arXiv:2611.32575v1 [math.RT] 24 Nov 2026

广义预投射代数的卷积代数与 Kac–Moody 正部分

FENGJUN SHI

Abstract. 我们将可对称化 Kac–Moody 李代数正部的包络代数实现为 Geiss–Leclerc–Schr¨oer 广义预投射代数 $\Pi(C, D)$ 的模簇上的可构造函数所成的卷积代数。我们刻画了所有使这种实现存在的对 (C, D)。这些实现推广了 Lusztig 的经典预投射构造。该构造使用了旗簇上的折叠嵌入和环面作用。

Contents

1. 引言 12. 广义预投射代数与卷积代数 33. Serre 关系与典范同态 94. 典范同态的单射性 115. 不可实现性与 Serre 商 23AI 辅助研究与手稿准备声明 30参考文献 30

1. Introduction

Hall 代数为李代数及其包络代数提供了表示论构造。对于可对称化 Kac–Moody 李代数 $\mathfrak{g}$，记 $\mathbf{U}_v^+(\mathfrak{g})$ 为相应量子群的正部。利用有限域上遗传代数的表示，Ringel 在有限型情形下建立了 $\mathbf{U}_v^+(\mathfrak{g})$ 的 Hall 代数实现，而 Green 将其推广到了 一般的可对称化情形 [Rin90，Gr95]。在 $v = 1$ 处的经典特化给出 $U(\mathfrak{n}_+)$，其中 $\mathfrak{n}_+$ 是 $\mathfrak{g}$的正部。

在对称情形下，Schofield [Sch91] 通过将有限域上的点计数替换为复簇的欧拉示性数，实现了 $U(\mathfrak{n}_+)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的构造。Lusztig [Lus91]利用箭图表示簇上的可构造函数卷积重新表述了这一构造。他还通过在经典预投射代数的幂零表示簇上进行卷积，实现了 $U(\mathfrak{n}_+)$ [Lus91，Lus00]。

为了将这些几何构造推广到可对称化情形，Geiss、Leclerc 和 Schr¨oer [GLS17] 引入了代数 $H(C, D,\Omega)$ 以及广义预投射

关键词与短语。广义预射影代数、可构造函数、卷积代数、Kac–Moody 代数。本文部分受国家自然科学基金（项目编号：12471037）资助。

代数 $\Pi(C,D)$，其中 C 是可对称化广义 Cartan 矩阵，D 是正整数对称化子，Ω 是 C 的无圈定向。通过使用局部自由的 $H(C,D,\Omega)$-模，他们在 C 为 Dynkin 型[时，得到了 $U(\mathfrak{n}_+(C))$ 的卷积实现16]GLS。Castillo G´omez 和 Geiss [CG25] 证明了仿射型~C_n 下采用最小对称化子时的相应结果。

对于 $\Pi(C,D)$，记 $\mathcal{M}(C,D)$ 为由广义简单 $\theta_i = \mathbf{1}_{E_i}$ 模的示性函数生成的含幺卷积子代数 $\Pi(C,D)$-模 E_i。这些生成元不一定满足与 C 相关的 Serre 关系。在 [GLS 18], 中，作者考察了由相应 Serre 元生成的理想的商，并证明在他们的支撑猜想成立时，该商同构于 $U(\mathfrak{n}_+(C))$。

Fei [Fei26，定理 10。1] 证明了这个同构，无须假设支撑猜想成立。他的证明使用了 $H(C,D,\Omega)$ 的卷积实现；他证明该实现适用于所有可对称化的 C 以及所有正整数对称化子 D [Fei26，定理 A。1]。他还给出了该猜想的一个反例 [Fei26，定理 10。2]。在同一篇著作中，他利用分歧预投射种在 $U(\mathfrak{n}_+(C))$ 上的旗簇上的单值化迹，实现了 $\mathbb{C}((t))$。

1.1. 主要结果。 我们确定了卷积代数 $\mathcal{M}(C,\ D)$ 何时同构于可对称化 Kac–Moody 李代数正部的包络代数。

记 $C=(c_{ij})_{i,\ j\in I}$ 和 $D=\operatorname{diag}(d_i)_{i\in I}$，并令

$$\lambda_i=\begin{cases}1, & d_i=1,\\ 2, & d_i>1,\end{cases}$$

并定义 $A=A(C,\ D)=(a_{ij})_{i,\ j\in I}$ 为

$$a_{ii}=2,\qquad a_{ij}=\lambda_i c_{ij}\quad (i\neq j).$$

则 A 是可对称化广义 Cartan 矩阵，其正整数对称化子为 $\operatorname{diag}(2d_i/\lambda_i)_{i\in I}$。设 e_i 为 $\mathfrak{n}_+(A)$ 的 Chevalley 生成元，并设 $\mathfrak{l}(C,\ D)$ 为 $\mathcal{M}(C,\ D)$ 中由 θ_i 在卷积交换子下生成的李子代数。

对于任意的（$C,\ D$），我们在命题 A 中证明 3.3-Serre 关系。它们给出了一个典范的满射 Hopf 代数同态

$$\Phi_{C,D}\colon U(\mathfrak{n}_+(A))\twoheadrightarrow \mathcal{M}(C,D),\qquad e_i\mapsto\theta_i.$$

我们考虑以下条件，称为条件（E）：

$$\gcd(d_i,d_j)>1\qquad \text{whenever } c_{ij}<0 \text{ and } d_i,d_j>1.$$

定理 A（定理 2.10）。若 （$C,\ D$）满足条件 （E），则

$$\Phi_{C,D}: U(\mathfrak{n}_+(A))\to\mathcal{M}(C,D)$$

是秩分次 *Hopf* 代数的同构。其限制给出李代数同构

$$\mathfrak{n}_+(A)\xrightarrow{\sim}\mathfrak{l}(C,D).$$

当 D 是单位矩阵时，我们有 $A=C$，定理 A便恢复了 Lusztig 的经典预投射实现；参见 [GLS18，第 1 节。2]。由推论 C 为有限型或仿射型且 D 为任意正整数对称化子时，定理也适用，见推论 2.11。矩阵 $A(C,\ D)$ 的类型不必与 C相同。

对于数对 (C, D) 不满足条件（E）时，我们在第 5.

T定理 B（定理 2.12）。若 $(C,\ D)$ 不满足条件 （E），则

$$\mathcal{M}(C,D) \ncong U(\mathfrak{n}_+(B))$$

作为任意可对称化广义 *Cartan* 矩阵 B对应的含幺 $\mathbb{C}$代数。特别地，$(C,\ D)$ 不同构于任何可对称化 *Kac–Moody* 李代数的正部。

为任意 $(C,\ D)$ 构造实现，我们在第 $\mathcal{M}(C,\ D)$ 节构造 Serre 商。5。特别地，我们恢复 Fei CFei26 中证明的完整 [-Serre 商实现，定理 10。1] 且无需假设 GLS 支撑猜想。

1.2. 结构安排。本文结构如下。第 2 节回顾广义预射影代数及其卷积代数，定义卡坦矩阵 $A(C, D)$，并陈述主要定理。在第 3 节，我们证明局部自由模的分裂引理，并用它建立 A-Serre 关系。由此得到任意 (C, D) 对应的典范同态$U(\mathfrak{n}_+(A)) \to \mathcal{M}(C, D)$。在第 4 节，我们利用 A 的对称覆盖以及旗簇上的环面作用，证明条件（E）下的单射性；旗标比较与 [Fei26, 附录 A]中的无环构造有关。第 5 节证明定理 2.12，并为任意 (C, D) 构造 Serre 商。

致谢。 作者谨向傅畅建、耿胜飞和陆明致以谢意，感谢他们开展了富有帮助的讨论。

2. Generalized preprojective algebras and convolution algebras

我们在 $\mathbb{C}$ 上工作，且所有模都是有限维左模。

2.1. **可对称化 Cartan 矩阵与定向**。 我们回顾[GLS17]中的定义。令 $I = \{1, \ldots, n\}$ 以及 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$。

定义 2.1。 若矩阵 $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ 满足以下条件，则称其为可对称化（广义）Cartan 矩阵：

(C_1) $c_{ii} = 2$ 对所有 i成立；(C_2) $c_{ij} \le 0$ 对所有 $i \neq j$成立；(C_3) 当且仅当 $c_{ji} \neq 0$时，$c_{ij} \neq 0$；(C_4) 存在一个对角整数矩阵 $D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$，使得 $d_i \ge 1$ 对所有 i 成立，并且 DC 是对称的。

D在（C_4）中的矩阵称为 C的对称化子。当 $d_1 + \cdots + d_n$为最小时，它是最小的。对于每一对满足 $c_{ij} < 0$的对象，令

$$g_{ij} := |\gcd(c_{ij}, c_{ji})|, \quad f_{ij} := |c_{ij}|/g_{ij}, \quad k_{ij} := \gcd(d_i, d_j).$$

由于 $d_i f_{ij} = d_j f_{ji}$ 且 $\gcd(f_{ij}, f_{ji}) = 1$，我们有

$$d_i = k_{ij} f_{ji}, \qquad d_j = k_{ij} f_{ij}.$$

C 的定向是满足以下条件的子集 $\Omega \subseteq I \times I$：

(i) $\{(i,\ j),\ (j,\ i)\} \cap \Omega \neq \emptyset$ 当且仅当 $c_{ij} < 0$；(ii) 对于每个满足 $t \ge 1$ 且对所有 $1 \le s \le t$都有 $(i_s,\ i_{s+1}) \in \Omega$ 的序列 $((i_1,\ i_2),\ (i_2,\ i_3) \cdots,\ (i_t,\ i_{t+1}))$，我们有 $i_1 \neq i_{t+1}$。

对于 C 的一个定向 Ω，令 $Q = Q(C, \Omega)$ 为顶点集为 $Q_0 = I$ 且箭集为

$$Q_1 = \left\{ \alpha_{ij}^{(g)} : j \to i \;\middle|\; (i,j) \in \Omega,\ 1 \le g \le g_{ij} \right\} \cup \{ \varepsilon_i : i \to i \mid i \in I \}.$$

因此，对于每个 $(i,j) \in \Omega$，Q 从 j 到 i 有 g_{ij} 条箭，并且每个顶点处有一个环 ε_i。删除所有环 ε_i 后得到的箭图是无环的。

Set

$$\Omega^{\mathrm{op}} = \{(j,i) \mid (i,j) \in \Omega\}, \qquad \overline{\Omega} = \Omega \cup \Omega^{\mathrm{op}}.$$

令 $\overline{Q}$ 为在 Q 中为每条非环箭 $\alpha_{ij}^{(g)} : j \to i$ 添加一条反向箭 $\alpha_{ji}^{(g)} : i \to j$ 后得到的箭图。保留环 ε_i，不添加新的副本。对于 $(i,j) \in \Omega$，定义

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in \Omega, \\ -1, & (i,j) \in \Omega^{\mathrm{op}}. \end{cases}$$

2.2. **广义预投射代数。**

定义 2.2. 代数 $H = H(C, D, \Omega)$是以下商代数

$$H(C, D, \Omega) = \mathbb{C}Q / \mathcal{I}_H,$$

其中 $\mathcal{I}_H$ 是由以下关系生成的双边理想：

（1）对于每个 $i \in I$，幂零关系

$$\varepsilon_i^{d_i} = 0.$$

（2）对于每个 $(i,\ j) \in \Omega$ 和 $1 \le g \le g_{ij}$，交换关系

$$\varepsilon_i^{f_{ji}} \alpha_{ij}^{(g)} = \alpha_{ij}^{(g)} \varepsilon_j^{f_{ij}}.$$

定义 2.3。 广义前射影代数 $\Pi = \Pi(C,\ D,\ \Omega)$ 是商

$$\Pi(C, D, \Omega) = \mathbb{C}\overline{Q} / \mathcal{I}_\Pi,$$

其中 $\mathcal{I}_\Pi$ 是由以下关系生成的双边理想：

（1）对于每个 $i \in I$，幂零关系

$$\varepsilon_i^{d_i} = 0.$$

（2）对于每个 $(i,\ \overline{j}) \in \Omega$ 和 $1 \le g \le g_{ij}$，交换关系

$$\varepsilon_i^{f_{ji}} \alpha_{ij}^{(g)} = \alpha_{ij}^{(g)} \varepsilon_j^{f_{ij}}.$$

（3）对于每个 $i \in I$，网格关系

$$\sum_{\substack{j \in I \\ c_{ij} < 0}} s_{ij} \sum_{g=1}^{g_{ij}} \sum_{p=0}^{f_{ji}-1} \varepsilon_i^p \alpha_{ij}^{(g)} \alpha_{ji}^{(g)} \varepsilon_i^{f_{ji}-1-p} = 0.$$

$\Pi(C,\ D,\ \Omega)$ 的同构类与 Ω 无关，因此记作 $\Pi(C,\ D)$。如果 C 是对称的且 $D = I$，则环消失，并且 $\Pi(C,\ D)$ 是通常预投射代数。

2.3. **二次型**。我们将二次型 $q_{C,\ D}$ 与 $(C,\ D)$ 相关联： $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$定义如下

$$q_{C,D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\mathbf{v}^T DC\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} d_i v_i^2 - \sum_{i<j} d_i|c_{ij}|v_i v_j, \qquad \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n).$$

矩阵 C 是有限型（Dynkin 型）的，当且仅当将 $q_{C,D}$ 扩展到 $\mathbb{R}^n$ 所得的形式是正定的。连通有限类型为

$$A_n,\ B_n,\ C_n,\ D_n,\ E_6,\ E_7,\ E_8,\ F_4,\ G_2.$$

若 C 是连通的 且为仿射型，则该形式是半正定的，但不是正定的 .

2.4. **局部自由模与广义单模**。 置 $H_i = \mathbb{C}[\varepsilon_i]/(\varepsilon_i^{d_i})$。对于一个 $\Pi(C, D)$-模 M，记 M_i 为其在顶点 i处的向量空间，并通过 ε_i的作用将其视为一个 H_i-模。若模 M 满足局部自由，即对每个 i， M_i 都是 H_i 上的自由模，则其秩向量为

$$\operatorname{rank} M = (\operatorname{rank}_{H_i} M_i)_{i\in I}.$$

广义单模 E_i 支撑于 i，其分量为 H_i。它是不可分解的；仅当 $d_i = 1$时，它才是普通单模。

如果模 M 具有有限滤过，则称其为 E-滤过的

$$0 = M^0 \subset M^1 \subset \cdots \subset M^m = M$$

使得

$$M^a/M^{a-1} \cong E_{i_a}, \qquad 1 \le a \le m,$$

对某些 i_1，……， $i_m \in I$。

每个 E-滤过模都是局部自由的。事实上，在每个顶点 $j \in I$处，滤过会诱导出短正合序列

$$0 \longrightarrow (M^{a-1})_j \longrightarrow (M^a)_j \longrightarrow (E_{i_a})_j \longrightarrow 0.$$

商 $(E_{i_a})_j$ 要么是 H_j，要么为零，因此每个序列都作为 H_j-模的序列分裂。由此归纳可得， M_j 在 H_j上是自由的。

2.5. **卷积代数**。遵循 [GLS16，第4节。1]以及 [GLS18，第2节。5],我们回顾与下列对象相关的可构造函数卷积代数的构造： $\Pi := \Pi(C,\ D)$。

对于 Q的一个箭 $\overline{a}$，令 $s(a)$ 和 $t(a)$ 分别表示其源点和靶点。给定维数向量$\mathbf{v} = (v_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}^I$，令 $\mathrm{Rep}_{\mathbf{v}}(\Pi)$ 表示顶点空间 $(\mathbb{C}^{v_i})_{i\in I}$上的 Π-模结构所构成的仿射簇。具体而言，其点是一些元组

$$M = (M(a))_{a\in\overline{Q}_1} \in \prod_{a\in\overline{Q}_1} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}^{v_{s(a)}}, \mathbb{C}^{v_{t(a)}}\right)$$

满足 Π 的定义关系。

群

$$G_{\mathbf{v}} = \prod_{i\in I} \mathrm{GL}_{v_i}(\mathbb{C})$$

通过基变换作用于 $\mathrm{Rep}_{\mathbf{v}}(\Pi)$：

$$(g\cdot M)(a) = g_{t(a)} M(a) g_{s(a)}^{-1}, \qquad g = (g_i)_{i\in I} \in G_{\mathbf{v}}.$$

其轨道与维数向量为$\mathbf{v}$的 Π-模的同构类一一对应。

复代数簇上的可构造函数是一个取有限多个值且纤维可构造的复值函数。令 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(\Pi)$ 表示由可构造函数构成的 $\mathbb{C}$-向量空间

$$f : \mathrm{Rep}_{\mathbf{v}}(\Pi) \longrightarrow \mathbb{C}$$

这些函数在 $G_{\mathbf{v}}$-轨道上为常值；等价地，

$$f(g \cdot M) = f(M) \qquad \text{for all } g \in G_{\mathbf{v}} \text{ and } M \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{v}}(\Pi).$$

Set

$$\mathcal{F}(\Pi) = \bigoplus_{\mathbf{v}\in\mathbb{N}^I} \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(\Pi).$$

我们将这些函数视为定义在模的同构类上的函数，并将每个$f \in \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(\Pi)$在维数向量与$\mathbf{v}$不同的模上延拓为零。

令 χ_c 表示紧支撑欧拉特征。对于可构造函数$\varphi : X \to \mathbb{C}$，定义其欧拉积分为

$$\int_X \varphi \, d\chi_c = \sum_{c\in \mathrm{Im}(\varphi)} c\, \chi_c\big(\varphi^{-1}(c)\big).$$

由于 φ 只取有限多个值，因此此和是有限的。

对于有限维 Π-模 M，令

$$\mathrm{Gr}^{\Pi}_{\mathbf{v}}(M) = \{U \subset M : U \text{ is a } \Pi\text{-submodule and } \underline{\dim} U = \mathbf{v}\}.$$

这是 $\prod_{i\in I}\mathrm{Gr}^{v_i}(M_i)$的一个闭子簇，因此是射影的。

对于 $f \in \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(\Pi)$ 和 $g \in \mathcal{F}_{\mathbf{w}}(\Pi)$，定义

$$(f * g)(M) = \int_{\mathrm{Gr}^{\Pi}_{\mathbf{v}}(M)} f(U)\, g(M/U)\, d\chi_c. \tag{2.1}$$

$(\mathcal{F}(\Pi)\ *)$ 是一个 $\mathbb{N}^I$-分次结合代数。其单位元是零模的特征函数 $\mathbf{1}_0$。

对每个 $i \in I$，令 θ_i 为广义单模 E_i 的同构类的特征函数：

$$\theta_i(M) = \begin{cases} 1, & M \cong E_i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由于 $\underline{\dim} E_i = d_i\mathbf{e}_i$，我们有 $\theta_i \in \mathcal{F}_{d_i\mathbf{e}_i}(\Pi)$，其中 $(\mathbf{e}_i)_{i\in I}$ 是 $\mathbb{Z}^I$ 的标准基 .

定义 2.4。令 $\mathcal{M}(C,\ D)$ 表示由函数 θ_i 生成的 $(\mathcal{F}(\Pi)\ *)$ 的含幺子代数：

$$\mathcal{M}(C, D) = \mathbb{C}\langle \theta_i : i \in I\rangle_*.$$

这就是 $\mathcal{M}(\Pi)$ 在 [GLS18第 2 节中所表示的代数。5]。

我们为 $\mathcal{M}(C,\ D)$ 配备秩分次 $\deg\ \theta_i = \mathbf{e}_i$。等价地，令

$$\mathcal{M}_{\mathbf{r}} = \mathcal{M}(C, D) \cap \mathcal{F}_{D\mathbf{r}}(\Pi), \qquad \mathcal{M}(C, D) = \bigoplus_{\mathbf{r}\in\mathbb{N}^I} \mathcal{M}_{\mathbf{r}}.$$

每个 $\mathcal{M}_{\mathbf{r}}$ 都是有限维的：它由有限多个卷积词张成，其中 θ_i 出现 r_i 次。此外， $\mathcal{M}_{\mathbf{0}} = \mathbb{C}\mathbf{1}_0$。

对于一个序列 $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m)$，令 $\mathrm{Fl}^E_{\mathbf{i}}(M)$ 表示由 Π-子模组成的旗的可构造集

$$0 = M^0 \subset M^1 \subset \cdots \subset M^m = M$$

使得

$$M^s/M^{s-1} \cong E_{i_s} \qquad (1 \le s \le m).$$

反复应用卷积公式可得

$$(\theta_{i_1} * \cdots * \theta_{i_m})(M) = \chi_c\big(\mathrm{Fl}^E_{\mathbf{i}}(M)\big). \tag{2.2}$$

因此， $\mathcal{M}(C, D)$ 的每个元素在非 E-过滤模上均为零。下面给出 [GLS16，引理 42] 关于 Π 的类似结论。该结论也见于 [GLS18，第 2 节5]。

引理2.5。设 X 是一个有限维 Π-模。若 X 不是局部自由的，则对每个 $f \in \mathcal{M}(C, D)$，都有 $f(X) = 0$。

我们回顾 [GLS18，第 2 节5]中的以下 Hopf代数结构；另见 [GLS16，命题 4.5 和 4.7]，其中给出了 H 对应的构造。

命题 2.6。 卷积代数 $\mathcal{M}(C, D)$ 是一个连通的余交换 *Hopf*代数。其余乘法

$$\Delta : \mathcal{M}(C, D) \longrightarrow \mathcal{M}(C, D) \otimes \mathcal{M}(C, D)$$

给定为

$$(\Delta f)(X, Y) = f(X \oplus Y).$$

特别地，

$$\Delta(\theta_i) = \theta_i \otimes \mathbf{1}_0 + \mathbf{1}_0 \otimes \theta_i.$$

余单位为 $\epsilon(f) = f(0)$，且对极满足 $S(\theta_i) = -\theta_i$。

由于 Δ 是代数同态，对于任意序列 $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m)$，我们有

$$\Delta(\theta_{i_1} * \cdots * \theta_{i_m}) = \prod_{a=1}^{m} \big(\theta_{i_a} \otimes \mathbf{1}_0 + \mathbf{1}_0 \otimes \theta_{i_a}\big).$$

定义 2.7。 设 B 是一个 Hopf代数，其余乘法为 Δ，单位元为 1_B。若元素 $x \in B$满足*primitive*，则称其为原始元，并且

$$\Delta(x) = x \otimes 1_B + 1_B \otimes x.$$

我们将本原元的向量空间记作

$$P(B) = \{x \in B : \Delta(x) = x \otimes 1_B + 1_B \otimes x\}.$$

空间 $P(B)$ 是 B 在交换子 $[x, y] = xy - yx$下的李子代数。由于每个 θ_i 根据命题 2.6 都是本原元， θ_i 的每个迭代卷积交换子也都是本原元。

对于卷积代数，原始元有如下解释；另见[GLS18，第 2 节。5]。

引理 2.8。 函数 $f \in \mathcal{M}(C, D)$ 是原始元，当且仅当

$$f(0) = 0 \qquad and \qquad f(X \oplus Y) = 0 \quad for\ all\ nonzero\ \Pi\text{-}modules\ X, Y.$$

等价地，本原函数只能在非零不可分解模上取非零值。

*Pr*证明。 由命题 2.6，函数 $f \in \mathcal{M}(C,\ D)$ 是原始元，当且仅当 if

$$f(X \oplus Y) = f(X)\mathbf{1}_0(Y) + \mathbf{1}_0(X)f(Y)$$

对所有有限维的 Π-模 X，Y均成立。若 f是原始元，取 $X = Y = 0$ 可得 $f(0) = 0$，取 X，$Y \neq 0$ 可得 $f(X \oplus Y) = 0$。反之，这两个消失条件蕴含所显示的恒等式：当 X，$Y \neq 0$ 时，两边均为零；若其中一个模为零，则该恒等式显然成立。□

正如 [GLS18第 2 节中所回顾的，5], 这个包含映射

$$P(\mathcal{M}(C, D)) \hookrightarrow \mathcal{M}(C, D)$$

诱导出典范 Hopf 代数同构

$$U\big(P(\mathcal{M}(C, D))\big) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(C, D).$$

令 $\mathfrak{l}(C,\ D)$ 表示由 θ_i 在卷积交换子下生成的 $\mathcal{M}(C,\ D)$ 的李子代数。

引理 2.9。 包含映射 $\mathfrak{l}(C, D) \hookrightarrow \mathcal{M}(C, D)$ 诱导出一个规范的 *Hopf*代数同构

$$U(\mathfrak{l}(C, D)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(C, D).$$

证明。 由于每个 θ_i 都是原始元，我们有 $\mathfrak{l}(C, D) \subseteq P(\mathcal{M}(C, D))$. 根据 PBW 定理，所诱导的映射

$$U(\mathfrak{l}(C, D)) \longrightarrow \mathcal{M}(C, D)$$

是单射。其像包含所有代数生成元 θ_i，因此它是满射。 □

2.6. 修正 Cartan 矩阵与主要定理。 令 $C = (c_{ij})_{i,j\in I}$ 为可对称化广义 Cartan 矩阵，并令 $D = \mathrm{diag}(d_i)$ 为一个正整数对称化子。设

$$\lambda_i = \begin{cases} 1, & d_i = 1, \\ 2, & d_i > 1, \end{cases}$$

并定义 $A = A(C, D) = (a_{ij})_{i,j\in I}$ 如下：

$$a_{ii} = 2, \qquad a_{ij} = \lambda_i c_{ij} \quad (i \neq j). \tag{2.3}$$

则 A 是一个具有正整数对称化子的可对称化广义 Cartan 矩阵

$$D_A = \mathrm{diag}(2d_i/\lambda_i)_{i\in I}.$$

我们考虑条件

$$\gcd(d_i, d_j) > 1 \qquad \text{whenever } c_{ij} < 0 \text{ and } d_i, d_j > 1. \tag{E}$$

e_i、 $i \in I$ 是 $\mathfrak{n}_+(A)$ 的 Chevalley 生成元。现在我们可以陈述实现定理。

定理 2.10. 假设 (C, D) 满足条件 (E)。那么，赋值 $e_i \mapsto \theta_i$唯一地延拓为秩分次 *Hopf* 代数之间的同构

$$\Phi_{C,D} \colon U(\mathfrak{n}_+(A)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(C, D).$$

其限制给出一个李代数同构

$$\mathfrak{n}_+(A) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{l}(C, D).$$

在第 3节中，我们证明与 A 相关的 Serre 关系，并在不假设条件（E）的情况下，对任意（C， D）建立满射性。在第 4节中，我们在该条件下证明单射性，从而完成定理2.10的证明。

推论 2.11（有限型与仿射型）。 设 C 为有限型或仿射型，并令 D 为任意正整数对称化子。则存在一个规范的秩分次 *Hopf* 代数同构

$$U(\mathfrak{n}_+(A)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(C, D),$$
$$e_i \longmapsto \theta_i,$$

其中 $A = A$（C、 D）。特别地，由 θ_i 在卷积交换子下生成的李子代数与 $\mathfrak{n}_+$（A）规范同构。

证明。 由于 C 为有限型或仿射型，对称矩阵 DC 是半正定的。因此，其二阶主子式给出

$$c_{ij}c_{ji} \leq 4 \qquad (i \neq j).$$

于是容易验证条件（E）成立。断言现在由定理2.10得出。 □

对于任意可对称化广义 Cartan 矩阵 C 以及任意正整数对称化子D'，数对 $(C,\ mD')$ 对每个整数 $m \geq 2$都满足条件 (E)，因为 mD' 的所有对角元都能被 m整除。因此，定理 2.10 适用于 $(C,\ mD')$。

对于数对 $(C,\ D)$ 不满足条件 (E的情形，我们在第 5 节证明以下定理 .

定理 2.12。 若 $(C,\ D)$ 不满足条件 (E)，则

$$\mathcal{M}(C, D) \ncong U(\mathfrak{n}_+(B))$$

作为任意可对称化广义 *Cartan* 矩阵 B对应的含幺 $\mathbb{C}$-代数。特别地，$\mathfrak{l}(C,\ D)$ 不同构于任何可对称化 *Kac–Moody* 李代数的正部。

3. Serre relations and the canonical homomorphism

本节证明与 $A = A$（C、 D）相关的 Serre 关系，并得到到 $\mathcal{M}$（C、 D）的典范同态。我们不假设条件（E）。我们使用 [GLS17 第 5.1–5 节中的入映射和出映射3]。

对于 $c_{ij} < 0$，令 ${}_iH_j$ 表示从 j 到 i的（H_i、 H_j）-双模。它作为左 H_i-模是秩为 $|c_{ij}|$ 的自由模。对于一个 Π-模 M，令

$$\widetilde{M}_i = \bigoplus_{j \colon c_{ij} < 0} {}_iH_j \otimes_{H_j} M_j.$$

根据 [GLS17，第5节。3], 我们考虑 H_i-模同态

$$M_{i,\mathrm{in}} \colon \widetilde{M}_i \longrightarrow M_i, \qquad M_{i,\mathrm{out}} \colon M_i \longrightarrow \widetilde{M}_i.$$

根据 [GLS17，命题5。2], 前射影关系等价于

$$M_{i,\mathrm{in}} \cdot M_{i,\mathrm{out}} = 0 \qquad (i \in I).$$

3.1. **分裂引理**。 我们调整 [GLS18中引理 6 的证明所采用的分裂论证，3]使其适用于局部自由 Π-模。

引理 3.1。 设 X 是一个局部自由 Π-模，并设 $i \in I$。令 m 和 n 分别为 $\operatorname{Im} X_{i,\ \mathrm{in}}$ 以及 $\operatorname{Im} X_{i,\ \mathrm{out}}$ 的最小 H_i-生成元个数。若 秩$_{H_i} X_i > m+n$，则 E_i 是 X 的一个直和项。

证明。 记 $\alpha = X_{i,\ \mathrm{in}}$ 和 $\beta = X_{i,\ \mathrm{out}}$。于是

$$\widetilde{X}_i \xrightarrow{\alpha} X_i \xrightarrow{\beta} \widetilde{X}_i, \qquad \alpha\beta = 0.$$

我们将 α 的矩阵化为史密斯标准形。由于 $\operatorname{Im}\alpha$ 由 m 个元素最小生成，该标准形恰好有 m 个非零对角元。因此，我们得到一个自由 H_i-模的分解

$$X_i = P \oplus Z, \qquad P \cong H_i^m, \qquad \operatorname{Im}\alpha \subseteq P.$$

同样地，应用 史密斯标准形于 β，我们得到一个自由 H_i-模的分解 s

$$\widetilde{X}_i = T \oplus T', \qquad T \cong H_i^n, \qquad \operatorname{Im}\beta \subseteq T.$$

现在考虑限制 $\beta|_Z \colon Z \to T$。由于

$$\operatorname{rank}_{H_i} Z = \operatorname{rank}_{H_i} X_i - m > n = \operatorname{rank}_{H_i} T,$$

我们可以选取 Z 的一个直和项 $K \cong H_i$，使得 $\beta(K) = 0$。由于 $\operatorname{Im}\ \alpha \subseteq P$, E_i 是 X 的一个直和项。□

推论 3.2。 设 $i \neq j$ 满足 $c_{ij} < 0$，且 X 是秩为 $r\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ 的局部自由 Π-模。若 $r > \lambda_i |c_{ij}|$，则 E_i 是 X 的一个直和项。

证明。 令 $N = |c_{ij}|$。由于 X 是局部自由的，我们有

$$X_i \cong H_i^r, \qquad X_j \cong H_j, \qquad \widetilde{X}_i = {}_iH_j \otimes_{H_j} X_j \cong H_i^N.$$

记 $\alpha = X_{i,\ \mathrm{in}}$ 和 $\beta = X_{i,\ \mathrm{out}}$。令 m, n 如引理 3.1中所述。

若 $d_i = 1$，则 $H_i = \mathbb{C}$。由于 $\operatorname{Im}\ \beta \subseteq$核$\alpha$，我们有

$$m + n = \operatorname{rank}\alpha + \operatorname{rank}\beta \leq N.$$

如果 $d_i > 1$，则有

$$H_i^N \xrightarrow{\alpha} H_i^r \xrightarrow{\beta} H_i^N.$$

因此 $m \leq N$ 且 $n \leq N$。

在这两种情 子， $m + n \leq \lambda_i N < r$因此， E_i 是 X 的一个直和项，这由引理3.1可知 . □

3.2. **Serre 关系**。现在应用推论3.2 来证明与 $A(C,\ D)$相关的 Serre 关系。对于 $f,\ g \in \mathcal{M}(C,\ D)$，记

$$\operatorname{ad}(f)(g) = [f, g] = f * g - g * f.$$

命题 3.3。 生成元 θ_i、 $i \in I$ 满足

$$(\operatorname{ad}\theta_i)^{1-a_{ij}}(\theta_j) = 0 \qquad (i \neq j). \tag{3.1}$$

证明。 固定 $i \neq j$ 并置

$$r = 1 - a_{ij} = 1 + \lambda_i |c_{ij}|, \qquad \Theta_{ij} = (\operatorname{ad}\theta_i)^r(\theta_j).$$

Θ_{ij} 是秩次数为 $r\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ 的原始齐次元。由引理 2.5 和引理 2.8，它只能在秩为该值的局部自由不可分解模上取非零值。

设 X 是一个秩为 $r\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ 的局部自由模。如果 $c_{ij} = 0$，那么 $r = 1$且 $X \cong E_i \oplus E_j$。如果$c_{ij} < 0$，推论 3.2给出 $X \cong E_i \oplus Y$。因此每个这样的 X都是可分解的，并且 $\Theta_{ij} = 0$。 □

推论 3.4。 对于每个可对称化广义 *Cartan* 矩阵 C 和每个正整数对称化子 D，赋值 $e_i \mapsto \theta_i$ 唯一延拓为一个满射的秩分次 *Hopf*结构代数同态

$$\Phi_{C,D} \colon U\big(\mathfrak{n}_+(A(C,D))\big) \twoheadrightarrow \mathcal{M}(C,D). \tag{3.2}$$

证明。 Serre表示和命题 3.3给出唯一的代数同态，并且满足 $e_i \mapsto \theta_i$。由于 θ_i 生成 $\mathcal{M}(C,\ D)$，它是满射；由于两边的生成元都是次数为 $\mathbf{e}_i$ 的原始元，它保持分次结构和 Hopf结构。 □

4. Injectivity of the canonical homomorphism

令 $A = A(C, D)$。我们首先对任意一对 (C, D) 构造辅助箭图 Q。在条件（E）下，Q 的每个表示 V 给出一个局部自由的 $\Pi(C, D)$-模 $F(V)$。为证明 $\Phi_{C,D}$ 是单射，我们利用环面作用，将 $F(V)$ 的 E-旗标与 V 的 Q-子表示的旗标进行比较。这一比较与 [Fei26，附录 A.2] 中的论证密切相关。在 $F(V)$ 的构造中，我们为箭头映射选取权移位，并利用条件（E）验证网格关系。

4.1. **箭图卷积代数与对称覆盖**。设 Q 为一个不含环的有限箭图，其顶点集为 Q_0；允许有向环和重箭。设$B = (b_{ij})_{i,\ j \in Q_0}$ 为其相伴的对称广义 Cartan 矩阵：

$$b_{ii} = 2, \qquad b_{ij} = -\#\{\text{连接 } i \text{ 和 } j \text{ 的箭，方向任意}\}\ (i \neq j)。$$

对于$\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$，令 $\mathcal{F}_{\mathbf{d}}(Q)$表示 $\operatorname{Rep}_{\mathbf{d}}(Q)$ 上取值于 $\mathbb{C}$且在同构下不变的可构造函数空间。该空间

$$\mathcal{F}(Q) = \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}} \mathcal{F}_{\mathbf{d}}(Q)$$

赋有卷积乘积

$$(f * g)(V) = \int_{W \subseteq V} f(W) g(V/W)\, d\chi_c,$$

其中 W 遍历 V 的子表示。

对于每个 $i \in Q_0$，令 S_i 为支撑于 i 的一维表示，并设 $s_i = \mathbf{1}_{S_i}$。我们记

$$\mathcal{M}(Q) = \mathbb{C}\langle s_i : i \in Q_0 \rangle_* \subseteq \mathcal{F}(Q)$$

s_i生成的含幺卷积子代数。

我们回顾正包络代数的经典可构造函数实现，该实现源于 Schofield 和 Lusztig 的工作 [Sch91、Lus91]。关于无环箭图的明确表述，参见 [JS12，定理 3。1]。

定理 4.1。 赋值 $e_i \mapsto s_i$ 唯一延拓为一个分次代数同构

$$\eta_Q \colon U(\mathfrak{n}_+(B)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(Q).$$

对于顶点 Q 的一个序列 $\mathbf{j} = (j_1, \ldots\ldots, j_r)$ 以及一个有限维表示 V，令 $\mathrm{Fl}^Q_{\mathbf{j}}(V)$ 表示子表示的旗标簇

$$0 = V^0 \subset V^1 \subset \cdots \subset V^r = V$$

使得

$$V^k / V^{k-1} \simeq S_{j_k} \qquad (1 \le k \le r).$$

按照我们的卷积约定，有

$$(s_{j_1} * \cdots * s_{j_r})(V) = \chi_c\big(\mathrm{Fl}^Q_{\mathbf{j}}(V)\big). \tag{4.1}$$

对于整数 $m > 0$ 和 w，记 $[w]_m$ 为 w 模 m的最小非负剩余类。下述折叠引理归功于 Hubery [Hub02，定理 7.1。5]另见 [Dem11，命题 4。4]。

引理 4.2。 设 $A = (a_{ij})_{i,\ j \in I}$ 是一个可对称化广义 *Cartan* 矩阵，且 B 是一个由以下集合索引的对称广义 *Cartan* 矩阵

$$\{(i, a) : i \in I,\ 0 \le a < m_i\}.$$

这里每个 m_i 都是正整数。假设置换 $\sigma(i, a) = (i, [a+1]_{m_i})$保持 B不变，且同一个 i 上的任意两个不同顶点均不相邻，并且

$$\sum_{a=0}^{m_i - 1} b_{(i,a),(j,c)} = a_{ij} \qquad (i, j \in I,\ 0 \le c < m_j). \tag{4.2}$$

于是 $e_i \longmapsto \sum_{a=0}^{m_i-1} e_{(i,a)}$ 定义了一个单射李代数同态

$$\iota \colon \mathfrak{n}_+(A) \hookrightarrow \mathfrak{n}_+(B).$$

所诱导的同态 $U(\iota)$ 也是单射的。

证明。循环群 $\langle \sigma \rangle$ 可容许地作用在 B的图上，并且（4.2）将其折叠 Cartan 矩阵与 A对应。因此，李代数嵌入由 [Dem11，命题 44], 给出，而 PBW 给出了关于包络代数的断言。□

注记 4.3。 当 B 来自一个箭图时， σ 只需保持底层图，而无需保持其箭头方向。

4.2. **辅助箭图的构造与折叠嵌入**。 我们构造一个不含环的有限箭图 Q，其相关的对称广义 Cartan 矩阵 B 折叠为 $A = A(C, D)$。下面的构造与嵌入不要求条件（E）。

4.2.1.顶点。集合

$$L=\operatorname{lcm}\bigl(2,d_i:i\in I\bigr),\qquad m_i=\begin{cases}L/2, & d_i=1,\\ L/d_i, & d_i>1.\end{cases}\tag{4.3}$$

定义

$$Q_0=\{(i,a):i\in I,\ 0\le a<m_i\},\qquad I_i=\{(i,a):0\le a<m_i\}.$$

4.2.2. 箭。对 C 中的每个无序相邻对 $\{i,j\}$，恰好应用以下规则之一。在每种情形下，$1\le \ell\le g_{ij}$。

情形 1： $d_i=d_j=1$。</style>这里 $m_i=m_j=L/2$。选定并固定一个方向，记作 $j\to i$。对于每个$0\le w<L/2$，引入一条箭

$$\alpha_{ij,w}^{(\ell)}:(j,w)\longrightarrow(i,w).$$

情形 2：中恰有一个 d_i，d_j 等于1。如有必要，交换 i 和 j，假设 $d_i>1$ 且 $d_j=1$。这里 $m_i=L/d_i$ 且 $m_j=L/2$。对于每个 $0\le w<L/2$，引入以下箭

$$\begin{aligned}\beta_{ij,w}^{(\ell)}&:(i,[w]_{m_i})\longrightarrow(j,w),\\ \alpha_{ij,w}^{(\ell)}&:(j,w)\longrightarrow(i,[w+L/2]_{m_i}).\end{aligned}\tag{4.4}$$

情形 3： d_i，$d_j>1$。这里 $m_i=L/d_i$ 和 $m_j=L/d_j$。回想一下，$k_{ij}=$ 与 gcd(d_i，d_j)，并令

$$t=L/k_{ij}=\operatorname{lcm}(m_i,m_j).$$

对于每个 $0\le w<t$，引入箭

$$\begin{aligned}\alpha_{ij,w}^{(\ell)}&\colon(j,[w]_{m_j})\longrightarrow(i,[w]_{m_i}),\\ \beta_{ij,w}^{(\ell)}&\colon(i,[w]_{m_i})\longrightarrow(j,[w]_{m_j}).\end{aligned}\tag{4.5}$$

不存在其他箭。

4.2.3. 折叠嵌入。令

$$B=\bigl(b_{(i,a),(j,b)}\bigr)$$

是 s　　ym度广义卡坦矩阵。对于每个 $i\in I$，设

$$\sigma_i=\sum_{a=0}^{m_i-1}s_{(i,a)}\in\mathcal{M}(Q).$$

定理 4.4。赋值

$$e_i\longmapsto\sum_{a=0}^{m_i-1}e_{(i,a)}$$

延拓为单射李代数同态

$$\iota\colon\mathfrak{n}_+(A)\hookrightarrow\mathfrak{n}_+(B).$$

因此，赋值 $e_i\mapsto\sigma_i$ 唯一地延拓为一个单射代数同态

$$J=\eta_Q\circ U(\iota)\colon U(\mathfrak{n}_+(A))\hookrightarrow\mathcal{M}(Q).$$

证明。同一纤维 I_i 中的两个顶点之间没有箭。我们验证 $\sigma(i,a) = (i,[a+1]_{m_i})$ 保持 B，并且

$$\sum_{a=0}^{m_i-1} b_{(i,a),(j,b)} = a_{ij}. \tag{4.6}$$

当 $i = j$ 或 $c_{ij} = 0$时，单位元关系显然成立。因此，我们假设 $c_{ij} < 0$，并考虑以下三种情形。

情形 1： $d_i = d_j = 1$。这里 $m_i = m_j = L/2$。对于每个 $0 \le w < L/2$，(i,w) 与 (j,w) 之间有 g_{ij} 条边。σ 保持这些边不变，并且

$$\sum_{a=0}^{m_i-1} b_{(i,a),(j,b)} = -g_{ij} = c_{ij} = a_{ij}.$$

交换 i 和 j 后，同样的论证仍然适用。

情形 2：、d_j 中恰有一个等于 1。如有必要，交换 i 和 j，不妨设 $d_i > 1$ 且 $d_j = 1$。于是 $m_i = L/d_i$ 且 $m_j = L/2$，并且

$$c_{ij} = -g_{ij}, \qquad c_{ji} = -d_i g_{ij}.$$

对于每个 $0 \le b < m_j$，顶点 (j,b) 分别通过 g_{ij}条边（按重数计）与 $(i,[b]_{m_i})$ 和 $(i,[b+m_j]_{m_i})$ 相连。忽略箭头方向后，只要$b < m_j - 1$，σ 就会将位于 b 的两个族中的每一族的每条边，映射到位于 $b+1$ 的同一族中的对应边。在 $b = m_j - 1$ 处，它将 $\beta_{ij}^{(\ell)}{}_{,m_j-1}$ 所对应的边映射到 $\alpha_{ij\,0}^{(\ell)}$, 所对应的边，并将 $\alpha_{ij}^{(\ell)}{}_{,m_j-1}$ 所对应的边映射到 $\beta_{ij\,0}^{(\ell)}$, 所对应的边，因为 $2m_j = L$ 可被 m_i 整除。因此，σ 保持两个纤维之间的边重数。

每个顶点（j，b）都与 $2g_{ij}$ 条连接自身和 I_i的边相接，因此

$$\sum_{a=0}^{m_i-1} b_{(i,a),(j,b)} = -2g_{ij} = 2c_{ij} = a_{ij}.$$

当 b从 0 取到 $m_j - 1$时，指标 b和 $b+m_j$合起来遍历 0，.....，$L-1$。因此，模 m_i 的每个剩余类都出现 $L/m_i = d_i$ 次。于是

$$\sum_{b=0}^{m_j-1} b_{(j,b),(i,a)} = -d_i g_{ij} = c_{ji} = a_{ji}.$$

情形 3： d_i，$d_j > 1$。置

$$t = \frac{L}{k_{ij}} = \operatorname{lcm}(m_i, m_j).$$

每个指标 $0 \le w < t$ 在（i，$[w]_{m_i}$）与（j，$[w]_{m_j}$）之间贡献 $2g_{ij}$ 条边。由于 m_i和m_j 整除 t，σ 对应于将 w 替换为 $[w+1]_t$，并保持边重数不变。

对每个固定的 $0 \le b < m_j$，恰有 t/m_j 个 w 的值满足 $[w]_{m_j} = b$。由于

$$\frac{t}{m_j} = \frac{d_j}{k_{ij}} = f_{ij},$$

我们得到

$$\sum_{a=0}^{m_i-1} b_{(i,a),(j,b)} = -2g_{ij}\frac{t}{m_j} = -2g_{ij}f_{ij} = 2c_{ij} = a_{ij}.$$

类似地， $t/m_i = d_i/k_{ij} = f_{ji}$， 从而

$$\sum_{b=0}^{m_j-1} b_{(j,b),(i,a)} = -2g_{ij}\frac{t}{m_i} = -2g_{ij}f_{ji} = 2c_{ji} = a_{ji}.$$

结论现由引理 4.2 和定理4.1得出。 □

注 4.5。 忘记箭头方向后， Q的构造可以作统一描述。对于每个无序相邻对 $\{i,j\}$，令

$$t_{ij} = \operatorname{lcm}(m_i, m_j), \qquad \rho_{ij} = \gcd(|a_{ij}|, |a_{ji}|).$$

对于每个 $0 \le w < t_{ij}$，用 ρ_{ij}条边连接 $(i,[w]_{m_i})$ 和 $(j,[w]_{m_j})$。于是 σ保持边重数不变，并且

$$\rho_{ij}\frac{t_{ij}}{m_j} = |a_{ij}|, \qquad \rho_{ij}\frac{t_{ij}}{m_i} = |a_{ji}|.$$

这给出了折叠关系。在下一小节中，我们利用选定的箭头方向，从 Q-表示构造局部自由$\Pi(C, D)$-模。

例 4.6。令

$$D = \operatorname{diag}(1,1,2,4), \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

那么 DC 是对称的，并且

$$A(C,D) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

我们有 $g_{12} = g_{23} = g_{34} = 1$ 并且

$$L = 4, \qquad (m_1, m_2, m_3, m_4) = (2,2,2,1).$$

Thus

$$Q_0 = \{(i,a) : 1 \le i \le 3,\ a = 0,1\} \sqcup \{(4,0)\}.$$

在情形 **1** 中选择方向 $2 \to 1$ ，所得箭图为

$$(1,0) \xleftarrow{\alpha_{12,0}} (2,0) \underset{\beta_{32,0}}{\overset{\alpha_{32,0}}{\rightleftarrows}} (3,0) \underset{\alpha_{34,0}}{\overset{\beta_{34,0}}{\rightleftarrows}} (4,0) \underset{\beta_{34,1}}{\overset{\alpha_{34,1}}{\rightleftarrows}} (3,1) \underset{\alpha_{32,1}}{\overset{\beta_{32,1}}{\rightleftarrows}} (2,1) \xrightarrow{\alpha_{12,1}} (1,1).$$

4.3. 从箭图表示到广义预投影模。假设条件（E）成立。设 V 是辅助箭图 Q 的有限维表示。记 $V_{i,a}$ 为其在 (i,a) 处的空间， $V(\rho)$ 为沿箭 ρ 的线性映射。我们通过指定其顶点空间和箭作用，构造一个局部自由的 $\Pi(C,D)$-模 $F(V)$。

4.3.1. 顶点空间与权。对每个 $i \in I$，定义

$$F(V)_i = \bigoplus_{a=0}^{m_i-1} H_i \otimes_{\mathbb{C}} V_{i,a}. \tag{4.7}$$

环 ε_i 通过乘法作用于 H_i-因子上。

对于 $0 \le a < m_i$ 和 $0 \le p < d_i$，为子空间赋予权 $a + m_i p$

$$F_i[a + m_i p] := \mathbb{C}\varepsilon_i^p \otimes_{\mathbb{C}} V_{i,a}.$$

可容许权为

$$\begin{cases} 0 \le w < L/2, & d_i = 1, \\ 0 \le w < L, & d_i > 1. \end{cases}$$

对于所有其他整数 w，设 $F_i[w] = 0$。对于每个可容许权 $w = a + m_i p$，我们使用 $\mathbb{C}$-线性同构

$$F_i[w] \xrightarrow{\sim} V_{i,[w]_{m_i}}, \qquad \varepsilon_i^p \otimes v \longmapsto v.$$

环作用满足

$$\varepsilon_i F_i[w] \subseteq F_i[w + m_i].$$

4.3.2. 箭作用。对于每个无序相邻对 $\{i, j\}$，使用与构造 Q 中相同的标记。对于 $1 \le \ell \le g_{ij}$，我们定义映射

$$a_\ell : F(V)_j \longrightarrow F(V)_i, \qquad b_\ell : F(V)_i \longrightarrow F(V)_j$$

分别作为 $\Pi(C,\ D)$ 中 $\alpha_{ij}^{(\ell)}$ 和 $\alpha_{ji}^{(\ell)}$ 这些箭的作用。

权空间上的映射 如下所定义，它们通过典范的 $\mathbb{C}$-线性同一化 s

$$F_i[w] \cong V_{i,[w]_{m_i}}.$$

所有未列出的权块均为零。

情形 1： $d_i = d_j = 1$。保留在构造 Q 时选定的方向 $j \to i$。对于$0 \le w < L/2$，定义

$$a_\ell\big|_{F_j[w]} : F_j[w] \xrightarrow{V(\alpha_{ij,w}^{(\ell)})} F_i[w],$$

并令 $b_\ell = 0$。

情形 2： $d_i > 1$ **和** $d_j = 1$。对于 $0 \le w < L/2$，定义

$$\begin{aligned} b_\ell\big|_{F_i[w]} :&\quad F_i[w] \xrightarrow{V(\beta_{ij,w}^{(\ell)})} F_j[w], \\ a_\ell\big|_{F_j[w]} :&\quad F_j[w] \xrightarrow{V(\alpha_{ij,w}^{(\ell)})} F_i[w + L/2]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

特别地，b_ℓ 在所有权至少为 $L/2$ 的权空间上均为零。

情形 3： $d_i,\ d_j > 1$。令

$$t = \frac{L}{k_{ij}}, \qquad s = L - t,$$

其中 $k_{ij} = \text{最大公约数}(d_i,\ d_j)$。对于 $0 \le w < t$，定义

$$\begin{aligned} a_\ell\big|_{F_j[w]}: &\quad F_j[w] \xrightarrow{V(\alpha^{(\ell)}_{ij,w})} F_i[w+s], \\ b_\ell\big|_{F_i[w]}: &\quad F_i[w] \xrightarrow{V(\beta^{(\ell)}_{ij,w})} F_j[w+s]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

两个映射在权至少为 t的源权重空间上均为零。

由于 $t = \text{lcm}(m_i,\ m_j)$，且 m_i 和 m_j 均整除 L，因此移位量 $s = L - t$ 同时被 m_i 和 m_j整除。于是，

$$[w+s]_{m_i} = [w]_{m_i}, \qquad [w+s]_{m_j} = [w]_{m_j}.$$

因此，源权空间和靶权空间分别与 V对应箭头映射的源空间和靶空间相同。

引理 4.7。 假设条件 (E)成立。对于 V 的每个有限维表示 Q，上述定义的算子赋予

$$F(V) = \bigoplus_{i \in I} F(V)_i$$

以局部自由 $\Pi(C, D)$-模的结构。此外，

$$\operatorname{rank}_{H_i} F(V)_i = \sum_{a=0}^{m_i - 1} \dim_{\mathbb{C}} V_{i,a} \qquad (i \in I).$$

证明。 根据 H_i的定义，关系 $\varepsilon_i^{d_i} = 0$ 成立。我们证明一个更强的断言：每个交换关系两边的表达式以及网格关系中的每个单独直和项，在 $F(V)$上作用均为零。我们对每个相邻对 $\{i, j\}$ 以及每个 $1 \le \ell \le g_{ij}$逐一验证这一点。**情形 1：** $d_i = d_j = 1$。 Q中 I_i 与 I_j 之间的箭方向均为选定的方向 $j \to i$。对于 $\Pi(C,\ D)$的反向箭 $\alpha^{(\ell)}_{ji}$，令 $b_\ell = 0$。由于 $d_i = d_j = 1$，两个环的作用均为零，因此交换关系两边的表达式都为零。此外， $b_\ell = 0$ 意味着

$$a_\ell b_\ell = b_\ell a_\ell = 0.$$

情形 2： $d_i > 1$ **和** $d_j = 1$。 此处 $f_{ij} = 1$ 和 $f_{ji} = d_i$。 由于 $\varepsilon_i^{d_i} = 0$ 和 $\varepsilon_j = 0$，交换关系两边均为零:

$$\varepsilon_i^{d_i} a_\ell = 0 = a_\ell \varepsilon_j, \qquad \varepsilon_j b_\ell = 0 = b_\ell \varepsilon_i^{d_i}.$$

a_ℓ 的像落在不低于 $L/2$的权上，而 b_ℓ 在这些权上为零。因此

$$b_\ell a_\ell = 0,$$

这给出了对 j处网格关系的贡献。

在 i处，相应的网格项为

$$\varepsilon_i^p a_\ell b_\ell \varepsilon_i^{d_i - 1 - p}, \qquad 0 \le p < d_i.$$

映射 $a_\ell b_\ell$ 使权提高 $L/2$，而每个环使权提高 m_i。因此，每个所显示的项使权提高

$$\frac{L}{2} + (d_i - 1)m_i = \frac{3L}{2} - m_i \ge L,$$

其中我们使用了 $d_i \geq 2$ 和 $m_i = L/d_i$。由于 $F_i[w] = 0$ 在 $0 \leq w < L$之外，每个这样的网格项都为零。

情形 3： $d_i,\ d_j > 1$。回忆

$$t = \frac{L}{k_{ij}}, \qquad s = L - t,$$

and

$$d_i = k_{ij} f_{ji}, \qquad d_j = k_{ij} f_{ij}.$$

因此

$$f_{ji} m_i = f_{ij} m_j = t,$$

因此，环幂 $\varepsilon_i^{f_{ji}}$ 和 $\varepsilon_j^{f_{ij}}$ 都使权提升 t。

a_ℓ 和 b_ℓ 都使权提升 s，而 $\varepsilon_i^{f_{ji}}$ 和 $\varepsilon_j^{f_{ij}}$ 使权提升 t。因此，交换关系两边的权都提升 $s+t = L$。由于 i 和 j 处的所有可容许权都介于 0 和 $L-1$ 之间，我们得到

$$\varepsilon_i^{f_{ji}} a_\ell = a_\ell \varepsilon_j^{f_{ij}} = 0, \qquad \varepsilon_j^{f_{ij}} b_\ell = b_\ell \varepsilon_i^{f_{ji}} = 0.$$

在顶点 i 处，考虑一个网格项

$$\varepsilon_i^{p} a_\ell b_\ell \varepsilon_i^{f_{ji}-1-p}, \qquad 0 \leq p < f_{ji}.$$

每个箭头映射使权提升 s，而每次应用 ε_i 都使权提升 m_i。因此，该项使权提升

$$2s + (f_{ji} - 1)m_i = 2(L-t) + t - m_i = 2L - t - m_i.$$

在条件（E）下，我们有 $k_{ij} \geq 2$，因此 $t = L/k_{ij} \leq L/2$。此外，$m_i \leq t$ 因为 $t = f_{ji} m_i$。由此，

$$2L - t - m_i \geq 2L - 2t \geq L.$$

由于 $F_i[w] = 0$ 在 $0 \leq w < L$之外，所显示的网格项为零。交换 i 和 j，对 j处的每个网格项都可得到相同的结论。

将这些带有规定符号的零项相加，即可证明每个顶点处的网格关系。再结合环关系和交换关系，这说明这些算子在 $F(V)$上定义了一个 $\Pi(C,\ D)$-模结构。

最后，每个直和项$H_i \otimes_{\mathbb{C}} V_{i,\ a}$ 在 H_i 上都是秩为 $\dim_{\mathbb{C}} V_{i,\ a}$的自由模。因此，$F(V)$是局部自由的，其中

$$\operatorname{rank}_{H_i} F(V)_i = \sum_{a=0}^{m_i - 1} \dim_{\mathbb{C}} V_{i,a} \qquad (i \in I).$$

□

例4.8。继续例4.6。在 Q 的每个顶点处取$V_{i,\ a} = \mathbb{C}$，并为其箭赋予任意标量 $x_a,\ y_a,\ z_a,\ u_a,\ v_a \in \mathbb{C}$，其中 $a = 0,\ 1$，具体如下：

$$\underset{(1,0)}{\mathbb{C}} \xleftarrow{x_0} \underset{(2,0)}{\mathbb{C}} \underset{z_0}{\overset{y_0}{\rightleftarrows}} \underset{(3,0)}{\mathbb{C}} \underset{u_0}{\overset{v_0}{\rightleftarrows}} \underset{(4,0)}{\mathbb{C}} \underset{v_1}{\overset{u_1}{\rightleftarrows}} \underset{(3,1)}{\mathbb{C}} \underset{y_1}{\overset{z_1}{\rightleftarrows}} \underset{(2,1)}{\mathbb{C}} \xrightarrow{x_1} \underset{(1,1)}{\mathbb{C}}$$

这里，每个箭头标签表示乘以所示标量，而每个空间下方的标签则指明其顶点。

使用按权重排序的基

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= (e_{1,0}, e_{1,1}),\\ \mathcal{B}_2 &= (e_{2,0}, e_{2,1}),\\ \mathcal{B}_3 &= (e_{3,0}, e_{3,1}, \varepsilon_3 e_{3,0}, \varepsilon_3 e_{3,1}),\\ \mathcal{B}_4 &= (e_4, \varepsilon_4 e_4, \varepsilon_4^2 e_4, \varepsilon_4^3 e_4),\end{aligned}$$

其中 $e_{i,\ a} = 1 \otimes 1$ 且 $e_4 = e_{4,\ 0}$，我们得到 $\Pi(C,\ D)$ 的如下表示：

$$\mathbb{C}^2_1 \underset{0}{\overset{X_{12}}{\leftrightarrows}} \mathbb{C}^2_2 \underset{X_{23}}{\overset{X_{32}}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}^4_3 \underset{X_{34}}{\overset{X_{43}}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}^4_4 \qquad N_3 \circlearrowright \text{ on } \mathbb{C}^4_3, \quad N_4 \circlearrowright \text{ on } \mathbb{C}^4_4$$

这里的环算子为

$$N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

顶点 1 和 2 处的环作用为零，因此在图中省略。相对于选定的基并使用列向量，箭矩阵为

$$X_{12} = \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}, \qquad X_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ y_0 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}, \qquad X_{23} = \begin{pmatrix} z_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_{34} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{43} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

这里 X_{ij} 表示箭 $\alpha_{ij}\colon\ j \to i$ 的作用。模 $F(V)$ 的秩向量为 (2，2，2，1)，复维数向量为 (2，2，4，4)。

4.4. 环面作用与旗标比较。令 $T = \mathbb{C}^\times$ 通过权分解按以下方式作用于 $F(V)$：

记 $g(t) = \bigoplus_{i \in I} g_i(t)$。A $\qquad g_i(t)v = t^w v \qquad (v \in F_i[w],\ t \in T).$

$\mathbb{C}$-线性映射 $\rho\colon\ F(V)_j \to F(V)_i$ 称为次数为 $\delta \in \mathbb{Z}$ 的齐次映射，当且仅当

$$\rho(F_j[w]) \subseteq F_i[w + \delta] \qquad \text{for every } w \in \mathbb{Z}.$$

引理 4.9。 对于每个序列 $\mathbf{i}$，权作用于 $F(V)$ 在 $T = \mathbb{C}^\times$ 上诱导出一个代数作用于 $\mathrm{Fl}^E{}_{\mathbf{i}}\,(F(V))$，其定义为

$$t \cdot (U^\bullet) = g(t)U^\bullet.$$

证明。 环 ε_i 的次数为 m_i，箭的次数为

$$(\deg a_\ell, \deg b_\ell) = \begin{cases} (0,0), & d_i = d_j = 1, \\ (L/2, 0), & d_i > 1,\ d_j = 1, \\ (L - L/k_{ij}, L - L/k_{ij}), & d_i, d_j > 1. \end{cases}$$

对于每个次数为 δ_ρ 的环或箭算子 $\rho\colon\ F(V)_j \to F(V)_i$，我们有

$$g_i(t)\rho g_j(t)^{-1} = t^{\delta_\rho}\rho.$$

设 $U = (U_i)_{i\in I}$ 是 $\Pi(C,\ D)$-子模 $F(V)$。则

$$\rho\big(g_j(t)U_j\big) = t^{-\delta_\rho} g_i(t)\rho(U_j) \subseteq g_i(t)U_i.$$

因此 $g(t)U$ 再次成为一个子模。

设 $U' \subseteq U$ 为满足 $U/U' \cong E_i$ 的子模。商 $g(t)U/g(t)U'$ 支持在顶点 i 上，因此不同顶点之间的所有箭均作用为零。在由 $g(t)$ 诱导的线性同一化下，其环作用是原环作用的 t^{-m_i} 倍，因为

$$\varepsilon_i g(t) = t^{-m_i} g(t)\varepsilon_i.$$

用非零标量重新缩放环作用保持 E_i 的同构类不变，因此

$$g(t)U/g(t)U' \cong E_i.$$

Appl将此应用于每个逐次商可知， $g(t)$ 保持 $\mathrm{Fl}^E{}_{\mathbf{i}}(F(V))$. □

应用欧拉示性数不动点公式 [BB73、推论 2] 于引理4.9中的作用，我们得到

$$\chi_c\big(\mathrm{Fl}^E_{\mathbf{i}}(F(V))\big) = \chi_c\big(\mathrm{Fl}^E_{\mathbf{i}}(F(V))^T\big). \tag{4.10}$$

不动点轨迹恰好由各项为 T-稳定子模的旗组成。为了描述这些旗，我们首先确定 T-稳定的 $F(V)$ 的局部自由子模。

引理 4.10。 设 $U_i \subseteq F(V)_i$ 是一个 T-稳定的、在 H_i 上自由的 H_i-子模。那么存在唯一的子空间 $W_{i,a} \subseteq V_{i,a}$，使得

$$U_i = \bigoplus_{a=0}^{m_i-1} H_i \otimes_{\mathbb{C}} W_{i,a}.$$

反之，每个这种形式的子模都是 T-稳定且自由的，并且其在 $F(V)_i$ 中的商是自由的。

证明。 由于 U_i 是 T-稳定的，它分解为权空间：

$$U_i = \bigoplus_w \big(U_i \cap F_i[w]\big).$$

权 $a + pm_i$ 两两不同，因此存在唯一的子空间 $W_{i,a,p} \subseteq V_{i,a}$，使得

$$U_i = \bigoplus_{a=0}^{m_i-1} \bigoplus_{p=0}^{d_i-1} \mathbb{C}\varepsilon_i^p \otimes_{\mathbb{C}} W_{i,a,p}.$$

在 ε_i 下的稳定性给出

$$W_{i,a,0} \subseteq W_{i,a,1} \subseteq \cdots \subseteq W_{i,a,d_i-1} \qquad (0 \le a < m_i).$$

设 $r = \text{秩}_{H_i} U_i$。由于 U_i 是 H_i 上的自由模，我们有

$$r = \dim_{\mathbb{C}}\big(\varepsilon_i^{d_i-1}U_i\big) = \dim_{\mathbb{C}}\big(\bigoplus_{a=0}^{m_i-1} \mathbb{C}\varepsilon_i^{d_i-1} \otimes_{\mathbb{C}} W_{i,a,0}\big) = \sum_{a=0}^{m_i-1} \dim_{\mathbb{C}} W_{i,a,0}.$$

Thus

$$\begin{aligned} d_i r &= \dim_{\mathbb{C}} U_i \\ &= \sum_{a=0}^{m_i-1}\sum_{p=0}^{d_i-1} \dim_{\mathbb{C}} W_{i,a,p} \\ &\geq d_i \sum_{a=0}^{m_i-1} \dim_{\mathbb{C}} W_{i,a,0} = d_i r. \end{aligned}$$

因此，对于所有 $W_{i,\,a,\,p} = W_{i,\,a,\,0}$，均有上述结论。取 $W_{i,\,a} = W_{i,\,a,\,0}$ 即可证明该分解及其唯一性。

反之，任何上述形式的子模在 H_i 上都是自由的，并且具有 T-稳定性。此外，

$$F(V)_i/U_i \cong \bigoplus_{a=0}^{m_i-1} H_i \otimes_{\mathbb{C}} (V_{i,a}/W_{i,a}),$$

因此，商在 H_i 上也是自由的。 □

现在我们将用 Q-子表示的旗标来描述 T-不变旗标 s.

引理 4.11。设 V 是 Q 的有限维表示，并令 $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r)$。存在簇之间的自然同构

$$\mathrm{Fl}_{\mathbf{i}}^{E}(F(V))^T \cong \bigsqcup_{\substack{0\leq a_k<m_{i_k}\\ 1\leq k\leq r}} \mathrm{Fl}^{Q}_{((i_1,a_1),\ldots,(i_r,a_r))}(V).$$

因此，

$$\chi_c\big(\mathrm{Fl}_{\mathbf{i}}^{E}(F(V))\big) = \sum_{\substack{0\leq a_k<m_{i_k}\\ 1\leq k\leq r}} \chi_c\big(\mathrm{Fl}^{Q}_{((i_1,a_1),\ldots,(i_r,a_r))}(V)\big).$$

证明。设 $U^\bullet = \{0 = U^0 \subset U^1 \subset \cdots \subset U^r = F(V)\} \in \mathrm{Fl}^E\mathbf{i}(F(V))^T$。每个 U_i^k均为 T-稳定且在 H_i上自由。由引理 4.10 可得唯一的子空间 $W_{i,a}^k \subseteq V_{i,a}$，使得

$$U_i^k = \bigoplus_{a=0}^{m_i-1} H_i \otimes_{\mathbb{C}} W_{i,a}^k.$$

包含关系 $U^{k-1} \subseteq U^k$意味着 $W_{i\,,\,a}^{k-1} \subseteq W_{i\,,\,a}^{k}$。根据 $F(V)$ 的构造，U^k上的子模条件意味着 $W^k = (W_{i\,,\,a}^k)$ 是 Q- 子表示。因此，$W^\bullet = \{0 = W^0 \subset W^1 \subset \cdots \subset W^r = V\}$ 是一个由 Q- 子表示构成的旗。此外，

$$U_i^k/U_i^{k-1} \cong \bigoplus_{a=0}^{m_i-1} H_i \otimes_{\mathbb{C}} (W_{i,a}^k/W_{i,a}^{k-1}).$$

由于 $U^k/U^{k-1} \cong E_{i_k}$，存在唯一的 $0 \le a_k < m_{i_k}$，使得 $W^k_{i_k,\,a_k}/W^{k-1}_{i_k\,a_k,}$ 是一维的，而所有其他商空间均为零。由于 Q 没有环，我们得到

$$W^k/W^{k-1} \cong S_{(i_k,a_k)}.$$

反之，设 $W^\bullet \in \mathrm{Fl}^Q((i_1,a_1)...,(i_r,a_r))(V)$。令 $U^k_i = \bigoplus_{a=0}^{m_i-1} H_i \otimes_{\mathbb{C}} W^k_{i\,,a_\circ}$ 根据引理 4.10，每个 U^k_i 都是 T-稳定的自由 H_i-子模 $F(V)_{i\circ}$ 由于 W^k 是一个 Q-子表示， $F(V)$ 的构造表明， $U^k = (U^k_i)_{i\in I}$ 是一个 $\Pi(C,D)$-子模。$W^\bullet$ 中的包含关系给出

$$0 = U^0 \subset U^1 \subset \cdots \subset U^r = F(V).$$

由于 $W^k/W^{k-1} \cong S_{(i_k,a_k)}$，作为 H_i-模，我们有

$$\begin{aligned} U^k_i/U^{k-1}_i &\cong \bigoplus_{a=0}^{m_i-1} H_i \otimes_{\mathbb{C}} (W^k_{i,a}/W^{k-1}_{i,a}) \\ &\cong \begin{cases} H_i, & i = i_k, \\ 0, & i \ne i_k. \end{cases} \end{aligned}$$

因此 $U^k/U^{k-1} \cong E_{i_k}$，所以 $U^\bullet$是一个 T-固定的 E-旗。根据引理 4.10 中的唯一性，这两个构造互为逆构造。

还需证明这两个映射都是正则的。对于固定的序列 $(a_1, \ldots\ldots, a_r)$，所有空间 $W^k_{i\,,\,a}$ 的维数都是固定的。映射 $W^\bullet \mapsto U^\bullet$ 是正则的，因为它由与固定空间 H_i 的张量积和直和给出。其逆映射从

$$U^k_i \cap F_i[a] = \mathbb{C}1 \otimes_{\mathbb{C}} W^k_{i,a}.$$

由于 这些交的维数固定，逆映射也是正则的 .

维数 $\dim_{\mathbb{C}}(U^k_i \cap F_i[w])$ 在环境旗标簇的不动点轨迹上局部恒定。因此，由 $(a_1$、……、$a_r)$ 编号的轨迹在 $\mathrm{Fl}^E{}_{\mathbf{i}}(F(V))^T$ 中既开又闭。这证明了簇的同构。

最后，欧拉示性数等式由（4.10）以及 χ_c的可加性推出。 □

现在我们可以完成主定理的证明。

定理*2.10*的证明。根据推论3.4， $\Phi_{C,\,D}$ 是一个满射的秩分次 Hopf代数同态。令 $J:\ U(\mathfrak{n}_+(A)) \hookrightarrow \mathcal{M}(Q)$ 为定理4.4中的单射。对于$\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r)$ 以及任意一个 Q-表示 V，引理4.11 给出

$$\begin{aligned} &(\theta_{i_1} * \cdots * \theta_{i_r})(F(V)) \\ &\quad = \chi_c\big(\mathrm{Fl}^E_{\mathbf{i}}(F(V))\big) \\ &\quad = \sum_{\substack{0\le a_k<m_{i_k} \\ 1\le k\le r}} \chi_c\big(\mathrm{Fl}^Q_{((i_1,a_1),\ldots,(i_r,a_r))}(V)\big) \\ &\quad = \sum_{\substack{0\le a_k<m_{i_k} \\ 1\le k\le r}} (s_{(i_1,a_1)} * \cdots * s_{(i_r,a_r)})(V) \\ &\quad = (\sigma_{i_1} * \cdots * \sigma_{i_r})(V). \end{aligned}$$

由线性性可得

$$\Phi_{C,D}(u)(F(V)) = J(u)(V) \tag{4.11}$$

对每个 $u \in U(\mathfrak{n}_+(A))$ 以及 Q 的每个有限维表示 V。

现在令 $u \in$ 核$\Phi_{C,\ D}$。方程（4.11）给出

$$J(u)(V) = \Phi_{C,D}(u)(F(V)) = 0$$

对 Q 的每个有限维表示 V。因此 $J(u) = 0$，而 J 的单射性给出 $u = 0$。这证明 $\Phi_{C,\ D}$ 是一个同构。其限制将 $\mathfrak{n}_+(A)$ 与 $\mathfrak{l}(C,\ D)$ 识别起来，因为它将 e_i 映到 θ_i。□

5. Nonrealization and Serre quotients

令 $A = A(C,\ D)$，并令

$$\mathscr{B} = \big\{\{i,j\} : c_{ij} < 0,\ d_i, d_j > 1,\ \gcd(d_i, d_j) = 1\big\}. \tag{5.1}$$

因此，条件（E）成立当且仅当 $\mathscr{B} = \varnothing$。为证明定理 2.12，我们先证明对所有 $i \neq j$，$(\operatorname{ad}\theta_i)^{-a_{ij}}\theta_j \neq 0$。然后，对于 $\mathscr{B}$ 中的每条边，我们构造 $\ker \Phi_{C,\ D}$ 的一个非零元素。

5.1. 定理2.12的证明。

命题 5.1. 对于任意两个不同的顶点 $i, j \in I$，有

$$(\operatorname{ad}\theta_i)^{-a_{ij}}(\theta_j) \neq 0.$$

证明。若 $c_{ij} = 0$，则结论显然成立。若将 (C, D) 限制到 $\{i, j\}$ 后满足条件 (E)，则由定理 2.10可得结论。因此，我们假设

$$c_{ij} < 0, \qquad p = d_i > 1, \qquad q = d_j > 1, \qquad \gcd(p, q) = 1.$$

令 $g = g_{ij}$ 并令 $N = |c_{ij}| = gq$。按照 [GLS18，引理 6.1], 中的构造，我们构造一个局部自由 Π-模 X，使得 $(\operatorname{ad}\theta_i)^{-a_{ij}}\theta_j$ 非零。

Take

$$X_i = P \oplus Q, \qquad P \cong Q \cong H_i^N, \qquad X_j = H_j,$$

取 H_i-基 $u_{\ell,t}$ 作为 P 的基，以及 $v_{\ell,t}$ 作为 Q的基，其中 $1 \le \ell \le g$ 且 $0 \le t < q$。

记

$$u_{\ell,t}^{(s)} = \varepsilon_i^s u_{\ell,t}, \qquad v_{\ell,t}^{(s)} = \varepsilon_i^s v_{\ell,t} \qquad (0 \le s < p),$$

对于相应的 $\mathbb{C}$ 基底 P 和 Q，并令

$$w_t = \varepsilon_j^t \qquad (0 \le t < q)$$

为 $X_j = H_j$ 的 $\mathbb{C}$ 基底。

环的作用方式为

$$\varepsilon_i u_{\ell,t}^{(s)} = \begin{cases} u_{\ell,t}^{(s+1)}, & 0 \le s < p-1, \\ 0, & s = p-1, \end{cases} \qquad \varepsilon_i v_{\ell,t}^{(s)} = \begin{cases} v_{\ell,t}^{(s+1)}, & 0 \le s < p-1, \\ 0, & s = p-1, \end{cases}$$

and

$$\varepsilon_j w_t = \begin{cases} w_{t+1}, & 0 \le t < q-1, \\ 0, & t = q-1. \end{cases}$$

将箭头映射定义为

$$a_\ell(w_t) = u_{\ell,t}^{(p-1)}, \qquad b_\ell(v_{\ell,t}^{(0)}) = w_t \qquad (1 \le \ell \le g,\ 0 \le t < q),$$

而所有其他基向量都映射为零。因此

$$\varepsilon_i^p = \varepsilon_j^q = 0, \qquad b_\ell a_\ell = 0, \qquad \varepsilon_i a_\ell = b_\ell \varepsilon_i = 0.$$

因此，这些映射定义了一个局部自由的 Π-模 X。

由于 $\mathrm{Ext}^1_\Pi(E_i,\ E_i) = 0$ and $\chi_c\big(\mathrm{Fl}^{E_{(i,\ \ldots,\ i)}}(E_i^{\oplus r})\big) = r!$，我们有 $\theta_i^{*r} = r!\,\mathbf{1}_{E_i^{\oplus r}}$。现在我们计算

$$\begin{aligned}\big((\operatorname{ad}\theta_i)^{2N}\theta_j\big)(X) &= \sum_{s=0}^{2N}(-1)^{2N-s}\binom{2N}{s}\big(\theta_i^{*s} * \theta_j * \theta_i^{*(2N-s)}\big)(X)\\ &= (2N)!\sum_{s=0}^{2N}(-1)^s\big(\mathbf{1}_{E_i^{\oplus s}} * \mathbf{1}_{E_j} * \mathbf{1}_{E_i^{\oplus(2N-s)}}\big)(X).\end{aligned}$$

对于每个 s，我们考虑部分旗

$$0 \subseteq (U,0) \subseteq (U,H_j) \subseteq X,$$

其中，U 是 X_i 的一个秩为 s 的自由 H_i-直和项。根据 a_ℓ 和 b_ℓ的定义，$(U,\ 0)$ 和 $(U,\ H_j)$ 是 X 的子模，当且仅当

$$\varepsilon_i^{p-1}P \subseteq U \subseteq P \oplus \varepsilon_i Q.$$

由于 U 是 X_i的一个直和项，第一个包含关系给出

$$N = \dim_{\mathbb{C}} \varepsilon_i^{p-1}P \le \dim_{\mathbb{C}}(U \cap \varepsilon_i^{p-1}X_i) = \dim_{\mathbb{C}} \varepsilon_i^{p-1}U = s.$$

第二个包含关系给出

$$s = \dim_{\mathbb{C}}(U/\varepsilon_i U) \le \dim_{\mathbb{C}}(P/\varepsilon_i P) = N.$$

因此 $s = N$。

分别记 π_P 和 π_Q 为从 $P\oplus Q$ 到 P 和 Q 的投影。投影 $\pi_P|_U\colon U \to P$ 诱导出一个同构

$$U/\varepsilon_i U \xrightarrow{\sim} P/\varepsilon_i P.$$

由中山引理，$\pi_P|_U$ 是满射，因此它是一个同构。

令 $\mathcal{U}$ 为这些子模构成的簇。对于 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{H_i}(P,\ \varepsilon_i Q)$，定义

$$U_\varphi = \{x + \varphi(x) \mid x \in P\}.$$

映射 $x \mapsto x + \varphi(x)$ 是一个 H_i-线性同构，因此 U_φ 是秩为 N 的自由模。由此可得

$$\varepsilon_i^{p-1}P \subseteq U_\varphi \subseteq P \oplus \varepsilon_i Q.$$

因此，该映射

$$F : \mathrm{Hom}_{H_i}(P, \varepsilon_i Q) \longrightarrow \mathcal{U}, \qquad \varphi \longmapsto U_\varphi,$$

是良定义的。

反之，定义

$$G : \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{H_i}(P, \varepsilon_i Q), \qquad U \longmapsto \pi_Q \circ (\pi_P|_U)^{-1}.$$

映射 F 和 G在 Q的补空间格拉斯曼图中彼此互为逆映射且为正则映射。因此

$$\mathcal{U} \cong \mathrm{Hom}_{H_i}(P, \varepsilon_i Q) \cong \mathbb{A}^{(p-1)N^2}.$$

由于 $\chi_c(\mathbb{A}^{(p-1)N^2}) = 1$，我们得到

$$\big((\mathrm{ad}\,\theta_i)^{-a_{ij}}\theta_j\big)(X) = (-1)^N(2N)! \neq 0.$$

□

现在证明， $\mathscr{B}$ 中的每条边都给出 $\ker\Phi_{C,D}$ 的一个非零元素。

命题 5.2. 设 $\{i,j\} \in \mathscr{B}$，并令 $a = -a_{ij}$ 和 $b = -a_{ji}$。那么

$$(\mathrm{ad}\,\theta_i)^{ab-2}(\mathrm{ad}\,\theta_j)^b\theta_i = 0,$$

而

$$(\mathrm{ad}\,e_i)^{ab-2}(\mathrm{ad}\,e_j)^b e_i \neq 0 \qquad in\ \mathfrak{n}_+(A).$$

特别地，若条件 (E) 不成立，则 $\Phi_{C,D}$ 不是单射。

证明。 由于 $\gcd(d_i, d_j) = 1$，我们有 $a = 2g_{ij}d_j$ 和 $b = 2g_{ij}d_i$。令 $N = b|c_{ij}| = ab/2$，并设

$$u = (\mathrm{ad}\,\theta_j)^b\theta_i, \qquad z = (\mathrm{ad}\,\theta_i)^{ab-2}u.$$

由于 z 是秩为 $(ab-1)\mathbf{e}_i + b\mathbf{e}_j$的齐次原始元，只需证明对于秩为此值的每个不可分解局部自由模 X，$z(X) = 0$。于是我们有

$$z = \sum_{k=0}^{ab-2}(-1)^k\binom{ab-2}{k}\theta_i^{*(ab-2-k)} * u * \theta_i^{*k}.$$

对于每个 k，考虑一个旗

$$0 \subseteq X' \subseteq X'' \subseteq X$$

使得 $X' \cong E_i^{\oplus(ab-2-k)}$, $X/X'' \cong E_i^{\oplus k}$ 且 $Y = X''/X'$ 是秩为 $\mathbf{e}_i + b\mathbf{e}_j$的局部自由模。我们证明 E_j 是每个此类 Y的直和项。这将由引理 $u(Y) = 0$ 2.8推出 $z(X) = 0$。

记 $\alpha = X_{i,\mathrm{in}}$ 和 $\beta = X_{i,\mathrm{out}}$。则

$$\widetilde{X}_i \cong H_i^N, \qquad X_i \cong H_i^{2N-1}, \qquad \alpha : H_i^N \longrightarrow H_i^{2N-1}, \quad \beta : H_i^{2N-1} \longrightarrow H_i^N, \quad \alpha\beta = 0.$$

由史密斯标准形，$\mathrm{Im}\,\alpha$ 和 $\mathrm{Im}\,\beta$ 均可由至多 N 个元素生成。若二者均可由至多 $N-1$ 个元素生成，则引理 3.1 将推出 E_i 是 X的直和项，因为 $2N-1 > 2(N-1)$。这与X的不可分解性矛盾。

因此，$\mathrm{Im}\,\alpha$和 $\mathrm{Im}\ \beta$中至少有一个由 N个元素最小生成。先假设 $\mathrm{Im}\,\alpha$ 作为 H_i-模由 N 个元素最小生成。

令 $u_1, \dots, u_N$ 为 $\widetilde{X}_i$ 于是 $\mathrm{Im}\,\alpha = \sum_{r=1}^N H_i\alpha(u_r)$。我们声称 $\mathrm{Ker}\,\alpha \subseteq \varepsilon_i\widetilde{X}_i$。事实上，对于 $v = \sum_{r=1}^N c_r u_r \in \mathrm{Ker}\,\alpha$，我们有

$$\sum_{r=1}^N c_r\alpha(u_r) = 0.$$

如果某个 c_r 可逆，那么 $\alpha(u_r)$ 将由剩余的 $N-1$ 个元素生成，~这与 N 的极小性矛盾。因此，每个 c_r 都属于 $\varepsilon_i H_i$，从而 $v \in \varepsilon_i X_i$，正如所声称的。由于 $\alpha\beta = 0$，我们得到

$$\operatorname{Im}\beta \subseteq \operatorname{Ker}\alpha \subseteq \varepsilon_i \widetilde{X}_i.$$

因此，

$$\beta(\varepsilon_i^{d_i-1} X_i) = \varepsilon_i^{d_i-1}\beta(X_i) = 0.$$

类似地，假设 $\operatorname{Im}\beta$ 作为 H_i-模由 N 个元素极小生成。由同样的证明可得 $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \varepsilon_i X_i$。

因此，X 满足以下至少一个条件：

$$\text{(a)} \quad \operatorname{Im} X_{i,\text{in}} \subseteq \varepsilon_i X_i, \qquad \text{(b)} \quad X_{i,\text{out}}(\varepsilon_i^{d_i-1} X_i) = 0.$$

现在考虑上述旗，并令 $Y = X''/X'$。我们有 $X'_j = 0$ 和 $X''_j = X_j$。

在情形 (a) 中，由于 X'' 是一个子模且 $X''_j = X_j$，我们有 $\operatorname{Im}\alpha \subseteq X''_i$。此外，$X_i/X''_i$ 在 H_i 上是自由的，因此

$$X''_i \cap \varepsilon_i X_i = \varepsilon_i X''_i.$$

因此 $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \varepsilon_i X''_i$。对 X'_i 取商可得

$$\operatorname{Im} Y_{i,\text{in}} \subseteq \varepsilon_i Y_i.$$

在情形 (b) 中，由于 X' 是一个子模且 $X'_j = 0$，我们有 $\beta(X'_i) = 0$。因此，$\beta|_{X''_i}$ 在 $Y_i = X''_i/X'_i$ 上诱导出 $Y_{i,\ \text{out}}$。由于 $\beta(\varepsilon_i^{d_i-1} X_i) = 0$，我们得到

$$Y_{i,\text{out}}(\varepsilon_i^{d_i-1} Y_i) = 0.$$

我们证明，这两个条件中的任意一个都会使 Y 可分解。由于 Y 是秩为 $\mathbf{e}_i + b\mathbf{e}_j$ 的局部自由模，我们有

$$Y_i \cong H_i, \qquad Y_j \cong H_j^b, \qquad \widetilde{Y}_j = {}_jH_i \otimes_{H_i} Y_i \cong H_j^{|c_{ji}|}.$$

因此，这些映射具有如下形式

$$\widetilde{Y}_j \xrightarrow{Y_{j,\text{in}}} Y_j \xrightarrow{Y_{j,\text{out}}} \widetilde{Y}_j.$$

由于 $f_{ji} = d_i$ 和 $f_{ij} = d_j$，所有交换关系 $\varepsilon_j^{f_{ij}} \alpha_{ji}^{(\ell)} = \alpha_{ji}^{(\ell)} \varepsilon_i^{f_{ji}}$ 均成立，且两边都等于零。因此

$${}_jH_i \cong (H_j \otimes_{\mathbb{C}} H_i)^{\oplus g_{ij}}$$

作为 $(H_j,\ H_i)$-双模，因此

$$\widetilde{Y}_j = {}_jH_i \otimes_{H_i} Y_i \cong H_j \otimes_{\mathbb{C}} Y_i^{\oplus g_{ij}}.$$

在情形 (a) 中，每个从 j 到 i 的箭头映射都将 Y_j 送入 $\varepsilon_i Y_i$。根据 $Y_{j,\ \text{out}}$ 的定义，有

$$\operatorname{Im} Y_{j,\text{out}} \subseteq H_j \otimes_{\mathbb{C}} (\varepsilon_i Y_i)^{\oplus g_{ij}}.$$

右侧的模在 H_j 上是秩为 $g_{ij}(d_i - 1) = |c_{ji}| - g_{ij}$ 的自由模。因此，$\operatorname{Im} Y_{j,\ \text{out}}$ 作为 H_j-模至多可由 $|c_{ji}| - g_{ij}$ 个元素生成。

在情形 (b) 中，每个从 i 到 j 的箭头映射在 $\varepsilon_i^{d_i-1} Y_i$ 上均为零。$Y_{j,\ \text{in}}$ 的定义给出

$$H_j \otimes_{\mathbb{C}} (\varepsilon_i^{d_i-1} Y_i)^{\oplus g_{ij}} \subseteq \operatorname{Ker} Y_{j,\text{in}}.$$

左侧的模是 H_j 上的秩为 g_{ij}的自由模。因此，$\operatorname{Im} Y_{j,\ \text{in}}$ 作为 H_j-模，至多可由 $|c_{ji}| - g_{ij}$ 个元素生成。

无论哪种情况，两个像中的一个作为 H_j-模至多可由 $|c_{ji}|-g_{ij}$ 个元素生成，另一个至多可由 $|c_{ji}|$ 个元素生成。由于

$$\operatorname{rank}_{H_j} Y_j = b = 2|c_{ji}| > |c_{ji}| + (|c_{ji}| - g_{ij}),$$

引理 3.1 给出了 E_j 作为 Y的一个直和项。由于 $Y_i \neq 0$，模 Y是可分解的。因此 $u(Y) = 0$，从而可得 $z = 0$。

最后，为了证明 $(\operatorname{ad} e_i)^{ab-2}(\operatorname{ad} e_j)^b e_i \neq 0$，我们将 $(\operatorname{ad} f_j)^b(\operatorname{ad} f_i)^{ab-2}$ 作用于此元素。由于 $b \geq 2$，我们有

$$\begin{aligned}[f_i, (\operatorname{ad} e_j)^b e_i] &= -(\operatorname{ad} e_j)^b h_i = 0,\\ [h_i, (\operatorname{ad} e_j)^b e_i] &= (2-ab)(\operatorname{ad} e_j)^b e_i.\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad} f_j)^b(\operatorname{ad} f_i)^{ab-2}(\operatorname{ad} e_i)^{ab-2}(\operatorname{ad} e_j)^b e_i &= ((ab-2)!)^2(\operatorname{ad} f_j)^b(\operatorname{ad} e_j)^b e_i\\ &= ((ab-2)!)^2(b!)^2 e_i \neq 0.\end{aligned}$$

□

定理 2.12的证明。 假设 $(C,\ D)$ 不满足条件 (E)。令 $L = \mathfrak{l}(C,\ D)$。设 $L \cong \mathfrak{n}_+(B)$，其中某个可对称化广义 Cartan 矩阵为 B。

令 $\{L^n\}_{n\geq 1}$ 表示 L的下中心列，其中 $L^1 = L$ 且 $L^n = [L, L^{n-1}]$ 对$n \geq 2$成立。对于 $\mathfrak{n}_+(A)$ 和 $\mathfrak{n}_+(B)$，我们也使用相同的记号。由命题 5.2，典范满射

$$\pi : \mathfrak{n}_+(A) \longrightarrow L, \qquad e_i \longmapsto \theta_i,$$

不是单射。取一个非零齐次元素 $z \in \ker\pi$，并令 d_z 为其总次数。令 $N = \max\{d_z, \max^{i\neq j}(1-a_{ij}), \max^{i\neq j}(1-b_{ij})\}$ 并设

$$L_N = L/L^{N+1}, \qquad A_N = \mathfrak{n}_+(A)/\mathfrak{n}_+(A)^{N+1}, \qquad B_N = \mathfrak{n}_+(B)/\mathfrak{n}_+(B)^{N+1}.$$

这些都是有限维幂零李代数，且所假设的同构诱导出$L_N \cong B_N$。

记 $\bar{\theta}_i$ 为 θ_i 在 L_N中的像。 L 的秩次下降到 L_N，并定义了相互对易的半单导子 D_i、$i \in I$，满足

$$D_i(\bar{\theta}_j) = \delta_{ij}\bar{\theta}_j.$$

Thus

$$T = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{C}D_i$$

是一个维数为 $|I|$的环面。由于 $\dim_{\mathbb{C}} L_N/[L_N, L_N] = |I|$，由 [San82，引理 2。8]和 [San82，定义 2。9] 可得， T 是极大的，且 L_N 具有最大秩。 $(\theta_i)_{i\in I}$ 是一个 T-msg，符合 [San82，定义 2。5]。

由命题 3.3和命题 5.1，可得

$$(\operatorname{ad}\bar{\theta}_i)^{-a_{ij}}\bar{\theta}_j \neq 0, \qquad (\operatorname{ad}\bar{\theta}_i)^{1-a_{ij}}\bar{\theta}_j = 0 \qquad (i \neq j).$$

因此 A 是与 L_N 相关联的卡坦矩阵，依照 [San82，定理 3。2]。将相同的论证应用于 $\mathfrak{n}_+(B)$ 可知， B_N 的秩为最大秩，其相关联的卡坦矩阵为 B。由于$L_N \cong B_N$， [San82，定理 3。2] 表明 A 与 B 相差一个同时置换。

映射 π 诱导出一个满射 $\bar{\pi}\colon A_N \twoheadrightarrow L_N$。令 $\bar{z}$ 为 z 在 A_N 中的像。我们有$\bar{z} \neq 0$，而 $\bar{\pi}(\bar{z}) = 0$。因此 $\bar{\pi}$ 不是单射。因此

$$\dim_{\mathbb{C}} L_N < \dim_{\mathbb{C}} A_N = \dim_{\mathbb{C}} B_N,$$

与 $L_N \cong B_N$ 矛盾。这就证明了 L 的断言。

引理 2.9 给出 $\mathcal{M}(C,D)$ 与 $\cong U(L)$ 作为 Hopf代数。设对于某个可对称化广义 Cartan 矩阵 B，$\mathcal{M}(C,D)$ 与 $\cong U(\mathfrak{n}_+(B))$ 是含幺 $\mathbb{C}$-代数。那么 $U(L)$ 与 $\cong U(\mathfrak{n}_+(B))$ 是含幺 $\mathbb{C}$-代数，并且 [RU07，命题 4.1] 推出

$$\operatorname{gr} L \cong \operatorname{gr} \mathfrak{n}_+(B),$$

其中 $\operatorname{gr} L = \bigoplus_{r\geq 1} L^r/L^{r+1}$。由于 L 和 $\mathfrak{n}_+(B)$ 是正分次的，且由次数为一的元素生成，它们的总分次给出李代数同构

$$L \cong \operatorname{gr} L, \qquad \mathfrak{n}_+(B) \cong \operatorname{gr} \mathfrak{n}_+(B).$$

因此 $L \cong \mathfrak{n}_+(B)$，这与上文已证明的 L 的断言矛盾。 □

5.2. **Serre 商实现**。现在我们回到任意一对 $(C,\ D)$。令 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(C,\ D)$，并令 $\mathscr{B}$ 如（5.1）中所述。定义 $B = B(C,\ D) = (b_{ij})_{i,\ j\in I}$ 为

$$b_{ii} = 2, \qquad b_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & \{i,j\} \in \mathscr{B}, \\ a_{ij}, & \{i,j\} \notin \mathscr{B}. \end{cases} \tag{5.2}$$

正对角整数矩阵

$$D_A = \operatorname{diag}(2d_i/\lambda_i)_{i\in I}$$

s使 A 和 B 都对称化。特别地，B 是可对称化广义 Cartan 矩阵。令 $\mathcal{J}_{\mathscr{B}}$ 为由以下元素生成的 $\mathcal{M}$ 的双边理想

$$(\operatorname{ad}\theta_i)^{1-c_{ij}}\theta_j \tag{5.3}$$

对所有满足 $\{i,j\} \in \mathscr{B}$ 的有序对 $(i,\ j)$ 都成立。由于这些元素是原始元，$\mathcal{J}_{\mathscr{B}}$ 是一个 Hopf 理想。

引理 5.3（一个中间 Serre 商）。对每一对（C、D），都存在一个规范的秩分次 *Hopf* 代数同构

$$\begin{aligned} U(\mathfrak{n}_+(B)) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(C,D)/\mathcal{J}_{\mathscr{B}}, \\ e_i &\longmapsto \theta_i + \mathcal{J}_{\mathscr{B}}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

证明。该 B-Serre 关系由命题3.3 和 $\mathcal{J}_{\mathscr{B}}$ 的定义推出。因此，陈述中的赋值诱导出一个秩分次 Hopf 代数同态

$$\psi_B : U(\mathfrak{n}_+(B)) \longrightarrow \mathcal{M}(C,D)/\mathcal{J}_{\mathscr{B}}, \qquad e_i \longmapsto \theta_i + \mathcal{J}_{\mathscr{B}}.$$

由于这些类 $\theta_i + \mathcal{J}_{\mathscr{B}}$ 生成该商代数（作为含幺代数），ψ_B 是满射。

为证明单射性，我们修改第 Q 节的辅助箭图4。保留其顶点集以及 $\mathscr{B}$之外各边上的所有箭。对于每个 $\{i,j\} \in \mathscr{B}$，选择一个方向 $j \to i$ 并仅保留相应的箭

$$\alpha^{(\ell)}_{ij,w} : (j,[w]_{m_j}) \longrightarrow (i,[w]_{m_i}), \qquad 0 \leq w < L, \quad 1 \leq \ell \leq g_{ij}.$$

省略箭 $\beta^{(\ell)}_{ij\,w}$,。将所得箭图记为 Q'，其对称广义~Cartan矩阵记为 B。

对于 $\{i,j\}\in\mathscr{B}$,我们有 $f_{ij}=d_j$ 和 $f_{ji}=d_i$。对于每个固定的顶点 (j,b)，可得

$$\sum_{a=0}^{m_i-1}\widetilde{b}_{(i,a),(j,b)}=-g_{ij}\frac{L}{m_j}=-g_{ij}d_j=c_{ij}=b_{ij}.$$

交换 i 与 j 即可得到 b_{ji}对应的单位元关系。对于其余所有边，箭保持不变，因此折叠恒等式可由第 4 节推出。

Q' 满足引理 4.2 的假设。将由此得到的嵌入与定理4.1结合，我们得到一个单射代数同态

$$J_B:U(\mathfrak{n}_+(B))\hookrightarrow\mathcal{M}(Q'),$$
$$e_i\longmapsto\sigma_i:=\sum_{a=0}^{m_i-1}\mathbf{1}_{S_{(i,a)}}.$$

将表示 V 视为 Q' 的一个表示 Q，方法是将删除的箭头对应的映射设为零。使用第 $F(V$ 节的公式定义 4。对于 $\{i,j\}\in\mathscr{B}$，有$k_{ij}=1$，因此 $t=L$，权移为零，且 $b_\ell=0$。由于 $f_{ji}=d_i$ 和 $f_{ij}=d_j$，这条边上的交换关系由环幂零性成立，且其网格贡献为零。对于其余所有边，引理 4.7 中的验证仍然适用。因此 $F(V)$ 是一个局部自由的 $\Pi(C,D)$-模，且其所有算子仍然是齐次的。

按照引理证明中的相同论证 4.11 (另见 [Fei26，附录 A。2])，我们得到

$$(\theta_{i_1}*\cdots*\theta_{i_r})(F(V))=(\sigma_{i_1}*\cdots*\sigma_{i_r})(V)$$

对于每个词以及每个 V Q'的表示。因此，赋值 $\theta_i\mapsto\sigma_i$诱导出一个代数同态

$$\rho:\mathcal{M}(C,D)\longrightarrow\mathcal{M}(Q').$$

由于 σ_i 满 足 B-Serre 关系， ρ 湮灭 $\mathcal{J}_{\mathscr{B}}$ 并诱导出一个同态

$$\bar{\rho}:\mathcal{M}(C,D)/\mathcal{J}_{\mathscr{B}}\longrightarrow\mathcal{M}(Q').$$

根据构造， $\bar{\rho}\circ\psi_B=J_B$。由于 J_B 是单射， ψ_B 也是单射。这就证明了所声称的同构。□

因此，我们重新得到完整的 C-Serre 商实现，该实现由 Fei [Fei26，定理 10。1]建立。特别地，这给出了 [GLS18，定理7.4(i)]中的代数同构，且无需假设支撑猜想。

推论5.4（完整的 C-Serre 商）。令 $\mathcal{I}_C$ 为由以下元素生成的 $\mathcal{M}$（C、 D）的双边理想

$$(\operatorname{ad}\theta_i)^{1-c_{ij}}\theta_j,\qquad i\neq j.$$

对于每一对 （C、 D），存在一个规范的秩分次 *Hopf* 代数同构

$$U(\mathfrak{n}_+(C))\xrightarrow{\sim}\mathcal{M}(C,D)/\mathcal{I}_C,$$
$$e_i\longmapsto\theta_i+\mathcal{I}_C.$$

证明。 由于 $\mathcal{J}_{\mathscr{B}}\subseteq\mathcal{I}_C$ 和 $b_{ij}\le c_{ij}$ 对于 $i\neq j$，结论由引理 5.3 以及 $U(\mathfrak{n}_+(C))$ 的 Serre表示得出。□

Declaration of AI-assisted research and manuscript preparation

作者使用 ChatGPT 进行文献检索、语言编辑、示例计算以及证明策略讨论。这些协助帮助发现了定理2.10早期表述中的一个反例。进一步的计算得出了命题5.2，作者据此证明了定理2.12。作者已仔细核查本文，并对其正确性承担全部责任。

References

[*BB*73] *A. Bia-lynicki-Birula*，关于乘法群和加法群作用的不动点概形，*Topol- ogy 12 (1973)*，*99–103*。[*CG*25] *A. Castillo G´omez* 和 *C. Geiss*，仿射 *Kac–Moody* 代数$\widetilde{C}_n$型的 $U(\mathfrak{n})$几何构造，*J. Pure Appl. Algebra 229 (2025)*，第 *10* 期，论文编号 *108069*。[*Dem*11] *L. Demonet*，斜对称化簇代数的范畴化，*Algebr. Represent. Theory 14 (2011)*，第 *6* 期，*1087–1162*。[*Fei*26] *J. Fei*，关于可对称化 *Kac–Moody* 代数的分歧卷积与单值化基，*arXiv:2610.29051*，*2026*。[*GLS*16] *C. Geiß*、*B. Leclerc* 和 *J. Schr¨oer*，关于可对称化 *Cartan* 矩阵的带关系箭图 *III*：卷积代数，*Represent. Theory 20 (2016)*，*375–413*。*arXiv:1511.06216*。[*GLS*17] *C. Geiß*、*B. Leclerc* 和 *J. Schr¨oer*，关于可对称化 *Cartan* 矩阵的带关系箭图 *I*：基础，*Invent. Math. 209 (2017)*，*61–158*。[*GLS*18] *C. Geiß* 、*B. Leclerc* 和 *J. Schr¨oer*，关于可对称化 *Cartan* 矩阵的带关系箭图 *IV*：晶体图与半典范函数，*Selecta Math. (N.S.) 24 (2018)*，*3283–3348*。[*Gr*95] *J. A. Green*，*Hall* 代数、遗传代数与量子群，*Invent. Math. 120 (1995)*，第 *2* 期，*361–377*。[*Hub*02] *A. W. Hubery*，保持箭图自同构的箭图表示与 *Kac* 定理，博士论文，利兹大学，*2002*。[*JS*12] *Y. Ji ang* 和 *J. Sheng*，驯箭图与仿射包络代数，*Pure Appl. Math. Q. 8 (2012)*，第 *3* 期，*609–651*。[*Lus*91] *G. Lusztig*，箭图、叠置层与量子化包络代数，*J. Amer. Math. Soc. 4 (1991)*，第 *2* 期，*365–421*。[*Lus*00] *G. Lusztig*，由包络代数产生的半典范基，*Adv. Math. 151 (2000)*，第 *2* 期，*129–139*。[*Rin*90] *C. M. Ringel*，*Hall* 代数与量子群，*Invent. Math. 101 (1990)*，*583–591*。[*RU*07] *D.M. Riley* 和 *H. Usefi*，李代数的泛包络代数的同构问题，*Algebr. Represent. Theory 10 (2007)*，第 *6* 期，*517–532*。[*San*82] *L. J. Santharoubane*，*Kac–Moody* 李代数与最大秩幂零李代数分类，*Canad. J. Math. 34 (1982)*，第 *6* 期，*1215–1239*。[*Sch*91] *A. Schofield*，关于从有限维代数构造李代数的注记，预印本，*1991*。

Fengjun Shi, Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P. R. China电子邮箱地址：shifengjun@stu.scu.edu.cn