个归一化解，其支集包含于 $P_a$ ，并且具有牛顿多面体$P_a$，如定理 5.4所述。那么，在 $\mathcal{U}_S$ 中存在归一化解，当且仅当在 $B$ 中存在归一化解，并且

$$\tau_{P_a}(e_i) \geq 0, \qquad \tau_{P_a}(e_i + e_{x_j}) \geq 0 \quad (j \in J_i), \qquad 1 \leq i \leq s.$$

当这些不等式成立时， $B$ 中支集属于 $P_a$ 的每个归一化解都属于 $\mathcal{U}_S$。

证明。 对于每个非零的 $g \in B$，上面的首项计算给出 $g \in \mathcal{U}_S$ 当且仅当$v_{t,\ i}(g) \geq 0$ 对每个 $t$， $i$ 都成立。对于支集在 $P_a$ 中的任意归一化解，根据其牛顿多面体的假设，这些值仅取决于 $P_a$ 。这就证明了两个方向。首项计算使用了原始 Laurent 环的局部化，因此也适用于在将 $F$ 取逆后成为单位元的交换式。□

在标记计数图表中，该检验针对整个系数轨道。令 $\epsilon_i$ 表示现在可逆特征 $f_i$ 的指数，并记 $a(n) = a + \sum_i n_i\epsilon_i$ 表示 $n \in \mathbb{Z}^s$。每个正向 $\Theta_p$ 中的指数修正项，根据命题A.2，在每个单位元处的分量均为零。因此

$$\nu_{a(n)}(\Theta_p) = \nu_a(\Theta_p) + \Big\langle \sum_i n_i\epsilon_i, p \Big\rangle, \qquad P_{a(n)} = P_a + \sum_i n_i\epsilon_i.$$

乘以 $\prod_i f_i^{n_i}$可将局部化环中的归一化解空间对应起来。如果该空间非空，令 $b_i = \min_t \tau_{P_a}(v_{t,\ i})$，其中使用这些阶的初始权重。该轨道中在原始多项式环上可实现的标签，恰好是 $a(n)$，其中对所有 $i$都有 $n_i \geq -b_i$，因为平移会给每个 $i$-阶边界阶数增加 $n_i$ 。因此，最小多项式平移由 $P_a$计算得出。

8.3.1. 有理锥上的有限检验。 在定理 5.4的标记 Laurent 设定中工作。固定一个位于直锥内部的格分离权 $\omega$ 。对于 $a \in M = L^*$，在 $\omega$-最小指数处的最小源多胞体为 $a$ ，而前向计数给出的多胞体为 $Q_a$。因此，当且仅当 $P_a \subseteq Q_a$时， $a$ 可实现。根据命题 $P_a = Q_a$，两个族都连续且正齐次地延拓到 $M_{\mathbb{R}}$ ，以及其证明。讨论 8.11 中的轨迹时，我们使用它们的实扩张相等这一性质。以下所有检验都只涉及指定整数参数处的格多胞体。 $M_{\mathbb{R}}$。

设 $K = \sum_{i=1}^m \mathbb{R}_{\geq 0} v_i$ 对于 $v_i \in M$，并设 $s = \sum_i v_i$。该锥可能具有线性部分或维数较小。我们将 relint $K$ 记为相对于 $K$的线性张成的内部。对于任一族 $S = P,\ Q$，若 $S$ 在 $K$ 上满足闵可夫斯基可加 ，则记作 $S_{a+b} = S_a + S_b$ 对所有$a,\ b \in K$成立。

**命题 8.13**。 对于 $S = P$ 或 $S = Q$，在 $K$ 上的闵可夫斯基可加性等价于以下单一有限检验

$$S_s = \sum S_{v_i}.$$

在此条件下，对于所有 $t_i \geq 0$， $S_{\sum_i t_i v_i} \overset{i}{=} \sum_i t_i S_{v_i}$。以下两个结论分别适用。

(1)如果 $Q$ 在 $K$ 上是闵可夫斯基可加的，那么 $\{a \in K : \ P_a = Q_a\}$ 是 $K$ 的闭面的并。在每个面上，只需检验 $\operatorname{relint} F$ 中的一个整点，即可判断 $F$ 中的所有点是否都可实现。特别地，在 $\operatorname{relint} K$ 中一个整点处的实现，等价于在 $K$ 中每个整点处的实现。(2) 如果 $P$ 在 $K$ 上是闵可夫斯基可加的，那么 $\{a \in K : \ P_a = Q_a\}$ 是一个可计算的有理多面体锥。当且仅当对于每个 $i$ 都有 $P_{v_i} = Q_{v_i}$ 时，它等于 $K$。如果两个族都是闵可夫斯基可加的，那么 $K$ 中的相等轨迹是 $K$ 的一个单独的面。

证明。 两个族都满足 $S_{a+b} \subseteq S_a + S_b$。对于 $Q$，这是定理 2.1；而对于 $P$，则可通过在每个 $\mathbf{Newt}(\Theta_p)$ 上取最小值并利用定理 5.4得到。任取 $p \in L$，并写作$k(a) = \min_{b \in S_a} \langle b, \ p \rangle$。这是齐次且超可加的。假设单点检验成立。对于 $a = \sum_i t_i v_i$，选择一个整数 $N \geq \max_i t_i$。于是

$$\sum t_i k(v_i) \leq k(a) \leq N k(s) - \sum (N - t_i) k(v_i) = \sum t_i k(v_i).$$

中间的不等式使用 $Ns = a + \sum_i (N - t_i) v_i$。检验所有 $p$ 即可得到所述的闵可夫斯基公式。反向结论由加法得出。特别地，每个这样的 $k$ 都是线性形式在 $K$上的限制。

假设 $Q$具有可加性。固定 $p$， $P_a$ 上的最小值与 $Q_a$上的最小值之差是关于 $a \in K$的非负凹函数。如果它在 $b \in$相对内部 $F$处为零，则在整个 $F$上都为零。事实上，对任意 $a \in F$，取充分小的 $\epsilon > 0$，使得 $b + \epsilon(b - a) \in F$。将 $b$ 表示为 $a$ 与该点的严格凸组合，并利用凹性和非负性。对每个 $p \in L$应用此结论。每个面都存在一个整数相对内部点，例如，将属于该面的给定生成元相加即可；若为空和，则取零。这就证明了第一个断言和有限面检验。

现在假设 $P$ 具有可加性。选取 $L_{\mathbb{R}}$ 中的一个有限完备有理扇，使其细分 $P_{v_i}$的法扇。可以取它们与任意满维格多面体的闵可夫斯基和的法扇。令 $p_1, \ldots, p_h$ 为本原射线。每个 $P_a$ 对于 $a \in K$，都由这些射线上的支撑不等式刻画，因为其最小支撑函数在扇的每个锥上关于 $p$都是线性的。对于低维的 $P_a$，结论也成立。设 $\ell_j(a) \ =$ 最小值$_{b \in P_a} \langle b, p_j \rangle$。在$K$ 上，这是一个有理线性形式，可由其在 $v_i$处的取值计算得出。根据命题2.4，相等轨迹恰好是以下有限交集：

$$\left\{ a \in K : \langle a, e \rangle \geq \ell_j(a) \quad (1 \leq j \leq h, \ e \in \operatorname{Vert}(T_{p_j})) \right\}.$$

事实上，不等式表明 $Q_a \subseteq P_a$，而另一个包含关系始终成立。关于生成元的条件由凸性推出。如果两个族都是可加的，则根据第一个断言，同一轨迹是凸集，并且是若干面的并集。多面锥的非空凸面并集本身是一个面：该并集的相对内部点属于并集中的某个面，而面的性质意味着整个并集都包含于该面中。非空性由$P_0 = Q_0 = \{0\}$推出。□

**推论 8.14**。 令 $f_i \in k[U]$ 具有 $\omega$-最小指数 $v_i$，且系数为 *1*。选取正整数 $n_i$，并设 $a_0 = \sum_i n_i v_i$。等式

$$\operatorname{Newt}\left( \prod_i f_i^{m_i} \right) = P_{\sum_i m_i v_i} \qquad (m_i \in \mathbb{N})$$

等价于以下一个等式 $\sum_i n_i \operatorname{Newt}(f_i) \ = \ P_{a_0}$。若该等式成立，则两个族在 $K$ 上均为闵可夫斯基可加，且 $K$ 中的每个格标签都可实现。每个这样的乘积给出

其幺半群标签处的一个归一化解。幺半群之外的标签则从最小源多胞体中获得其解。

证明。始终

$$P_{a_0} \subseteq \sum_i n_i P_{v_i} \subseteq \sum_i n_i Q_{v_i} \subseteq \sum_i n_i \operatorname{Newt}(f_i), \qquad P_{a_0} \subseteq Q_{a_0} \subseteq \sum_i n_i Q_{v_i}.$$

所提出的等式迫使每个包含关系都成为等式。对于每个权重 $p$，每个 $P_{v_i}$ 上的最小值至少是 $Q_{v_i}$上的最小值，而后者又至少是 Newt($f_i$) 上的最小值。加权和相等，且所有 $n_i > 0$都相等，因此这三个最小值分别相等。于是$P_{v_i} = Q_{v_i} = \operatorname{Newt}(f_i)$。应用命题8.13并取生成元 $n_i v_i$，利用齐次性。两个族都是可加的，并且在 $K$上一致。根据 Minkowski 加法，乘积具有所断言的牛顿多面体，并且根据乘法具有首一最低项。对于每个整数 $a \in K$，等式 $P_a = Q_a$ 在 $P_a$ 上给出一个正则函数，即使 $a$ 位于 $v_i$的幺半群之外。反之，所有乘积公式包含 $m_i = n_i$。 □

对于非线性交换式，该推论确定：每个规定函数的乘积是否都能在其最小指数处实现倒数多面体。这些函数、它们的最小指数以及测试中有限个多面体已足够。同一标签下的其他代表元由定理 5.4支配。

**推论 8.15**。 假设一个有理多面体锥 $K$ 有一个由有理多面体锥构成的有限覆盖，并且在每个锥上，$P$、$Q$ 中至少有一个是闵可夫斯基可加的。那么，即使最初不知道该覆盖，实现轨迹在 $K$ 中仍是可计算的有理多面体锥的有限并。特别地，当该假设在 $M_{\mathbb{R}}$ 上成立时，这就判定了一致实现。

证明。 枚举 $K$ 的有理多面体子锥的有限列表。判断一个列表是否覆盖 $K$ 是一个有限的有理多面体计算，例如沿定义超平面进行细分，并包括所有相对面。在每个锥上对两个族应用单和测试。在该假设下，搜索会找到一个覆盖，使得每个锥至少通过其中一个测试。命题 8.13 随后计算每个锥上的轨迹。该计算要求在系数域中进行精确算术。 □

若干乘积还可以在不对锥作可加性假设的情况下，确立单个标签的实现。

**命题 8.16**。 保留上面的正则函数 $f_i$，并设 $R_i = \operatorname{Newt}(f_i)$。对于 $a \in K \cap M$，构造有理多面体 $\Lambda_a = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_{\geq 0} : \ \sum_i \lambda_i v_i = a\}$ 以及有理多胞体

$$H_a = \bigcap_{\lambda \in \operatorname{Vert}(\Lambda_a)} \sum_i \lambda_i R_i.$$

则有 $Q_a \subseteq \operatorname{conv}(H_a \cap M)$。如果 $H_a \cap M \subseteq P_a$，则标签 $a$ 可实现，并且对每个正整数倍也同样成立。如果交集采用 $a$ 的所有非负实表示，则得到相同的界 $H_a$。

证明。 非空多面体 $\Lambda_a$ 位于非负正交象限内且不含直线，因此它只有有限个顶点，并且等于其顶点凸包与其渐近锥之和。在每个顶点处，系数 $\lambda_i$ 都是有理数。消去分母，并利用 $Q$ 的齐次性与次可加性，可得到 $Q_a \subseteq \sum_i \lambda_i Q_{v_i} \subseteq \sum_i \lambda_i R_i$。其顶点都是格点，从而证明了第一个断言。所提出的包含关系随后给出 $Q_a = P_a$，且等式在伸缩下保持不变。对于 $\Lambda_a$ 的一个渐近向量 $r$，多面体 $\sum_i r_i R_i$ 包含$\sum_i r_i v_i = 0$。因此，满足所有顶点界限的点也满足这些界限的每个凸组合，并且在加上一个渐近贡献后仍然满足。这证明了最后一个断言。
□

8.3.2. 使用除子的数值判据。 我们继续假设命题 8.11 在 Laurent系数环上的假设成立。记 $M = L^*$ 为标记环面的特征格。固定 $a \in M$ 并令 $\Delta = P_a$。如果 $M$ 的秩为零，则其唯一标签由 1 实现。假设 $M$ 具有正秩，并选取直锥 $C$内部的一个本原 $q \in L$。那么 $a$ 是 $q$ 在 $\Delta$上的唯一极小值点。

取标记环面的一个光滑射影环面紧化 $Z$，其扇细化了 $\Delta$ 的法扇，并包含 $q$ 的射线以及可变坐标权重 $e_i$。可以先将一个满维格多面体加到 $\Delta$ 上，再细化其和的法扇。随后通过环面细分插入所需的射线，从而得到光滑射影细化。即使 $\Delta$ 的维数较小，这一方法仍然适用。记

$$H_\Delta = -\sum_\rho \min_{b\in\Delta}\langle \rho, b\rangle\, T_\rho, \qquad \lambda_i = \min_{b\in\Delta}\langle e_i, b\rangle,$$

其中，$\rho$ 表示一条射线的本原生成元，$T_\rho$ 表示相应的素除子。$nH_\Delta$ 的截面恰好限制为支集在 $n\Delta$ 中的Laurent多项式。

在 $T_{e_i}$的开轨道中，普通交换 $F_i$ 定义了一个不可约超曲面。爆破其闭包，并取支配该超曲面的例外素除子。将其赋值记为 $v_i$。选取一个共同的光滑射影模型 $\pi : X \longrightarrow Z$，使其在环面上同构，且这些赋值都作为素除子 $E_i$出现。例如，依次爆破各闭包并作解消，同时保留它们光滑的一般点。不同中心在环面边界上有不同的一般点。令 $T$ 为$T_q$ 的严格变换，并定义

$$D_\Delta = \pi^* H_\Delta - \sum_i \max(0, -\lambda_i) E_i.$$

若除子的数值类位于有效除子所生成之锥的闭包中，则称该除子为伪有效。若其在每条整曲线上的次数均非负，则称其为丰。对于伪有效除子 $D$，记 $\sigma_T(D)$ 为沿 $T$ 的渐近阶，此阶是在任意小的丰扰动之后定义的。对于整数丰 $H$，它是当正有理数 $\epsilon$ 趋于零时，所有与 $n(D+\epsilon H)$ 线性等价且 $n\epsilon$ 为整数的有效除子 $B$ 上 $\mathrm{mult}_T(B)/n$ 的下确界之极限。这里，$\mathrm{mult}_T(B)$ 是 $T$ 在 $B$ 中的系数。此数仅取决于 $D$ 的数值类，与 $H$ [31, 无关，参见 III，§1]。

**定理 8.17**。 标签 $a$ 可实现，当且仅当 $D_\Delta$ 为伪有效且 $\sigma_T(D_\Delta) = 0$。特别地，若 $D_\Delta$ 为丰，则 $a$ 可实现。

证明。我们首先确定该除子的截面。在一般交换中心处，垂直于中心的参数为 $x_i$、$F_i$。在例外除子 $F_i/x_i$ 上，$\widehat{\ }$ 是中心上的超越剩余类坐标。归一化因子 $F_i/F_i$ 是补 Laurent 环中的一个单位。因此，$v_i$ 是命题 1.1 的第 $i$ 个相邻图表中在 $F_i$ 处的阶，并且 $v_i(x_j) = \delta_{ij}$。$E_i$ 在 $\pi^* H_\Delta$ 中的系数为 $-\lambda_i$。对于支集包含于 $n\Delta$ 的 Laurent 多项式 $f$，每个单项式的 $v_i$ 值至少为 $n\lambda_i$。属于 $H^0(X, nD_\Delta)$ 要求 $f$ 还满足附加条件 $v_i(f) \geq 0$，其中 $\lambda_i < 0$。当 $\lambda_i \geq 0$ 时，这些条件已成立。事实上，$\mathrm{div}(f) + n\pi^* H_\Delta$ 是有效的，因为它是 $Z$ 上一个有效 Cartier 除子的拉回。反过来，$nD_\Delta$ 的截面也是 $n\pi^* H_\Delta$ 的截面，因而也是 $Z$ 上 $nH_\Delta$ 的截面。由一阶星描述可得

$$H^0(X, nD_\Delta) = \{f \in k[U] : \mathrm{Supp}(f) \subseteq n\Delta\}.$$

对于这样的非零截面，其沿 $T$ 的消失阶为 $\min_{b\in\mathrm{Supp}(f)}\langle q,\ b\rangle - n\langle q,\ a\rangle$。如果 $a$ 可实现，则一次中的相应截面在其一般点处避开 $T$。它给出了 $D_\Delta$ 的有效代表元。加入避开 $T$ 的小型充分类扰动，得到$\sigma_T(D_\Delta) = 0$。

反之，假设伪有效性且 $\sigma_T(D_\Delta) = 0$。利用 $\mathrm{Pic}((\mathbb{G}_m)^{\dim Z}) = 0$，将一个丰沛卡蒂埃除子$H$表示为一个支集位于环面补集上的除子。存在正整数 $n_j$，$m_j$ 满足 $n_j \to \infty, m_j/n_j \to 0$，以及 $n_j D_\Delta + m_j H$ 的截面 $f_j$，其

沿 $T$ 的消失阶为 $o(n_j)$。事实上，在定义中依次取更小的有理扰动并清除分母，必要时取幂。这些截面是环面上的 Laurent 多项式。在每个严格环面边界除子处，它们的指数 $b$满足

$$\langle \rho, b/n_j \rangle \geq \min_{e\in\Delta} \langle \rho, e\rangle - O(m_j/n_j).$$

由扇的完备性，只有有限个不等式，且其共同渐近锥为零。因此，缩放支集均位于某个固定有界集合中，并且每个聚点都属于 $\Delta$。在 $T$处，消失阶给出 $\min_{b\in \mathrm{Supp}(f_j)} \langle q,\ b/n_j\rangle \to \langle q,\ a\rangle$。由于 $q$暴露出 $a$，除以 $n_j$ 得到的一列最小化指数收敛于 $a$。

在 $E_i$ 处，截面不等式给出 $v_i(f_j) \geq -O(m_j)$，因为 $E_i$ 在 $D_\Delta$ 中的系数为非正数。对于固定的充分大的整数 $c$，乘以 $\prod_i x_i^{cm_j}$ 可以消除所有这些极点，从而将缩放支集平移 $o(1)$。所得多项式 $G_j$ 属于 $k[U]$。固定一个格分离的 $\omega \in \mathrm{int}\ C$。其缩放支集的每个聚点都属于 $\Delta$，而 $a$ 是沿整个序列得到的一个这样的聚点。由于 $\omega$ 也暴露出 $a$， $\omega$-最小指数 $b_j$ of $G_j$ 满足 $b_j/n_j \to a$。将最小系数归一化为一。

由于 $Q_{b_j} \subseteq \mathrm{Newt}(G_j)$，命题 8.11 中的连续性论证给出 $Q_a \subseteq \Delta$。这证明了实现。最后，丰类在任意正的丰扰动下都会变为丰类。一个充分可除的倍数存在一个避开 $T$的截面，这证明了最后一个断言。 □

同一数值判据可用于检验：支集包含在格多面体 $\Delta$ 中的正则 Laurent 多项式，能否在给定顶点 $a$ 处具有非零系数。我们要求 $a$ 处的开法锥与 $\mathrm{int}\, C$ 相交，并在交集中选取 $q$ 和 $\omega$。于是，在所述数值条件下，证明给出$Q_a \subseteq \Delta$。

**推论 8.18**。设 $\Omega \subseteq M_{\mathbb{R}}$ 为有理多面体锥。假设给定的有限列表 $E \subset L$ 能检测每个严格包含关系 $P_a \subsetneq Q_a$（其中 $a \in \Omega \cap M$），也就是说，它们的支撑最小值在某个 $p \in E$ 处不同。那么，$\Omega$ 中可实现的标签是一个可计算的有理多面体锥有限并的整点。定义所有 $P_a$ 的一组支撑法向量具有这种检测性质；它们的法扇的任意公共完备尖细化的射线也具有这种性质。

证明。 在 $p \in E$ 处，两个最小值分别是 $a$ 的最小支撑函数在 Newt($\Theta_p$) 和 $T_p$处的取值，根据定理5.4和命题 2.4。将 $\Omega$ 与这些有限个可计算多面体的法扇的公共细分相交。在每个锥内，它们的等式都是齐次有理线性方程，并且恰好检测出可实现的格标签。对于支撑法向量的一个定义列表，任何更大的多面体都会违反至少一个定义不等式。 □

在定理 C.15 的射影模型上，按除子类分次的 *Cox*环在相同的负顶点假设下是有限生成的。推论 C.16给出了其在除子类中的相应判据。

推论 *8.19*。设 $v_i$ 是定理 *8.17* 中的交换赋值。固定一个格多面体 $\Delta$ 和一个顶点 $a$，其开法锥与 $\mathit{int}\, C$ 相交。设 $r$ 为可变坐标的数量，并令 $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^r$，其中 $\lambda_i = \mathit{min}_{b\in\Delta} b_i$。存在一个有理多胞体 $J \subseteq \lambda + \mathbb{R}^r_{\geq 0}$，具有如下性质。对于每个整数 $n \geq 1$， $nJ$ 的格点恰好是向量 $t = (t_i) \in \mathbb{Z}^r$，其中 $t_i \geq n\lambda_i$，并且存在一个支集包含于 $n\Delta$ 的 *Laurent* 多项式 $f$，其在 $x^{na}$ 处的系数为一，并且对所有 $i$满足 $v_i(f) \geq t_i$。特别地，只要 $nt$ 在某个次数 $n \geq 1$ 中可实现，就能在一次中达到整数界 $t \geq \lambda$。

证明。 在两个开锥的交集中选取一个分离权重，并在冻结坐标上补以零，将其扩展为 $\bar{t} \in M$。由于 $v_i(x^{\bar{t}}) = t_i$，一阶星判据表明，当且仅当 $x^{-\bar{t}} f$ 是正则函数时，阶数界才成立。此时它的最小指数为 $na - \bar{t}$。

反过来，我们可以将具有此最小指数的正则函数归一化，并将其乘以 $x^{\bar{t}}$。因此，当且仅当 $Q_{na-\bar{t}} \subseteq n\Delta - \bar{t}$ 时，这样的 $f$ 才存在。选取定义不等式$\langle b,\ p\rangle \geq c$，用于 $\Delta$，并取整数法向量；对其仿射包的每个方程均采用正、负两种符号。对于每个不等式，命题 2.4将相应的支撑界表示为

$$\langle na - \bar{t}, e\rangle + \langle \bar{t}, p\rangle \geq nc \qquad (e \in \mathrm{Vert}(T_p)).$$

Togethe对于带有 $t_i \geq n\lambda_i$ 的 r，这些不等式定义了有理多面体 $J$ 的 $n$ 次膨胀。

为说明 $J$ 有界，考虑一次。在支集为 $\Delta$ 的有限维 Laurent 多项式空间中，$v_i$ 阶至少为 $j$ 的子空间随着 $j$ 增大而趋于零。因此，每个可达到的 $t_i$ 都有上界。单项式 $x^a$ 表明 $\lambda$ 是 $J$ 的整点。若 $J$ 无界，则一个非零整衰退方向会给出从 $\lambda$ 开始的整点无界序列。□

## 9. The second mirror in the marked torus

为了计数光滑增广正向镜像上的曲线，我们首先证明其标记环面上的对数体积形式可以延拓穿过补集。然后，我们在共同的 Laurent 域中比较反向 theta 函数与源函数。定理 9.7将两个代数相等性归结为首次变异伴随对象处的相等性。

### 9.1. 正向镜像的体积形式与光滑性。

**命题 9.1**。设 $U$ 是代数闭特征零域上的光滑仿射对数 *Calabi–Yau* 簇。设 $U$ 包含一个稠密分裂环面，且 皮卡群$(U) = 0$。设 $X$ 是其在代数闭特征零域上的增广镜像的谱。在每个稠密开分裂环面 $T \subset X$上，标准对数体积形式延拓为 $X$的对偶化层的一个生成元；在光滑轨迹上，该层就是顶次微分形式层。特别地，如果 $X$ 是光滑的，并且命题 *4.6*中的带标记的 *Laurent* 实现存在，则 *Keel* 和 *Yu* 的构造适用于 $X$ 及其上的这个标记环面。

证明。按照引理 19.2]的方式，选取 $U$ 的一个紧化，使其边界支撑一个丰沛除子，如[27, 所述。增广代数与这一选择无关。根据推论 10.4，它是正规的。命题 19.1] 中的 [27, 的紧化的增广纤维（$X$，$Z$）是一个射影半对数典范对，其中 $K_X + Z$ 是平凡的，补集为 $X$。这些性质在特征零基域的延拓后仍然保持。在与 $T$相交的不可约分支的归一化上，令 $\Delta$ 为 $Z$ 的严格变换与导子除子之和，其中导子除子是双重轨迹上方的既约除子。根据~半对数典范对的正规化公式，所得的对（$X$，$\Delta$）是适当且对数典范的，其中 $K_{\tilde{X}} + \Delta$是平凡的。归一化在 $X$上诱导出一个同构，而 $\Delta$ 与 $X$不相交。

一个生成元给出一个有理顶形式 Ω，其除子为 div $\tilde{x}$(Ω) $= -\Delta$。由于 $X$ 的真性和对数典范性，在 $k(X)$ 的每个除子赋值~处，Ω 的阶至少为 $-1$。特别地，这对 $T$ 的每个托里克除子赋值都成立。记 $z$ 为 $T$ 上的坐标，并且 $\Omega_T = \bigwedge_j d$对数 $z_j$。商 $\Omega/\Omega_T$ 在 $T$ 上是一个单位，因此等于 $cz^h$。在任意原始余字符 $v$ 的赋值处，它对 Ω 的阶的贡献给出 ord$_v$(Ω) $= \langle h, v\rangle - 1 \geq -1$。将此不等式应用于 $v$ 和 $-v$ 可得 $h = 0$。Ω 在 $X$ 的光滑轨迹上生成对偶化层，因此由反身性，它在正规戈伦斯坦簇 $X$ 上生成对偶化层。由对数典范性，Ω 在对数消解上的极点至多是对数型的。当命题 4.6 的带标记的 Laurent 实现存在时，它将标记环面识别为 $X$ 的一个主开子集。□

9.1.1. 由首次变异伴随对象得到的光滑性判据。在多项式角图中，记 $Z_1, \ldots, Z_n$ 为标准前向坐标，并记 $T_i = \Theta_{-e_i}$。由定理 4.1，$H_i = Z_i T_i$ 是其他坐标的多项式。事实上，当 $i$是可变的时，$i$次修正项的次数为零，且修正项的指定单位指数为零。我们可以对任何逆元已经正则的 $Z_i$求逆。记 $J$ 为剩余指标，并记 $S$ 为求逆坐标中的 Laurent 环。

**命题 9.2**。 假设对每个 $i \in J$，每个正向 *theta* 函数都是 $(T_i, Z_j : j \neq i)$ 中的 *Laurent* 多项式。对每个非空的 $I \subseteq J$，将 $H_i, i \in I$, 限制到 $Z_i = 0$（$i \in I$），并令所有其他坐标可逆。假设当 $|I| = 1$ 时，它们在该环面中的公共零点集余维至少为一；当 $|I| \geq 2$ 时，余维至少为二，其中允许零点集为空。那么正向环为 $S[Z_i, T_i \colon i \in J]/(Z_i T_i - H_i \colon i \in J)$。若在每个这样的非空零点集上，受限的 $H_i, i \in I$, 的微分线性无关，则该环光滑。更一般地，当且仅当存在某个 $I$，使得有一个公共零点 $z$ 和标量 $\lambda_i, i \in I$（不全为零），且微分 $\sum_{i \in I} \lambda_i \, dH_i(z)$ 在除满足 $j \in I$ 和 $\lambda_j \neq 0$ 的那些坐标方向之外的所有坐标方向上均为零时，该环是奇异的。

证明。在 $Z_i = 0$ 恰好为 $i \in I$的分层上，方程确定了 $T_j$ 为$j \notin I$。 $T_i$ 的坐标对于 $i \in I$ 而言是自由的。因此，该分层的维数为 $n$ 减去补充环面中公共零点集的余维。没有零点的分层就是初始环面。所有其他分层的维数都小于 $n$。根据方程的数量，每个不可约分支的维数至少为 $n$ 。因此，环面是稠密的，且这些方程构成完全交。该商环是 Cohen–Macaulay 且一般约化的。因此它是既约的，而环面的稠密性使其成为整环。至少有两个零点的分层的余维至少为二。在一个零点分层上， $T_i$ 是自由坐标，因此其消失会再增加一个余维。因此，初始环面以及通过将 $Z_i$替换为 $T_i$ 得到的环面覆盖了每个高度一处。根据 Serre 条件 $S_2$，它们的 Laurent 环在所提出的表示中相交；该条件表明，每个局部环的深度至少为二和其维数中较小者。实际的正向环包含于该交集，并且包含所有生成元，这就证明了二者相等。

在该分层的一点处， $i \in I$ 的方程的微分为 $T_i \, dZ_i - dH_i(z)$。其他方程消去它们的 $T_j$。系数为 $\lambda_i$ 的一个线性关系首先迫使陈述中的消失条件成立。反过来，当该消失条件成立时，对每个非零的 $\lambda_j$，令 $T_j = (\sum_i \lambda_i \, \partial_j H_i(z))/\lambda_j$ 。这些是自由的分层坐标，因此所得点是奇异点。补环面上的微分线性无关性排除了这种线性关系。这就证明了两个光滑性断言。□

要验证 Laurent 包含，可以使用另一个直图表，如推论 C.13所示；也可以将引理 B.1应用于引理 3.3的有限生成元。这些检验也适用于可约的$H_i$。

9.1.2. 主开集给出的可平滑性障碍。设 $U$ 满足定理3.2的假设，其中底域 $k$ 是特征零的代数闭域。对于 $0 \neq f \in k[U]$，假设 $V = U_f$ 包含一个体积相容环面。分别以 $B = B_k(U)$和 $B_0 = B_k(V)$表示相应的增广代数。令 $F^j B$为满足$\tau_f(p) \geq j$条件的 $\theta_p$的张成空间。对于有限生成 $k$-代数 $A$，记 $T^1(A/k) = \mathrm{Ext}^1_A(\mathbb{L}_{A/k}, A)$，其中 $\mathbb{L}_{A/k}$是余切复形。该向量空间将 $A$在 $k$上的一阶变形分类。

**命题 9.3**。 代数 $\mathcal{B} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} t^{-j} F^j B \subset B[t^{\pm 1}]$ 是一个有限生成的平坦 $k[t]$-代数。它在零点上的纤维为 $B_0$，而在零点之外，其族是常数的，代数为$B$。如果$\operatorname{Spec} B$是光滑的，而$\operatorname{Spec} B_0$是奇异的，则该族是Spec $B_0$的平滑化，即一个具有该特殊纤维和光滑的一般纤维的平坦族。如果 $B_0$ 是奇异的且 $T^1(B_0/k) = 0$，则$\operatorname{Spec} B$ 是奇异的。

证明。 选取一个强制正则函数 $g$ ，并按照定理 3.2 设置 $\rho = -\tau_g$ 。对 $\rho$和$\tau_f$ 为线性的锥取共同有理细分。每个锥都是尖的，因为 $\rho$ 在该锥上是线性的，且在零点以外为正。对于一个标签 $p$ ，写作 $b_p = t^{-\tau_f(p)} \theta_p$。这些元素构成 $\mathcal{B}$ 的自由 $k[t]$-基。我们断言，这些锥的有限多个 Hilbert生成元对应的 $b_h$ 生成该代数。设 $p = \sum h_i$ 位于某个锥内。相应 $\theta_{h_i}$ 的乘积在 $\theta_p$ 处的系数为一。任何其他标签 $s$与 $p$ 之差都是非零非负可变移位，其 $\rho(s) \leq \rho(p)$，且其$\tau_f(s) \geq \tau_f(p)$，这是由凸性和两种线性性得出的。因此， $b_{h_i}$ 的乘积在 $b_p$ 处的系数为一，并且每个

其他系数都属于 $k[t]$。按可变坐标之和递减的顺序，在有限的 $\rho$-层内应用引理 3.3中的归纳法，即可证明该断言。命题 8.1 确定了特殊纤维，而 $t$-求逆给出 $B[t^{\pm 1}]$。

对于最后一个断言，假设 Spec $B$ 是维数为 $n$的光滑空间。Rees代数 $\mathcal{B}$是有限生成整环，且 $t$ 切出了它的特殊纤维，因此该纤维的每个不可约分支维数均为 $n$。令 $I = \mathrm{Fitt}_n(\Omega^{\mathcal{B}/k[t]})$为相对 K¨ahler 微分模的第 $n$ 个 Fitting 理想。对于一个有 $q$ 个生成元的表示，该理想由关系矩阵的 $q-n$ 阶子式生成；当 $q \le n$时，约定其为单位理想。将 $t$求逆后，它就变成单位理想。因此，$t^N \in I$ 对于某个 $N$成立。

若 $T^1(B_0/k) = 0$，我们可以通过归纳，逐个模掉 $t^j$ 来平凡化该族。给定模掉 $t^j$后的一个平凡化，平坦性表明下一阶的核为 $B_0 \otimes_k (t^j)/(t^{j+1})$。由于该族是平坦的，余切复形在取特殊纤维时与基变换相容[34, 引理 92.6.2，标签 08QQ]。平方零变形定理 [34, 引理 92.16.1，标签 08SP] 继而表明，提升的同构类构成一个在 $T^1(B_0/k) \otimes_k (t^j)/(t^{j+1})$作用下的挠子。这个群为零，因此给定的提升同构于平凡提升，且该平凡化可以延拓。在阶数 $N+1$ 处，微分与 Fitting 理想的基变换给出$t^N \in \mathrm{Fitt}_n(\Omega^{B_0/k})B_0[t]/(t^{N+1})$。比较 $t^N$系数可推出 $\mathrm{Fitt}_n(\Omega^{B_0/k}) = B_0$。在这个等维纤维的奇异闭点处，Zariski切空间的维数大于 $n$，矛盾。□

9.2. 光滑正向镜像的反向图表。设 $U$ 满足命题 4.6 和推论 10.4 的假设。记正向标记格为 $L$，$M = L^*$，并记该图表中的增广正向代数为$B = B_k(U) \subset k[L]$ 。设 $\sigma \subset L_{\mathbb{R}}$ 为选定的满维直锥。记 $D_+ = \mathbb{N}^r \oplus \{0\}^c$。每个正向展开都具有形式 $\Theta_p = z^p A_p$，且 $\mathrm{Supp}(A_p - 1) \subseteq D_+ \setminus \{0\}$。令 $K = D_+^\vee = \{q \in M_{\mathbb{R}} : \langle q, \text{对每个 } d \in D_+\}, \ d\rangle \ge 0$。假设 $Y = \mathrm{Spec}\, B$ 光滑。命题 9.1 表明，其标记环面 $T_z = \mathrm{Spec}\, k[L]$ 与体积相容。记其增广计数代数为 $R = B_k(Y)$，其基为 $(\phi_q)_{q\in M}$，对应于由 $T_z$给出的标记。

**定理 9.4.** 存在唯一的带标记的 *Laurent* 实现 $R \hookrightarrow k[M]$，它对每个 $u \in K \cap M$ 都将 $\phi_u$ 映到$x^u$。在此实现 $\Phi_q$ 中，$\phi_q$的像在 $x^q$处的系数为一，且具有非负整数系数，并且

$$\mathrm{Supp}(\Phi_q) \subseteq P_q \cap (q + \sigma^\vee) \cap M.$$

这里 $P_q$ 是定理 5.4的倒数多面体。

证明。取 $v \in L \cap \operatorname{int}\sigma$。正向图表给出 $Y_{z^v} = T_z$，并使 $z^t$ 对每个 $t \in \sigma \cap L$ 都在 $Y$上正则。若 $p+q+d$出现在 $\phi_p\phi_q$中，则这些特征满足正则函数不等式 (3.3)，得到 $\langle t, d\rangle \ge 0$，因此 $d \in \sigma^\vee$。由于 $v$位于 $\sigma$的内部，对于每个这样的非零 $d$，都有 $\langle v, d\rangle > 0$。将命题 8.1 应用于 $Y$上的 $z^v$，可知其基于的关联分次代数与环面计数代数相同。因此，平移为零的项的系数为一。

考虑正则函数 $G = \Theta_{-v}$ 在 $Y$上。它在 $-v$ 处的系数为一，且其支集包含于 $-v + D_+$ 中。因此，对于 $q \in K$，有 $\tau_G(q) = -\langle v, \ q\rangle$。对于$\phi_p\phi_q$ 中出现的每个标签 $p+q+d$，若满足 $q \in K$，则由凸性可得 $0 \le \langle v, \ d\rangle \le -\langle v, \ p\rangle - \tau_G(p)$。事实上，上界的得出是因为将 $\tau_G(p+q+d)$ 的值控制在其指数为 $-v$的项的值之上。如果还满足$p \in K$，则只有 $d = 0$ 是可能的。一般而言，该上界从 $\sigma^\vee$中截出一个紧子集，因此无论 $q$为何，可能的整数平移都是有限的。选取内部格点 $K$ 的一个充分大的倍数 $q$，使得所有可能的输出都落在 $K$ 中。于是，乘积 $\phi_p\phi_q$ 属于其直半群代数。乘以 $\phi_q$ 是单射。对于在 $\sigma^\vee \setminus \{0\}$ 上递增的任意加性全序，非零和中的最小标签以不变的系数贡献于最小输出。将直代数局部化即可得到所断言的嵌入。除以 $x^q$ 可证明除包含于 $P_p$之外的支集与系数断言。它还证明了唯一性，因为所有平移后的基函数在直锥上均已确定。

对于正向标签 $t \in L$，函数 $\Theta_t$ 在 $Y$上是正则的。它在$R$上定义的滤子给出 $\phi_p$权重 $\nu_p^z(\Theta_t)$，在 $K$上等于 $\langle t, p\rangle$。由引理 5.1， $\nu_p^z(\Theta_t) \le \nu_t^x(\Phi_p)$ 对每个$p \in M$均成立。左侧是 $P_p$ 在 $t$处的最小支撑函数。对所有格方向进行比较可得 $\mathrm{Newt}(\Phi_p) \subseteq P_p$。□

将 $\mathsf{T}_Y(q_1, \dots, q_s)$ 记作乘积 $\phi_{q_1} \cdots \phi_{q_s}$ in $B_k(Y)$ 中单位的系数。

**推论 9.5.** 对于 $q \in M$，设 $E = P_q \cap (q + \sigma^\vee) \cap M$并选取满足 $b + E \subset K$ 的 $b \in K \cap M$。$\Phi_q = \sum_{e \in E} c_e x^e$ 中的系数是下列方程的唯一解：

$$\sum_{e \in E} c_e \, \mathsf{T}_Y(b + e, -b - s) = \mathsf{T}_Y(b, q, -b - s) \qquad (s \in E).$$

证明. 在标记图表中乘以 $\phi_b$ 会将整个支集平移到 $K$。因此，$\phi_b \phi_q = \sum_{e \in E} c_e \phi_{b+e}$ 属于 $R$ 的 theta 基。对 $\phi_{-b-s}$ 取迹可得这些方程。只有当 $s - e \in \sigma^\vee$ 时，矩阵条目才可能非零；根据定理中的零位移规则，其对角元素均为 1。按一个在非零平移上取正值的线性泛函对指标排序，可使矩阵成为单位三角矩阵。□

命题 C.7 直接根据标记光滑正向镜像的 Laurent 生成元计算这些迹。如果 $Y$ 自身具有一个满足第 3 节假设的 LP 种子，则定理 3.1在种子坐标中计算其迹。要在 $T_z$的标记中使用这些迹，应通过热带坐标的变换转换接触阶。

9.3. **种子锥上的反向函数与标记回返的判据。** 现在设 $k[U]$ 是标记种子的完整上 LP 代数。通过定理 $R$ 9.4，将反向代数 $k[M]$ 与其在 $h_a(p) = \nu_a^z(\Theta_p)$ 中的像等同，并记作。

**命题 9.6。** 设 $t$ 是一个定理 *8.6* 适用的可达源种子，并设$K_t \subset M_{\mathbb{R}}$ 是其斜率锥。那么，对于所有 $\Phi_a \Phi_b = \Phi_{a+b}$， $a$， $b \in K_t \cap M$。记 $g_1$、……、$g_{r+c}$为种子坐标（包括其指定单位）的斜率。所述 $\Phi_{g_j}$ 是代数独立的，并且每个反向函数都属于固定域 $k[\Phi_{g_1}^{\pm 1}, \dots, \Phi_{g_{r+c}}^{\pm 1}]$ 中的 $k(M)$。

证明。定理 8.6 的证明给出了一个满射 $E_t : L \to L$ 使得 $E_t(p)$ $\in$的支集$\Theta_p$以及 $h_b(p) = \langle b, E_t(p)\rangle$ 对于 $b \in K_t$成立。令 $s$出现在 $\phi_a \phi_b$中，且 $b \in K_t \cap M$成立。关于 $\Theta_p$ 在 $Y$ 上的正则函数不等式

$$\langle s - b, E_t(p)\rangle \ge h_s(p) - h_b(p) \ge h_a(p) \qquad (p \in L).$$

若 $a \in K_t$，则满射性意味着 $s = a + b$，这是通过对格基取正负两种符号得到的。根据定理 9.4的零位移规则，系数为一。因此，直子代数是 $K_t \cap M$的半群代数，因为不同标签处的元素彼此独立。 $g_j$ 构成格基。可变坐标给出非负指数，而单位坐标允许取正负两种符号。

对于任意 $a$，取固定格基的正向量和负向量在 $E_t$ 下的原像。相同的不等式将 $s - b$ 的所有坐标界定在与 $b$无关的范围内。随后，通过充分大的内部倍数 $b$ 进行平移，将每个输出都送入 $K_t$。因此，$\Phi_b \Phi_a$ 属于直子代数，而 $\Phi_b$ 是所指生成元的一个单项式。相除即可证明 Laurent 属于性。□

对于返回判据，我们仅在初始种子及其紧邻$\widehat{}$处使用命题 8.6 适用于这些种子。记 $x_i' = F_i / x_i$ 为首次变异伴随对象， $a_i$ 为其在正向直锥上的斜率， $c_i \in k^\times$ 为其在 $x^{a_i}$处的系数。令 $C_i = k[x_j^{\pm 1} : \ j \ne i, \ j \text{ 可变}][u^{\pm 1}]$。

**定理 9.7。** 存在一个非零的 $H_i^* \in C_i$，满足 $\Phi_{a_i} = H_i^* / x_i$。将其他可变坐标取倒数后，有

$$R[x_j^{-1} : j \ne i] = C_i[x_i, H_i^* / x_i].$$

特别地，以下条件等价。

(1) 标记反向代数等于 $k[U]$。(2) $\Phi_{a_i} = c_i^{-1}x_i'$ 对每个可变的 $i$ 都成立。(3) $F_i \mid H_i^*$ 对 $C_i$ 中每个可变的 $i$ 都成立。

因此，首个突变元标签处的迹决定了增广反向代数是否在给定的环面标记下重新覆盖源。

证明。定理 8.6 给出 $P_{a_i} = \mathrm{Newt}(x_i')$。该多面体具有常数 $x_i$次 $-1$。定理 9.4 给出了 $\Phi_{a_i}$ 及 $\mathrm{Newt}(H_i^*) \subseteq \mathrm{Newt}(F_i)$ 的所述形式。

初始反向图表给出 $x_i$、所有其他可变坐标，以及其逆元对应的单位特征标。将其他可变坐标取逆后，所述等式的左侧包含 $C_i[x_i, H_i^*/x_i]$。第 $i$ 条边上的两个源种子具有相同的未变坐标斜率。根据命题 9.6，该局部化包含于两者之中 $C_i[x_i^{\pm 1}]$和 $C_i[(H_i^*/x_i)^{\pm 1}]$。通过比较 $x_i$ 的每个幂的系数可知，它们的交集恰为 $C_i[x_i, H_i^*/x_i]$。这也涵盖单位 $H_i^*$。

若 $R = k[U]$，定理 8.6 确定了支集为 $P_{a_i}$、且归一化后唯一的正则多项式 $c_i^{-1}x_i'$。这证明了第二个条件，而第二个条件蕴含第三个条件。反过来，若 $H_i^* = F_iQ_i$ 且 $Q_i \in C_i$，则乘积的牛顿多面体是闵可夫斯基和。因此 $\mathrm{Newt}(F_i) + \mathrm{Newt}(Q_i) \subseteq \mathrm{Newt}(F_i)$。有界性迫使 $\mathrm{Newt}(Q_i) = \{0\}$，故 $Q_i$ 是一个标量。$x^{a_i}$ 处的系数确定该标量为 $c_i^{-1}$。由此，借助命题 9.6，反向函数在初始环面及其直接邻域上都是 Laurent 函数。它们的并集包含正规簇 $U$ 的每个余维一的点。因此 $R \subseteq k[U]$。定理 5.2 应用于定理 9.4 中的相容锥和滤子，并由此证明两者相等。□

对于引言中的秩一源 $xx' = 1 + u + v$，我们可以计算出每个反向函数。记 $X$，$U_1$，$U_2$ 为与 $x$，$u$，$v$对偶的环面特征。对于 $p = (i,\ j,\ \ell)$，令$d = \max(0,\ -j,\ -\ell)$。命题 4.4 给出

$$\Theta_p = X^i U_1^j U_2^\ell (1+X)^d = X^i U_1^{j+d} U_2^{\ell+d} W^d, \qquad W = \frac{1+X}{U_1U_2}.$$

生成元 $X^{\pm 1}$，$U_1$，$U_2$，$W$均属于这些 θ 函数。因此，正向镜像 $Y$的坐标环为 $k[X^{\pm 1}, U_1, U_2, W]/(U_1U_2W - 1 - X)$。事实上，消去 $X$可将此环识别为 $k[U_1, U_2, W, (U_1U_2W - 1)^{-1}]$，它根据 $W$的公式嵌入指定的 Laurent 域。特别地，$Y$ 是光滑的。

取 $U_1$，$U_2$ 为可变坐标，并取 $X$ 为指定单位。两个普通交换式为 $1+X$。它们的交换 Laurent 多项式分别为 $(1+X)/U_2$ 和 $(1+X)/U_1$，因此在任一指标处突变都会得到 $W$。这三个种子环面共同覆盖了 $U_1$，$U_2$，$W$ 中至少两个非零的轨迹。其补集的余维为二，而将任一可变坐标取逆即可得到所需的单交换模型。根据命题 $Y$ 9.1，环面体积形式可延拓穿过 。因此，我们可以将推论 4.5 应用于这两个相等的交换式。在原坐标中，这给出

$$\Phi_a = x^{a_x} u^{a_u} v^{a_v} (1+u+v)^{\max(0,-a_x)} \qquad \big(a = (a_x, a_u, a_v) \in M\big).$$

两个 Laurent 标记在正正交象限上一致，在该区域内，二者都会将每个 theta 函数映射为其标签的特征。特别地，$\Phi_{-e_x} = (1+u+v)/x = x'$，因此定理 9.7 给出了标记回返。

交换 $G = 1 + u + v + 2uv$ 给出一个光滑的秩一源，其正向镜像是奇异的。事实上，$G$ 在 $v$ 中是本原且线性的，并且 $\partial G/\partial v = 1 + 2u$ 在 $G = 0$上非零。其 Newton 多边形是单位正方形，因此命题 4.4 给出 $\Theta_{(i,j,\ell)} = X^i U_1^j U_2^\ell (1+X)^d$，其中 $d = \max(0, -j) + \max(0, -\ell)$。由此可知，$k[Y]$ 由 $X^{\pm 1}$、$U_1$、$U_2$ 以及$W_h = (1+X)/U_h$ 生成，其中 $h = 1$为 2。消去 $X$ 得到

$$k[Y] = k[U_1, U_2, W_1, W_2, (U_1W_1 - 1)^{-1}]/(U_1W_1 - U_2W_2).$$

事实上，右侧的环是一个整环，而对 $U_1U_2$ 进行求逆即可恢复标记劳朗环。原点是 $Y$ 的一个常点。定理 6.1 仍然给出 $P_a = Q_a$ 对每个$a \in M$。

## 10. Recovering effective numerical curve classes

**10.1. 从边界分次恢复曲线类。** 将 theta 乘积增广后，会把每个曲线参数都设为一。为了恢复一条贡献曲线的类，我们使用它与边界的交数。Keel 和 Yu 的分次根据输入标签和输出标签计算这些交数。

设 $U$ 是一个光滑仿射对数 Calabi–Yau 簇，包含定义在特征零的代数闭域 $k$ 上的稠密分裂环面。选择一个 $U$的光滑射影紧化$U$，并将其简单正规交边界写作 $D_1 + \cdots + D_s$，其中 $D_j$是其素分量。在整一循环模 数值等价的群 $G = N_1(U, \mathbb{Z})$ 中，如果两个循环与每个 Cartier 除子的交数都相同，则它们具有相同的类。由曲线的非负和表示的类构成有效幺半群 $Q \subset G$。在其幺半群环 $R = \mathbb{Z}[Q]$ 中，基元素按 $t^\beta t^{\beta'} = t^{\beta+\beta'}$相乘。

记 $H_R = \bigoplus_m R\vartheta_m$为对子（$U$，$\sum_j D_j$）的 Keel–Yu 代数。对于骨架标签$m$，记 $D_j^{\mathrm{trop}}$（$m$）为相应赋值在 $D_j$ 于 $U$上的中心处局部方程的取值。由于局部单位的取值为零，该取值与方程的选择无关。令 $h$（$m$） $=$（$D_j^{\mathrm{trop}}$ （$m$））$_{j=1}^{s}$。由 Keel 和 Yu 的边界分次、[27, 引理 16.1 和定理 16.2], 中的每一项 $t^\beta\vartheta_r$ 在 $\prod_i \vartheta_{p_i}$ 中都满足

$$(D_j \cdot \beta)_j = \sum_i h(p_i) - h(r). \tag{10.1}$$

因此，只要边界交能够区分数值曲线类，这些标签就确定了 $\beta$。我们证明当 Pic($U$) $= 0$ 时，这在整数意义下成立。

**引理 10.1。** 如果 皮卡群($U$） $= 0$，则交映射 $w\colon\ G \to \mathbb{Z}^s,\ \beta \mapsto$ （$D_j \cdot \beta$）$_j$ 是一个分裂单射，其余核为 $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}$（$U$）$^\times/k^\times, \mathbb{Z})$。

证明。 簇 $U$ 是有理的。我们首先证明其皮卡群是有限秩自由群，并且交将 $G$ 与 Pic($U$) 的整对偶相识别。单射性由数值等价推出。其余断言对射影空间成立，而弱分解将其归结为在光滑中心 [1, 上进行爆破时的不变性1]定理 0.11]。

令$X\pi \dashrightarrow \widetilde{X}$ 是这样的一个爆破，其例外除子 $E_i$ 位于余维至少为二的不可约分支$\widetilde{}$之上。除子序列给出 Pic($X$) $= \pi^*$ Pic($X$) $\oplus \bigoplus_i \mathbb{Z}[E_i]$。事实上，减去一个除子的推前的拉回后，所得为例外除子；而将一个主关系推前，则得到 $X$上的相应主关系。 $X$ 上的每条整曲线都可提升为其上的次数为一次的一循环。对于包含在中心内的曲线，取其函数域上例外射影空间中一个有理点的闭包。否则取其严格变换。根据投影公式，这些提升在 $\pi^*$Pic($X$) 上给出所规定的值。 $E_i$ 纤维中的一条直线在 $E_i$ 上的次数为 $-1$ ，而在其他直和项上的次数为零，因此可以独立地规定所有例外类上的值。反过来，将 Pic($X$) 上的一个泛函在例外直和项上延拓为零，在 $X$ 上实现它$\widetilde{}$，然后将所得一循环推前。这证明了不变性。

由于 $\overline{U}$ 是正规的，且皮卡群($U$) $= 0$，除子局部化给出

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(U)^\times/k^\times \longrightarrow \mathbb{Z}^s \xrightarrow{e_j \mapsto [D_j]} \mathrm{Pic}(\overline{U}) \longrightarrow 0.$$

由于皮卡群($U$)是自由的，该序列分裂。取其整对偶即可得到所述结论 . □

记 $H_1 = \bigoplus_m \mathbb{Z}\psi_m$ 为 $H_R$ 在 $t^\beta = 1$处的增广。将曲线幺半群中的元素取逆，可得到位于 $\mathbb{Z}$上的系数环面 Spec $\mathbb{Z}[G]$ 。Keel、White 和 Yu 指出，在他们的平凡皮卡群示例 [26, §21 中，环面上的纤维是同构的，而此前

猜想 21.9]。以下积分公式可以恢复有效幺半群环中的系数。

**推论 10.2**。 假设 皮卡群$(U) = 0$。选取一个整值截面 $\rho\colon \mathbb{Z}^s \to G$ *of* $w$，并记 $d(m) = \rho h(m)$。若 $\prod_i \psi_{p_i} = \sum_r n^r \psi_r$，则

$$\prod_i \vartheta_{p_i} = \sum_{r\colon n^r \neq 0} n^r t^{\sum_i d(p_i) - d(r)} \vartheta_r.$$

求和中的每个指数都属于 $Q$。同态 $\vartheta_m \mapsto t^{d(m)}\psi_m$ 将 $H_R$与 $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} H_1$中的 $\bigoplus_m R\, t^{d(m)}\psi_m$ 对应起来。

证明。 对于固定的标签 $p_i$ 和 $r$，边界分次（10.1）确定了 $w(\beta)$中对 $\vartheta_r$ 在$\prod_i \vartheta_{p_i}$中的系数有贡献的每个类。由于 $w$ 由引理 10.1可知是单射，因此只有一个类 $\beta$ 可能有贡献。应用 $\rho$ 即可恢复该类。因此，特化保留了该单个有效类的系数。乘积公式证明了乘法性，而 $\psi_m$ 的线性无关性则给出单射性并确定其像。 □

某些 $d(m)$ 可以位于 $Q$之外，这解释了嵌入中使用群环的原因。增广仅对曲线变量进行特化。LP 种子的指定单位仍具有其指定值。

10.2. **曲线格与特征格上的高斯赋值**。 选择命题 A.5 的紧化和局部Laurent图表，并假设 Pic$(U) = 0$。令 $L$ 为源环面的余特征格。选择一般点 $\xi$，使其位于命题 A.3 的负顶点 $C$ 处的法锥内部。记 $V_m = V_{\xi,m} \in \mathbb{Z}[Q][L]$ 为标签为 $m$ 的 theta 函数在 $\xi$ 处的图表中按曲线类展开的展开式。其单项式具有 $t^\beta z^e$ 的形式，曲线类为 $\beta \in Q$，特征指数为 $e \in L$。记 $\Theta_m = \sum_e c_{m,e} z^e$ 为其增广。对于 $p \in C \cap L$，令 $\delta_p$ 为 $V_p$ 的直项的数值类。

**命题10.3**。 存在唯一的同态 $\ell\colon L \to G$，使得 $\ell(p) = \delta_p - d(p)$在 $C \cap L$ 上成立。于是

$$V_m = \sum_{e \in \operatorname{Supp}\Theta_m} c_{m,e}\, t^{d(m)+\ell(e)} z^e.$$

因此， $\Theta_m$ 的每个指数都出现在某个有效数值类中。$V_m$ 的牛顿多面体是Newt$(\Theta_m)$ 在 $e \mapsto (d(m) + \ell(e)\ e)$ 下的像。

设 $K$ 是一个包含 $\mathbb{Q}$的域，其实赋值 $v$ 在 $\mathbb{Q}^\times$上取零。对于同态 $\chi\colon G \to K^\times$，将 $t^\beta$ 特化为 $\chi(\beta)$，得到 $V_m^\chi$。记 $\gamma = v \circ \chi$。 $v$的权重为 $b \in L^*_{\mathbb{R}}$ 的高斯延拓是 $\nu_b(\sum_e u_e z^e) = \min^{u_e \neq 0}(v(u_e) + \langle b, e\rangle)$。对于任意系数为 $a_m \in K$ 的非零有限和，

$$\nu_b\left(\sum_m a_m V_m^\chi\right) = \min_{a_m \neq 0}\big(v(a_m) + \gamma(d(m)) + h_{b+\gamma\circ\ell}(m)\big), \qquad h_w(m) = \min_{e \in \operatorname{Supp}\Theta_m} \langle w, e\rangle.$$

证明。 对于 $p \in C \cap L$，命题 A.3 给出 $\Theta_p = z^p$。有效系数的正性给出 $V_p = t^{\delta_p} z^p$ 唯一的 $\delta_p \in Q$。将标量扩张到 $\mathbb{Z}[G]$后，将推论 10.2 中同构的逆元与局部展开复合。所得同态将 $\psi_m$ 映射为 $t^{-d(m)}V_m$。在忠实增广图表中，对于 $p$，$p' \in C \cap L$。因此， $p \mapsto \delta_p - d(p)$ 在那里是可加的。幺半群 $C \cap L$ 生成 $L$，因为任意格点经过内部格点的某个充分大倍数平移后都能落入 $C$ 。这证明了 $\ell$的存在性与唯一性。

增广展开再经 $z^e \mapsto t^{\ell(e)} z^e$ 后，在 $p \in C \cap L$的$\psi_p$ 上与该同态一致。对每个 $m$，将 $\Theta_m$ 乘以 $z^{Nb_0}$，其中 $b_0$ 为固定的内部格点，且 $N$足够大，使得其所有平移后的指数都落在 $C$中。此时 $\psi_{b_0}^N \psi_m$ 是直元素的线性组合。这两个同态在该乘积上一致，且 $\psi_{b_0}$的像是 $\mathbb{Z}[G][L]$中的单位。这就证明了该展开。由于 $V_m \in \mathbb{Z}[Q][L]$，所出现的所有类都是有效的。取凸包即得牛顿多面体。

非零整数系数的赋值为零。在一般平移权重 $b+\gamma\circ\ell$处，和式中的每个 $\Theta_m$ 都有唯一的最小化指数，且由定理 A.8可知这些指数互不相同。否则，在有理线性组合中便可消去共同的最低项。乘以 $a_m$ 保持该指数。因此，具有最小赋值的各项具有不同的特征，不能相消。对固定系数，两边都是 $b$的有限多个仿射函数的最小值。由连续性可得该公式对每个权重成立。□

例如，取 $K=\mathrm{Frac}(k[G])$，赋予 $G$上任意权重所对应的高斯赋值，并且$\chi(\beta)=t^{\beta}$。该命题给出了 $G\oplus L$上所有高斯权重的最小值公式。因此，对于非零有限和 $\sum_m a_m V_m$，若 $a_m\in k[G]$，其牛顿多面体就是各非零直和项的牛顿多面体的凸包。特别地，这也适用于$a_m\in k[Q]$。

**推论 10.4.** 设 $U$ 是代数闭域 $k$ （特征为零）上的光滑仿射对数 *Calabi–Yau* 簇。若 $U$ 含有一个稠密分裂环面，且 皮卡群$(U)=0$，则其增广镜像代数 $B_k(U)$ 是有限生成正规整环。

证明。将有限生成的 $R$-代数 $H_R$ 在 $t^{\beta}=1$ 处特化，得到有限生成的$k$-代数 $B_k(U)=k\otimes_{\mathbb{Z}}H_1$ [27, 定理 16.8]。由于增广与紧化的选择无关，我们可以选取一个光滑射影紧化，使其边界为有效丰沛 Cartier 除子 $F$ [27, 的支集；见命题 17.3 和引理 19.2]。在系数环面上，推论 10.2 将镜像族识别为增广代数的标量扩张。对于域 $F$，令 $F(G)$ 表示群环$F[G]$的分式域。由 [27, 命题 19.1], 可知， $\mathbb{Q}(G)$上的一般纤维是正规域，因此在特征零时几何正规。于是 $k(G)\otimes_k B_k(U)$ 是正规的，并且正规性下降到$B_k(U)$。

还需证明谱是连通的。通过赋予 $B_k(U)$ $\psi_p$ 次数$F^{\mathrm{trop}}(p)$ 对其进行过滤，该次数根据 $p\neq 0$ [27, 引理 15.2] 为正。对于 $t^{\beta}\vartheta_r$ 中的项 $\vartheta_p\vartheta_q$，边界分次给出 $\deg\psi_p+\deg\psi_q-\deg\psi_r=F\cdot\beta$。由充足性可知，该差恰好在零类中消失。因此，伴随分次代数具有[27, 命题 15.12]的零类乘法，并且是 $k$上的既约 Stanley–Reisner 环。正过滤次数的幂等元必有一个非零的首项形式，而其平方为零。因此，每个幂等元都属于零次数，即为 $k$。连通的诺特正规环是整环。□

## 11. Variation of the exchange coefficients

**11.1. 一般常值性与源截面空间。** 设 $\mathcal{P}$ 为不可约复簇。在固定的标记可变坐标 $x$和单位坐标 $u$下，假设普通交换具有多项式角代表

$$G_{i,t}=\sum_{a\in A_i}c_{ia}(t)(x,u)^a\quad(t\in\mathcal{P}),\qquad 0\in A_i\subset\mathbb{N}^{r+c},\qquad c_{ia}\in\mathcal{O}(\mathcal{P})^{\times}.$$

假设每个纤维都定义了一个光滑满上 LP 源 $U_t$，且满足定理 4.1的假设。我们在各纤维共有的标记 Laurent 坐标中比较它们的增广镜像。

**定理 11.1。** 在 $\mathcal{P}$的一个非空 *Zariski* 开子集上，带标记的前向代数以及所有前向、倒数和最小源 *Newton* 多胞体均为常数。除去可数个真闭子集的并集后，各标签处的前向 *Laurent* 多项式本身都相同。

假设存在整数 $n_{ia}$，满足

$$\sum_{a\in A_i}n_{ia}=0\quad for\ each\ i,\qquad \sum_{i,a}n_{ia}a=0,\qquad \prod_{i,a}c_{ia}^{n_{ia}}\ nonconstant\ on\ \mathcal{P}.$$

那么存在两个非常一般的纤维，它们具有相同的标记的前向$\theta$基，但其源上代数无法通过任何对角环面平移相互识别。

我们首先研究迹在一个族中如何变化。

**命题 11.2**。对于满足第 *3* 节假设的代数系数族，在每个光滑完整上纤维上固定坐标和指定单位。对于每个固定的接触阶列表，其迹下半连续。对于每个正整数 $d$，其取值低于 $d$ 的轨迹是闭集，并可通过在有效基域上进行消元来计算。

证明。记 $\mathcal{P}$ 为参数底空间，并记 $M$ 为不同标记位置和环面评价点构成的不可约空间。定理 3.1 的关联方程及其开条件定义了一个位于 $\mathcal{P} \times M$ 上的相对概形。利用交换支撑集的并集，可以一致地清除分母，因为额外的清除因子在指定开轨迹上的根处均为单位。限制到余式方程关于未知首一系数的雅可比矩阵可逆的开子概形。根据平方表示，其投影是´étale 的。在 $M$ 的每个几何纤维的一般点上，这个开子概形包含所有计入的解。事实上，在定理 3.1 的证明中，固定定义域映射空间在这些映射处是光滑的，且评价映射是 ´étale 的，因此固定评价方程的每个根都是单根。

取这个 ´étale 子概形在 $\mathcal{P} \times M$ 上的 $d$ 重纤维积，并去掉成对对角。它在 $\mathcal{P} \times M$ 中的像是开集。它到 $\mathcal{P}$ 的投影也是开集，因为 $\mathcal{P} \times M \to \mathcal{P}$ 光滑。几何点 $t$ 属于此投影，当且仅当第一个开像在 $t$ 上的纤维非空。由 $M$ 的不可约性，这等价于在一般标记处有 $d$ 个互不相同的单根，并对该纤维进行评价，因此也等价于迹至少为 $d$。这两个像都是由多项式方程和不等式定义的可构造投影，因此可通过有效消元计算它们及其补集。若可变缺陷为负，或单位的阶无法平衡，则迹为零。□

**推论 11.3**。固定标记坐标、指定单位和多项式角支集 $A_i$。在定理*6.1* 的光滑满上 *LP* 源中，具有这些支集的源里，作为标记 *Laurent* 环 $\mathbb{Z}[L]$的子环出现的整增广前向代数只有有限多个。其数量有一个可计算的上界，该上界仅取决于 $A_i$。对于这些簇的任意有限型族，底空间可分层为有限个局部闭集，在每个局部闭集上，标记代数、所有正向 *Newton* 多面体以及所有多面体$P_a = Q_a$ 均为常数。

证明。设 $\Delta$ 是 1 的支撑集的凸包，$x_i$，$G_i/x_i$，$u_j$，$u_j^{-1}$对所有 $i$，$j$。对于所考虑的交换系数的每一种取值，这些函数都是正则的。由于每个 $G_i$ 都具有非零常数项，$\Delta$ 包含每个坐标向量的正负两种方向。函数的一般线性组合的牛顿多面体为 $\Delta$，因此是强制的。根据引理3.3，$\Delta$ 的法扇给出一个有限的 θ生成元标签集，该集合仅取决于交换支撑。

对于固定标签 $m$，推论 4.2 中的支撑盒仅取决于 $m$ 和 $A_i$。因此，单个有限的接触列表集 $I$ 就足以计算生成元的 Laurent多项式。对于每个 $I$，交换支撑限定了定理 3.1的关联方程的次数。迹的贝祖界 ´至多给出 $\prod_I (1 + B_I)$ 个可能的迹值组，每一组都决定一个标记代数。在一个族中，根据命题11.2，它们的水平集是局部闭的。

考虑具有相同标记环的两个纤维。对于严格正的分离权重，每个 theta 多项式的最小指数都是其标签，且其最小系数为一。将$\Theta_p$ 在第二个纤维的 theta 基下展开。该展开中的最小标签为$p$，其系数为一。根据赋值独立性（定理 4.10），$\Theta_p$ 在第二个纤维中的牛顿多面体包含于其在第一个纤维中的多面体。交换两个纤维即可证明二者相等。根据定理 $P_a$ 5.4，正向多胞体确定每个 $P_a$；定理 6.1 则给出$P_a = Q_a$。□

定理 *11.1*的证明。 由于 $\mathcal{P}$ 不可约，推论 11.3 中的一个分层是稠密开集。这证明了关于标记代数和多面体的断言。对于每个标签 $m$，确定 $\Theta_m$ 的有限多个迹均有界且下半连续，因此每个迹都在某个非空开子集上取得其最大值。在标签的可数格上取这些开集的交，即可得到所断言的 theta 基一致性。

乘积$\prod_{i,\ a} c_{ia}^{n_{ia}}$在对角平移下以及将每个交换式按标量重新缩放下均保持不变。根据命题1.3，将两个标记源环对应起来的平移，会使它们的交换式至多相差系数单位。对于具有相同有限支集的交换式而言，这样的单位是一个标量。因此，乘积在这两个纤维上必然取相同的值。在 $\mathbb{C}$ 可数个真闭子集的并集的补集在 $\mathcal{P}$中是稠密的。由于乘积不是常数，它在那里至少取两个值。□

**推论 11.4**。 令普通交换式在一个有限型特征零参数簇上代数地变化，并固定坐标和指定单位。假设每个几何纤维（包括一般点上的纤维）都是满足第*3*节假设的完整上 *LP* 代数的光滑谱。该参数簇具有一个由局部闭集组成的有限分层，在每个分层上，增广正向代数都在同一个有限 *theta* 生成元集合中具有相同的整表示。特别地，光滑正向镜像的轨迹是可构造的。对于定义在具有有效多项式消元和初等分解的域上的数据，可以计算这些分层及其光滑性。

证明。 在一个不可约分支的函数域上，首星方程给出一个强制函数。为说明在代数闭包上存在即已足够，固定一个支撑界。相应的截面空间是函数域上线性系统的核。扩张标量会保留该空间中出现的指数集合，而函数域上的一般截面具有这一完整支集。将该函数及其在第一星上的 Laurent 表达式延拓到一个稠密开集，并进一步缩小该开集，以保留交换式和强制函数的支集。按照定理 3.4的记号，我们因此可以在该开集的每个纤维中使用相同的权重 $w$、相同的有限生成元标签集 $H$ 以及相同的界 $D$ 。特别地，集合 $S_D = \{p :\ w(p) \le D\}$ 是固定的。

定理 3.1 计算有限个迹中每一个的通用值。根据命题 11.2，每个迹都在不可约基的一个非空开子集上取得其最大值。在这些开集的交集上，定理 3.4 的关系是常数。对补集的每个不可约分支应用相同的论证。对维数作归纳可得一个有限分层，其中每个分层都可通过消元计算得到。□

11.1.1. 具有指定牛顿多面体界的截面。 令 $\mathcal{P}^\circ$ 为定理11.1 中所述的非空开子集，在该子集上 $P_a$ 为常数。定理6.1 将它们与每个纤维中的最小源多胞体对应起来。记 $V_\Delta(t) = \{f \in k[U_t] : \mathrm{Supp}(f) \subseteq \Delta\}$ 为格多面体 $\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$，并令 $I(\Delta) = \{a \in M : P_a \subseteq \Delta\}$。此集合是有限的，因为$a \in P_a$。

**命题 11.5.** 对于每个格多面体 $\Delta$，空间 $V_\Delta(t)$ 是一个秩为 $|I(\Delta)|$ 的向量丛在 $\mathcal{P}^\circ$ 上的纤维。其构造与基变换可交换。

证明。 在一个纤维中，对每个$a$，选取一个支集包含于 $P_a = Q_a$ 的归一化正则函数 $f_a$ 。这些函数构成定理2.1的基。赋值独立性意味着，线性组合的牛顿多面体是其非零项所对应多面体的凸包。因此 $V_\Delta(t)$ 的基为 $(f_a)^{a \in I(\Delta)}$ ，且维数如所述。

为构造该向量丛，将指数在 $\Delta \cap M$ 中的单项式的系数作为未知数。在指数为 $-h$ 的负可变切片中，其 Laurent系数必须为$G^h_{i,\ t}$ 未改变坐标中的一个商。该切片的坐标最小值和最大值减去 $h$Newt($G_{i,\ t}$) 的相应极值后，所得范围界定了该商的支集。由于交换支撑是固定的，这些界是一致的。将商系数作为额外未知数引入，得到一个由正则函数构成的矩阵 $D_\Delta$ 。每个商都是

唯一的，因此对截面系数的投影将 $\ker D_\Delta(t)$ 与 $V_\Delta(t)$ 识别起来。该矩阵在既约基底上具有常秩。局部地，一个最大秩的子式是可逆的，而所有更大的子式均为零。因此，通过行列变换可将该矩阵分解为一个单位矩阵和一个零矩阵。其核局部上是一个直和项，并且与基变换相容。□

局部分裂还给出了常秩的切条件。对于切向量$v \in T_t\mathcal{P}^\circ$，沿方向 $v$ 对矩阵条目求导，得到 $\partial_v D_\Delta$。由此诱导的映射$h \mapsto [(\partial_v D_\Delta)h]$从 $D_\Delta(t)$的核到其余核为零。更一般地，在既约不可约基底上，当 $P_b \subseteq Q_b(t)$以及定义 $D_\Delta$ 的界保持不变时，有 $\dim V_\Delta(t) \le |I(\Delta)|$。当且仅当对每个 $\Delta = P_a$等式成立时，所有标签都可实现。事实上， $V_\Delta(t)$中的可能最小指数属于 $I(\Delta)$，而等式迫使其中每一个都出现。这些是关于矩阵秩的闭条件，因为等式意味着最大的核维数。诺特性将它们的交集约化为有限个交集。在同时实现的点处，对于 $D_{P_a}$，一个非零的核到余核导数意味着其下一个更大的子式中有一个在一般情形下非零。在这种情况下， $I(P_a)$中的某个标签在稠密开子集上无法实现。最后这个判据适用于仅已知包含关系的族。

**推论 11.6**。 在任意既约仿射子簇 $Z \subseteq \mathcal{P}^\circ$ 上，可以选取归一化倒数函数，使其构成满足一阶星整除条件的 *Laurent* 多项式的自由 $\mathcal{O}(Z)$-基。由 $I(\Delta)$ 索引的成员构成支集在 $\Delta$ 中的截面的一个基。这两个断言都与 $Z$ 的每个剩余域上的特化相容。

证明。 在 $P_b$ 上的向量丛中，在 $b$ 处取系数的映射在每个纤维上都是满射。仿射性给出了一个映射到 1 的整体截面。其 Laurent 多项式 $f_b$ 是归一化的，且支集在 $P_b$ 中。若 $b \in I(\Delta)$，则 $f_b$ 属于 $\Delta$ 上的向量丛。规定界限之外的商系数在每个纤维上均为零，因而在既约底空间上也为零。所得族 $(f_b)_{b\in I(\Delta)}$ 在每个纤维上都是一个基，因此给出了该向量丛的平凡化。每个 Laurent 多项式都有有界支集，由既约性可知，其在 $\mathcal{O}(Z)$ 上的商也具有相同界限。对格盒取并，即得代数的断言。□

11.2. **源法扇的公共细分**。 对于固定的源，当Gauss权重变化时，是否存在一个单独的有限扇，能够描述其所有最小牛顿多胞体的极小面？固定初始特征格 $M$、其对偶 $L$以及一个格分离权重$\omega$。假设带有Laurent系数的完整上代数具有一个截面，其 $\omega$-最小顶点在每个可变坐标中均为负。使用 $Q_a$ 最小牛顿多胞体及其对偶族 $T_p$，它们来自定理2.1 和命题2.4。所有 $Q_a$ 的法扇的公共细分，是指一个有限完备尖有理扇，在该扇上，每个 $Q_a$ 的最小支撑函数在每个锥上都是线性的。各个多面体的维数可能更小。

**命题 11.7**。 设 $p_1$，……，$p_l$ 是非零尖有理锥 $\sigma \subset L_{\mathbb{R}}$的本原射线生成元，并令 $p_* = \sum_j p_j$。所有 $Q_a$ 的最小支撑函数在 $\sigma$ 上都是线性的，当且仅当

$$T_{p_*} = \sum_j T_{p_j}.$$

等式不成立意味着存在一个整数标记 $a$，使得 $Q_a$ 细分了 $\sigma$。有一种仅使用有限一阶星系统的搜索方法，只要公共细分存在，就能构造出它，而无需预先设定界限或预先选择其射线。

证明。当且仅当 $\min_{b\in Q_a}\langle b, p_*\rangle = \sum_j \min_{b\in Q_a}\langle b, p_j\rangle$ 时，这两个多面体在格标签 $a$ 处具有相同的最小值。当且仅当 $Q_a$ 中的某一个点同时取得右侧所有最小值时，等式成立。这等价于其支撑函数在 $\sigma$ 上具有线性性。在所有格权重处最小值相等，当且仅当有理多胞体相等。若包含关系 $T_{p_*} \subseteq \sum_j T_{p_j}$ 是严格的，则较小多胞体外部某个顶点的严格分离会给出一个整数 $a$，使等式不成立。

从任意完备尖有理扇开始。检验其极大锥；若发现不满足条件，则用算出的 $Q_a$ 的法扇细化整个扇。每一步都会严格细分一个锥，而每一步的多面体都可根据一阶星整除条件计算得出。若存在有限公共细分，则将其与起始扇取交。此后每个扇都是该有限扇的粗化，而该有限扇只有有限种粗化，因为粗化后的每个锥都是它的若干个锥的并。因此，严格细化必然终止。程序终止时，每个锥上都成立等式，故所得扇是一个公共细分。□

有限细分性质对于两个族（$Q_a$）和（$T_p$）是对称的。在公共细分上，每个 $Q_a$ 在射线上的取值通过线性性决定其支撑函数。对有限多个相应$T_p$ 的法扇取公共细分后，所有 $T_p$ 的支撑最小值在此处变为线性的，因为在每个原始锥上，这些最小值都是射线取值的非负线性组合。交换两个格即可证明逆命题。特别地，可以在标签空间中仅使用 $Q_{a_*}$和射线多面体 $Q_{a_j}$运行相同的检验。只要存在有限扇，这一方法就能恢复它。

在定理5.4的情形下，使用由ω所暴露的顶点决定的镜像图表。在任意这样的公共细分上，当且仅当 $\mathrm{Newt}(\Theta_p) = T_p$ 在射线生成元以及每个极大锥中这些生成元之和处满足相应条件时，所有倒数多面体都可在源上实现。事实上， $a$ 在所计数多面体上的最小值等于 $P_a$ 在 $p$ 处的最小值。射线及其和处的相等性，依照与 $Q_a$相同的论证，迫使 $P_a$ 的这些最小值同时由同一点取得。于是两个支撑函数在整个锥上均一致，并且在完整扇上， $P_a = Q_a$。反过来，实现性在每个 $p$处给出这些等式。在标签空间上的对偶搜索中，我们检验 $P_{a_*} = \sum_j P_{a_j}$ 在一个锥的生成元及其和处的取值。如果等式不成立，严格分离便提供一个前向多面体 $\mathrm{Newt}(\Theta_p)$，据此进行细分。当搜索终止时， $P_a$ 在标签锥上是闵可夫斯基可加的。通过取乘积并应用关于 $Q_a$的膨胀恒等式，只需在其射线处实现即可。下面给出细分无限持续的示例。

**定理 11.8**。 令普通 *Laurent* 系数 *LP* 交换在一个具有固定标记坐标的有限型参数簇上代数地变化。使用相同的分离 $\omega$ ，并假设所有几何纤维（包括位于一般点上的纤维）都存在一个截面，使得其 $\omega$-最小指数在每个可变坐标中均为负。

（1）对于任意指定的有限集 $E \subset L$，存在一个有限局部闭分层，使得对于每个 $a \in M$ 和每个 $p \in E$，$\min_{Q_a}\langle -, p\rangle$ 同时保持不变。（2）如果一个参考纤维对其所有 $Q_a$都有有限公共细分，那么对于每个标签，具有完全相同 $Q_a$ 的纤维所构成的轨迹是可构造的。一个判定列表由参考纤维的某个此类扇的射线及射线和组成，并在对偶多胞体 $T_p$上进行检验。等价地，可以在上面构造的对偶扇的射线及射线和处检验 $Q_a$ 。（3）如果每个不可约闭子簇的一般几何纤维都有有限公共细分，则存在一个有限局部闭分层，使得对于每个标签 $a$， $Q_a$ 保持不变。该构造在每个连续的一般纤维上找到一个扇。在给定格点权重的有效比较时，这些有限计算可在带有消元和初等分解的有效域上进行。

证明。 在每个不可约分支的函数域上，都存在一个截面，使其在每个可变坐标上的最小指数均为负。事实上，取几何函数域上这样一个截面的有限支撑，在其最小标签处指定系数为一，并将所得的一阶星线性系统下降。将该截面及其在有限星中的表达式延拓到一个稠密开集，并通过进一步缩小使牛顿多面体及其负的最小指数 $v$ 保持不变。这也使修正项的有限支集界保持不变$R_a = x^{a-lv}g^l$，其中 $l$ 按定理 2.1中的方式选取。在任意有限列表的标签处，决定 $Q_a$ 的有界线性系统都可以通过秩检验来检查。对于这些检验，可以使用

普通的 $F_i$，其与关联交换式的比值在未改变的变量中是 Laurent 单位。进行缩小，使一般计算中所用的所有检验的结果在每个几何纤维中都一致。 $T_p$ 的一般计算只使用有限个此类标签，先用于其坐标盒，再用于其分离权。将此应用于 $E$ ，即可使所有相应的 $T_p$ 在一个稠密开集上成为常数。在真闭补集上重复此过程，由于 $T_p$ 在 $a$ 处的最小值是每个 $a$处所要求的值，故可证明 (1)。

对于（2），将（1）应用于指定射线及其和，并选取具有这些多面体参考值的分层。在任何这样的分层上，同一个扇都通过命题11.7的检验。每个 $Q_a$ 因而在这些射线上的支撑函数与参考支撑函数相同，从而在所有权重上也相同。由定义对偶性即可得到逆命题。对于（3），一般纤维上的假设确保该过程在一般点处终止。根据前面的论证，其有限个决定性多面体在一个稠密开集上是常数的。然后对维数进行归纳，并将其应用于补集的每个不可约分支。在一个有效域上，我们可以通过在逐渐增大的格盒中求解第一星线性方程，找到具有所需负最小指数的截面。□

同一个一般比较还给出了一致约化结论。对于 $\mathbb{Q}$ 上的一个种子，将其有限第一星及上面选取的截面延拓到 $\mathbb{Z}$ 的某个局部化上。对于固定的有限$E$，一般计算只使用有限多个矩阵秩，因此删去有限多个素元后仍然成立。在剩余的每个良约化素元处，对于 $E$ 中所有权重上的所有标签，其值都一致。如果特征零纤维具有有限公共细分，则使用其决定性列表，以获得在这些特征下所有 $Q_a$ 的同时一致性。

推论*11.9*。参考纤维测试也适用于有限列表的锥，只要这些锥的像在指定对称性下覆盖所有方向。更确切地说，假设所比较的每个纤维都具有满足 $\phi_g \ \nu_p(\phi_g h) = \nu_{g(p)}(h)\ (h \neq 0)$ 的上代数自同构，其中使用的是相同的映射 $g : L_{\mathbb{R}} \to L_{\mathbb{R}}$。假设 $g$ 在 $\omega$ 附近由一个幺模整数线性映射 $D_g$给出，并且 $g(\omega)$ 位于该纤维所使用的负顶点锥内。令 $\sigma_1, \ldots, \sigma_b$ 为参考纤维通过命题 *11.7* 测试的尖有理锥。若集合 $g(\sigma_i)$ 覆盖 $L_{\mathbb{R}}$，则在原始锥的射线及射线和处进行比较，即可确定所有 $Q_a$ 相等。像的集合可以是无限的。

证明。在每个纤维上使用带有多面体 $Q_a$ 的归一化源基 $(f_a)$。每个 $f_a$ 在所选负顶点锥的内部都有唯一的最小顶点 $a$。因此，通过在 $\omega$ 的邻域上取支撑最小值， $\phi_g f_a$ 在 $\omega$ 处的最小指数为 $D_g^t a$。根据陈述中的赋值恒等式，对于每个高斯赋值，输送后的基都是线性无关的。因此 $\mathrm{Newt}(\phi_g f_a) = Q_{D_g^t a}$。为证明极小性包含关系的反向包含，将带有多面体 $Q_{D_g^t a}$ 的规范化截面在输送后的基下展开。不同的最小指数表明 $\phi_g f_a$ 出现，而所有权重处的线性无关性给出相反的多面体包含关系。于是 $\min_{Q_a}\langle -, g(p)\rangle = \min_{Q_{D_g^t a}}\langle -, p\rangle$。按照定理，有限次比较首先给出所列锥中 $p$ 的每个标签处的相等性。该恒等式随后给出每个像上的相等性。对于诱导带标记上代数自同构的一系列种子突变，根据引理 1.6，赋值恒等式成立。□

在不可数代数闭域上的不可约参数簇中，所有$Q_a$ 即使没有公共细分，在非常一般的点处也都与几何一般点处的情形一致。事实上，(1) 给出了一个稠密开集，在该集合上每个 $T_p$ 都取一般值，并且有可数多个整数 $p$。在这样的域上，对于 (3)，只需假设每个闭点处都存在有限公共细分。对于每个固定的有理扇，根据 (1) 和命题 11.7，其轨迹是可构造的。有可数多个有理扇，并且任何不可约子簇都不可能在其闭点上被可数多个真闭子集覆盖。因此，在每个这样的子簇上，至少有一个扇轨迹包含一个稠密开集，从而在其几何一般纤维上满足该假设。对相邻图表中的可数多个有界支撑应用同样的论证，即可将这种截面的存在性从闭点下降下来。

沿标记环面的每个对角平移轨道也具有精确不变性，因为将单项式系数乘以非零特征值既不会改变它们的指数，也不会改变在 $\omega$ 处的阶，而该平移会将两个完整上代数相互对应。

即使没有这一有限性假设，仍然可以比较所有截面空间的维数。固定一个参考纤维 $s$，并将 $V_\Delta(t)$ 记为纤维 $t$ 上支撑集包含在格多面体 $\Delta$中的正则函数。限制在一个普通交换支撑集固定的局部闭参数集上。轨迹

$$\{t : \dim V_\Delta(t) \geq \dim V_\Delta(s) \text{ 对每个格多面体 } \Delta\} \text{ 均成立}$$

是闭的。对于每个固定的多面体，将切片系数写成交换幂与有界辅助商的乘积。在这个参数集上，支撑界是一致的。每个非零交换幂的乘法都是单射，因此对于给定截面，辅助商是唯一的。由此，维数等于一个有限矩阵的核维数，而秩轨迹的交集是闭的。根据诺特性，其秩条件中只需有限多个即可，无须预先给出所需多面体的上界。对每个多面体维数相等，等价于每个带标签的 $Q_a$相等。事实上，当 $a$ 是 $\Delta$的 $\omega$-最小顶点时，减去 $(\Delta \cap M) \setminus \{a\}$ 的凸包对应的维数，就能检验是否存在一个在 $a$处系数非零的截面。对于空支撑，我们取维数为零。分别在两个纤维上使用最小的多面体，即可得到两个包含关系。反向的维数不等式对于单个多面体而言是开条件。仅凭诺特性，无限多个此类条件的交集并不会因此获得一个有限的决定集。

11.2.1. 无穷多个法向方向。 根据推论 2.2，每个可达种子变量都有标记牛顿多胞体 $Q_a$ 作为其最小指数 $a$。如果 $Q_a$ 具有公共有限细分，则所有可达坐标赋值在其各个锥上都是线性的。根据引理1.6，对于任何固定的可达标记，结论同样成立，因为从该标记到初始标记的热带映射及其逆映射在有限扇上都是分片整线性的。

**定理 11.10**。 在一个具有域上 *Laurent*系数的完整上 *LP*代数的可达种子处，选择两个可变变量 $x$、$y$。令 $d > 0$ 为普通交换中 $y$ 的次数，并令 $e > 0$ 为交换中 $x$ 的次数 $y$。如果 $de \geq 4$，则在任意分离权重处，最小源多胞体的法扇 $Q_a$不存在有限公共细分。在定理 *8.6* 的标记计数情形中，倒数多面体 $P_a$ 同样不存在有限公共细分或由有限个定义法向量组成的列表。完整标签空间也不存在由有理锥组成的有限覆盖，使得在每个锥上，两个族中的至少一个 $P$、$Q$ 是闵可夫斯基可加的。

证明。固定其他种子坐标。在它们的有理函数域上，两个普通交换式是一元多项式，且具有非零常数系数和首项系数。 $x$ 处的交换式在 $y$中没有 LP 归一化因子。这样的因子将要求 $y$ 处的交换式整除 $y$ 中 $x$处交换式的常数系数；这是将 LP 归一化检验模 $y$ [28, 应用引理 2.7 和第 §2.2] 节所得的结果。 $x$ 中的正次数多项式若具有非零常数项，就不可能整除 Laurent 多项式环中的非零标量。反方向同样成立。在 $y$处进行变异时，LP 规则将相反的交换式 $F(y)$替换为 $z^d F(c/z)$（相差该域中的一个非零标量），其中$z$ 是新坐标， $c \neq 0$ 是在 $x = 0$处取值的 $y$ 处关联交换式。代换中移除的所有因子都整除标量 $c$，而因子 $z^d$ 给出一个非零常数项。变异指标处的交换式保持不变。因此，在交替变异过程中，次数保持不变，首项系数和常数系数也始终非零。

在其他坐标权重均为零的平面上，将初始的两个权重记为 $h_0, h_1$，将该序列中后续的坐标值记为 $h_j$。Laurent 高斯传输给出

$$h_{j+1} = b_j \min(0, h_j) - h_{j-1}, \qquad b_j \in \{d, e\} \text{ alternating.}$$

只有首项系数和常数系数会影响这个最小值。每一步都是平面上的分片单模同胚。对于 $k \geq 2$，取由 $(h_{k-1}, h_k) = (-1,0)$ 生成的射线的逆像。在该点，所有先前的 $h_j, 0 \leq j < k$ 都严格为负。为此，从 $q_0 = 0, q_1 = 1$ 开始，将交错系数周期性延拓，并令 $q_{l+1} = b_{k-l}q_l - q_{l-1}$，这样一来，当各项为正时，它们恰好就是 $-h_{k-l}$。偶子序列和奇子序列满足

$$q_{l+4} = (de-2)q_{l+2} - q_l, \qquad q_2 = b_{k-1} > 0, \quad q_3 = de - 1 > 1.$$

两个子序列都严格递增，因为 $de-2 \geq 2$。这证明了这些符号，包括 $de = 4$的情形。

在此射线附近，从（$h_0$，$h_1$）到（$h_{k-1}$，$h_k$）的映射因此是线性且可逆的。线性函数 $h_k$ 在该射线两侧变号，从而在$h_{k+1}$ 的两侧产生不同的线性表达式。随着 $k$ 变化，这些射线彼此不同，因为在第 $k$条射线上，第一个零点出现在 $h_k$处。将一个有限扇限制在该平面上至多得到有限条射线，这与上述必要条件相矛盾。在计数情形下，所有这些变量的牛顿多面体也分别是相应的 $P_a$，根据定理8.6。固定的有限组定义法向量至多允许有限个法锥，而每个法锥由某个面上处于激活状态的子集生成，因此会给出一个有限公共细分。

最后，假设这样的标签空间有限覆盖确实存在。对每个锥选取有限个整数生成元，并利用每个锥上的加性族，对其生成元处的 $P$-多面体或 $Q$-多面体的法扇取公共细分。在每个可达种子变量的标签处，这两个多面体相等。因此，根据命题8.13，每个这样的多面体都是覆盖中某个锥上所选多面体的非负 Minkowski 组合。其支撑函数在公共细分的每个锥上都是线性的。刚刚证明的无穷多个不同弯折排除了这种可能性。□

定理 8.9 之后的光滑族包含这样的例子：在每个至少为二的可变秩中，两个相互次数都至少为三。因此，$P_a = Q_a$ 对所有标签成立，与无穷多个不同的法向方向相容。

11.3. **算术障碍与标记回返**。在代数闭域 $k$ 上工作，该域的特征为 $\mathbb{Q}_{>0}$，并将 $\mathbb{Q}_{>0}$ 视为 $k^\times$的子集。令 $U$ 为满足命题 4.6假设的标记源。回顾一下，当正向镜像 $Y$ 光滑，且其增广计数代数等于定理 $k[U]$ 9.4的 Laurent 图表中的 $k[U]$ 时，标记回返成立。在比较标记时，我们称给定标记下的回返为严格回返。

**命题 11.11**。设 $k[U]$ 是带有 *Laurent* 系数的标记种子的完整上 *LP* 代数。令 $h$为某个可达种子中的单项式，其可变指数非负，而指定单位的幂任意取整。令 $a$ 为 $\tau_h$在正向直锥上的斜率，并令 $c_h$ 为初始图表中 $x^a$ 的系数。若标记回返成立，则 $c_h^{-1}h = \Phi_a$，因此该归一化单项式在初始图表中具有非负的整数 *Laurent* 系数。

使用初始环面的整个特征格 $M$ 将原始普通交换式写成 $F_i = \sum_{\alpha \in A_i} c_{i\alpha} x^\alpha$。如果初始环面经过某个平移后满足标记回返，则每个满足$(n_{i\alpha})$ 的整族

$$\sum_{\alpha \in A_i} n_{i\alpha} = 0 \quad for\ each\ i, \qquad \sum_{i,\alpha} n_{i\alpha}\alpha = 0$$

满足 $\prod_{i,\ \alpha} c_{i\alpha}^{n_{i\alpha}} \in \mathbb{Q}_{>0}$。

证明。由推论 8.4，$a$ 属于选定种子的闭锥。定理 8.6 将$c_h^{-1}h$ 确定为支集在 $P_a$ 且在 $x^a$处系数为一的唯一正则函数。定理 9.4为 $\Phi_a$给出了相同的支撑界和系数，而标记回返使 $\Phi_a$ 在 $U$ 上正则。因此，$c_h^{-1}h = \Phi_a$ 的 Laurent 系数均为非负整数。

^首次变异伴随对象 $F_i/x_i$ 是一个标量、一个 Laurent 单项式与 $F_i$的乘积，因此同一交换中的系数比值对二者相同。通过环面点 $t$ 对 $x$ 进行平移，会将 $c_{i\alpha}$ 乘以 $t^{\alpha}$，对于该次交换而言还要乘上一个公因子。关于$n$ 的两个关系会消去所有这些因子。因此，在带有回返的平移标记中，可以使用归一化的第一伙伴的非零整数系数来计算该乘积，而这些系数全都为正。□

在一个具有固定支撑集且系数均非零的不可约复参数簇中，假设这些源在某个非空开集上满足所述正向假设。如果所指示的某个乘积在该参数簇上是非常数有理函数，那么该开集中经环面平移后能够回返的点，包含于可数个真闭子集的并集中。事实上，每个正有理数都会在定义域轨迹上切出一个真闭子集。对于固定的多项式角支撑集，定理 11.14 确定了发生平移回返时系数不变量的有限个联合取值。

11.3.1. 无标记回返的光滑例子。

**定理 11.12**。 对于每个可变秩 $r \geq 2$，都存在光滑仿射完全上部 *LP* 源，其具有一个多项式角，且其增广正向镜像是光滑的，并且每个倒数系统都有唯一的归一化解；然而，初始环面经过任意对角平移后，标记回返均不成立。对于满足定理 *6.1* 假设、其正向镜像光滑且具有所需体积形式的任何其他多项式角源，在乘积标记下取乘积时，标记回返的障碍仍然存在。

证明。 在$\mathbb{C}$上工作。取一个指定单位 $u$，令 $A = 1+u$ 和 $B = 1+\lambda u$，并选取 $\lambda > 0$无理数。在 $x$，$y$处的两个普通交换式为 $AB + y$和 $A + x$。它们是不可约的，因为它们关于相反变量是首一且线性的。连续变量 $x$，$y$，$t$，$w$，$v$满足以下五个关系

$$xt = y + AB, \qquad yw = t + B, \qquad tv = 1 + Aw, \qquad wx = 1 + Bv, \qquad vy = x + A. \tag{11.1}$$

例如，第一次突变后的 LP 代换给出 $A + AB/t$，移除其公因子 $A$后得到 $t + B$。在后续步骤中，通过将该对变量的另一个交换式的线性多项式在突变交换式的常数项处取倒数，并移除公因子，即可得到该交换式。依次得到 $1 + Aw$，$1 + Bv$，$x + A$，$y + AB$。因此，五个连续变量对中的每一对都是具有多项式角的种子。

我们证明，这些关系给出了完整上 LP 代数，且其谱是光滑的。由于 $tv = 1 + Aw$，这五个坐标没有公共零点。将一个坐标取逆后，关系消去它的两个非邻变量，并给出唯一方程，即其两个邻变量的乘积等于上面的交换表达式。更明确地说，分别将 $x$，$y$，$t$，$w$，$v$取逆后，方程为

$$yv = x + A, \quad xt = y + AB, \quad yw = t + B, \quad tv = 1 + Aw, \quad wx = 1 + Bv.$$

代换验证了每个局部化中的其他关系。每个开集均为整数且光滑。在前三个方程中，求逆坐标的系数为一。在后两个方程中，凡右端为零处，该系数均非零。初始环面在每个开集中稠密。轨迹 $x = y = 0$ 使 $A = 0$、$t = -B \neq 0$、$v = -1/B$ 和 $w$ 自由，因而具有余维二。在 $x \neq 0$ 或 $y \neq 0$ 上，初始环面与相邻环面仅错过相应圆锥曲线中两个相对变量同时为零的轨迹，该轨迹同样具有余维二。这些生成元在整个突变类中均为Laurent。正规性与一阶星交给出该结论，并且环面体积通过同一覆盖得以延拓。

我们计算正向环。将五个循环源坐标记为（$s_1$，……，$s_5$）=（$x$，$y$，$t$，$w$，$v$），下标按模五计算。在每个连续的种子中，取定理4.1中的标准对偶坐标。共享坐标在突变两侧具有相同的对偶 theta 标签。事实上，其正坐标射线和正 $u$射线在此处的热带交换值均为零，因为每个线性交换式都具有非零常数项

在多项式角处。将 $C_i$ 记为依次出现的可变对偶坐标，将 $Z_+$ 记为共同的正单位坐标θ函数。突变后，新的正可变射线就是旧的负坐标轴。在那里，唯一可能的修正发生在未改变的可变方向上，次数为一次。下标按循环方式取值，由坐标轴公式可得

$$C_iC_{i+2} = 1 + C_{i+1}. \tag{11.2}$$

在 $u$ 的任意非负阶上， $A$ 和 $B$ 的值均为零。在该阶上，每个热带交换均为 $(p,\ q) \mapsto (q,\ \min(0,\ q) - p)$，其中这些有序对按循环顺序排列。因此，五个非负可变锥覆盖 $\mathbb{R}^2$。它们按照原始标记依次排列的射线为 $(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(-1,\ 0)$，$(-1,\ -1)$，$(0,\ -1)$。最后一项为 $m \geq 0$ 的每个标签都位于这五个标记之一的非负正交象限中。因此，其 theta 函数是相应的 $C_i$ 与 $Z_+^m$ 的单项式乘积。固定单位指数规则按照 $m$ 对整个计数代数进行分次。其非负部分为 $D[Z_+]$，其中 $D = \mathbb{C}[C_1, \ldots, C_5]$ 位于初始的两个劳朗坐标中。

改用 $u' = u^{-1}$，并将 $(x, y, t, w, v)$ 替换为 $(x/u, y/u^2, t/u, uw, uv)$。这是每个标记源环面上的一个可逆变换。交换关系 (11.1) 在 $A' = u' + 1$, $B' = u' + \lambda$ 下形式不变。每个普通交换仍然有一个多项式角。令$Z_-$ 为此标记下正向 $u'$ 坐标射线上的 theta 函数。同样的论证给出非正部分 $D[Z_-]$，其零次坐标不变，因为在单位的零阶处，两个可变标记一致。新 $(x/u,\ y/u^2, u')$-图表中的正向 $u'$ 射线，其旧标签为 $(-1, -2, -1)$。在 $(w, v, u)$-图表中，此标签为 $(1, 1, -1)$。等价地，重新缩放后的 $(uw, uv, u')$ 坐标的阶为 $(0, 0, 1)$。 $w, v$ 处的可变交换分别为$1 + Bv$ 和 $1 + Aw$。二者在 $(1, 1, -1)$ 处的热带值均为零。因此，角支撑界恰好给出 $Z_- = C_4C_5/Z_+$。正向环为 $D[Z_+, Z_-]/(Z_+Z_- - C_4C_5)$。不存在其他关系，这是因为在 Laurent 域中约化到正幂和负幂各自的部分即可。

镜像关系 (11.2) 排除了 $C_j$的公共零点。在 $C_j \neq 0$处，它们将坐标环与关于 $C_{j-1}C_{j+1} - 1 = C_j$局部化的两个邻居 $C_{j-1}$、$C_{j+1}$ 所生成的多项式环等同起来。根据双有理递推，这些邻居代数独立，因此 Spec $D$ 光滑。在 $C_j = 0$ 上，这些关系给出 $C_{j-1} = C_{j+1} = -1$。因此整个除子都包含在图表 $C_{j+1} \neq 0$中，在该处它是满足方程 $C_j = 0$的仿射直线。特别地，$C_4 = 0$ 和 $C_5 = 0$ 是不相交的素除子。它们的乘积切出一个光滑的既约除子，因此正向三维簇是光滑的，包括 $Z_+ = Z_- = 0$所在之处。根据余维一处的环面图表，曲面上的对数面积形式是正则的且处处非零（连续的零点不可能出现）。将其与 $d\log\ Z_+$ 在 $Z_+ \neq 0$上取楔积。在$Z_- \neq 0$ 上，所得形式等于它与 $-d\log\ Z_-$的楔积。这些开集在余维一意义下覆盖。因此，正向镜像本身就是一个具有所规定环面体积的光滑计数源。

在这两个原始交换式中，常数系数均为 1，而 $u$ 的系数分别为$1 + \lambda$ 和 1。两个 $u$-系数各自除以其常数系数后所得的比值，在环面平移和交换缩放下保持不变。其值 $1 + \lambda$ 是无理数。根据命题11.11，任何对角平移都不会产生标记回返。

最后，独立变量中的不相交种子给出乘积源，以及增广正向代数的张量积，其基为乘积基。对于源的断言，两个坐标环的生成元在可达乘积环面上都是 Laurent 多项式，而初始乘积图表和第一组相邻乘积图表在余维一处覆盖。对于基的断言，将接触阶投影到两个因子，并在两者中使用同一条一般标记直线。对应首一多项式的普通关联方程彼此分离，且求值点相互独立。不同因子中的根一般不会重合。固定一个因子后，它的有限多个根对于另一个因子而言是固定定义域中的未标记点。根据定理3.1中的固定接触变形论证，在每个计数分支上，对这些点的评价都是支配的。同一论证还表明，在某个接触点处，沿其因子轨道的一般剩余类具有一般性，因此，投影后为正的可变轴满足其交换非消失条件，即使

合并后的接触并非一条轴。投影后的零接触给出内部标记。因此，两个或三个 theta 函数的迹的次数在公共参数域上相乘。由此，张量积乘法满足乘积的迹方程，而其单位三角配对确定每个系数。标记实现通过平移到直锥的乘积中彼此一致。先前使用的系数不变量只涉及前两个交换式，并且在乘积下保持不变。为证明该例中的每个互反系统都有唯一的归一化解，计算原正则函数在严格正正交象限上的斜率。在那里， $A$， $B$ 的阶都为零，因此 $x$， $y$， $t$， $w$， $v$ 的斜率具有零单位项和依次排列的可变项

$$(1,0),\quad (0,1),\quad (-1,0),\quad (-1,-1),\quad (0,-1).$$

连续的点对连同单位斜率的正负两种情况，从而覆盖整个权重空间。定理 8.6将每个格点处唯一的归一化解与相应的归一化种子单项式对应起来。

要将可变秩提高一阶，取因子 $st = 1 + v$，其中 $v$ 为一个指定单位。它是光滑的，并且根据坐标轴公式，其正向代数为 $k[S^{\pm1}, V, W]/(VW - 1 - S)$，同样光滑且体积相容。它的两个种子在正正交象限上具有相反的可变斜率，并且都允许任意单位斜率。乘积种子的锥是笛卡尔积，因此这些因子保持由种子锥构成的完整覆盖。迭代这一过程即可得到所有所述的秩。□

秩二示例中的正向三维簇 $Y$ 还满足 $\mathrm{Pic}(Y) \simeq \mathbb{Z}$。为此，先在 $D$ 中对 $C_1C_2$ 取逆。循环关系给出 $D[(C_1C_2)^{-1}] = \mathbb{C}[C_1^{\pm1}, C_2^{\pm1}]$。我们已经看到，被删除的两个除子都是素元且既约。它们是主除子，因此局部化序列给出 $\mathrm{Cl}(D) = 0$。

现在 $\mathbb{C}[Y][Z_+^{-1}] = D[Z_+^{\pm1}]$ 是唯一分解的。被删去的素除子为 $P_j = V(Z_+, C_j)$，其中$j = 4$, 5 中每个除子在 $\mathrm{div}(Z_+)$ 中的重数均为一。其除子支集在$P_4 \cup P_5$ 上的有理函数是 $D[Z_+^{\pm1}]$的单位元，因此具有 $dZ_+^n$ 的形式，其中 $d \in D^\times$。于是 $P_4 + P_5$ 生成所有关系。光滑性给出

$$\mathrm{Pic}(Y) = \mathrm{Cl}(Y) \simeq (\mathbb{Z}P_4 \oplus \mathbb{Z}P_5)/\mathbb{Z}(P_4 + P_5) \simeq \mathbb{Z}.$$

因此， $Y$ 不能表示为某个 Laurent多项式系数环上的完整上 LP 代数的谱，这是由命题 1.1得出的。

11.3.2. 平移判据。 保留定理 9.7中的光滑前向镜像及记号。使用实际的关联交换式 $F_i$ 以及同一 Laurent 环中的反向分子 $H_i^* = x_i\Phi_{a_i}$。因此，原始 LP 交换式的单项式正规化子包含在比较之中。对于 $t \in \mathrm{Hom}(M, k^\times)$，令 $t$ 按 $x^\alpha \mapsto t^\alpha x^\alpha$作用，其中 $t^\alpha = t(\alpha)$。

**命题 11.13**。 当且仅当以下两个条件成立时，存在一个环面平移，使源满足标记返回。

（1）对于每个 $i$， $H_i^*$和 $F_i$ 的支集重合，记其公共支集为 $A_i$。（2）记 $h_{i\alpha}$ 和 $c_{i\alpha}$ 分别为它们在 $A_i$上的系数。对于格的一个 $\mathbb{Z}$-基，格

$$\mathcal{L} = \left\{ n \in \bigoplus_i \mathbb{Z}^{A_i} : \sum_{\alpha \in A_i} n_{i\alpha} = 0 \text{ for all } i, \quad \sum_{i,\alpha} n_{i\alpha}\alpha = 0 \right\}$$

有 $\prod_{i,\ \alpha} h_{i\alpha}^{n_{i\alpha}} = \prod_{i,\ \alpha} c_{i\alpha}^{n_{i\alpha}}$。

当该集合非空时，产生返回的平移构成 $\mathrm{Hom}(M/D, k^\times)$ 的一个陪集，其中$D \subset M$ 是由同一个 $A_i$中两个指数之差生成的格。该陪集在平移环面中的余维为秩 $D$ 。

证明。 平移将源与其平移后的对象相对应，保持对数体积形式不变，并固定余字符标记。一般评价点和平移后的边界模型的传输保持其带标记计数不变，正如推论 1.4之后的讨论所述。因此，

正向代数在其θ标记下对每个平移都相同。因此，反向计数来自同一个带标记的正向镜像。定理 9.4 通过直锥上的特征确定 Laurent 实现，因此每个 $H_i^*$对于每个平移都具有相同的 Laurent展开。

^根据定理9.7，平移标记中的等式成立，当且仅当 $H_i^* = \gamma_i\, t(F_i)$，对所有 $i$非零标量 $\gamma_i$ 均成立。事实上，每个反向伴侣的首项系数都是 1，这确定了归一化。分母的平移 $x_i$ 只贡献一个标量。因此，陈述中的系数等式是必要的。

反之， $h_{i\alpha}/c_{i\alpha}$ 给出了$\bigoplus_i \mathbb{Z}^{A_i}$ 的一个特征，并且在 $\mathcal{L}$上是平凡的。它下降到映射的像 $\mathbb{Z}^r \oplus M$上；该映射将位于 $(i,\alpha)$ 处的生成元发送到 $(e_i,\alpha)$ 。在代数闭域上，根据史密斯标准形以及 $k^\times$中根的存在性，该像上的特征可以扩展到整个格。其取值给出所需的 $\gamma_i$ 和 $t$。$t$ 的两个选择相差一个在 $D$上平凡的特征，而每个这样的特征都会保持这些比例关系。这就证明了关于陪集的断言。如果指定的特征必须保持不变，则在特征检验中用它们的商格替代 $M$ ，这相当于要求 $t$在它们的指数上取值为 1。□

在正可变秩的情形下，此稳定子是真子群，因为普通交换在未改变坐标的 Laurent 环中是非单位，因而具有两个不同的指数。标签的实现沿平移轨道保持不变。正向多胞体保持不变，并且平移保持 $U$ 上每个正则函数的支集。将平移后的函数除以其首项系数即可恢复归一化。特别地，如果某个标记返回，则每个平移都实现每个标签；但一般的平移不会按其规定的标记返回。源及其正向镜像的光滑性沿轨道保持不变。

命题 11.11 的有理性条件还刻画了：在不受限制的环面^平移之后，第一伙伴何时能够同时具有正整数归一化系数。记 $A_i = \mathrm{Supp}(F_i)$，并记 $c_{i\alpha}$ 为其在 $\alpha \in A_i$处的系数。在正向直锥的某个公共内部权重处选择参考指数 $\alpha_i^0$ 。令 $E$ 由满足 $\alpha \in A_i \setminus \{\alpha_i^0\}$ 的二元组 $e = (i,\alpha)$组成。记 $r_e = c_{i\alpha}/c_{i\alpha_i^0}$和 $\beta_e = \alpha - \alpha_i^0$。在将以 $e$ 为索引的基元素映射到 $\beta_e$的映射 $\mathbb{Z}^E \to M$ 的核上，由 $r_e$ 定义的特征取值于 $\mathbb{Q}_{>0}$。由于其商是一个格，此核是一个直和项。将其特征扩展到 $\mathbb{Z}^E$ ，使其在生成元 $s_e$ 上的取值为正有理数。所有 $\beta_e$ 都与某个整余向量 $v$正配对，因为所选参考指数是严格的公共最小值。对于一个公共的、充分可除的正整数 $N$ ，用 $N^{\langle v}$乘以 $s_e$ ，$^{\beta_e\rangle}$ ，即可使每个 $s_e$ 成为整数，同时保持其在核上的特征。现在$s_e/r_e$ 下降到 $\beta_e$ 的张成空间，并如上所述扩展为一个环面点。这就给出了所需的平移。实际返回还需要命题 11.13 所规定的反向系数。

11.3.3. 返回系数元组的有限集。固定如下的多项式角支撑集 $A_i$。将每个代表元 $G_i$ 除以其非零常数系数。记$c = (c_{i\alpha})_{\alpha\in A_i\setminus\{0\}}$ 为剩余系数，并记 $\pi(c)$ 为它们关于对角平移的特征不变量的完整元组，该元组由命题11.13中的格基给出。

**定理 11.14**。 对于这些支撑集，存在一个可计算的有限集 $S$ ，其中包含归一化普通交换的系数元组。 $S$ 中的每个元组的每个条目都是正整数。设 $U$ 是一个具有这些支撑集且满足定理 *6.1*假设的源，并设 $Y$ 是其增广正向镜像。那么

(1) $c \in S$ 当且仅当 $Y$光滑且严格标记回归成立。(2) $\pi(c) \in \pi(S)$ 当且仅当 $Y$ 在经过对角平移后光滑且标记回返成立。

$S$ 中的每个元组都对应某个这样的 $U$。

在每个纤维都满足相同假设的代数族中，具有光滑前向镜像和严格标记回归的纤维构成底空间的一个闭子集。对经过对角平移后的标记回归，结论也成立。如果某个系数不变量在不可约基上不是常数，则后一个子集是一个真子集。

证明。 首先假设 $Y$ 是光滑的。记 $E_i = \operatorname{conv}(A_i) \cap M$ 和 $\Delta_i = \operatorname{conv}(A_i) - e_i$。普通伙伴 $G_i/x_i$ 是在指定坐标中乘以一个 Laurent 单位，并在未改变的可变变量中乘以一个非负单项式，再乘以一个标量的首次变异伴随对象。因此，它是相邻种子中的一个单项式，并按最小指数归一化$-e_i$。定理 8.6 和 9.4 给出支集 $\operatorname{Supp}\Phi_{-e_i} \subseteq P_{-e_i} = \Delta_i$。根据命题 9.6，用未改变的特征进行相同的乘法，将归一化实际反向伴随对象变为$\Phi_{-e_i}$。因此定理9.7 给出

$$\text{strict return} \quad\Longleftrightarrow\quad G_i = x_i\Phi_{-e_i} \quad (1 \le i \le r).$$

令 $c_{i0} = 1$ 和 $c_{i\alpha} = 0$ 表示 $\alpha \in E_i \setminus A_i$。归一化系数给出严格回返，当且仅当

$$\sum_{\alpha\in E_i} c_{i\alpha}\,\mathsf{T}_Y(\alpha,-\beta) = \mathsf{T}_Y(e_i,-e_i,-\beta) \qquad (\beta \in E_i,\ 1 \le i \le r).$$

事实上，将 $\Delta_i$ 平移 $e_i$ 会将每个指数映入定理 $K = D_+^\vee$ 的反向锥 9.4中。推论 9.5的证明在 $E_i$ 上给出了这个单位三角系统。其唯一解给出 $x_i\Phi_{-e_i}$中的非负整数，常数为一。接触列表和矩阵大小仅取决于支撑集。命题 C.7 根据 $Y$的标记生成元计算出它们的条目。对于按 $\beta$索引的方程，所需的首一多项式的次数至多为 $\beta_j$，对于坐标 $j$，使用正则基 $z_1$，……，$z_n$。

要枚举候选前向环，请使用推论 11.3 证明中的接触列表和一致迹界。对于这些范围内的每个整迹元组，利用推论 4.2 计算 Laurent 生成元，并添入标记特征$z_j$。舍弃不相容的系统。所得列表包含具有给定支撑集的所有标记前向环。

消元给出了每个候选对象的表示。我们需要那些环面体积形式可延拓且无零点、无极点的光滑候选对象。将 $z_j$ 取逆即可得到环面。在每个光滑候选对象上，检验 $dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ 是否可被 $\prod_j z_j$ 整除（在顶次微分模中），以及该商是否生成此模。在每个这样的环上，计算反向迹的次数，并求解指定的有限系统。除非这些系统有唯一解，且解给出具有恰好指定支集的规范化正整多项式，否则舍弃该候选对象。

最后，将每个保留下来的元组作为普通种子进行检验。检验它在 $\mathbb{Q}[u^{\pm1}]$ 上关于可$\overline{\text{变}}$变量的不可约性。正则函数 $\prod_i(G_i/x_i)$ 在每个可变坐标上都有负牛顿顶点。因此，定理2.5计算出完整上代数的生成元。对于一个内部包含零点的格盒，通过有限首星方程提升其截面半群的 Hilbert生成元，并令次数变量取值为一。计算其表示并检验光滑性。在光滑的完整上源上，根据命题 1.1，一阶星环面在余维一处覆盖。它们的对数形式相差一个符号，因此初始图表中的对数体积形式平凡化了该源的典范丛。计算该源的前向 Laurent 生成元，并检验其正向环的光滑性和配对等式。令 $S$ 表示通过这些检验的元组。计算使用$\mathbb{Q}$上的精确多项式算术，并且这些检验和计数对每个特征零代数闭扩张均成立。

该构造包含每个具有光滑正向镜像和严格标记回归的 $U$ 元组。反之，对于 $S$中的每个元组，这些测试都会产生一个具有这些性质的簇。归一化交换式确定其标记完整上代数，因此每个具有该元组的 $U$ 都具有相同的性质。这证明了（1）。

根据命题11.13及其格计算，两个归一化系数元组具有相同的 $\pi$值，当且仅当它们相差一个对角平移。因此 $\pi(c) \in \pi(S)$

当且仅当 $c$的某个平移属于 $S$。平移保持带标记的前向代数，因此也保持其光滑性。将（1）应用于平移后的源，即可证明（2）。

在一个族中，这两个轨迹分别是有限集 $S$ 和 $\pi$（$S$）在正则映射 $c$ 和 $\pi \circ c$ 下的逆像。二者都是闭集。若系数不变量在不可约基上非常数，则其像是无限集，因此平移返回轨迹是适当子集。□

## Appendix A. Valuative independence in the marked Laurent chart

对于一条热带化带标记曲线，其脊是将其热带化限制在由标记端点张成的子树上所得的结果 [27, 命题 4。24]Keel 和 Yu 的局部函数用于计数具有此类脊、且具有指定终点位置和切向的曲线。我们在中心顶点附近切开一条完备脊柱，并将内在迹表示为局部函数乘积的常数项（引理 A.4）。这个恒等式给出了从内在代数到形式级数环的同态。正则函数牛顿多面体中在每个可变坐标上均为负的一个顶点，确定了一个锥，在此锥上这些级数就是带标记的Laurent展开（命题 A.5）。我们利用折线路径证明这些展开关于标签的齐次性和赋值独立性。

A.1. 正则函数限制局部脊展开。设 $U$ 是特征零域 $k$ 上的光滑仿射对数 Calabi–Yau 簇，并带有与体积形式相容的稠密分裂环面 $T$。选择一个具有简单正规交边界的光滑射影紧化，如 [27, 假设 2.4]所述。 $U \setminus T$ 的闭包不包含任何边界层，且本质骨架的锥构成一个光滑环面扇。记 $L$ 为 $T$ 的余特征格，并利用环面将 $L_{\mathbb{R}}$ 与骨架等同。假设 $T$的坐标$x_1$、……、 $x_r$、$u_1$、……、 $u_c$可延拓为 $U$上的正则函数，且$u_j$在其上是单位元。对于 $g \in k[U] \setminus \{0\}$，记$\tau_g(y) = \min_{a \in \mathrm{Supp}(g|_T)} \langle a, y \rangle$。记 $Q$ 为该紧化的有效数值曲线类所成的幺半群。对于 $m \in L \setminus \{0\}$和一般点 $\xi \in L_{\mathbb{R}}$，令$V_{\xi,m}$ 为 [27, 定义 20.20]中的局部单输入级数。 $q^\beta z^e$ 的系数计数类为 $\beta \in Q$的曲线，这些曲线的脊在 $\xi$处具有入射导数 $-m$ 和终端导数 $-e$，其中 $e \in L$。令$V_{\xi,0} = 1$。我们可以选取 $\xi$ ，使其坐标在 $\mathbb{Q}$上线性无关。这里的无穷小圆柱按如下方式计数：取一个足够短的区间，在一般点处与有理超平面交叉，并在其两侧指定导数 [27,定义 20.2]。

**引理 A.1.** 假设 $q^\beta z^e$ 出现在 $V_{\xi,\, m}$中，且 $\tau_g$ 在 $\xi$附近是线性的，梯度为$a$。那么 $\langle a, e \rangle \geq \tau_g(m)$。对于一个非零计数的无穷小圆柱，若其入射导数和出射导数为 $-v, -w$，且两端位于 $\tau_g$ 的同一开线性区域内，该区域的梯度为 $a$，则 $\langle a, w - v \rangle \geq 0$。

证明。 关于 $m = 0$ 的断言是显然的。对于 $m \neq 0$ ，以一般点为端点的区间的最后一个导数非零。否则，最后一次变为零斜率的变化会是在 $\xi$处墙上的一次弯折。定义 20.2 中的两个端方向也都非零。采用来自 [27, 构造 9.3、定义 9.6 和定理 11.9]的计数对象的环面扩张代表。它的两个非零接触位于扩张区间的两端。任何额外的评价标记都是零阶。根据 [27, 定理 8.18 和引理 8.21]，可以在光滑带标记有理曲线上的骨架参数上计算非零计数。在两个接触标记点之间的区间上，骨架映射的取值位于目标骨架上。因此， $g$ 的拉回的赋值在该区间上限制为 $\tau_g \circ h$ ，其中$h$ 是脊映射。该拉回是一个非零有理函数，因为它在某个有限骨架点处的取值具有有限赋值。

将区间从入射端定向至出射端。两个接触标记点都位于这条路径上。因此，所有从路径分出的分支都避开紧化边界，所以 $g$ 的拉回在这样的分支上没有极点。经过代数闭赋值扩张后，其赋值沿着朝向离开路径的分支的斜率等于该分支上零点的个数，并按重数计。事实上，可以将光滑

有理曲线上的有理函数分解为线性因子，并分别对每个零点和极点应用斜率规则。在路径的每个点处施加平衡条件可知，沿定向路径的导数只能减小。等价地，这就是 [27, 引理 15。6],的主除子斜率计算，其中除子为 $-\mathrm{div}(g)$。

在朝向无穷远入射端足够远处，其导数为 $-\tau_g(m)$。事实上，沿着$h(t) = h_0 - tm$ 且满足 $t \to -\infty$ 时，只有使 $\langle a', m\rangle$ 取最小值的指数才能达到该最小值。在有限端点附近，它为 $-\langle a, e\rangle$。对于短圆柱，两个导数则分别为$-\langle a, v\rangle$ 和 $-\langle a, w\rangle$。比较二者即可证明这两个断言。□

**命题 A.2**。 对于导数如上所述的圆柱，将 $w - v$ 称为其弯折。非零计数的无穷小圆柱的所有弯折都属于 $P_0 = \mathbb{N}^r \times \{0\}^c$。$V_{\xi,m}$ 的指数属于 $m + P_0$。特别地， [27, 假设 20。27]的带标记弯折条件成立，并且对于每个有界总可变次数，只有有限多个有效类有贡献，且其特征 $q^\beta$ 可以特化为 *1*。

证明。 应用引理 A.1于 $x_i$ 以及 $u_j$ 和 $u_j^{-1}$。所有这些函数在整个骨架上都有线性热带化。假设中的正正交象限 $L$ 给出了满维幺半群。在 $P_0$ 上，其单项式进次数就是总可变次数。枝条 是热带化曲线在脊外某个连通分支的闭包上的限制 [27, 定义 4。22]。我们利用 $T$的特征来界定枝条的次数。在所有 $x_i$均可逆的开集上，这些坐标定义了到 $T$的态射。它与 $T \hookrightarrow U$ 的复合在稠密环面上与包含映射一致，因此在整个开集上也一致。由此可得 $U \setminus T = V(\prod_i x_i)$。对于一个计数的扩展二接触映射 $f$，在代数闭赋值扩张上的光滑定义域曲线上进行讨论。在一个$b$ 远离两个接触标记点的位置，拉回特征的阶所组成的向量为

$$\ell_b = (\mathrm{ord}_b\, f^* x_1, \ldots, \mathrm{ord}_b\, f^* x_r, 0, \ldots, 0) \in P_0.$$

当且仅当 $f(b) \in U \setminus T$ 时，它非零。这些向量是附加热带端的出射权重，因为每个特征朝向此类穿孔点的斜率就是它在那里所具有的阶。两个接触阶分别为 $v$ 和 $-w$，其中 $v = m$，$w = e$ 对于单输入脊成立。主因子的次数为零给出 $\sum_b \ell_b = w - v$。在$P_0$ 的尖锥上，根据紧性，其单位单纯形上的分段线性范数 [27, Definition 4.11] 被某个常数乘以总可变次数所界定。因此， [27, Definition 4.12] 中所有枝条的次数之和被同一个常数乘以 $w - v$的总次数所界定。特别地，零修正没有枝条。有了这个次数界，有限性和特化的论断便由 [27, Lemmas 20.29–20.31 and Definition 20.32]推出。□

在有理超平面的一般点处，墙函数 按弯折记录无穷小圆柱计数 [27, 命题 20.13 和定义 20.32]。要特化这样的级数，我们令其曲线单项式 $q^\beta$ 等于一。

**命题 A.3**。 设 $a$ 是正则函数 $g$ 的牛顿多面体的一个顶点，并且$a_i < 0$ 对所有可变坐标都成立。令 $C$ 为其闭最小化法锥，并在其内部选取一个一般的 $\xi$。局部级数$V_{\xi,\, m}$ 是一个以有效曲线环为系数的特征的有限 *Laurent* 多项式。其环面指数属于

$$m + \left\{ (d, 0) : d \in \mathbb{N}^r, \quad \sum_i (-a_i) d_i \le \langle a, m\rangle - \tau_g(m) \right\}.$$

特化后，系数是非负整数，且 $z^m$ 处的系数为一。对于 $m \in C$，特化为 $z^m$。 $C$ 内部的每个特化壁函数都等于一。

证明。 设 $e = m + (d,\ 0)$ 根据命题 A.2。引理 A.1给出 $\tau_g(m) \le \langle a,\ e\rangle$这正是所断言的界。可能的 $d$构成一个有限集，因此 [27, 引理 20。31]给出了整个多项式及其曲线变量的有限性。正性由枚举

计数以及 [27, 引理 20。34] 给出了在 $z^m$处的特化系数。对于 $m \in C$，该界消失。对于墙内部的一般点 $C$，选取一个两端都位于该内部的圆柱。其可能的弯折（$d$，0）具有 $0 \le \langle a,$（$d$，0）$\rangle$，这迫使 $d = 0$。根据 [27, 命题 20。33]，特化墙函数的归一化常数项为 1。□

在多项式角处，每个普通突变伴侣都界定指数的一个坐标。设 $G_i$ 是 $(x, u)$ 中的一个多项式，与 $x_i$无关，具有非零常数项，并且 $G_i/x_i$ 正则延拓至 $U$。对于 $\xi$，在所有标记坐标的严格正正交象限中，$\tau_{G_i/x_i}$ 的梯度是负的 $i$-th 坐标泛函。因此$0 \le d_i \le -\tau_{G_i}(m)$ 对于 $1 \le i \le r$。这些界给出了有限多个指数，并且正正交象限内部的每个特化壁函数都是其中之一。这两个结论也可通过将命题 A.3 应用于 $g = \prod_i (G_i/x_i)$ 得到。

**A.2. 局部脊函数的常数项。** 我们使用 A.1 节的假设和紧化。特别地，$U \setminus T = V(\prod_i x_i)$。对于一般的 $\xi \in L_{\mathbb{R}}$，令 $\mathrm{SP}_{\xi,m,e}$ 为以 $\xi$ 为终点、初始导数和终端导数为 $-m, -e$ 的单输入脊的集合。将$N(S, \beta)$记为脊 $S$在类 $\beta$中的计数，并将 $V_{\xi,m}$ 简写为 $V_m$。于是

$$V_m = \sum_{\beta,e} n_\xi(m, e, \beta) q^\beta z^e, \qquad n_\xi(m, e, \beta) = \sum_{S \in \mathrm{SP}_{\xi,m,e}} N(S, \beta)$$

由 [27, 定义 20。20]。将 CT 记作 $z^0$的系数，并保留所有曲线系数。

**引理 A.4。** 对于 $s = 2$、3 以及非零标签 $m_1$、……、$m_s \in L$，有

$$\mathrm{CT}(V_{m_1} \cdots V_{m_s}) = \sum_{\beta \in Q} \eta(m_1, \dots, m_s, \beta) q^\beta, \tag{A.1}$$

其中，$\eta$ 是 [27, 定义 1。1]的代数曲线计数。该恒等式对每个曲线类都成立。在一个可数个真有理线性子空间的并集之外选取一个 $\xi$，即可对所有标签和类同时适用。

证明。 固定输入和类 $\beta$。将 $\beta$ 分解为有效加项的所有方式构成一个有限集。事实上，一个丰沛除子给出了各加项次数的上界。将该丰沛除子的充分大倍数与数值除子的一组基进行加减，可为每个加项的每个整数数值坐标给出上界。对于每个加项和每个输入，在 $\xi$ 处的局部级数在该类中根据 [27, 命题 20.21]仅有有限个终端指数。在那里所使用的完备化中，将 $Q$ 嵌入一个严格凸环面幺半群，并在由具有非零曲线指数的单项式生成的理想处完备化。对该理想的任意幂取模，都会得到一个关于环面特征的 Laurent多项式。对于固定的接触阶，即使曲线类发生变化，也只会出现有限种完备热带曲线及其脊的组合类型 [27, 引理 4.29]。因此，我们可以选取一个公共的环面嵌入细分，使其包含输入射线以及切口处的环面尾部射线。为比较类，取两个包含指定射线的模型的公共进一步细分。 [27, 构造 9.3]中的每个延拓光滑映射仅在其接触标记点处、在其除子的开分层中与边界相交。因此，它避开了余维至少为二的边界分层中的后续爆破中心。相交条件和评价在此处一致，而环面尾部使用同一个环面。延拓曲线类推前为原始类。根据 [27, 定义 7.9 和命题 7.11]，，环面尾部类也同样如此，因此通过减去这些类得到的主体类也同样如此。于是，我们可以在该细分上工作，并按照推前分组到原始模型，如 [27, 定义 1.1 和命题 17.3(1)]中所述。

选择一个整数 $A$ big，使其相对于 $\beta$ 定义 4 [27, 中的每个有效加项都足够大，从而使 $A$ 界定拼接 [27, 定理 124]所要求的枝度。令 $\mathsf{Wall}_A$ 为针对该界限构造的多面体墙的有限并 [27, 构造 4.15–4.16]。取一个以 $\xi$ 为中心的球 $B$，使其与 $\mathsf{Wall}_A$ 及环面扇的余维一骨架不相交。使用具有单个顶点和 $s+1$ 条无穷标记腿的热带域。

对于 $s=3$，这是三脚架 Sk($\mathcal{M}_{0,\ 4}$)的中心顶点，即四点光滑有理曲线模空间的骨架。在此顶点处，有界边长度为零。该点属于光滑标记曲线模空间的骨架。所有臂都在 $\xi$处相交。

选取 $\xi$ 上线性无关的坐标。我们在这个固定定义域分层上检查横截性。中心顶点映射到 $\xi$，因为评价腿被[27, 引理 8.22]压缩。经过 $\xi$ 的臂的支撑直线具有 $\xi+\mathbb{R}a$、 $a$ 有理的形式。它避开每个余维二有理子空间，且不包含在任何有理超平面中。沿着这条臂向外追踪，直到遇到弯折。弯折只位于一个有理超平面 $n^{\perp}$ 上，并以非零法向斜率穿过该超平面。 [27, 定义 4.17]中的弯折条件使两条斜率之差与该超平面相切。因此，两条斜率之间存在一个逐点固定 $n^{\perp}$ 的可逆有理剪切。对有限个弯折作归纳，可将后续每条支撑直线表示为 $B_0\xi+\mathbb{R}v$，其中 $B_0$ 在$\mathbb{Q}$ 上可逆，且 $v$ 是有理的。它具有相同的避让性质。在无穷远处， [27, 构造 4.15] 中排除端点轨迹的逆像是正余维有理锥的有限并。若某条终端射线终止于一个排除轨迹中，其支撑直线就会位于这些锥之一的线性张成中，这与相同的避让性质矛盾。现在，在远离扇面和墙的一个点处分割，即可满足 [27,定义 4.20],中的所有条件，包括直切延拓的横截性。

取该整环点上乘积骨架的典范点，并由 $\xi$ [27, 命题 8.8 和 §14.1]可知。它属于不可约参数空间[27, 引理 8.2], 的每个稠密扎里斯基开集，因此也属于评价映射 [27, 定义 1.1 和命题 3.13]的有限 ´étale轨迹。解析纤维的次数为 $\eta(m_1,\ \ldots\ldots,\ m_s,\ \beta)$。按照每个映射的脊进行划分，并计入剩余域次数 [27, Construction 9.2 和引理 8.20–8.21]。由于所有原始标记均为无穷远点，因此无需移除环面尾部。

设 $i$ 为完备脊柱 $S$的内部标记。记 $N_i(S,\ \beta)$为脊为 $S$ 的 $\beta$ 类映射对在 $i$处评价的纤维所贡献的次数。为计算拼接中使用的计数 $N(S,\ \beta)$，在中心顶点处附加第二条收缩腿 $w$ ，并将所得脊柱记为 $S^{+}$。脊柱 $S$ 是稳定且横截的，因此由 [27,命题 9.5 和定义 9.6]可得 $N(S,\ \beta)\ =N_w(S^{+},\ \beta)$。

在 $w$ 处进行评价并忘却 $i$。忘却$i$后，光滑的（$s+2$）标记曲线仍然稳定，即使在 $s=2$ 时也是如此。将 $w$ 重新命名为 $i$，即可恢复原标记树和评价点 $\xi$。根据 [27, 引理 9.13], 的笛卡尔方块，附加标记的评价纤维由原纤维通过完备剩余域的延拓得到。对于每个给定的脊，此比较均成立。事实上，在每个骨架提升中，遗忘标记处的腿都会被压缩 [27, 引理 8.22], ，而固定的标记树将其附着点置于中心顶点处。忘却该标记保持曲线类不变。有限 ´étale 次数在剩余域延拓下保持不变，因此 $N_w(S^{+},\beta)\ =N_i(S,\beta)$。

将每条入射臂从中心顶点向外定向。根据 $V_{m_j}$的约定，其在该处的斜率为 $e_j$ 。选取一个足够小的正截断距离 $\delta$ ，使得对于所有固定曲线类的完备映射以及局部乘积中出现的所有元组，每条臂的初始线段都包含在 $B$内。方向的有限界保证存在这样的 $\delta$，且 $B$ 不含弯折。输入非零的臂具有非零的最终斜率，因为若最终弯折至斜率为零，则该弯折必然发生在包含 $\xi$的墙上。其截断位置为 $y_j=\xi+\delta e_j$。选取 $\delta$，避开截断点落在有理超平面上的可数多个有理仿射条件。

中心顶点处的平衡条件给出 $\sum_j e_j\ =\ 0$。反之，任何满足该和为零的元组都确定整个中心映射。它在评价腿上为常数，并将第 $j$ 条有限线段映射到 $t\mapsto\xi+te_j,\ 0\le t\le\delta$。该脊没有弯折顶点，且其像包含于 $B$ 中，因此根据 [27,引理 12.3]，其在零类中的计数为一，在其他每个类中的计数均为零。

[27] 构造 9.3 通过用环面尾部延长切臂来对其进行计数。其延拓类是主体类与该尾部的类之和。[27] Lemma 9.12 将这两个类上的相应界联系起来。

连接从 $y_j$ 到 $\xi$的直线段，其导数为$-e_j$。每个处于 $\xi$ 且具有终端斜率$e_j$ 的臂都包含该线段，因为 $B$ 不与任何墙相交。因此，移除或连接该线段分别给出脊上的逆运算。该线段在零类中的计数为一，因此拼接保持每个主体类中的计数[27, Lemma 12.3 和定理 12。4]将具有给定输入、斜率和类的切臂次数求和，得到 $n_\xi(m_j,\ e_j,\ \beta_j)$。

现在在每个$y_j$ 处为平衡中心脊附上一条横向臂。每个切口两侧的向外导数彼此相反。度量树与完备脊柱可通过拼接恢复。相继应用 [27, 定理 12.4] ，得到各臂计数的乘积，并对 $\beta$的有效分拆求和。中心项为零类。结合完整纤维的划分，由此得到

$$\eta(m_1,\dots,m_s,\beta)=\sum_{\substack{e_1+\cdots+e_s=0\\ \beta_1+\cdots+\beta_s=\beta}}\prod_{j=1}^{s} n_\xi(m_j,e_j,\beta_j),$$

这证明了（A.1）逐系数成立。 □

**命题 A.5.** 假设 $U$、$T$、$x_i$、$u_j$ 以及紧化满足第*A.1*节的假设。记 $R=\mathbb{Z}[Q]$。对一般的 $\xi$，将标签为 $m$的内禀基元素映到$V_{\xi,\ m}$ 定义一个单射 $R$-代数同态，映到

$$R[[z_1,\dots,z_r]][z_1^{-1},\dots,z_r^{-1},z_{r+1}^{\pm1},\dots,z_{r+c}^{\pm1}].$$

增广 $q^\beta\mapsto 1$之后，赋值$\theta_m\mapsto V_{\xi,\ m}|_{q=1}$ 仍然是单射，且在 $\mathbb{Z}$上具有相同目标。若一个正则函数的牛顿顶点在每个可变坐标上均为负，且 $\xi$ 位于其极小法锥 $C$的内部，则像为 ***Laurent*** 多项式。对任意 $b\in L\cap\operatorname{int}C$，增广映射将 $B_{\mathbb{Z}}(U)[\theta_b^{-1}]$ 等同于 $\mathbb{Z}[L]$。在定理*3.1*的假设下，它与命题*4.6*的标记实现一致。

证明。 记$V_m=V_{\xi,\ m}$ 在本证明中。命题 A.2 以及 [27, 引理20.31和20。34]表明，在指数 $m$ 处，$V_{\xi\text{的系数}\,m}$ 是一个单一的有效单项式 $q^{\delta_m}$，因为该系数是非负计数的有限和，且其增广为一。所有其他指数的总可变次数都严格更大。该指数的单位坐标保持不变。因此，有限乘积中的每个系数只涉及其可变位移的有限种分解，并且对每种分解，只涉及有限多个曲线类。对于 $m\neq 0$一个以一般点为终点的单输入脊 $\xi$ 不可能具有最终斜率零。若确实如此，其最后一个非零弯折将位于包含 $\xi$的墙上。因此$\mathrm{CT}(V_m)=0$。结合 $V_0=1$，这也涵盖了引理A.4中带有零标记的列表。

令 $V$ 为由局部函数定义的 $R$-线性映射。对于内在代数中的两个元素 $a$、$b$ ，记 $D=V(a)V(b)-V(ab)$。将（A.1）应用于这两个乘积，并利用Frobenius结构定理，可得对于每个 $m$，$\mathrm{CT}(DV_m)=0$ 属于 $R$。若 $D\neq 0$，取 $D$ 的一个指数 $u$ ，使其总可变次数最小。由于形式支撑集在总可变次数上有下界，这样的次数确实存在。于是$\mathrm{CT}(DV_{-u})=q^{\delta_{-u}}[z^u]D\neq 0$，因为 $R$ 嵌入数值曲线格的群环中。这证明了乘法性。同样的最小次数论证表明，在不同基标签的有限线性组合上具有单射性，无论是在 $R$ 上还是在增广之后。

对于给定的顶点，命题A.3 给出有限 Laurent 展开，增广后 $\theta_p$ 映射为 $z^p$ ，对每个 $p\in C\cap L$均成立。固定 $b\in L\cap\operatorname{int}C$。对于任意 $e\in L$，选取 $N\geq 0$使得 $e+Nb\in C$。局部化映射将 $\theta_{e+Nb}\theta_b^{-N}$ 映射为 $z^e$。因此，其像等于 $\mathbb{Z}[L]$，而单射性由增广映射的单射性得出。当定理3.1 适用时，命题 4.6的实现将这些相同的生成元映射为 $z^e$，因此两个映射一致。 □

**A.3. 折线路径与高斯赋值。** 在同一个模型上，根据命题 A.2，我们有 $P_0=\mathbb{N}^r\oplus\{0\}^c$作为可能修正项的幺半群。记 $V_{\xi,\ m}$ 为局部脊

级数 [27, 定义 20。20]。选择 $\xi$，其坐标在 $\mathbb{Q}$上 $y$ 线性无关。在有理超平面 $n^{\perp}$的一个一般点 $F_y$ 处，记[27, 定义 20。32]的特化壁函数为 $P_0 \cap n^{\perp}$ [27, 引理 20.3 及命题 20.13、20。33]。我们在该点使用一个函数，其中包括同一支撑超平面上的所有贡献。

一条整值折线路径 从 $m \neq 0$ 到 $\xi$，是分段仿射映射 $(-\infty, 0] \to L_{\mathbb{R}}$，其端点为 $\xi$，初始导数为 $-m$。其相继导数为 $-a$，且 $a \in L$。在其有限多个弯折的每一处选取本原法向量 $n$，使得 $k = \langle n, a\rangle > 0$。下一个指数 $a'$ 位于 $z^a F_y^k$的支集中。指数不变的交叉无需标记。

**引理 A.6.** 这些整值路径的终端指数恰好是$V_{\xi,m}|_{q=1}$的支集，特化取在每一个有限修正次数处。$m = 0$的支集为 $\{0\}$。

证明。 引理 A.4 中的横截性论证适用于每一线段，对有理指数亦然。为明确起见，写成

$$T_\delta a = a + \langle n, a\rangle \delta, \qquad \delta = (a' - a)/\langle n, a\rangle \in n^{\perp}_{\mathbb{Q}}$$

在从 $a$到 $a'$的弯折处。剪切 $T_\delta$ 逐点固定该墙，且其逆元为 $T_{-\delta}$。设$A_j$ 为前 $j$ 个剪切的乘积，且 $N$ 为弯折总数。撤销这些剪切后，该路径变为速度为 $-m$的直线。因此线段 $j$ 的支撑直线为 $A_j A_N^{-1}\xi + \mathbb{R}A_j m$。与引理 A.4中一样，每一条这样的直线都避开所有余维二的有理子空间以及无穷远处的例外轨迹。对于计数脊，从 $\xi$起反向追踪相继线段。其终端导数非零，且弯折条件 [27, 定义 4.17]在每一交叉处给出相同的有理剪切。在每条直线上，与有理超平面的交集构成一个可数集。在该集合之外选取切口，可使直线延拓在每一有限阶 [27, 构造 4.15 与定义 4.20]处均为横截。

我们记录直线区间的贡献。在任意一般端点 $b$, [27,处，引理 20.34] 给出未修正指数 $v$ 处的增广系数为 1。根据引理 A.1 的斜率计算，考察每个可变坐标两侧以及单位元的两种符号，可知每个单独的弯折都属于 $P_0$。因此，从 $v$ 到 $v$ 的计数路径必定是直射线。根据引理 20.31] ，其系数为 1、非负性及类有限性 [27, 意味着这条射线仅在一个数值类 $\gamma_b$ 中有贡献，且计数为 1。设 $a, b$ 是同一直线上的一般点，依次排列，导数为 $-v$。将 $a$ 处的直射线与直线段 $[a, b]$ 拼接，得到 $b$处的射线。因此，对每个数值类 $\beta$，定理 12.4]的拼接公式可写为

$$\mathbf{1}_{\beta=\gamma_b} = \sum_{\gamma_a+\eta=\beta} N([a, b], \eta).$$

求和遍及有效 $\eta$。因此，该线段恰有一个贡献类，重数为一。对于穿过扇面、且贡献类可能非零的线段，这一结论同样成立。如引理A.4所示，一个有效数值类只有有限个有效加项。因此，总可以令 $A$足够大，使其适用于所有加项，正如所引拼接公式的要求。

现在固定一条计数脊和一个 $\beta$ 对其有贡献的类。在其非零弯折点周围切去互不相交的对称小区间，并取一般切割端点。逐渐缩小这些区间，直到对 $\beta$的每个有效加项，圆柱计数都稳定下来；使用 [27, 定义 20.2]。切口处的拼接和正性保证了每个弯折点处都有一个非零的稳定圆柱计数。根据[27, 命题 20.13 和定义 20.32] ，这是从 $z^a F_y^k$中允许选取的一项。反过来，对于一条整值折线路径，在每个弯折点选取一个非零无穷小计数的有效类，使其实现所指定的项。这样的类由正性保证存在，并且对于这组固定的指数，只有有限多个

类会出现 [27, 引理 20.29]。为这些选定的类取一般、互不相交且足够短的代表元。根据前面的论证，每条互补的直线段都以重数一作出贡献。令 $\beta$ 为所选圆柱类和直线类之和。对其所有有效加项扩大 $A$。所选代表元仍然横截，并且在每个切口处导数相匹配。在这个类中反复拼接会产生一个严格为正的加项，从而对 $V_{\xi,\,m}$给出所需的贡献。我们在对曲线变量进行特化之前进行切割和粘合。对于每个固定的终端指数，根据 [27, 命题 20.21 和引理 20.31]，贡献只有有限多个。对于 $m=0$ 使用 $V_{\xi,\,0}=1$。□

在本小节余下部分中，假设标记实现将 $\theta_m$ 映射为有限Laurent多项式$\Theta_m = V_{\xi,\,m}|_{q=1}$对每个 $m$均成立。根据命题A.5，这在所有可变坐标上均为负的牛顿顶点的法锥内部成立。在特征零域上，记 $\nu_b$ 为此Laurent 图表中权重为$b \in L^*_{\mathbb{R}}$的高斯赋值，并且在系数域上为平凡赋值。

**引理 A.7**。 对于每个 $m \in L$ 和正整数 $s$,

$$s\,\mathrm{Supp}(\Theta_m) \subseteq \mathrm{Supp}(\Theta_{sm}) \subseteq s\,\mathrm{Newt}(\Theta_m).$$

*In* 特别地，对于每个实权重，有$\mathrm{Newt}(\Theta_{sm}) = s\mathrm{Newt}(\Theta_m)$ 以及 $\nu_b(\Theta_{sm}) = s\nu_b(\Theta_m)$ $b$.

证明。 关于 $m=0$ 的断言由 $\Theta_0=1$可得。对于 $m\neq 0$，取一条路径 $\gamma$，其终端指数为 $e$。路径 $t \mapsto \gamma(st)$具有相同的像，且其指数均乘以$s$。在每次交叉处，根据正性，所选单项式的 $s$次幂出现在相应的墙幂中。因此，由引理 $se \in \mathrm{Supp}(\Theta_{sm})$可得A.6。

对于另一个包含关系，将 $\theta_m^s$ 按内禀基展开。每个出现的标签 $l$ 都属于 $sm+P_0$，因为 $z^l$ 出现在 $\Theta_l$ 中且所有系数均为非负数。 $\Theta_m^s$ 中 $z^{sm}$ 的系数为 1，且只有标签 $sm$ 能够对其作出贡献。因此， $\theta_{sm}$ 以系数 1 出现。其 Laurent 支集包含于 $\Theta_m^s$的支集中，而后者的牛顿多面体为$s$Newt($\Theta_m$)。取凸包，再取最小值，即可证明最后的断言。□

**定理 A.8**。 在特征零域 $k$ 上，对于每个实权重 $b$ 以及每个有限支集的非零族$(c_m)$ *in* $k$，都有

$$\nu_b\Big(\sum_m c_m\Theta_m\Big) = \min_{m:\,c_m\neq 0}\nu_b(\Theta_m), \qquad \mathrm{Newt}\Big(\sum_m c_m\Theta_m\Big) = \mathrm{conv}\bigcup_{m:\,c_m\neq 0}\mathrm{Newt}(\Theta_m).$$

证明。 我们调整 [8, §3] 中的极小路径论证，以适用于指数可能位于多个独立切向方向上的墙函数。记 $h_m(b) = \nu_b(\Theta_m)$。

允许有理指数，并将 conv$\mathbb{Q}$ 表示有理凸组合的集合。每个穿越剪切 $T_\delta$ 定义为 $\delta \in \mathrm{conv}^{\mathbb{Q}}\,\mathrm{Supp}(F_y)$。对于具有整数输入的路径，将其指数乘以某个正整数 $s$，使得在每次交叉处， $s\langle n,\,a\rangle$ 乘以每个有理重心系数后均为整数。根据正性，每个缩放后的选择都是 $F_y$ 的整数次幂中的一项。由引理 A.7可知，对于 $m$不存在优于 $h_m(b)$ 的有理路径。由于 $\Theta_m$ 是有限 Laurent多项式，因此存在一条达到该值的整数路径。

对于这样的极小元，在任一交叉处将 $b$ 按所有后续剪切的转置拉回，得到 $b_+$。其所选的 $\delta$ 在墙支集的有理凸包上极小化 $\langle b_+,\delta\rangle$ 。事实上，否则将 $\delta$ 朝一个更好的有限凸组合移动一小段有理比例的路程。保持其余剪切与初始指数不变。最终配对减小，因为其变化等于 $\langle b_+,\delta\rangle$ 的变化乘以 $\langle n,a\rangle > 0$。原路径直行的交叉通过用 $\delta=0$加以标记而被纳入。

对于这些有限选择中的每个支集单项式，取一个有效类 $\beta$，其系数非零。令 $I$ 为由完备化中曲线指数非零的单项式生成的理想。选择 $\ell$足够大，使得每个选取的 $q^\beta$ 模$I^\ell$均非零。在所得的有限图中，根据 [27, 命题 20，17]，它们的系数在墙胞腔的相对内部上为常数。消去穿越剪切后得到一条直线

终止于$A_N^{-1}\xi$。在这条直线上，每个选取的交叉都满足一个法向导数非零的线性方程。其位置随剪切连续变化。因此，对于足够小的变化，各交叉仍以相同的顺序发生，具有相同的法向符号，并处于相同的相对内部中。对于有理数变化，根据引理A.6的证明，支撑扰动后线段的直线在每一阶都避开图的余维二分层和特殊端点轨迹。

因此，有限图保留了各个墙单项式。一旦消去新的分母，由于正性，它们的乘积会出现在完整的墙幂中，而与其曲线次数无关。在其他每个交叉处，我们都使用常数项。于是我们构造出了一条最终配对更小的有理路径，这与最小性相矛盾。

取 $b$ ，使其坐标有理独立。每个运输后的余向量同样有理独立，因为该运输是有理且可逆的。在一个极小交叉处，所选有限凸组合中的所有支集点都必须使 $\langle b_+,\cdot\rangle$达到最小值，而至多只有一个格点能做到这一点。因此，所选的 $\delta$ 由墙和 $b_+$决定，即使墙具有多个独立的切向方向也是如此。具有相同终端指数和端点的两条极小路径向后完全一致。在它们的非零弯折事件有限并集中首次可能出现分歧之处，墙、 $b_+$以及出射指数 $a'$ 均相同。相切性确定了 $k=\langle n,a'\rangle>0$，而唯一的选择给出相同的入射指数$a'-k\delta$ 以及相同的前一个余向量。因此，这些路径具有相同的初始标记。只有零输入的终端指数为零。因此，不同的标签具有不同的极小特征。它们在 $k$中的系数均非零，所以有限带符号组合中的最低项不可能在此权重下相互抵消。有限最小值的连续性将该等式延拓到所有实权重。最小支撑函数相等，从而得到牛顿多面体的结论。□

**推论 A.9**。 在预备模型上，在命题 *A.3* 的负顶点假设下，上的有限局部 *Laurent* 函数对每个在 $R$上平凡的实特征权重都满足带符号最小值公式。其在特征格中的牛顿多面体也具有同样性质。

证明。 正性与有限性表明，将曲线单项式设为 1 不会改变每个局部函数在特征格中的支集。由定理 A.8得到的不同最小化特征，在增广之前仍然彼此不同。乘以整环 $R$ 中的非零元素会保留相应的非零系数。连续性给出了每个权重处的断言。 □

**命题 A.10**。 在定理 *C.9*的设定下，分裂前的 *theta* 基对于标记图表中的所有实 *Gauss*权重具有赋值独立性，当且仅当分裂后的 *theta* 基具有这一性质。

证明。设 $w$ 为旧坐标， $u_1$、…、 $u_d$ 为新坐标。根据定理 C.9，当 $\sum_i m_i=s$ 时，旧函数 $z^pw^sA_p$、$s(z,w)$ 给出 $z^pu^mA_p$、$s(z,\sum_i u_i)$。对于一般权重 $(c,b_1,\dots,b_d)$，选取 $j$，使得 $b_j=\min_i b_i$。若旧的最小化指数在 $(c,b_j)$ 处为 $(h,t)$，则新的最小化指数为 $(h,m+(t-s)e_j)$。事实上，$(\sum_i u_i)^{t-s}$ 中的最低项是 $u_j^{t-s}$，其系数为 1。

对于一般权重，赋值独立性等价于不同的基元素具有不同的最小化指数。在正向推导中，新的指数通过对其最后 $d$ 个分量求和即可还原 $t$。因此，由旧基的线性无关性可确定旧标签 $(p,s)$，进而根据公式确定 $m$。反过来，将每个旧标签 $(p,\ s)$ 提升为 $(p,\ se_j)$。若两个旧函数有相同的最小化指数 $(h,\ t)$，那么它们的提升也会有相同的指数 $(h,\ te_j)$。每个一般旧权重都有一个一般提升，使得 $b_j$ 最低。对每个有限线性组合应用连续性，可将两个方向的结论推广到所有实权重。□

A.4. **内在局部图表中的原子性**。 设在命题 A.5的预备紧化上工作。记 $Q$ 为其有效数值曲线类的幺半群， $R=\mathbb{Z}[Q]$,

以及 $R_+ = \mathbb{N}[Q]$。将 $R$ 上的内在代数记为 $B_R$，其基记为 $(\vartheta_m)_{m\in L}$，一般端点 $\xi$ 处的局部映射记为 $V_\xi$。因此 $V_\xi(\vartheta_m) = V_{\xi,\,m}$。若$B_R$ 在内在局部图表中为正，则指对标记源环面的每个一般端点， $V_\xi(f)$的每个系数都属于 $R_+$ 。

非零正元素称为加法不可分解的，如果它不能写成两个非零正元素之和。下面的原子性断言确定了所有此类元素。对于簇簇，Mandel 通过读取其标签附近的 theta 系数，证明了散射图册中的原子性 [30, 定理 1]。在内在局部图表中，同样的论证可以恢复带有其曲线类的系数。

**定理 A.11**。令 $E \subset L$ 为有限且 $m \in E$。存在 $m$ 在 $L_{\mathbb{R}}$ 中的一个邻域，使得对于该邻域中的每个一般端点 $\xi$，

$$[z^m]V_{\xi,l} = \delta_{ml} \quad (l \in E)$$

在 $R$中。因此，在内在局部图表中为正的元素构成 $\bigoplus_{m\in L} R_+\vartheta_m$。其非零加法不可分解元素恰好是 $q^\beta\vartheta_m$，其中 $\beta \in Q$ 和 $m \in L$。经过曲线增广后，相应的元素就是各个 $\theta_m$。

证明。对于 $m = 0$，断言由 $V_{\xi,\,0} = 1$ 和 $\mathrm{CT}(V_{\xi,\,l}) = 0$ 对于 $l \neq 0$得出，正如命题 A.5的证明中所述。设 $m \neq 0$。若 $w - v \in \mathbb{N}^r \oplus \{0\}^c$，则写作 $v \preceq w$。如果一条从 $l \in E$ 出发且终端指数为 $m$的计数路径，则根据命题 A.2 和引理 A.6，其后续指数按照此阶递增。如果它发生弯折，则其最后一次非零弯折之前紧邻的指数 $v$ 因此属于有限个区间 $\{v : \ l \preceq v \preceq m\}$，以及 $v \neq m$。

这种弯折支撑在一个有理超平面上，该超平面承载着从 $v$ 到 $m$的非零无穷小圆柱计数，这由引理 A.6的切割论证可知。可能的超平面只有有限多个，且与 $\xi$无关。事实上，对于有限多个 $v$中的每一个， [27,引理 20。29] 都对固定位移 $m - v$所对应的贡献类集合给出了界。由于环境环面幺半群是严格凸的，所有这些类都会在曲线单项式滤过的某个共同有限阶上存活。现在 [27, 引理 20。6] 在该阶上给出有限多个本原墙法向量。

扩充这一组超平面，使其包含相对于零类、针对某个 $A$ 大的 $\mathrm{Wall}_A$ 的所有胞腔，以及预备模型上环面扇的所有余维一锥。这些是有限个有理圆锥集合 [27, 构造 4.15–4.16]。对于每个所得超平面 $n^\perp$，其中 $\langle n,\ m\rangle \neq 0$，取 $m$ 的一个邻域，在该邻域上 $\langle n,\ \cdot\rangle$ 与 $\langle n,\ m\rangle$具有相同的符号。在它们交集中的一般 $\xi$处，射线 $\xi + tm$、 $t \geq 0$避开该集合中的每个超平面。对于包含 $m$ 的超平面，这由 $\langle n,\ \xi + tm\rangle = \langle n,\ \xi\rangle \neq 0$ 可知。

沿着末端线段向后追溯，直到最后一个弯折处，恰好得到这条射线。因此，终端指数为 $m$ 的贡献路径是直的，其输入为 $m$。这条直射线避开了墙 $_A$ 以及环面扇的余维一骨架。根据 [27, 引理 12 3]，它在零类中的计数为一。根据 [27,引理 2034]，$V_{\xi,m}$ 中 $z^m$ 的增广系数为一。所有计数均为非负数，而该指数处的系数是对各个类求和所得的有限和。因此， $R$ 中它的整个系数为一。

现在将 $f = \sum_{l\in E} c_l\vartheta_l$ 写成 $c_l \in R$。对于上述的 $\xi$，我们有 $[z^m]V_\xi(f) = c_m$。因此，局部图表中的正性给出：对于每个 $m$，都有 $c_m \in R_+$。反过来，单个 $\vartheta_m$ 的每个局部系数，根据其计数定义，都属于 $R_+$。因此，这些元素自由地生成正加法幺半群。系数恒等式在 $q^\beta \mapsto 1$ 之后仍然成立，所以同样的论证也适用于增广代数。□

因此，可以在任意非空的一般点集上检验正性，只要其闭包与每条射线 $\mathbb{R}_{>0}m$, $0 \neq m \in L$ 都相交即可。事实上，证明中所用的符号条件在该射线每个点的某个开邻域内都成立。对于零标记，任意一般点都足够。

A.5. **比较 Laurent 图表**。在一组特征标基上的一致性决定了标记劳朗展开。要在两个图表之间传递赋值独立性，只需坐标变换将对数体积形式保持到一个标量因子。

A.5.1. 识别散射图中的 *theta* 函数。设 $k$ 是特征零域， $M$ 是标记环面的完整特征格。记 $k(M) = \mathrm{Frac}(k[M])$。假设 $A$ 和 $B$ 具有带有相同标签的 $k$-基 $(\theta_m)$ 和 $(\psi_m)$，并具有忠实 Laurent 实现 $\phi\colon A \hookrightarrow k[M]$ 和 $\iota\colon B \hookrightarrow k[M]$。一个基同构 $F\colon A \to B$ 将每个 $\theta_m$ 映为 $\psi_m$。

**引理 A.12**。设 $F$是一个基同构，且 $u_1$、……、$u_n$是 $M$的一个 $\mathbb{Z}$-基。若存在标签 $m_j$ 使得

$$\phi(\theta_{m_j}) = \iota(\psi_{m_j}) = z^{u_j} \qquad (1 \le j \le n),$$

则对于每个 $m$， $\phi(\theta_m) = \iota(\psi_m)$ 。

证明。特征 $z^{u_j}$ 生成 $k(M)$，因此它们的原像 $\theta_{m_j}$ 生成 $\mathrm{Frac}(A)$。两个嵌入 $\phi$ 和 $\iota F$ 在这些生成元上相同，因而在 $A$的每个元素上也相同。□

基同构本身可以由迹恒等式得到。令两个代数上的迹分别为相应基中特定单位元的系数。设每一对标签和每个三元组标签在标签零处的迹都相同，且双线性配对 $(b,c) \mapsto \mathrm{Tr}_B(bc)$ 是非退化的。标签保持线性双射 $F$的二元组和三元组恒等式给出：对于每个 $c \in A$，$\mathrm{Tr}_B((F(ab) - F(a)F(b))F(c)) = 0$。非退化性证明了乘法性。这就是 Frobenius 结构定理 [27, 定理 1.2]的唯一性论证。Gross and Siebert 通过带 puncture 的 Gromov–Witten 不变量 [21] 在其镜像代数中定义乘法。对于包含稠密环面的光滑仿射对数 Calabi–Yau 簇，Johnston 证明了 Gross–Siebert 代数与 Keel–Yu代数相同，其中紧化边界是一个 nef除子的支集 [23, 定理 1.1 和推论 1.2]。为了确定 Laurent展开，还必须根据引理 A.12 确定特征。

特别地，设 $\iota(\psi_m)$是正散射图在一般端点处的有限折线θ函数，其定义见 [8, §2。1], 并且具有相同的带标记特征格。在该定义中，每面墙上的非零特征指数都是单个向量的正倍数。在引理 A.12的假设下，内在函数 $\phi(\theta_m)$于是满足

$$v_w\left(\sum_m c_m \phi(\theta_m)\right) = \min_{c_m \neq 0} v_w\big(\phi(\theta_m)\big)$$

对于每个实高斯权 $w$ 以及每个满足 $c_m \in k$的非零有限和。在特化散射系数之前， [8, 定理 3.7 和 3.8] 在一般权重下为不同标签给出不同的最小化指数。连续性给出了所有权重下的公式。对于特化的散射系数，则可以将 [8, 定理 3.10] 应用于由剩余特征格索引的函数，前提是该格满足假设 3.9、这些函数在特化之前是有限的，并且系数单项式的每个非零整数倍在 $k$中的像都非零。

对于由负 Newton 顶点得到的内在图表，定理 A.8直接确立了所需的线性无关性。关于骨架赋值的内在独立性猜想的一般形式见 [26,猜想 21。7]。

A.5.2. 更改环面坐标。

**命题 A.13**。设 $K = k(x_1, \dots, x_n) = k(y_1, \dots, y_n)$ 定义在一个特征零域上。假设对数体积形式 $\Omega_x = \bigwedge_i d\log x_i$ 和 $\Omega_y = \bigwedge_i d\log y_i$ 在 $k$上成比例。在 $K$ 中同时为两个图表下的 *Laurent* 函数的一族函数，对于一个图表中的所有实 *Gauss* 赋值赋值独立，当且仅当它在另一个图表中也如此。

证明。首先只需考虑 $x$ 图表中的一个原始整权。其高斯赋值 $v$ 是除子赋值，而在包含其射线的光滑托里克模型上，$\Omega_x$ 在$v$ 处的阶为 $-1$。因此，$\Omega_y$也如此。某个 $y_i$ 的取值非零。否则，所有 $y_i$在该除子的 一般点处都是单位元，而 $\Omega_y$ 在那里正则。经过一次

对 $y$-特征作幺模变换后，第一个特征的取值为正数 $d$，其余特征的取值均为零。由于 $\Omega_y$ 的极点是单极点，其非零剩余类除相差一个符号外，等于 $d$乘以最后 $n-1$ 个剩余类的对数微分的楔积。因此，在特征零下，这些剩余类代数独立。按第一个特征的幂作 Laurent 展开时，关于其余特征的每个非零系数的取值均为零。这就是 Gauss规则；对该除子赋值作归一化后得到 $d=1$。

$y$图表中的带符号最小值公式由此证明了它对$x$图表中的所有本原权重都成立。正比例缩放可将公式推广到有理权重。对于一个固定的非零有限和，它在 $x$图表中的 Gauss 值是有限个线性函数的最小值，因此关于权重连续。其非零直和项的值的最小值也同样如此。由稠密性可知，该断言对所有实权重都成立。交换图表即可得到反向结论。□

特别地，只要某个基同构的两个 Laurent 实现诱导出环面坐标的保体积双有理变换，它与散射代数之间的基同构便会传递赋值独立性。引理中的各个特征恒等式A.12 给出了更强的结论：Laurent 多项式本身相等。

**推论A.14**。 设复数域 $X$ 上的一个特征零域 $k$ 上的整簇带有一个有理顶形式$\Omega$，它在光滑轨迹上正则且处处不为零。若它在某个稠密开分裂环面上等于标准对数体积形式乘以一个标量，则在 $X$的每个稠密开分裂环面上也如此。因此，在某个此类图表中满足全权重赋值独立性的 $X$ 上的一族正则函数，在每个此类图表中也满足该性质。

证明。在坐标为 $y_i$ 的第二个环面上，商 $\Omega/\Omega_y$ 是一个正则单位。它等于 $cy^h$，其中 $c\in k^\times$ 和 $h\in\mathbb{Z}^n$ 为某些对象。若 $h_j\neq 0$，则对 $y^h\bigwedge_{i\neq j} d\log y_i$ 求导并除以 $(-1)^{j-1}h_j$，会使 $y^h\Omega_y$ 成为恰当形式。然而，$\Omega_x$ 在 $k(X)$ 中并非恰当形式。事实上，将有理系数在关于 $x_i$ 的迭代 Laurent 级数域中展开。恰当顶形式的迭代留数为零，因为关于 $x_i$ 的偏导数在 $x_i^{-1}$ 处的系数为零。$\Omega_x$ 的迭代留数为一。因此 $h=0$，命题 A.13 适用。□

## Appendix B. Recognizing the basis of an upper LP algebra

假设在同一个 Laurent 环中给定了一个内在代数和一个 LP 种子。要将 θ函数识别为上LP代数的基，我们必须证明它们延拓到相邻的种子图表，并且张成其 Laurent 环与初始 Laurent 环的交集。

B.1. **沿突变的扩张与张成**。 我们检查代数生成元上的延拓。为证明张成，我们比较有限突变树上沿途的最小指数。

B.1.1. 第一星中的正则性。 设 $R$ 是一个唯一分解整环，设 $M=\mathbb{Z}^n$，并记 $\mathcal{L}=R[M]=R[z_1^{\pm1},\dots,z_n^{\pm1}]$。指定的 Laurent 系数特征可以包含在 $z_j$ 中。多项式系数保留在 $R$中。固定一个以此为初始 Laurent 环的目标 LP 种子，并令 $I$ 为其可变指标集。对于 $i\in I$，记

$$\mathcal{L}_{\neq i}=R[z_j^{\pm1}:j\neq i],\qquad z_i'=H_i/z_i,\qquad \mathcal{L}_i=\mathcal{L}_{\neq i}[(z_i')^{\pm1}].$$

这里 $H_i\in\mathcal{L}_{\neq i}$ 是交换 Laurent 多项式，包括其归一化单项式。令 $W_i=\mathcal{L}\cap\mathcal{L}_i$。度数为 $z_i$- 切片 $u$ 表示 Laurent 多项式在 $z_i^u$ 处的系数，并将其视为 $\mathcal{L}_{\neq i}$ 的元素。根据 LP 海星定理 [12, 定理 1。3], 该种子的完整上 LP 代数为 $\mathcal{U}=\mathcal{L}\cap\bigcap_{i\in I}\mathcal{L}_i$。

**引理 B.1**。 固定 $i\in I$，并将 $\mathbb{Z}^{n-1}$ 视为 $M$ 中第 $i$ 个坐标为零的子格。$\mathcal{L}$ 中的元素 $f=\sum_{u\in\mathbb{Z}}z_i^u f_u$ 属于 $W_i$，当且仅当对于每个 $\mathcal{L}_{\neq i}$，$H_i^{-u}$整除 $f_u$

$u<0$。这些函数

$$E_{u,b}=z^b z_i^{[u]_+}(z_i')^{[-u]_+},\qquad u\in\mathbb{Z},\quad b\in\mathbb{Z}^{n-1},$$

构成 $W_i$ 的 $R$-基，其中 $[u]_+=\max(u,0)$。

证明。 在邻近环面中，$(z_i')^{-u}$ 的系数为 $H_i^u f_u$。这给出了整除性检验。在初始环面中 $E_{u,b}=z_i^u H_i^{[-u]_+}z^b$，因此将每个可容许切片除以 $H_i^{[-u]_+}$，恰好得到其在所述基中的坐标。□

**推论 B.2**。 设 $A\subset\mathcal{L}$ 是一个 $R$-代数，且 $g_1,\dots,g_t$ 是已知的 $R$-代数生成元，生成 $A$。则 $A\subseteq\mathcal{U}$ 当且仅当 $z_i$- 切片满足引理 $g_j$ 中的整除性条件 *B.1* 对每个 $i\in I$ 均成立。

*Pr*证明。 每个 $W_i$ 都是一个子环。因此，当且仅当 $A$ 确实如此时，生成元才属于每个 $W_i$ s. □

滤子提供了一种寻找生成元的方法。设 $A$ 具有一个由非负整数指标化的递增、穷尽且乘法滤子，并且 $g_1,\dots,g_t$ 的初始形式在 $R$ 上生成 gr $A$。对于一个次数为 $d$的元素，提升其次数为 $d$的符号在这些生成元中的齐次表达式。相减会降低次数，因此通过归纳可证明在 $A$ 中生成。该方法适用于从有限环面面退化的 Hilbert 基得到的 theta 生成元。因此，我们可以直接根据这些生成元的 Laurent展开检查延拓。

B.1.2. 沿有限突变树张成。 令 $\Lambda$ 为秩为 $n$ 的格，并令 $(\vartheta_m)_{m\in\Lambda}$为 $R$-代数 $A\subset\mathcal{L}$的指定基。此处的基及其 Laurent 实现均独立于 $\mathcal{U}$给出。基的标记 由一个连续、正齐次的分片整数线性同胚 $\mu\colon \Lambda_{\mathbb{R}}\longrightarrow M_{\mathbb{R}}$ （其诱导格之间的双射）以及一个尖有理多面锥 $C\subset M_{\mathbb{R}}$组成，使得 $C\cap(-C)=\{0\}$。若对每个$\vartheta_m$的初始 Laurent 展开， $z^{\mu(m)}$ 的系数均为 1，且 Supp$(\vartheta_m)\subseteq\mu(m)+C$，则称该基在此标记下为尖的 。

我们可以从乘积的首项中恢复标记。在计数源的应用中，下面的锥 $P$ 记录正则坐标处的非负修正项以及单位元处的零修正。

引理 *B.3*. 设 $G:\ M\longrightarrow\Lambda$ 是一个格同构，并且对每个 $a\in\mathbb{N}^n$ 都有 $\vartheta_{Ga}=z^a$ 。令 $\tau:\ \Lambda_{\mathbb{R}}\longrightarrow V_{\mathbb{R}}$ 是关于另一个格 $V$ 的连续、正齐次分片幺模同胚。设存在一个尖有理多面锥 $P\subset V_{\mathbb{R}}$，使得在每个乘积 $\vartheta_p\vartheta_q$ 中，具有 $\tau$-坐标 $\tau(p)+\tau(q)$ 的项系数为 *1*，而其他每一项的 $\tau$-坐标均属于 $\tau(p)+\tau(q)+(P\setminus\{0\})$ 。令 $G_\tau\colon\ M\to V$ 的列为 $\tau(Ge_j)$ 。则 $G_\tau$ 是幺模的，并且该基在标记 $(G_\tau^{-1}\tau,\ G_\tau^{-1}P)$ 下是尖的。

证明。 假设中的单项式的每个乘积都是一个单独的基元素。它们所规定的首项输出意味着对所有 $a\in\mathbb{N}^n$ 都有 $\tau(Ga)=G_\tau a$。齐次性和连续性将该等式延拓到实正正交象限。$\tau G$ 的一个满维幺模片与其内部的一个开集相交，并且在该开集上它与 $G_\tau$ 一致。因此， $G_\tau$ 是幺模的。

写作 $\vartheta_m=\sum_a c_a z^a$。选取一个位于锥内部足够深处的正整数向量 $b$ ，使得此有限和中的每个 $a+b$ 以及 $G_\tau^{-1}\tau(m)+b$ 都属于 $\mathbb{N}^n$。于是 $\vartheta_{Gb}\vartheta_m=\sum_a c_a\vartheta_{G(a+b)}$。右侧以 $a$ 为索引的项的 $\tau$ 坐标为 $G_\tau(a+b)$。将其与指定的首项以及其他输出所对应的锥进行比较，即可得出结论。□

对于 $H_i$ 的牛顿多面体的顶点 $v$，定义映射 $\lambda_{i,v}(u,b)=ue_i+b+[-u]_+v$。它是从 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{n-1}$ 到 $M$ 的双射。在任意满足 $A\subseteq W_i$ 的尖标记 $(\mu,C)$ 处，都存在唯一的 Newt$(H_i)$ 的顶点 $v$，使得 Newt$(H_i)-v\subset C$。其系数是 $R$ 的一个单位。事实上，取带有 $\mu(m)=-e_i$ 的标签。 $\vartheta_m$ 的 $-1$- 切片去掉 $z_i^{-1}$ 后，常数系数为一，且支集位于 $C$ 中。由引理 B.1，它是 $H_i q$。取在 $C\setminus\{0\}$ 上严格为正的一般权重。两个因子的最小指数 $v,b$ 之和为零，而它们的

系数的乘积为一。牛顿加性给出 $\mathrm{Newt}(H_i) + b \subseteq \mathrm{Newt}(H_i q) \subset C$。具有此性质的两个顶点的差都位于尖锥中，因此二者重合。在此顶点处，$E_{u,b}$ 的指数 $\lambda_{i,\,v}(u,\ b)$ 具有单位系数，且所有修正项都位于 $C$ 中。

**定理 B.4**。设一棵有限树在每个顶点处都带有一个尖标记（$\mu_s$、$C_s$），并在每条边上带有一个可变指标 $i$。记 $J$ 为所使用指标的集合，并记 $W_J = \bigcap_{i\in J} W_i$，其中$W_\varnothing = \mathcal{L}$。假设 $A \subseteq W_J$。对于一条指标为 $i$ 的边 $s$、$t$，使用上述为 $H_i$确定的顶点 $v_s$、$v_t$。设

$$\lambda_{i,v_s}^{-1}\mu_s = \lambda_{i,v_t}^{-1}\mu_t \quad on\ each\ edge, \qquad \bigcap_s \mu_s^{-1}(C_s) = \{0\}.$$

则 $A = W_J$，带有所规定的 $R$-基。特别地，若 $A \subseteq \mathcal{U}$，则 $A = \mathcal{U}$。

边等式等价于 $\mu_t(m) = \mu_s(m) + [-\mu_s(m)_i]_+(v_t - v_s)$。对于有限分片线性标记，这两个条件都可以在有限个有理多面体细分上进行检验。

证明。固定一个顶点 $s$。仅当其支集包含于 $C_s$的有限个平移的并集时，才会在 $s$ 处使用关于 $M$ 指数的无穷和。选取一个在 $C_s$ 的非零向量上严格为正的整线性泛函。在每个这样的平移中，泛函值有界的格点构成有限集。特别地，将每个指数映射为支集包含在该指数与 $C_s \setminus \{0\}$ 之和中的有限和的矩阵，在每个非零项上都使泛函至少严格增加一。对于这样的矩阵 $D$，级数 $\sum_{k\ge 0}(-D)^k$ 定义了 $1 + D$ 的逐系数逆。对于固定指数，根据泛函的界，只有有限个起始指数和 $D$ 的幂能够作出贡献。$D$ 的每一列都有有限支集。因此，有限几何和恒等式给出了每个指数处的逆。当 $C_s = \{0\}$、$D = 0$。

将位于 $s$ 的单项式基按 $m \mapsto z^{\mu_s(m)}$ 编号。把这个编号的单项式基映射到相应编号的 $\vartheta_m$ 的 Laurent 展开的矩阵，具有刚才描述的形式 $1 + D$。因此，在这一类和中，每个 $f \in \mathcal{L}$ 都能在 $s$ 处的 $\vartheta_m$ 中唯一地形式展开。其系数 $c^s_m(f)$ 满足

$$c^s_m(f) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu_s(m) \in \mathrm{Supp}(f) + C_s.$$

当 $f \in W_i$ 时，我们证明这些系数在一条边的两端相等。边条件确定了两端具有给定标签 $m$ 的同一个基元素 $E_{u,b}$。在这条边上将其记为 $E_m$。$W_i$ 在这个 $R$-基下的展开 $\vartheta_m = \sum_n T_{nm}E_n$ 给出一个有限列矩阵。固定一个端点 $j \in \{s,t\}$ 和一个非零系数 $T_{nm}$。若 $E_n = E_{u,b}$，则移除 $z_i^u$ 后，$\vartheta_m$ 的 $u$-切片为

$$H_i^{[-u]_+}\sum_{b'} d_{b'}\, z^{b'}, \qquad d_b = T_{nm} \neq 0.$$

在整环 $R$ 上，对于任意实权重，两个非零因子的初始形式的乘积均非零。这证明它们的牛顿多面体在乘法下相加。因此，即使单项式本身发生抵消，将其 $i$ 坐标还原后，该切片的牛顿多面体仍包含 $ue_i + b + [-u]_+ v_j = \mu_j(n)$。$\vartheta_m$ 的尖性给出 $\mu_j(n) \in \mu_j(m) + C_j$。

如果 $E_n$ 对 $z^{\mu_j(m)}$的系数有贡献，那么切锥包含关系也给出$\mu_j(m) \in \mu_j(n) + C_j$。$C_j$ 的尖性和 $\mu_j$ 的单射性迫使 $n = m$成立。$E_m$ 和 $\vartheta_m$ 在此处的系数都是单位元，因此 $T_{mm}$ 是单位元。写作 $T = (1 + D)\Delta$，其中 $\Delta$ 是其对角线。$D$ 的每个非零项在两种标记中都严格递进。

用 $b(f)$ 表示 $f \in W_i$ 在 $E_m$-基中的系数。在边的任一端，我们都计算得到相同的向量 $\Delta^{-1}\sum_{k\ge 0}(-D)^k b(f)$。事实上，初始向量与矩阵元素一致，并且对于每个标签，只有有限条路径作出贡献。在每个端点，该向量都属于上文所述的完备化，并由 $T$ 映射为 $b(f)$。根据切锥的包含关系，在该端点将每个 $E_n$ 展开为单项式同样保持完备化。

因此所得的 theta 和在该顶点处表示 $f$ 的一个洛朗级数。顶点展开的唯一性表明它等于 $c^j(f)$。这就证明了带符号系数在 $R$ 上跨越该边时相等。

每个 $f \in W_J$ 都属于每个边环。连通性在整棵树上给出单一系数族$c_m(f)$。若其支集无界，则取其支集中的序列 $m_\ell$，满足 $\|m_\ell\| \to \infty$ 且 $m_\ell/\|m_\ell\| \to m_*$ 的范数为1。前述支集包含、Supp($f$)的有限性，以及 $\mu_s$ 的齐次性与连续性蕴含：在每个顶点处 $\mu_s(m_*) \in C_s$。这与第二个假设矛盾。公共支集在一个格中有界，因而有限。因此 $f$ 属于 $A$，如所需。□

**推论 B.5.** 在定理 *B.4*下，假设诸标记指定于有限有理多面体细分上。对于非零的 $f \in \mathcal{U}$，其展开中的每个标签都属于该有限集

$$\Lambda \cap \bigcap_s \mu_s^{-1}\big(\mathrm{Newt}(f) + C_s\big).$$

由该集合标号的诸函数的*Laurent* 展开，通过在 $R$上的单位三角代换确定 $f$的系数。

证明。定理证明中的支撑估计给出了该包含关系。将同样的极限论证应用于以 Newt($f$) 替代 Supp($f$) 的闭集，可知它们的交集是有界的。限制到一个公共细分后，它可表示为有限个有理多胞体的并，因此可以枚举其格点。在一个顶点 $s$处，按照一个在 $C_s\backslash\{0\}$ 上严格为正的整数线性泛函取值递增的顺序，对这些标签排序，并在 $\mu_s(m)$ 处取值。按此顺序，从当前余式中读取 $z^{\mu_s\,(m)}$ 的系数，并减去该系数与 $\vartheta_m$ 的乘积。尖性使得每个非对角贡献都严格排在后面。该过程恢复了所断言的展开，包括多余标签处的零系数。□

B.2. 比较公共面的展开。设 $k$ 为一个域，设 $\mathcal{U}$ 为其带标记的有理函数域中的完整上 LP 代数。假设子代数 $A \subseteq \mathcal{U}$ 具有一个 $k$-基 $(\vartheta_m)_{m\in\Lambda}$。在两个相邻种子 $j = s$、$t$处，分别使用其自身的特征格 $M_j$以及如定理 B.4 中所述的标记 ($\mu_j$、$C_j$)。因此，在该种子中的 Laurent展开在 $\mu_j(m)$ 处具有非零系数，并且支集包含于 $\mu_j(m) + C_j$。将 $f$ 在该图表中的支集记为 Supp$_j(f)$。记 $f$ 在该标记下的三角形式展开的系数为 $c^j_m(f)$。

考虑一个非零整数权 $\eta_s$ 及其 $\eta_t$ 在种子交换下的变换，如引理 1.6所述。它们在环境域上定义了一个离散赋值 $v$。设 $\eta_s \in C_s^\vee$和 $\eta_t \in C_t^\vee$，允许权重位于对偶锥的边界 $C_j^\vee$上；这些权重在 $C_j$上均为非负。对于域的一个子代数 $B$，记 $\mathrm{gr}_v B$ 为关于 $v \geq l$的滤子所对应的伴随分次代数，$l \in \mathbb{Z}$。它嵌入环境域的关联分次环中，在其中我们比较来自两个图表的齐次符号。对于 $0 \neq f \in B$，其初始形式$\mathrm{in}_v(f)$ 是它在次数为 $v(f)$ 的分次分量中的像。

**命题 B.6**。若 $\mathrm{gr}_v A = \mathrm{gr}_v \mathcal{U}$，则对于每个 $f \in \mathcal{U}$及每个标签$m$，有 $c^s_m(f) = c^t_m(f)$。反之，如果唯一的$b \in \Lambda_{\mathbb{R}}$ 满足 $\mu_s(b) \in C_s$、$\mu_t(b) \in C_t$，且 $\langle \eta_s, \mu_s(b)\rangle = 0$为 $b = 0$，则该系数等式蕴含分次代数相等。

证明。对于任一图表，$\vartheta_m$ 的次数为 $d_m = \langle \eta_j, \mu_j(m)\rangle$。其在该图表中的初始形式具有相同的特定指数，并且在 $C_j \cap \ker\eta_j$ 中具有相同的修正项。一个在 $C_j \setminus \{0\}$ 上严格为正、并以格序打破平局的线性泛函，会为不同的标签给出不同的最小单项式。因此，每个次数的初始形式都是线性无关的。由于每个有限基展开中次数最低的项都会在伴随分次代数中保留下来，它们构成 $\mathrm{gr}_v A$ 的一个 $k$-基。

若分次代数一致，则将非零 $f \in \mathcal{U}$ 的初始形式表示为此基的线性组合，并减去相应的 $\vartheta_m$ 有限和。余项属于 $\mathcal{U}$，且其次数至少增加一，除非它是零点。对于给定的标签 $m$，重复此过程，直到

余项 $g$ 为零点或 $v(g) > d_m$。在后一种情况下，在任一标记处取三角逆可得 $c_m^j(g) = 0$。事实上，非零系数将意味着 $\mu_j(m) \in$ 支集$j(g) + C_j$，从而$d_m \geq v(g)$。被减去的有限和在两端具有相同的基系数，这就证明了第一个断言。

反过来，令 $c_m$ 表示 $f \neq 0$的公共系数。每个非零系数都满足两个支集包含关系以及 $d_m \geq v(f)$。只有有限多个这样的标签可能满足$d_m = v(f)$。否则，将其中一个无界序列归一化并取子列，由标记的连续性和齐次性可得一个满足这三个条件的单位向量 $b$。在权重为 $v(f)$的指数处， $f$ 的三角展开现在给出$v(f) = \sum_{d_m = v(f)} c_m$，其中非零和是有限的。这证明了分次等式。□

有两种有限验证方法可用于检验分次假设。将交换写作$x'x = H(Z)$，其中 $Z$ 是未改变的特征，并令 $H_0$ 为 $H$中使 $Z$上的权重达到最小值的各项之和。每个 Laurent 环在其高斯赋值下的伴随分次代数都是一个按坐标权重分次的 Laurent 多项式环。令 $X, Z$表示第一个环面的坐标符号，并用这些符号计算 $H_0$。 $x'$ 的符号为 $H_0/X$。在任一环面中，上方元素的初始形式都是其坐标符号的 Laurent 多项式。因此，它们的 Laurent 交是 $\mathrm{gr}_v \mathcal{U}$的一个上界，而引理 B.1 将此交集识别为 $k[Z^{\pm 1}, X, H_0/X]$。只需将这些有限多个生成元表示为 $A$ 中元素的初始形式。

或者，假设已知有限表示 $\mathcal{U} = k[g_1, \ldots, g_h]$，其关系理想为 $I \subset k[T_1, \ldots, T_h]$。令 $w_i = v(g_i)$，并令 $J$ 为某个图表中 $v(g_i)$ 内 Laurent 初始形式的关系理想。记 $\mathrm{in}_w I$ 为由 $I$ 中非零多项式的最小权重部分生成的理想。若 $\mathrm{in}_w I = J$，只需将这些 $h$ 初始形式表示为 $A$ 中元素的初始形式。为证明这一点，用多项式 $P(T)$ 表示 $0 \neq f \in \mathcal{U}$。 $P$ 的最小 $w$ 权重至多为 $v(f)$。若严格小于，其最小部分属于 $J$。将此部分表示为 $I$ 中关系的初始形式的倍数之和，且只取具有所需齐次权重的乘数。从 $P$ 中减去关系的相同倍数，会提高其最小权重。权重为整数，且以上界 $v(f)$ 为限，因此经过有限次相减后，所得多项式的最小部分取值为 $\mathrm{in}_v(f)$。这证明 $\mathrm{in}_v(g_i)$ 生成 $\mathrm{gr}_v \mathcal{U}$。在有效域上，消元可计算 $J$，而权重齐次化可计算 $\mathrm{in}_w I$。

**推论 B.7**。 设一个有限连通的种子图表图带有此类标记。假设命题 *B.6* 的分次假设在每条边上以及 $\bigcap_j \mu_j^{-1}(C_j) = \{0\}$上均成立。那么 $\mathcal{U} = \bigoplus_{m \in \Lambda} k\vartheta_m$的基展开的支集 $f \in \mathcal{U}$ 包含于 $\Lambda \cap \bigcap_j \mu_j^{-1}\big(\mathrm{Supp}^j(f) + C_j\big)$中。

证明。 连通性给出公共系数，而每个图表中的三角逆结合 $f$ 在该图表中的 Laurent展开，给出了所述的支集包含关系。该集合中的一个无界序列在归一化并取子序列后，将在每个 $\mu_j^{-1}(C_j)$ 中产生一个单位向量。因此，该集合是有界的，只包含有限个格点。公共展开是有限的，并表示 $f$。□

B.3. **等式的除子型判据**。 对于一个在 $S$ 上的种子 $t$，记其可变坐标为 $x_i$，并记 $s_i = \prod_{j \neq i} x_j$，其中乘积遍历其他可变指标。记 $\mathcal{U}_S(t)$ 为其完整上 LP 代数。在正可变秩情形下，主开集$D(s_i)$的并集是至多一个可变坐标为零的轨迹。

**命题 B.8.** 设 $S$ 是一个诺特唯一分解整环，且 $A$ 是种子域中的一个诺特 $S$ 整环，它包含初始坐标，并包含于一阶星 *Laurent* 环中。假设每个第一突变元都属于其方向上的 $A[s_i^{-1}]$。令 $Z = \bigcup_{i<j} V(x_i, x_j) \subset \mathrm{Spec}\ A$。那么

$$\mathcal{U}_S(t) = \Gamma(\mathrm{Spec}\, A \setminus Z, \mathcal{O}).$$

因此，当且仅当该开集上的正则函数可以延拓到 $\operatorname{Spec} A$ 时，$A = \mathcal{U}_S(t)$ 。对于正规 $A$ ，这当且仅当没有高度一素理想包含两个不同的可变坐标时成立。

证明。 在每个方向上，双图交为 $C_i[x_i, F_i/x_i]$，其中 $C_i = S[x_j^{\pm 1}\colon \ j \neq i]$且 $F_i$ 是普通交换多项式，由引理 B.1可知。假设意味着 $A[s_i^{-1}]$ 属于此环并包含其全部生成元。对这些局部化取交集，并应用一阶星定理。在秩为零时，两个环都是 $S$。对于正规 $A$， $Z$ 的余维至少为二，根据高度一交公式可延拓。反之，等式使 $x_i$ 成为两两不相伴元的素元，由命题 1.1可知，这排除了公共的高度一素理想。 □

下面的赋值公式明确给出了除子判别。陈述中的所有赋值在基域上都是平凡的，并归一化为其值群为 $\mathbb{Z}$。顶形式的阶是其在光滑模型上代表该赋值的除子处的阶。

**命题 B.9**。 设 $k$ 为特征零的代数闭域，设 $T$ 为特征格为 $M$ 且具有对数体积形式 Ω的分裂环面，并设 $v$ 为$k(T)$的除子赋值。假设其在特征上的限制为 $dw_0$，其中 $d > 0$和 $w_0 \in M^\vee$是本原的。取一个特征 $t$，使得 $w_0(t) = 1$，并令 $S_0 = k[\ker w_0]$。若 $\operatorname{ord}_v \Omega = 0$，则存在一个素*Laurent*多项式 $q \in S_0$，其在相差一个单位的意义下唯一，使得

$$v\left(\sum_j t^j f_j\right) = \min_{j:f_j\neq 0}\bigl(dj + \operatorname{ord}_q f_j\bigr), \qquad f_j \in S_0.$$

如果 阶$_v$Ω $= -1$，那么 $d = 1$ 和 $v$ 是 $w_0$的单项式赋值。

证明。 $S_0$ 中的所有特征及其逆元的值均为零。该赋值在 $t = 0$中的 $V = \mathbb{A}^1_t \times \operatorname{Spec} S_0$ 上有一个中心。在该中心的一般点处，其余维为 $c$，取正则参数 $t$、$h_2$、……、$h_c$。沿中心取分离坐标，将这些参数补全。把它们的微分拉回到表示 $v$的光滑模型上。将每个参数写成局部参数的幂乘以一个单位，可知它们的楔积中至多有一个微分能够贡献局部参数的微分。按Ω的要求除以 $t$，得到

$$\operatorname{ord}_v \Omega \ \geq \ \sum_{\ell=2}^{c} v(h_\ell) - 1 \ \geq \ c - 2.$$

如果 $c = 1$，则该中心是 $t = 0$的一般点。在同一分式域中，它的离散赋值环等于该赋值环，从而得到单项式赋值和体积阶 $-1$。这就证明了在极点处的断言。在剩余情形 $c = 2$中，该中心对于唯一的素元 $S_0$在一般意义下为 $t = q = 0$，且 $v(q) = 1$。

在此超曲面的一般点处， $q$ 是一个光滑参数。在沿赋值的图表中，依次对 $(t、\ q)$、$(t/q、\ q)$ 等进行爆破，得到 $t = q^d b$，其中 $v(b) = 0$。此图表中的体积形式是一个单位乘以 $(db/b) \wedge dq \wedge \eta$，其中 $\eta$是光滑的横截形式。它在中心附近正则且不消失，因为 $b$ 在该处是单位。由此，余维至少为二的中心，根据正则体积形式的同一微分估计，其阶至少为一。因此， $v$ 是此图表中 $q = 0$ 一般点处的阶。 $b$ 的剩余类在 $\operatorname{Frac}(S_0/(q))$ 上超越。将 $t = q^d b$ 代入劳朗和，其最低阶项给出该剩余类的不同幂，且系数均非零。它们的和不会消失，正如所需。 □

特别地，当且仅当对每个 $j < 0$， $q^{-dj}$ 整除 $f_j$ 时，Laurent 多项式在这种体积为零的除子处正则。例如， $t^{-2}q^2 + t^{-1}$ 在 $d = 1$的次数 $-2$ 通过了检验，但其次数为 $-1$ 的系数未能通过。同样的切片整除性也适用于具有指定支集的有限维 Laurent 多项式空间。证明了支撑界以及给定 theta 函数相邻处的 Laurent性后，其系数满足一个线性系统。如果归一化解空间只含一个点，那么该点就给出这个 theta 函数。

B.4. **在镜像上恢复普通交换式。** 命题4.6 在正向镜像上给出一个主环面。它具有正则特征坐标：取一个本原点 $b$，使其位于直锥内部，将其扩充为格基，并给每个其他基向量加上足够大的 $b$ 的倍数。所得基位于直锥中，因此其特征都是正向 theta 函数。对这些特征取逆即可得到整个群代数，因为仅对 $\theta_b$ 取逆就足以得到整个群代数。选定基及其单位坐标后，我们可以考察镜像是否为这个环面上一种子的上LP代数。下述判据还可以恢复普通交换多项式。

设 $S = k[u_1^{\pm 1}, \dots, u_c^{\pm 1}]$ 和 $\mathcal{L} = S[z_1^{\pm 1}, \dots, z_r^{\pm 1}]$。假设 $B \subset \mathcal{L}$ 是一个仿射 $k$-整环，已知其 Laurent 生成元为 $h_1$、.....、$h_t$。拟定的可变坐标为 $z_i$，拟定的单位元为 $u_j$。首先要求 $z_i$、$u_j$、$u_j^{-1}$属于 $B$。特别地，$B[(\prod_i z_i)^{-1}] = \mathcal{L}$。对每个 $i$，定义

$$C_i = S[z_j^{\pm 1} : j \neq i], \qquad B_i = B[(\prod_{j \neq i} z_j)^{-1}].$$

列出生成元中负幂 $z_i^{-s}$对应的所有非零系数 $f \in C_i$，并在每个系数旁记下正整数 $s$。如果列表为空，则拟定方向不成立。否则，在 $C_i$中分解列表中任取一个 $f$。在 $C_i$的单位倍数意义下，选取一个非单位不可约因子 $q$，并检验以下两个条件

$$\operatorname{ord}_q(f) \geq s \quad \text{for every listed } (f, s), \qquad q \in z_i B_i.$$

**定理B.10.** 当且仅当拟定坐标具有所需的正则性、每个可变方向都有一个因子通过检验，并且在至多一个$z_i$ 消失的开集上定义的正则函数可以延拓到 $\operatorname{Spec} B$，拟定坐标中存在一个 *LP* 种子，其系数环为 $S$，完整上代数为 $B$。对于正规 $B$，最后一个条件意味着没有高度一素理想同时包含两个不同的 $z_i$。每个方向至多有一个因子（相差一个相伴元）能够通过检验。将其乘以其他可变坐标的一个 *Laurent* 单项式，以消去所有负幂并去掉它们的公因单项式，即得到普通交换多项式；它在 $S$的单位倍数意义下唯一。

证明。对于非单位素元 $q \in C_i$，令 $W(q) = C_i[z_i, q/z_i]$。引理 B.1 确定了其负切片：的系数 $z_i^{-s}$必须被 $q^s$整除。因此，第一个检验等价于 $B_i \subseteq W(q)$。事实上，取逆变量已经是 $C_i$中的单位元。由于 $C_i[z_i] \subseteq B_i$，第二个检验等价于相反的包含关系。如果不出现负次幂，那么 $B_i$不含有这样的次幂，也就不能包含 $q/z_i$。如果两个因子都通过检验，那么它们的环 $W(q)$ 相同。齐次次数为 $-1$的系数集合分别是它们在 $C_i$中的主理想，因此这些因子互为相伴元。

对于具有完整上代数的 LP 种子 $B$，命题 1.1 给出 $B_i = W(F_i)$，并由命题B.8说明可延拓穿过同时零点。特别地，$F_i$ 整除所列出的每个系数，因此它属于所检验的因子之一。反过来，所恢复因子的归一化代表元是 $S$上的不可约多项式，与相应的 $z_i$ 无关，并且不被任何可变变量整除。不可约性可通过对其他变量进行局部化得到：一个变成单位元的多项式因子必定是系数单位乘以单项式，而归一化排除了这种情形。这些正是普通 LP 种子公理。秩一环$W(q)$ 与归一化突变伙伴的 Laurent 交一致，因为归一化单项式是 $C_i$的单位元。

对于此种子，$B_i = W(q_i)$ 给出了包含于第一星中的关系，并在每个指定的局部化中提供了第一突变元。命题B.8 将其完整上代数识别为所述开集上的正则函数。现在，延拓条件给出与 $B$ 的相等关系。□

等价地，交换可以从未改变坐标的环面上的除子像中读出。消元计算收缩 $K_i = (z_i) B_i \cap C_i$。它是 $\operatorname{Spec}(B_i/(z_i)) \to \operatorname{Spec} C_i$ 的概形论像的理想。在 $W(q)$ 中，该理想恰好是 $(q)$：对 $z_i$ 取商为 $(C_i/(q))[Y]$，其中 $Y = q/z_i$ 作为多项式坐标。

因此，任何种子都要求 $K_i$ 是一个非零的真主素理想。反之，如果 $K_i$ =(q) 是这样的素理想，则包含关系 $q \in z_i B_i$ 自动成立，在该方向上只需进行负切片检验。这一描述保留了像理想中的重数。

这些测试使用具有有效算术运算和多项式分解的域上的有限 Laurent 数据。例如，通过从（$h_1$、……、$h_t$）的图中消去环境环面变量，并通过方程 $vv' - 1 = 0$ 添加逆元，来表示 $B$ 。选择一个消去环境坐标的单项式序。当且仅当一个 Laurent 函数模图理想的标准形仅涉及生成元坐标时，该函数才属于 $B$ 。通过向 $B$ 添加所示逆元来表示$B_i$ 。随后，第二个因子测试就是普通的理想成员关系。在正规情形下，延拓测试等价于计算每个 $V$(zi、zj) 的余维。一般而言，补集 $Z$ 的局部化序列将该障碍确定为以 $Z$ 为支集的第一局部上同调群 $H^1_Z(B)$，因为 $B$ 是一个整环，且该开集是稠密的。对于非空的 $Z$ ，其消失等价于沿着 $Z$ 的深度至少为二。如果已经给出了一个有限表示及其忠实 Laurent 实现，同样的计算仍然适用。

对于 $B = B_k$（$U$），输入可以是任意经过验证的正向 theta 函数及其计算所得 Laurent 展开的有限生成集。如果判据成立且 Spec $B$ 光滑，则所恢复的种子在此标记下给出一个反向 LP 源。在特征零的情况下，可以根据表示检查光滑性。于是，根据命题 1.1 的余维一覆盖，种子体积是正则的且处处不为零。非零的除子类群通过同一命题排除了在这些系数下、任意标记中的上 LP 表示。所恢复的种子为反向计数提供数据。定理5.2说明了所得函数在指定源图表中的正则性如何参与标记回返。

B.5. **指定的 theta 函数的有限识别**。两个上代数相等，并不能说明同构如何作用于它们的 theta 函数。当计数源上有足够多的正则函数已知时，我们给出一个有限判据。

设 $Q$ 是格的一个子幺半群，并令 $G$ =gp($Q$) 为其生成的子群。置 $R = \mathbb{Z}[Q]$ ，并令 $K$ =Frac($R$)。记 $t^\beta$ 为 $\beta \in G$ 的特征。设一个 $R$-代数具有指定的基 $(\theta_p)_{p \in L}$ ，其由格 $L$ 索引，且满足 $\theta_0 = 1$。固定一个尖有理多面锥 $D \subset L_{\mathbb{R}}$。我们使用乘积的三个性质。

(1) $\theta_{p+q}$ 在 $\theta_p\theta_q$ 中的系数是系数为 1 的单项式 $t^{\alpha(p,q)}$ 。每个其他项的标签为 $p + q + d$ ，并满足 $d \in (D \cap L) \setminus \{0\}$。(2) 在指定的完备有限有理扇 $\Sigma_0$上，只要 $t^0\theta_{p+q}$ 的$p$， $q$ 属于 $\Sigma_0$的同一个锥， $t^0\theta_{p+q}$ 的系数就是 1。(3) 存在非零的正则源函数 $f_j$ ，其有限 Laurent 支撑$E_j \subset L^*$已知。写作$v_j(p)$ =min$_{e \in E_j}\langle e, p\rangle$。每当 $\theta_r$ 出现在 $\theta_p\theta_q$中时，对于每个 $j$，都有 $v_j(r) \geq v_j(p) + v_j(q)$。

对于内在代数，最后一个不等式是计数源的正则函数不等式。零类规则来源于预备紧化的扇 [27, 定理 15.7 和命题 15。12]第一个假设涉及有效幺半群环中的系数，即增广之前的系数。结合零类规则，它在$\theta_{p+q}$ 的每个锥上都给出系数 1 $\Sigma_0$。

令 $\Delta$ 为 $v_j$ 的线性扇的公共细分。对于 $\Delta$ 的每个极大锥 $\tau$，选择在 $\tau$ 上取得最小值的 $a_{j,\tau} \in E_j$ 。假设在每个这样的锥上

$$D \cap \{d : \langle a_{j,\tau}, d\rangle \geq 0 \text{ for every } j\} = \{0\}.$$

**命题 B.11.** 对于任意有限有理公共细分 $\Sigma$ *of* $\Delta$ *and* $\Sigma_0$，以及任意$p_1$、……、$p_m$ 属于其中一个锥， $\prod_i \theta_{p_i} = \theta_{\sum_i p_i}$。特别地，每个 *theta* 函数都是由按 $\sigma \in \Sigma$ 索引的幺半群$\sigma \cap L$ 的有限加性生成集之并所索引的 *theta* 函数组成的一个乘积。

证明。对于两个输入 $p$，$q$，选取一个包含它们公共锥的极大 $\tau$。如果出现 $p+q+d$，那么

$$\langle a_{j,\tau}, p+q\rangle = v_j(p)+v_j(q) \le v_j(p+q+d) \le \langle a_{j,\tau}, p+q+d\rangle.$$

交叠假设迫使 $d=0$，而前两个乘积性质给出了其系数。由于每个部分和都保持在同一个锥中，因此可以应用归纳法。根据戈尔丹引理，加性生成集是有限的。□

命题*B.12.* 设 $A_R$、$B_R$ 分别具有基 $(\theta_p)$、$(\psi_p)$，并带有相同的标记$L$，且二者都满足命题 *B.11* 的假设。取两个代数的一个公共细分，并令 $H$ 为其极大锥的格点的有限加性生成集之并。令 $A_K = K\otimes_R A_R$ 和 $B_K = K\otimes_R B_R$，并令 $F\colon A_K \to B_K$ 为一个 $K$-代数同态。假设存在满足 $F(\theta_h) = t^{b_h}\psi_h$ $(h\in H)$ 的类 $b_h \in G$。那么 $F$ 是一个同构，并且对于唯一的函数$b\colon L\to G$，有 $F(\theta_p) = t^{b(p)}\psi_p$，且满足 $b(h)=b_h$。该函数可延拓为公共细分上的整分片线性映射。当且仅当对所有 $h\in H$ 都有 $b_h\in Q$ 时，该映射限制到 $A_R\to B_R$。当且仅当对所有 $h\in H$ 都有 $b_h$、$-b_h\in Q$ 时，其限制是到 $B_R$ 上的同构。

证明。对于公共锥中的 $p=\sum_h n_h h$，将该命题应用于两侧可得$F(\theta_p) = t^{\sum_h n_h b_h}\psi_p$。由于 $\psi_p\neq 0$和 $G\to K^\times$ 是单射，其指数与锥及分解无关。所得函数在每个锥上都是可加的。满维有理锥中的格点作为群生成 $L$，这一点可通过将任意格向量沿其内部方向平移足够远看出。因此，$b$可在每个极大锥上整数地且线性地延拓。由于每个公共面上的格点张成该面，这些延拓在公共面上相互一致。$F$ 在两组基下的矩阵是对角矩阵，且其对角元在 $K$中可逆。当且仅当其指数属于 $Q$时，一个对角元属于 $R$。生成元公式给出了关于 $F$及其逆元的所述有限检验。□

B.5.1. 确定生成元的像。给定同态 $F$，可以利用支撑界和归一化来验证其对生成元的作用。在整环 $S$上的忠实目标 Laurent 图表中工作，例如 $R$ 或 $K$。设定函数 $\psi_h$延拓到指定邻近图表，在已知有限集 $E$中有支集，并且其 Laurent 系数满足指定的线性条件。这些条件可能规定一个系数，并要求若干其他指数处的值为零。写作 $u=\sum_{e\in E} c_e z^e$。对于每个 $a<0$，$z_i^a$ 的系数 $u_a$ 必须在未改变的 Laurent 坐标中满足 $u_a = H_i^{-a} v_a$，如引理 B.1 所示。只需用到 $v_a$ 的有限多个系数。事实上，若 $P_a$ 是该切片中允许指数的凸包，则非零商的每个指数 $b$都满足 $b+(-a)\,\mathrm{Newt}(H_i)\subseteq P_a$。这是由整环上乘法下牛顿多面体的可加性推出的。因此，固定 $H_i^{-a}$的任意指数后，$b$ 被限制在 $P_a$的一个平移中。空切片对应零商。现在通过系数比较得到一个在 $S$上的有限线性方程组。

如果带有零归一化的齐次系统只有零解，则已知函数 $\psi_h$ 是唯一的归一化解。因此，只要独立计算的$t^{-b_h}F(\theta_h)$的完整 Laurent多项式的支集包含于 $E$，并且满足该系统，就有 $\psi_h$。在 $R$ 上，每个切片商的系数都必须属于 $R$。对于一般比较，可以先在 $K$上进行，然后检验生成元像的指数是否能下降到 $R$。

## Appendix C. Valuation tests、 reverse traces and mirror geometry

我们给出检验倒数多面体与最小牛顿多胞体是否相等的有限检验，进而推导反向迹的方程，并研究拆分一个可变坐标时镜像如何变化。最后两个小节讨论光滑性的障碍，并阐释射影模型的 Cox环中的实现。

C.1. **倒数多面体的有限赋值检验**。 回想一下，当倒数多面体 $P_a$ 等于最小指数为 $a$的正则函数的最小牛顿多胞体 $Q_a$ 时，标签 $a$称为可实现。初始单项式给出一些锥，可在这些锥上通过生成元检验实现性。第二种检验通过比较有限多个权重下的正向最小值与源最小值，并计算两个多面体的体积。

C.1.1. *Gauss*权重锥上的初始单项式。 设 $B \subset k[L]$ 为定理 5.4中的带标记的前向代数，并记 $M = L^*$ 为源特征格。对于格分离权重 $w$ ，令 $e_w$($g$为 $0 \neq g \in B$ 的最小 Laurent 指数，且令 $\Gamma_w$($B$为这些指数构成的幺半群。

**命题 C.1**。 设 $\delta \subset L^*_{\mathbb{R}}$ 为有理多面体锥。假设 $g_1$、……、 $g_m \in B \setminus \{0\}$的最小指数为 $e_i = e_w(g_i)$，并生成 ($B$)，且每个 $e_i$ 都使$\delta$ 上的每个权重在 $\mathrm{Newt}(g_i)$上取最小值。那么，对于每个标签 $p$， $e_w(\Theta_p)$ 都使相同的每个权重在 $\mathrm{Newt}(\Theta_p)$ 上取最小值；并且当权重位于 $\delta$的环境内部时，最小值唯一。族$(P_a)_a$ 在$\delta$上闵可夫斯基可加，并且当且仅当任意给定的有限列表中的整数锥生成元均可实现时，其所有整数标记均可实现。

证明。 在 $w$ 处的赋值独立性给出不同的 $e_w$（$\Theta_p$）。选择 $g_i$ 中具有最小指数 $e_w$（$\Theta_p$）的一个乘积。根据不同的最小指数，其 theta 展开包含 $\Theta_p$。对所有权重的赋值独立性将该直和项的多面体置于该乘积的多面体之内。在后一个多面体上，通过 Minkowski 加法，其最小指数处处使 $\delta$ 达到最小值。在环境内部，不同的指数不可能相等，因为它们的非零差在整个锥上均为非负。因此，每个正向支撑函数在那里都是线性的，而其在 $\delta$ 上的取值给出 $P$的闵可夫斯基可加性。生成元检验由命题8.13得出。 □

**推论 C.2**。 如果命题 *C.1*中的锥在 $L^*_{\mathbb{R}}$中具有稠密并，则在其生成元处的实现等价于在每个整数标记处的实现。对于有限覆盖而言，这是一个有限检验。由此得到的函数的任意归一化选择都构成 $k[U]$ 的一个基，并且对于所有标记*Gauss*赋值均具有赋值独立性。

证明。 命题和齐次性给出 $P_a = Q_a$ 在该并集的有理点上。对于每个整数方向，它们的支撑最小值关于 $a$连续，因此处处相等。基的结论由推论 5.5得出。 □

这些 $g_i$ 构成 *Khovanskii* 基 当它们的最小指数生成 $\Gamma_w(B)$ [25]。有时可以通过多项式表示来检验这一点。

**引理 C.3**。 设 $T_i \mapsto g_i$ 是 $B$ 的表示，其关系理想为 $I$，记 $c_i z^{e_i}$ 为$g_i$的最低项，并令 $u_i = \langle w, e_i \rangle$ 和 $J = \ker(k[T_1, \ldots, T_m] \to k[L],\ T_i \mapsto c_i z^{e_i})$。那么，对于最小权重形式，有 $\mathrm{in}_u I \subseteq J$。等号成立意味着 $e_i$ 生成 $\Gamma_w(B)$， 若 $I$ 关于某个正整数分次是齐次的，或者若$\sum_i \mathbb{N} u_i$ 与每个有界区间的交集都是有限集。

证明。 关系的最低项相互抵消，从而得到包含关系。将 $0 \neq f \in B$ 表示为$F(T)$。在等号成立时，只要其最低形式映射为零，就用带有适当 $u$权重的乘子，将该形式表示为关系初始形式的线性组合。减去提升后的组合。这会增大最小权重并保持 $f$不变，因此权重有 $\nu_w(f)$作为上界。在分次假设下，取齐次关系，并分别在 $F$原有的正次数中进行提升，此时只会出现有限多个单项式。另一项假设则直接保证可能的权重只有有限多个。这个过程最终会得到一个非零的最低像，它是 $z^{e_{w(f)}}$ 的倍数，因为 $w$ 能区分指数。其指数是若干个 $e_i$之和。□

消元计算 $J$，而经权重细化的齐次 Gr¨obner 基计算正分次下的初始理想。

C.1.2. 由有限个前向计数得到的体积判据。固定由负 Newton 顶点确定的标记。设 $E=(p_1,\dots\dots,p_s)$ 是 $L$ 中的一个有限列表，并选取其子列表 $E_0$，使其非负实张成为 $L_{\mathbb{R}}$。记 $d=$ 秩 $M$ 和 $\Delta_0=\{b\in M_{\mathbb{R}}:\ \langle b,\ p\rangle \geq -1\ (p\in E_0)\}$。若 $E_0$ 包含 $L$ 的一组基中每个向量的正负两种形式，则 $\Delta_0=[-1,1]^d$ 在对偶坐标中。对于 $a\in M_{\mathbb{R}}$，定义

$$h_a(p)=\min_{z\in \mathrm{Newt}(\Theta_p)}\langle a,z\rangle,\qquad \lambda_a(p)=\min_{z\in T_p}\langle a,z\rangle.$$

对于 $g=h,\lambda$，定义 $M_{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}^s$ 中的有理多面体

$$K_g=\{(a,t):|t_j|\leq 1,\quad g_a(p)\geq -1\ (p\in E_0),\quad t_j\leq g_a(p_j)\ (1\leq j\leq s)\}.$$

对于 $l\in[-n,n]^s\cap\mathbb{Z}^s$ 令 $A_{n,l}$ 为 $U$ 上支集包含于 $n\Delta_0$ 的截面空间，其中 $\nu^x_{p_j}(f)\geq l_j$。

**定理 C.4.** 对每个次数 $n\geq 1$，都有

$$\sum_l \dim_k A_{n,l}=\#\big(nK_\lambda\cap(M\oplus\mathbb{Z}^s)\big).$$

除以 $n^{d+s}$ 后，极限为 $\mathrm{vol}(K_\lambda)\leq \mathrm{vol}(K_h)$，其中格余体积为一。当且仅当对每个 $p\in E$，$T_p=\mathrm{Newt}(\Theta_p)$ 时，等号成立。等价地，在每个整数 $a$ 处，具有最小指数 $a$ 的某个归一化源函数同时在 $E$ 上达到 $h_a(p)$。若 $E$ 能检测每个严格包含 $P_a\subsetneq Q_a$，则这一个体积等式等价于在每个标签处实现。若不存在有限检测列表，则实现等价于对所有有限列表都成立；这些列表均包含固定基的每个向量及其相反向量，基取自 $L$。

证明。最小多面体 $Q_a$ 上的规范化截面恰好在 $(a,l)\in nK_\lambda$ 时属于 $A_{n,l}$，由命题 2.4 得出。根据定理 2.1，这些截面构成该空间的一组基，因此得出精确计数。不等式 $\lambda_a(p)\leq h_a(p)$ 由 $P_a\subseteq Q_a$ 通过对偶性和连续性得出。此外，$h_a(p)\leq\langle a,p\rangle$，因为 $z^p$ 出现在 $\Theta_p$ 中。因此 $K_\lambda\subseteq K_h\subseteq\Delta_0\times[-1,1]^s$，且两个多面体的内部均非空，因为所有不等式在 $(0,-\frac{1}{2}\mathbf{1})$ 处都严格成立。格点渐近给出所述极限，而体积相等意味着 $K_\lambda=K_h$。

对于任意整数 $a$，当 $n$ 足够大时，点 $(a,(h_a(p_j))j)$ 属于 $nK_h$。如果 $K_\lambda=K_h$，那么它属于 $nK_\lambda$ 就意味着对于每个 $p\in E$，都有 $\lambda_a(p)=h_a(p)$。反过来，在每个整数 $a$ 处相等，由齐次性和连续性可知支撑函数相等，因此 $K_\lambda=K_h$。对于每个 $p\in E$，这些关于 $a$ 的函数相等，等价于 $T_p=\mathrm{Newt}(\Theta_p)$。$Q_a$ 上的截面处处达到 $\lambda_a(p)$，而最小指数为 $a$ 的每个截面，其值至多为 $\lambda_a(p)$。这证明了同时达到的断言。根据推论 8.18，一个检测列表给出了全局检验。任何严格包含都会在某个整数权处产生不同的支撑最小值，我们可以将其加入这个固定列表。□

C.2. **交换映射的次数与反向迹**。对于一般交换映射，一般纤维的次数是混合体积的乘积。对于反向迹，接触条件与求值条件给出一个有限概形，其次数就是该迹。

C.2.1. 由普通突变伙伴给出的映射。记 $G_i$ 为在 $x_i$ 处的普通交换。与推论 8.8 中一样，当 $x_j$ 出现在 $G_i$ 中时，画一条箭头 $j\to i$。强连通分量将能够通过有向路径彼此到达的顶点归为一组。

**命题 C.5.** 在特征零的代数闭域上，固定包含原点的多项式交换支集。对于一般系数，有理映射 $x\mapsto(G_i(x)/x_i)_i$，在指定单位的域上是双有理的，当且仅当每个交换关于其自身强连通分量中的变量联合仿射线性。

证明。$t=(t_i)$ 上一条纤维的方程为 $G_i(x)-t_ix_i=0$。按依赖关系对强连通不可约分支排序。在每个不可约分支中，先添加其前驱的坐标后再求解。对于一般参数，每个方程组均为支配的且一般有限。事实上，投影方程的 Newton 多面体包含线段 $[0,e_i]$，因此它们的混合体积为正。由伯恩斯坦定理，该方程组的次数为规范化的

这些多面体的混合体积 [6]。对于大小为 $d$的不可约分支，这是$s_1 \cdots s_d$ 在闵可夫斯基和 $\sum_j s_j P_j$ 的体积中的系数，该和由其投影牛顿多面体 $P_j$构成，且格余体积为一。此处每个支集都投影到当前不可约分支的坐标上。其不同投影单项式的系数使用当前方程中互不相交的一般参数集，而对角系数是独立的纤维参数 $-t_i$。因此一般计数在前驱域上适用。按此顺序求解会使次数相乘。

对于大小为 $d > 1$ 的不可约分支，根据强连通性，其多面体中由 $I$ 索引的任意非空真子集之和张成坐标方向 $e_i$，以及至少一个其他方向。这是 [11] 意义下的本质元组。若其混合体积为 1，Esterov 和 Gusev 会将所有多面体的格平移副本置于一个幺模单纯形 [11, 中（定理 2]）。我们采用他们的边树描述（命题 3]）。因此，每一对平移后的点 $\mathbf{0}, e_i$ 都对应于该单纯形的一条有向边。这些 $d$ 条边在 $d+1$ 个顶点上构成一棵树，因为若存在无向回路，其方向就会线性相关。第 $i$ 个方程的每个指数，都是从边 $i$ 的尾部到某个顶点的差。其坐标均为非负数。因此，从该尾部到该顶点的路径只包含正向边，因为它的带符号边展开就是其在基 $e_j$ 中的展开。若该方程涉及坐标 $j$，则 $j$ 的尾部必然可从 $i$ 的尾部到达。强连通性迫使所有尾部重合。于是这棵树是一棵星形树，其允许的差为 $\mathbf{0}, e_1, \ldots, e_d$。这证明了仿射线性。单元素不可约分支给出一个线性方程，因为 $G_i$ 与 $x_i$ 无关。反过来，根据克拉默法则，逐个不可约分支得到的线性系统具有唯一的一般解，如定理 8.7 所示。□

C.2.2. 射影嵌入中的反向迹。 射影紧化为反向迹给出了方程。更一般地，同一构造可以计算任意带有标记环面的计数源上的 Keel–Yu 迹 $U$。对于两个或三个接触阶 $P_1$、……、$P_s$，选取一个光滑射影简单正规交叉紧化 $U$，使得每个非零 $P_i$都具有除子中心 $D_{j(i)}$，并且是 $m_i$ 倍相应本原赋值。将$D_1$、……、$D_t$ 记为所有边界分量。我们可以选取 $U$，使其边界支撑一个非常 ample 除子 $H = \sum_j h_j D_j$，且每个 $h_j > 0$。事实上，从 [27, 引理 192], 中的紧化开始，按照 [27, 定义 11], 通过边界细分提取接触射线，并在每次爆破时从丰沛除子的拉回中减去充分小的正例外除子倍数。充分可除的正倍数既是整数除子，又是非常 ample 除子。

**引理 C.6**。 将 $U \subset \mathbb{P}^N$ 嵌入为 $H$，并设 $d = \sum_{i:\ P_i \neq 0} h_{j(i)} m_i$。这些接触的增广迹是以下有限概形在一般域上的标记点与评价的次数。取次数为 $d$ 的 $N+1$ 二元形式的无基点元组，按公共标量取商。要求其映射的像位于 $U$ 中，并且在评价标记处取预定值。在第 $i$ 个非零接触处，要求其值位于 $D_{j(i)}$ 的开分层中，且其接触阶为 $m_i$。次数为零的输入是一个内部标记。因此，$U$ 及其边界的方程由射影模型确定增广迹。

证明。 固定一般光滑有序标记射影直线和一般内部评价，如 [27, 定义 1。1]。对于一个计数映射 $f$，每个边界分量的拉回恰好是其预定的接触标记之和。因此 $\deg f^*H = d$，并且该嵌入由所述元组在标量意义下唯一表示 $f$。反之，评价条件阻止像落在任何边界分量中。在预定标记处，所需的接触计入了 $f^*H$ 的全部 $d$ 个零点，并按重数计算。除以预定因子后，该截面在固定射影直线上的相对次数为零，因此它来自底空间。它在内部标记处的评价是一个单位。由于每个 $h_j$ 都为正，这也排除了族中的进一步边界交。

这些元组构成从固定直线到射影空间的映射所对应的通常开参数概形。将 $U$ 代入齐次方程会施加像条件

逐项考虑系数。在使边界除子平凡化的图表中，代换后其局部方程的前几个泰勒系数 $m_i$ 消失，而阶数为 $m_i$ 的系数非零。这些喷射条件在重叠部分上一致。它们恰好给出迹的固定定义域关联概形。其一般评价纤维是有限的 ´étale，见 [27, 命题 3。13]取其次数即可将所有数值曲线类的贡献相加，这正是所需的结果。在有效域上，可以通过在所指示的开参数概形中进行消元来计算该次数。□

为区分数值曲线类，选取额外的非常丰除子 $H_j$，使其张成$N^1(U)\mathbb{Q}$，即模数值等价的有理除子类空间，并选取整数$C_j$，使得 $C_jH - H_j$ 丰沛。每个次数 $d_j = \deg f^*H_j$ 都介于 0 与 $C_jd$之间。对于这些有限范围内的每个元组，在额外的射影嵌入中加入次数为 $d_j$ 的二元形式，并施加其限制到 $U$所得图的方程。一个映射有唯一的图提升。因此，各次数给出原纤维的不相交部分，并确定每个部分中的数值类。当 $U$ 细化某个指定的紧化时，按照曲线类的推前对这些次数分组，如 [27, 命题 173]所示。

C.2.3. 由 *Laurent* 生成元得到的反向迹。

**命题 C.7**。 设 $Y$ 是代数闭域 $k$ 上的光滑仿射代数簇，特征为零，带有一个标记的开环面，其对数体积形式可延拓为 $Y$上的处处不为零的形式。设格基 $w_1, \dots, w_n$ 所对应的环面特征在 $Y$上正则。有限集 *Laurent* 生成元 $g_1, \dots, g_h$ 的 $k[Y]$ 给出多项式方程和开条件，用以计算两个或三个接触的每个增广迹。特别地，定理9.4中的每个光滑正向镜像都具备这些数据。

证明。 对于每条不同的本原射线 $p$ 由一个非零接触标记点张成，选择一个生成元 $g$满足 $\nu_p(g) < 0$，由命题 1.5 可知这是可能的。在该射线的环面图中，在其除子附近写作 $g = s^{-l}h$，其中 $s$ 是一个本原法向坐标，而 $l > 0$。使用除子轨道的开子集 $h \neq 0$。在每个射线图中，将环面与该子集沿公共环面粘合，得到 $Y$。所得的光滑概形 $W$ 是分离的。事实上，不同射线的图表构成一个分离环面簇的一部分。以这些开轨道之一为中心、且一般点位于公共环面中的赋值，在 $s$ 上取正值，在 $h$ 上取零值。因此它不可能同时在 $Y$上有中心，其中 $g$ 是正则的。这就是其余图表交集所满足的赋值判别准则。环面形式使 $K_W(D)$ 平凡化，其中 $D$ 是这些开子集的并。

固定有限个接触标记点 $a_i$ 以及 $b$如定理3.1中所述的无穷远处评价。记 $d_{ij} = P_i(w_j)$ 和 $d_j = -\sum_i d_{ij}$。若 $d_j$ 为负，则其值为零。否则令

$$W_j(t) = w_j(b)A_j(t)\prod_i (t - a_i)^{d_{ij}}, \qquad A_j \text{ monic of degree } d_j, \quad A_j(a_i) \neq 0.$$

要求每个 $g_k(W_1(t), \dots, W_n(t))$ 在标记点补集上正则。为此，清除标记因子和首一分母 $\prod_j A_j^{m_j}$，其中 $m_j$ 清除 $g_k$ 中 $w_j$ 的负幂，并令模该分母的余数等于零。允许共享根或重根。在每个非零接触处，要求其所选 $g$ 的最小权重项之和在该标记处 $W_j$ 的首项单位处非零。清除标记分母后，这些都是多项式开条件。

这些方程给出了映射到 $Y$ 标记之外，因为 $g_k$ 生成其坐标环。在非零标记处，所指定的特征阶给出了唯一的延拓，将其映入托里克射线图，并具有所要求的重数；而开条件则保证其位于所选的开子集内。此处的零接触位于该标记处的环面中，而环面是允许的内部的一个稠密开集。反之，每个从固定定义域映射到这对空间且属于所指类型的映射，都具有所述的唯一坐标表达式。为将一般次数与迹对应起来，我们使用定理3.1中的比较。一个提取这些赋值的射影模型与 $W$在 $Y$ 上以及每个新增除子的一般点附近相一致。在每个支配评价的不可约分支上，对数切丛的拉回次数为零，并由

在评价标记处生成，因此是平凡的。因此，在每个接触处的评价在其除子上都是支配的，而这些除子中被排除的真子集，或 $Y$ 在零接触处的被排除真子集，不会对一般情形产生贡献。射影模型上的一般映射通过 [27, 引理 3.6、3.9 和 3.12]遵守同样的避开条件。因此，该开轨迹上的一般约化次数等于该迹。对于有效给出的系数，消元可以计算出这一次数。

在光滑前向镜像上，满维直锥的特征是正则的。要在此锥中找到一个格基，可将一个本原内部向量扩充为一组基，并向其他基向量加上该向量的足够大倍数。□

C.3. **分裂可变坐标**。 设种子如定理 4.1所述，并具有可变坐标 $x$。将其替换为 $h \geq 2$ 个可变坐标 $y_1$，……， $y_h$ 并记 $Y = \prod_i y_i$。对于每个 $y_i$ ，取在 $x$处的旧普通交换式；对于其他每个普通交换式，将$x$ 替换为 $Y$。保留指定单位。新的普通交换式是不可约的。事实上，在全环面上， $y_1$，……， $y_h$ 可通过幺模坐标变换替换为 $Y$， $y_1$……， $y_{h-1}$。不可约性在 Laurent 多项式扩张下保持不变，并且新的普通交换式中没有一个以可变变量为因子。记 $\pi$ ： $L' \to L$ 表示源余特征格的映射，该映射将 $h$ 在这些方向上的条目相加，并保持其他条目不变。

**引理 C.8**。 令 $A$ 为原种子的完整上代数，其中其指定单位均可逆。新的完整上代数表示为 $A' = A[y_1, \ldots, y_h]/(Y - x)$ 。对于$A$ 上有限型的 $k$，$\operatorname{Spec} A'$ 光滑，当且仅当$\operatorname{Spec} A$ 及其除子 $x = 0$ 光滑。

证明。 LP 海星定理 [12, 定理 1。3]通过其第一星描述每个上代数。使用 $\mathbb{Z}^h/\mathbb{Z}\mathbf{1}$ 的指数对分裂 Laurent 环进行分次。对每个次数选择唯一的代表元 $\gamma$ ，使其满足 $\min_i \gamma_i = 0$。每个齐次 Laurent 多项式都可唯一表示为 $y^\gamma f$（$Y$，……）。在非分裂方向上，普通交换只涉及 $y_i$，且仅通过 $Y$实现。相邻 Laurent 条件保持次数不变，并且在 $f$上恰好就是原条件，因为 LP 正规化子在未改变的劳朗坐标中是单位元。在 $Y$次数 $n$ 的 $f$项中，分裂方向要求将原交换提升到 $[-n - \gamma_i]_+$幂。它们的同时条件是被最大幂整除，即 $[-n]_+$。因此，新的上代数是 $y^\gamma A$的直和。通过 $Y = x$ 约化单项式，恰好得到所断言表示中的这个模及其乘法。

使 $h-1$ 分裂坐标可逆的开集是 $\operatorname{Spec} A$ 与一个环面的乘积，因此 $\operatorname{Spec} A'$ 的光滑性意味着 $\operatorname{Spec}$ $A$光滑。若 $\operatorname{Spec}$ $A$ 光滑，则在至多一个 $y_i$ 为零的地方，定义超曲面是光滑的。当两个或更多坐标为零时，其微分为$-dx$。 $x = 0$ 中的每个点都可提升为这样的点。这就证明了该判据。对于不同坐标的同时分裂，同样的雅可比计算要求：对于在公共点处消失的每组分裂除子， $dx_i$ 都线性无关；这等价于它们按预期余维数光滑相交。□

**定理 C.9.** 假设 $x = 0$ 在原始计数源上光滑。设 $g$ 是一个正则函数，其牛顿多面体有一个顶点 $v$ 在每个可变坐标上都为负。使用命题*4.6* 由 $v$确定的图表。在分裂源上，使用 $g$ 在 $x = Y$下的拉回对应的顶点。对于标签 $m' \in L'$，记 $A'_{m'}$ 和 $A_{\pi m'}$ 分别为新的和旧的多项式因子。将分裂坐标的可变变量记为 $w_i$ ，将其余坐标的可变变量记为$z$ 。那么

$$A'_{m'}(z, w_1, \ldots, w_h) = A_{\pi m'}(z, w_1 + \cdots + w_h).$$

对于多项式角所提供的标记，每个单项式在分裂方向上的次数之和至多为 $D_x(\pi m')$ $= -\tau_{G_x}(\pi m')$，其中 $G_x$ 是 $x$处交换的多项式角代表元。

证明。 我们比较分裂前后的关联方程。对于一列新的输入接触 $P'_a$，令 $\delta_i$ 为它们在 $y_i$ 方向上的缺陷，并令 $d = \sum_i \delta_i$。在旧问题中

使用接触 $\pi P'_a$ 和评价坐标 $b_x = \prod_i b_{y_i}$。其他参数保持一致。当所有缺陷均为非负且指定单位平衡时，我们声称新的迹为

$$\mathsf{T}'(P'_1,\dots,P'_l) = \binom{d}{\delta_1,\dots,\delta_h}\mathsf{T}(\pi P'_1,\dots,\pi P'_l). \tag{C.1}$$

我们可以在它们参数域的某个共同代数闭扩张上比较约化一般纤维。在旧方程中，$x$ 对应的首一多项式是新方程中 $y_i$对应的首一多项式之乘积。$x$对应的有理函数同样是 $y_i$对应有理函数的乘积。因此，所有关于未标记根的条件都一致。特别地，共同的交换式能被每个两两互素的新多项式整除，当且仅当它能被它们的乘积整除。在分配给 $y_i$ 的根处，其余因子都是单位元，因此相邻坐标不为零在两种描述中是等价的。

上方的一个正可变轴接触会投影到下方相应的正轴上。当原始接触不在该轴上时，投影后的接触也可能位于这样的轴上。在那里，对于一般参数，所计数的每个映射都满足额外条件。事实上，在一个非零的上方接触处，从开托里克除子轨道到投影轨道的映射是占优的，因为它在特征格上的拉回是由 $\pi^*$ 在湮灭投影接触的特征上的单射所诱导的。因此，投影轨道上的非零交换式会拉回为上方轨道上的非零Laurent多项式。根据定理3.1中使用的同一横截性，一般接触评价避开其零点集。投影到零点的接触给出一个内部标记点，并且不同于所有未标记根。反过来，将 $d$个不同的旧根划分为若干有序部分，每部分大小为 $\delta_i$，都满足新的标记条件。它给出唯一的首一因子，从而给出一个具有指定评价的新解。这证明了迹恒等式，包括 $d=0$。

拉回对应的顶点在每个分裂坐标处的指数为 $v_x<0$，并且在其他坐标处与 $v$ 一致。如果 $C$ 是 $v$的法锥，则新的法锥为 $\pi^{-1}C$。$m'$ 处的修正界是 $\pi m'$处的旧界，并将分裂平移相加。要计算给定的系数，应在 $\pi^{-1}C$ 中选择足够深的 $b'$，并取 $b=\pi b'$，使平移乘积的所有有界输出以及测试指标及其前驱都位于相应的直锥中。在三角迹方程中，旧系数 $c_e$ 在 $x$ 方向上的修正为 $j$，在所提出的代换下被 $\binom{j}{e_1\dots,e_h}c_e$ 替代，其中 $\sum_i e_i = j$。对于分裂方向上的修正 $\boldsymbol{d}=(d_i)$和 $D=\sum_i d_i$，乘以该系数的迹等于分裂前对应二元组的迹乘以 $\binom{D-j}{d_1-e_1\dots,d_h-e_h}$；如果任一差值为负，则将其解释为零。在固定 $j$ 处求和得到公因子

$$\sum_{\sum_i e_i=j}\binom{j}{e_1,\dots,e_h}\binom{D-j}{d_1-e_1,\dots,d_h-e_h} = \binom{D}{d_1,\dots,d_h}.$$

这就是 $\sum_i w_i$ 的两个幂的系数恒等式。根据（C.1），三元组的迹也会获得相同的因子。通过将平移乘积与负测试标签配对，并将其系数数组以零扩展，原恒等式在其修正界之外同样成立。因此，所提出的多项式满足新三角系统中的每个方程。其单位对角线证明了该结果。□

**推论 C.10**。将任意一组可变坐标进行分裂，对于未改变的坐标允许使用一个因子。假设两个簇都是光滑的，并采用定理 *C.9*中的标记。在特征上，$\pi^*$ 在某个坐标的所有因子上重复原指数。对于分裂源的一个特征 $a'$，定义 $a_i$ 为其在第 $i$ 个坐标的各因子上的条目最小值，并保留其冻结条目。对于 $b = a' - \pi^* a$，有

$$P'_{a'} = b + \pi^* P_a, \qquad Q'_{a'} = b + \pi^* Q_a.$$

拉回后乘以初始单项式 $y^b$ 给出一个同构

$$\{f \in A : \mathrm{Supp}(f) \subseteq P_a\} \xrightarrow{\sim} \{f' \in A' : \mathrm{Supp}(f') \subseteq P'_{a'}\}, \qquad f \longmapsto y^b f(Y).$$

它保持 $a$、$a'$ 处的系数不变。特别地，同时倒数实现——包括存在满足带符号最小值公式的基——对于这两个 $o$
源。

证明。 应用定理 C.9 一次处理一个坐标。每个中间簇都是光滑的。事实上，在最终簇中，对每个仍待分裂的坐标，将其除一个因子外的所有因子取逆。由引理 C.8，该开集是中间簇与一个环面的乘积。对应于一个原坐标的诸特征之和的权重，是它们权重的最小值。该展开具有非负整数系数，因此在旧多项式因子中作代换，对每个分裂标签 $p'$，

$$\nu^z_{a'}(\Theta'_{p'}) = \langle b, p' \rangle + \nu^z_a(\Theta_{\pi p'}).$$

取最小支撑函数，便得到关于 $P'_{a'}$ 的恒等式。对于 $Q'_{a'}$，在提升锥中选取一个分离权重及其对旧标记的像。任一分裂截面在其最小指数 $a'$ 的分次中的不可约分支是 $y^b f$（$Y$），其中 $f \in A$ 的最小指数为 $a$。其多面体包含 $b + \pi^* Q_a$，且包含于整个截面的多面体中。反之，$Q_a$ 上的规范化截面在乘以 $y^b$ 之后拉回为 $b + \pi^* Q_a$ 上的一个截面。这就证明了第二个恒等式。 $b + \pi^* P_a$ 中的每个指数模 $\pi^* M$ 都具有相同的分次，而该次数的、在每个原坐标的诸因子上最小值为零的代表元是 $b$。引理 C.8 中的分次描述给出了所断言的截面空间的同构。通过取 $a' = \pi^* a$，每个旧标签都会出现。关于基的断言由推论 5.5 得出。 □

例如，将可变指标划分为集合 $I_j$。假设普通交换式在每个 $I_j$ 内一致，并且 $I_j$ 之外的交换式仅通过其乘积 $Y_j = \prod_{i \in I_j} y_i$依赖于其中的变量。将这些乘积替换为单个变量，即得到一个 LP 种子。其交换代表元不包含自身变量，也没有变量因子。任何非平凡因式分解都会拉回为原种子中的因式分解。若所得种子满足推论 8.8，则光滑分裂源上的规范化截面为$y^b f_a(Y)$，其中 $f_a$ 是定理 8.7中的主子式乘积。特别地，一个交换式可以包含来自其自身强连通分量的任意多个变量的乘积。

**C.4. 正向镜像的光滑性障碍**。一种障碍来自退化中的刚性环面奇点。另一种障碍来自镜像的局部方程，即当多个交换式线性地依赖于一个公共坐标时所产生的局部方程。

C.4.1. 刚性环面奇点。

**推论 C.11**。 在命题 *9.3*的设定下，选取一个非空集合 $I$，其中的可变方向所对应的普通交换式仅依赖于补集坐标。在这些坐标的 *Laurent* 环中，将相差一个单位的交换式归为一组。对于每个类$I_l$，选取一个代表元，其牛顿多面体为 $P_l$。令 $e_l$ 为该类在一个单独格中的标准基向量，该格每个类对应一个坐标。构造它们的凯莱多面体$Q = \mathrm{conv} \bigcup_l (\{e_l\} \times P_l)$。如果 $U$ 的增广镜像是光滑的，且每个面 $G$ 满足：其边为本原边，并且所有二维面 $Q$ 均为三角形，那么该面在其饱和仿射格中是一个幺模单纯形；这里的饱和仿射格是其仿射包与环境格的交集。如果一条边的格点只有其两个顶点，则称其为本原边。该面可以就是 $Q$ 本身。特别地，对于每个可变秩中的每个单独交换式牛顿多面体的每个面，该检验均适用。

证明。 将 $I$ 之外的可变坐标取倒数，并将所得主开集记为$V$。局部化与有限一阶星交集交换。在一个被取倒数的方向上，通过将交换替换为两个伙伴的乘积，每个初始 Laurent 多项式都属于局部化邻接图表。其余图表恰好对互补 Laurent 环上的 $I$ 施加一阶星条件。

使用一个共同的一般暴露权重，将每个 $P_l$ 的一个顶点平移到零点。这些平移通过格剪切作用于 $Q$ 。在这个共同室中，通过将一个内部本原向量扩展为一组基，并向其他基向量中加入其足够大的倍数，选取一个权重基。在这个多项式角中，设 $\tau_l = 1 + \sum_{i\in I_l} Z_i$。推论 4.5 将 $V$ 上的每个正向函数表示为 $Z^p z^m \prod_l \tau_l^{-\min_{v\in P_l}\langle v,m\rangle}$。令 $A$ 为具有满足条件 $a_l + \langle v, m\rangle \geq 0$ 的单项式 $\tau^a z^m$ 的环面代数，其中对所有 $l$, $v$ 均成立，且起初令 $\tau_l$ 相互独立。此表达式将 $B_k(V)$ 与

$$A[Z_i^{\pm 1} : i \in I]/(\tau_l - 1 - \textstyle\sum_{i\in I_l} Z_i)_l.$$

事实上，公式中出现了最小允许的 $a_l$ ，且 $Z_i^{\pm 1}$ 也出现了。对每个类消去一个 $Z_i$ ，可将商识别为 $A$ 的一个多项式延拓的局部化，因为在正向图表中， $\tau_l$、 $z$ 坐标以及其余的 $Z_i$ 是代数独立的。

记 $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}Q$，于是 $A = k[\sigma^\vee \cap M']$ 表示独立的 $\tau_l, z$ 的特征格 $M'$。对于类坐标之和， $\sigma$ 的所有本原射线高度均为一。对于一个面 $G$，在揭示 $\gamma = \mathbb{R}_{\geq 0}G$ 的特征处作局部化，该特征位于 $\sigma$ 中。这给出了 $\gamma$ 的环面仿射开集。将一个环面分裂出来后，它是由 $\gamma$ 张成的饱和格中 $G$ 的锥。其闭轨道与定义 $B_k(V)$ 的指定开集的像相交。事实上， $\tau_l$ 要么为零，要么是该轨道上的非恒定特征，因此可以选取一个所有 $\tau_l \neq 1$ 均为零的点，然后在每个类中选取非零的 $Z_i$ ，使其和为 $\tau_l - 1$。

本原边给出正则二维锥。事实上，经过一个端点的射线高度为一，而端点之差在零高度格中是本原的。因此，关于 $G$ 的锥是 Gorenstein 的，并且余维二光滑。对于具有三角形二维面的高度截面，Altmann 定理 [2, 推论 2.8(1)] 给出 $T^1 = 0$。环面代数定义在 $\mathbb{Q}$上，而计算 $T^1$ 的有限多项式表示与域扩张可交换，因此该断言在 $k$上也成立。多项式扩张和局部化保持这一消失性质。若 $G$不是幺模单纯形，则根据环面光滑性判据，该锥在其闭轨道上是奇异的。局部化后的 $B_k(V)$ 随后既是奇异的，又是无穷小刚性的。将暴露特征提升到命题 9.3的 Rees代数中，并在那里进行局部化。这仍然给出一个有限型平坦族；如果 $t \neq 0$ 上的 $B_k(U)$ 光滑，则该族具有所指示的特殊纤维和光滑轨迹。将命题 9.3 的 Fitting 理想论证应用于局部化后的族，可排除 $B_k(U)$ 的光滑性。取 $I = \{i\}$ 即可得到单次交换断言。 □

C.4.2. 线性交换方向上的奇点。 固定一个坐标 $x_i$，它可以是可变坐标或指定单位，并位于一族满足定理 3.1 且具有公共多项式角的光滑完整上LP源中。令 $N_i$ 为可变 $j$ 的集合，其中 $x_i$ 出现在普通交换 $G_j$中。令 $y$ 表示 $\{i\} \cup N_i$之外的所有坐标，包括其余的指定单位。假设对于 $j \in N_i$ ，交换具有如下形式

$$G_j = B_j(y) + a_j A_j(y) x_i + \sum_{j\to k} c_{jk} C_{jk}(y) x_k, \qquad k \in N_i \setminus \{j\}.$$

在此公式中， $j \to k$ 表示 $x_k$ 出现在 $G_j$中。箭头从交换指向其涉及的 $N_i$ 中的坐标。系数 $B_j$、$A_j$ 均非零。标量$a_j$、$c_{jk}$ 在系数函数域中独立变化；如果 $i$是可变坐标，则也在 $G_i$中独立变化。在该参数环面的非空开子集上，假设既定源假设成立。索引位于 $N_i$ 之外的交换可以任意取定。

**命题 C.12.** 令 $Z_h = \Theta_{e_h}$ 表示增广镜像的多项式角图中的坐标特征。在参数的一个非空 *Zariski* 开子集上，此图表给出

$$T_i = \Theta_{-e_i} = Z_i^{-1} \prod_{j\in N_i} (1 + Z_j).$$

证明. 定理 4.1 将 $Z_iT_i$ 写成关于 $Z_j$、 $j \in N_i$的多仿射多项式，其常数项为一。固定 $S \subseteq N_i$ ，并写作 $\mathbf{1}_S = \sum_{j\in S} e_j$。使用由 $S$诱导的图。对于 $W \subseteq S$，称 $W$ 从所有 $S$ 可达，若每个顶点都有一条有向路径通向 $W$，允许路径长度为零。我们计算两个迹。

首先考虑三元组（$e_i$、 $-e_i$、 $-\mathbf{1}_S$），其标记为 $\mathbf{0}$、$\mathbf{1}$、 $h$，并在无穷处取值。对于 $S \neq \varnothing$，方向 $j \in S$ 上未标记的根为 $u_j$。坐标在方向$i$上为 $at/(t-1)$，对于 $j \in S$为 $b_j(t-u_j)/(t-h)$，其他情况下为常数。因此，余式方程为

$$B_j(u_j-1)(u_j-h) + A_j u_j(u_j-h) + (u_j-1)\sum_{k\in S,\ j\to k} C_{jk}(u_j-u_k) = 0.$$

在这些方程中， $A_j$、 $C_{jk}$ 现在表示纳入其标量参数及其移动坐标的求值因子后的系数。非零常数 $B_j$ 吸收了 $\{i\}\cup S$之外的所有坐标，这些坐标沿参数直线保持不变。在由这些数据和求值参数生成的域上，所指示的 $A_j$、 $C_{jk}$ 彼此独立。

一般而言，这些二次方程组有 $2^{|S|}$ 个互不相同的仿射解。将所有活跃的$C_{jk}$设为零后，每个仿射方程都有两个单根 $h$、 $B_j/(A_j+B_j)$，其通常齐次化方程在无穷远处没有公共射影点。真性和雅可比判据表明，在该系数点的一个邻域内也具有相同的计数。

对于一个解，记 $V = \{j:\ u_j \neq h\}$。一般而言，不存在从 $S\setminus V$到 $V$的边。为说明这一点，固定根坐标。对于每个 $j \in V$，只要相容，第 $j$ 个方程就会对其自身参数给出一个独立条件。对于 $u_j \neq 0$， $h$ $A_j$的系数非零。在 $u_j = 0$ 处，常数为 $hB_j \neq 0$。每个从 $V$ 外部通过一条边指向 $V$的顶点，都会再贡献一个独立的线性条件。只有 $|V|$ 个根坐标是自由的，由维数即得所述断言。对自由坐标少一个的情形进行相同的计数，可排除 $V$中的零点、单点或根之间的碰撞。当不存在这样的边时， $V$外部的方程恒等为零，剩余方程就是 $V$ 的方程，并将 $b_k(t-h)/(t-h) = b_k$视为 $k \notin V$的常数。

我们验证这些剩余根处的开条件。在固定的 $u_j \neq 0$， $\mathbf{1}$， $h$处，用其方程解出 $A_j$ 后，活跃根和 $C_{jk}$ 保持自由。 $F_j(X(t))$在 $t = u_j$ 处出现重零点会施加一个额外的真条件。事实上，对于 $C_{jk} = 0$ 和 $A_j = -B_j(u_j-1)/u_j$， 函数 $B_j + A_j t/(t-1)$在该处有一个简单零点。当 $i$可变时，正标记 $e_i$ 处的普通交换一般而言非零。常数坐标是一般的，而零点处的活跃坐标为 $b_j u_j/h$，根在此参数化下保持自由。 $G_i$ 的系数与这些方程中的参数无关。对于一个指定单位，该方向上的两个阶相互平衡，因此不在那里施加交换条件。因此，在一个固定的非空 $V$上的解的数量，是其诱导集合的三重迹 $T(V)$。令 $T(\varnothing) = 1$，这也计数了全 $h$ 解。我们已经证明

$$2^{|S|} = \sum_{V\subset S:\ \text{no edge from } S\setminus V \text{ to } V} T(V).$$

每个子集 $W \subset S$ 确定了集合 $V$： 其中包含能够通过有向路径到达 $W$的顶点。该$V$ 满足求和中的条件，并且在 $V$中， $W$ 可由每个顶点到达。反过来，这两个性质刻画了 $V$。对最后一个恒等式进行归纳可知， $T(S)$是从所有 $S$均可到达的 $W \subset S$ 的数量。

对于这一对（$\mathbf{1}_W, -\mathbf{1}_S$），活跃无标记根由 $L = S\setminus W$索引。令标记为零和一，写作 $w_j = u_j - 1$。消去唯一的分母后得到线性系统

$$d_j w_j - \sum_{k\in L,\ j\to k} C_{jk} w_k = -\sum_{k\in W,\ j\to k} C_{jk} \qquad (j \in L),$$

其中， $d_j$ 是 $F_j$ 在无穷远处的值。其对角元素独立于非对角 $C_{jk}$而变化，这是通过在 $x_i$-项的非零评价处乘以独立标量实现的。该矩阵一般可逆。若某个顶点无法到达 $W$，则所有这类顶点上的方程构成一个齐次子系统，因此它们的根等于标记 $\mathbf{1}$。若每个顶点

都能到达 $W$，则每个 $w_j \neq 0$ 一般都如此。事实上，将 $C_{jk}$ 特化为正有理数，并令所有 $d_j = d$ 充分大。逆矩阵的收敛几何级数对每条通往 $W$的路径都给出正贡献，从而得到 $w_j < 0$。对于非零$w_j$，方程可唯一解出 $d_j$，并将其表示为根和非对角元素的函数。因此，根之间或根与另一个标记之间的重合都是非一般的。每个清分后的交换关系关于 $t$都是线性的，且斜率 $d_j$非零，因而给出一个简单零点。在正坐标标记处（这只可能对应于单个 $W$），其交换方程不在这些方程之中，并且在该处一般非零。因此，若从所有 $S$ 都能到达 $W$，则成对迹为 1；否则为 0。

中的单项式 $Z_iT_i$ 是直线型 θ 函数。对 $\theta_{-\mathbf{1}_S}$取迹时， $S$ 以外的项根据定理3.1的次数条件均消失。计算表明，为 $S$ 的每个子集赋予系数 1，恰好得到三重迹。在 $W = S$处，对角成对迹为 1，因此对 $|S|$ 作归纳即可证明 $T_i$的公式。

□

**推论 C.13**。 在命题*C.12*的假设下，在其开子集中选取参数。当 $x_i$ 可变时，将其替换为 $G_i/x_i$ ；当 $i$为单位时，将其替换为$x_i^{-1}$，并固定所有其他坐标。假设该源环面在其坐标标签下具有定理*4.1* 的 *Laurent* 实现。那么

$$B_k(U)[Z_h^{-1} : h \neq i] = k[Z_h^{\pm 1} : h \neq i][Z_i, T_i].$$

唯一关系为 $Z_iT_i = \prod_{j\in N_i}(1 + Z_j)$ 。特别地， $|N_i| \geq 2$ 会在正向镜像上造成奇点。

证明。在第二个环面中，标准坐标标签通过热带坐标变换以及可变情形下 $G_i$ 的非零常数项，或在单位情形下直接通过取倒数，给出了原始标记中 $h \neq i$ 的函数 $T_i$ 和 $Z_h$。其中的 Laurent 实现将局部化镜像置于两个 Laurent环中，并使 $Z_i$ 或 $T_i$ 可逆。它包含所有所指示的生成元。它们的秩一交给出了该表示。如果 $j$， $k \in N_i$ 彼此不同，则满足 $Z_i = T_i = 0$， $Z_j = Z_k = -1$ 的点满足该方程，且其所有一阶导数都为零。这证明了奇点的存在。□

C.5. **具有有限生成 Cox环的射影模型**。设 $A$ 是 $k[u_1^{\pm 1}, \ldots, u_c^{\pm 1}, s_1, \ldots, s_l]$ 上的一个完整上 LP 代数，其中 $k$ 是一个域。记 $M$ 为初始环面的特征格，在对多项式冻结变量 $L = M^*$ 取倒数后，并记 $A^\circ = A[(\prod_j s_j)^{-1}]$。对于具有自由除子类群的簇 $X$ ，其 *Cox* 环 是各除子类对应空间 $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ 的直和，并选取加法方式的代表元，使截面的乘法保持分次结构。

**引理 C.14**。 设 $A^\circ$ 具有一个正则函数，该函数在每个可变坐标上的牛顿顶点均为负。对于任意有限列表的整数高斯权重 $p_1$、…、 $p_s \in L$，令 $t_1$、…、 $t_s$为形式变量，并令 $t^d = \prod_j t_j^{d_j}$ 。考虑多截面环

$$\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}^s} \{h \in A : \nu_{p_j}(h) \geq -d_j \text{ for all } j\}\, t^d.$$

它在 $k$ 上有限生成。一旦指定正则函数及其顶点，就可以通过 *Hilbert*基和有限的一阶星线性系统得到其生成元。

证明。选取一个内部包含零点的全维格多面体 $\Delta$ 。添加次数 $n \geq 0$ ，并将次数为$(n, d)$的不可约分支限制为支集在 $n\Delta$中的函数。在负顶点的极小法锥的内部选取分离权重 $\omega$ 。设 $H$ 为推论 2.6 中多项式冻结不等式所成的锥，当 $l = 0$时取 $H = M_{\mathbb{R}}$。 $A$ 的支集在 $n\Delta$中的截面恰好是 $A^\circ$ 的支集在$n(\Delta \cap H)$中的截面。由定理 2.5，以最小指数 $a$ 达到的三元组$(n, d, a)$恰好是

由 $a \in nD_\omega(\Delta \cap H)$给出、在$A^\circ$中计算的有理多面体锥的格点，以及

$$\langle a, v\rangle + d_j \geq 0 \qquad (1 \leq j \leq s,\ v \in \mathrm{Vert}(T_{p_j})).$$

事实上，具有最小多面体的截面 $Q_a$ 同时达到所有这些界。在 $n$ 中的次数为零时，允许的指数仅由零组成。将 Hilbert生成元提升为其次数中的首一截面。与相同最小指数的乘积相减，可以生成每个不可约分支，因为每次相减都会使有限集 $n\Delta \cap M$ 中的最小指数严格增加。通过将其形式变量设为一来忘却辅助分次，便得到到多截面环上的一个满射，因为每个有限 Laurent 支撑都包含于某个 $n\Delta$ 中。□

定理 ***C.15.*** 设 $A$ 是 $k[u_1^{\pm 1}, \ldots, u_c^{\pm 1}]$ 上任意 ***LP*** 种子的完整上代数。则存在一个射影正规局部阶乘簇 $X$，其具有约化边界 $B$ 和 $K_X + B \sim 0$。其开集 $X \setminus B$ 是 ***Spec*** $A$ 中至多一个初始可变坐标为零的轨迹，并且 $\Gamma(X \setminus B, \mathcal{O}) = A$。群 ***Cl(X)*** $=$ ***Pic(X)*** 是有限秩自由群，由严格环面边界生成。在特征零代数闭域上，该对是对数典范的。若 $A$ 具有一个正则函数，其牛顿顶点在每个可变坐标方向上均为负，则 ***Cox***环是有限生成的。在此情形下， $X$ 是 ***Hu***和***Keel*** 意义下的 ***Mori***梦空间 [22,定义 ***1.***10]，定义于特征零代数闭域上。

证明。 我们将 Gross、Hacking和Keel [19, §3，定理 3.9] 中的环面爆破构造应用于由普通 LP 交换式定义的中心。取一个光滑射影环面簇 $Y = Y_\Sigma$，其对应初始环面，且其射线包含可变余特征 $e_i$。例如，可以从标记坐标中的射影直线之积开始。对其扇作重心细分，使得没有任何锥包含两条原始射线。该细分是一系列光滑环面爆破，且是射影的。因此，不变除子 $D_{e_i}$ 彼此不交。在 $D_{e_i}$ 的开轨道中取超曲面 $F_i = 0$；由于将未改变坐标取逆后，普通交换式仍是不可约非单位，因此它是整数的。令 $Z_i$ 为其在 $D_{e_i}$中的闭包。这个整数除子在光滑的 $D_{e_i}$上是 Cartier。因此， $Z_i \subset Y$是余维二的正则嵌入，即使 $Z_i$ 有奇点也是如此。令 $\pi\colon X = \mathrm{Bl}_{\coprod_i Z_i} Y \to Y$为爆破。由正则嵌入可知， $Z_i$ 上方的例外除子是一个整数的射影直线丛 $E_i$。长度为二的正则序列的爆破的两个标准图表，是光滑仿射直线上的光滑开集中的超曲面，因而是 Cohen–Macaulay。爆破在 $E_i$的一般点处正则，因为此处中心由正则局部环中的两个参数给出；在例外除子之外则是光滑的。由 Serre 判据可得其正规性。

记 $B_\rho$ 为每个托里克除子的严格变换，并记 $B = \sum_\rho B_\rho$。 $D_{e_i}$的拉回为 $B_{e_i} + E_i$，而其他每个托里克除子的拉回均为其严格变换。这些恒等式由中心一般点处的阶得到。特别地，所有 $B_\rho$， $E_i$ 都是 Cartier。每个中心一般点处的典范除子公式给出 $K_X + B = \pi^*(K_Y + \sum_\rho D_\rho)$，其中典范除子相容。托里克对数体积形式使该和为零。在特征零的代数闭域上，与光滑托里克边界对的无亏损等式给出对数典范性。

每个余维至少为二的托里克分层都包含于某个非特 distinguished托里克除子中，因为这些特 distinguished除子彼此不相交。其原像包含于严格边界中。在环面与 $D_{e_i}$的开轨道的并集上，托里克模型为 Spec $C_i[x_i]$，其中 $C_i = k[u^{\pm 1}, x_j^{\pm 1}$为： $j \neq i]$。在那里，中心的理想为（$x_i$， $F_i$）。删除 $x_i = 0$的严格变换后，剩下图表 Spec $C_i[x_i, y_i]/$（$x_i y_i - F_i$）。这些图表连同初始环面覆盖$X \setminus B$。根据命题 1.1，它们是 Spec $D$（$\prod_{j \neq i} x_j$）中的相应开集，而在图表重叠的初始环面上，这些识别彼此一致。它们的全局函数环是公共域中各图表环的交集。每个图表环都是其初始 Laurent 环与相邻 Laurent 环的交集，因此 LP 海星定理将它们的交集识别为 $A$。在可变秩零的情形下，该开集就是初始环面。

初始环面在 $X$ 中的补集具有素除子 $B_\rho$， $E_i$，其中 $\rho$ 遍历扇的射线 $\Sigma(1)$。环面是唯一分解的，其单位元是其特征的标量倍数，因此其除子序列将 $\mathrm{Cl}(X)$ 表示为下述映射的余核：

$$M \longrightarrow \mathbb{Z}^{\Sigma(1)} \oplus \mathbb{Z}^r, \qquad m \longmapsto \big((\langle m, \rho\rangle)_\rho, (\langle m, e_i\rangle)_i\big).$$

这里每条射线都表示其本原生成元。在目标中，从第 $i$ 个例外坐标中减去第 $e_i$ 个边界坐标。余核变为 $\mathrm{Cl}(Y) \oplus \mathbb{Z}^r$，秩为 $|\Sigma$ 的自由群$| -$ 秩 $M + r$，因为 $Y$ 是光滑完备环面。对于每个可变特征 $x_i$，主关系 $[E_i]$表示为严格边界的类。所有生成元都是 Cartier，因此 $X$ 是局部唯一分解的。

对于 $d \in \mathbb{Z}^{\Sigma(1)}$， $\mathcal{O}_X$（$\sum d_\rho B_\rho$）的有理截面当且仅当它属于 $A$，并且其在 $B_\rho$ 处的阶至少为 $-d_\rho$时，才是整体的。在这些除子处，其阶就是原始的环面高斯赋值。在负 Newton 顶点的假设下，引理 C.14 因此给出了完整边界多截面环的有限生成性。该环满射到 Cox环。事实上，选取 $\mathrm{Cl}(X)$ 的一个基到自由边界群中的加性提升，并且在边界类映射的核上，乘法地选取具有所指示主除子的有理函数。用边界次数与其类的提升之差所对应的函数乘以一个截面，即得到所需的分次满射；该满射在所选提升上为单位矩阵。这证明了有限生成性。在代数闭特征零域上，有限自由皮卡群的连通分支是平凡的，因此 $\mathrm{Pic}(X)$ $\mathbb{Q} = N^1$（$X$）$\mathbb{Q}$。Hu和Keel的判据给出了Mori梦空间的断言 [22,命题 2。9]□

在特征零代数闭域上，保典性将对数差异为零的赋值与环面对的赋值对应起来。这些是沿其分层的单项式赋值，因此即为标记Gauss赋值 [7, 引理 2。2]因此，该环面对具有极大边界，即其对偶复形的维数为 $\dim X - 1$。其 Kawamata对数终端轨迹（其中所有对数差异均为正）与 $X \setminus B$ 在余维一上相合，因此由正规性可知二者具有相同的正则函数环。Blum 和 Liu 为这些权重给出了一个赋值独立的基 [7, 定理 1.2(1)]。定理2.1 还刻画了最小牛顿多胞体，并通过有限个首星方程在原始域上构造了一个基。

**推论 C.16**。 在定理 *5.4*的设定下，固定一个倒数多面体 $P_a$ 和一个原始整权 $q \in$ 整数 $C$。取定理 *C.15* 中的扇，使其细分 $P_a$ 的法扇并包含 $q$的射线。定义 $D_a = -\sum_{\rho\in\Sigma(1)}$ 最小值 $_{b\in P_a}\langle b, \rho\rangle\, B_\rho$。选取 $\mathrm{Cox}(X)$的一组有限齐次生成元。标签 $a$ 在源上可实现，当且仅当 $[D_a]$ 属于由这些生成元的次数所生成的有理锥，其中相应截面沿 $B_q$不恒等于零。对于固定的扇和射线，同一个有限锥检验所有倒数支撑函数在该扇的每个锥上均为线性的标签。

证明。通过射影环面加细插入指定的射线，然后进行光滑加细和重心剖分。射线不等式切出 $P_a$，因此 $H^0(X, \mathcal{O}_X(nD_a)) = V(nP_a)$ 对于 $n \geq 1$。截面 $h$ 的阶为 $\nu_q(h) - n\langle a$， 沿着 $B_q$。由于 $q$ 暴露了 $a$，当且仅当 $x^{na}$ 的系数非零时，此阶为零。于是，在直锥中所选分离权重处，$na$ 也是最小指数。根据定理 2.1， $nQ_a = Q_{na} \subseteq nP_a$。结合 $P_a \subseteq Q_a$，这表明任意正倍数中阶为零的截面都能在一次实现。反之，实现 $a$的截面沿着 $B_q$的阶为零。

将这样的截面表示为关于 Cox生成元 的齐次多项式。某个单项式在 $B_q$ 的一般点处非零，因此其每个因子在那里都具有零阶。反过来，消去 $[D_a]$ 的有理圆锥曲线表达式中的分母。所得乘积具有一个有效零除子 $E$，并且对于某个 $n > 0$，该除子与 $nD_a$ 线性等价。其因子中没有一个在 $B_q$ 的一般点处消失，因此 $E$ 没有沿 $B_q$ 的不可约分支。选择满足 $E = nD_a + \mathrm{div}(h)$ 的 $h$。作为 $\mathcal{O}_X(nD_a)$ 的截面， $h$ 的零除子为 $E$，因此沿 $B_q$ 的阶为零。□

## Declaration of generative AI and AI-assisted technologies

作者使用了 ChatGPT 和 Codex（OpenAI）来探索论证、检查证明和参考文献，并编辑手稿。作者对其内容承担责任。

## References

1. D. Abramovich、K. Karu、K. Matsuki 和 J. W

*Torification and factorization of birational maps* **15** 2002 531 572

lodarczyk, 《美国数学会杂志》（），–。2. K. Altmann, *Toric ℚ-Gorenstein singularities*, arXiv:alg-geom/9403003v1（1994）。3. A. Berenstein、S. Fomin 和 A. Zelevinsky, *Cluster algebras III: Upper bounds and double Bruhat cells*, 《杜克数学杂志》126（2005），1–52。4. M. Baker、S. Payne 和 J. Rabinoff,

*On the structure of non-archimedean analytic curves* *Tropical*，载于，*and non-Archimedean geometry* **605** 2013 93 121 1404 0279
《当代数学》（），–。arXiv:。。5. A. Benito、G. Muller、J. Rajchgot 和 K. E. Smith, *Singularities of locally acyclic cluster algebras*, 《代数与数论》9（2015），913–936。6. D. N. Bernshtein, *The number of roots of a system of equations*, 《泛函分析及其应用》9（1975），183–185。7. H. Blum 和 Y. Liu, *Valuative independence for Calabi–Yau varieties*, arXiv:2604.27890v1（2026）。8. M.-W. Cheung、T. Magee、T. Mandel 和 G. Muller, *Valuative independence and cluster theta reciprocity*, arXiv:2505.09585v2（2026）。9. O. Daisey, *Linear Laurent phenomenon algebras are of finite type*, arXiv:2610.17441v1（2026）。10. M. de la Salle, *On norms taking integer values on the integer lattice*, 《巴黎科学院数学报告》354（2016），611–613。11. A. Esterov 和 G. Gusev, *Systems of equations with a single solution*, 《符号计算杂志》68（2015），116–130。12. J. Fei, *Symmetric branching via Laurent phenomenon algebras*, arXiv:2609.32425v1（2026）。13. J. Fei, *Laurent phenomenon algebras on minuscule Grassmannians and their mirrors*, Hexagon 2611.00328v1（2026）。14. J. Fei, *Three-point conformal-block algebras and half-spin mirrors*, 手稿。15. V. V. Fock 和 A. B. Goncharov, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm*, 《高等师范学校科学年鉴》´Ec. Norm. Sup´er.（4）42（2009），865–930。16. S. Fomin 和 A. Zelevinsky, *Cluster algebras I: Foundations*, 《美国数学会杂志》15（2002），497–529。17. S. Fomin 和 A. Zelevinsky, *Cluster algebras IV: Coefficients*, 《组合数学》143（2007），112–164。18. S. Fujiwara 和 Y. Gyoda, *Duality between final-seed and initial-seed mutations in cluster algebras*, SIGMA 15（2019），论文编号040, 24页。19. M. Gross、P. Hacking 和 S. Keel, *Birational geometry of cluster algebras*, 《代数几何》2（2015），137–175。20. M. Gross、P. Hacking、S. Keel 和 M. Kontsevich, *Canonical bases for cluster algebras*, 《美国数学会杂志》31（2018），497–608。21. M. Gross 和 B. Siebert, *Intrinsic mirror symmetry*, 《美国数学会杂志》39（2026），313–451。22. Y. Hu 和 S. Keel, *Mori dream spaces and GIT*, 《密歇根数学杂志》48（2000），331–348。23. S. Johnston,

*Comparison of nonarchimedean and logarithmic mirror constructions via the Frobenius structure theorem* 2 **110** 2024 5, 12998 ，《伦敦数学会杂志》（）（），编号 e。24. M. Kapovich, *Integer norms are polyhedral*, 作者注记。25. K. Kaveh 和 C. Manon, *Khovanskii bases、 higher rank valuations、 and tropical geometry*, 《工业与应用数学学会应用代数与几何杂志》3（2019），292–336。26. S. Keel、L. White 和 T. Y. Yu, *Log Calabi–Yau mirror symmetry and non-archimedean disks*, arXiv:2411.04067v2（2026）。27. S. Keel 和 T. Y. Yu,

*The Frobenius structure theorem for affine log Calabi–Yau varieties containing a torus* 2 **198** 2023 419 536 1908 09861 2
《数学年刊》（）（），–。编号参考文献对应 arXiv: 。v。28. T. Lam 和 P. Pylyavskyy, *Laurent phenomenon algebras*, 《剑桥数学杂志》4（2016），121–162。29. T. Lam 和 P. Pylyavskyy, *Linear Laurent phenomenon algebras*, 《国际数学研究通知》IMRN（2016），编号10，3163–3203。30. T. Mandel, *Theta bases are atomic*, 《组合数学》153（2017），1217–1219。31. N. Nakayama, *Zariski-decomposition and abundance*, 《日本数学会回忆录》，第14卷，日本数学会，东京，2004。32. M. Pompili, *Every finitely generated abelian group is the class group of a generalized cluster algebra*, 《代数杂志》686（2026），566–594。33. D. E. Speyer, *An infinitely generated upper cluster algebra*, arXiv:1305.6867（2013）。34. Stacks Project作者, *The Stacks Project*, 标签08QQ和08SP。35. W. P. Thurston,

*A norm for the homology of 3-manifolds* **59** 1986 339, , 99 130 ，《美国数学会回忆录》（），编号–。

School of Mathematical Sciences, Shanghai Jiao Tong University, China
*Email address*: jiarui@sjtu.edu.cn