arXiv:2611.32577v1 [math.CA] 24 Nov 2026

通过共形尺度比较构造拟圆上的最优多项式网格

DAMIÁN PINASCO、JUAN PABLO PINASCO 和 MARÍA VICTORIA VENUTI

摘要。我们证明，每个拟圆 $\Gamma \subset \mathbb{C}$ 都存在一个适用于单变量复多项式的最优可容许多项式网。更准确地说，若 E 表示由 Γ 围成的闭 Jordan 域，则对每个 $\Lambda > 1$，都存在有限集 $A_n \subset \Gamma$，使得

$$\operatorname{card}(A_n) = O(n), \qquad \|p\|_E = \|p\|_\Gamma \leq \Lambda \|p\|_{A_n}, \qquad p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}).$$

这些节点可取为单位圆上的等距点经外部共形映射的反映射所得的像；等价地，它们是无穷远处调和测度下的等质量点。证明结合了经典的共形层级曲线尺度与离散定范原理。若 $\rho_n(z)$ 表示边界点到外部水平曲线 $|\Phi| = 1 + 1/n$ 的距离，则 Bernstein–Walsh 不等式和柯西公式表明，任何足够精细的 ρ_n-网都是定范的。随后，尺度比较性质将 $O(n)$ 个等距角度采样点转化为这样的网。拟圆因拟对称性而满足这一性质。该论证不需要光滑性或可 rectifiable 性，尤其适用于经典的冯·科赫雪花。

1. 引言

1.1. **单复变量中的多项式网格**。设 $E \subset \mathbb{C}$ 是紧的，并且

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{C}) = \{p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n\}.$$

$A_n \subset E$ 是一个可容许多项式网格（AM）序列，如果存在常数 $\Lambda \geq 1$，且与 n无关，使得

$$\|p\|_E \leq \Lambda \|p\|_{A_n}, \qquad p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}), \tag{1}$$

并且对于某个 $s > 0$，$\operatorname{card}(A_n) = O(n^s)$。这一术语及现代网格框架可追溯至 Calvi 和 Levenberg [14]。如果 E 是多项式决定的，则

$$\dim_{\mathbb{C}}\big(\mathcal{P}_n(\mathbb{C})|_E\big) = n + 1,$$

因此，$\mathcal{P}_n(\mathbb{C})|_E$ 的每个定范集都至少包含 $n+1$ 个点。在此情形下，具有

$$\operatorname{card}(A_n) = O(n)$$

的 AM 因而称为最优。

最优多项式网格理论也已在实多元情形下得到发展，其中最优网格包含 $O(n^d)$ 个点；例如参见

2020 数学学科分类。主要分类 41A17；次要分类 30C62、30C85、30E10、41A10。关键词和短语。可容许多项式网格、采样离散化、定范集、拟圆、拟保角映射、调和测度、冯·科赫雪花。已被《美国数学学会会刊》接受发表。

Kroó [25], Piazzon [26] 和 Dai–Prymak [17]。特别是，Dai 和 Prymak 证明了每个 $\mathbb{R}^d$ 凸体都存在一个最优网格。本文则考虑平面紧集上的单复变量多项式，此时次数为 n 的多项式空间的维数为 $n+1$。

在几乎没有几何正则性的条件下，已知一个一般性的近最优结果。Bloom、Bos、Calvi 和 Levenberg 证明，每个多项式确定紧子集 $\mathbb{C}^d$ 都有一个基数为 $O((n\log n)^d)$ [13, 命题 23]的 AM。在单复变量情形中，每个无限紧集都是多项式决定的，因此每个无限 $E \subset \mathbb{C}$ 都具有一个包含 $O(n\log n)$ 个点的 AM。

去除对数项是一个几何问题。对于正则曲线，相关构造采用保角变换或解析变换以及扰动论证。Białas-Cież 和 Calvi [11, 第 4 节2]从单位圆上的等距点的保角像出发，在由 Alper光滑约旦曲线围成的紧集上获得了弱可容许网格，其在次数 d 下的节点数为 $d+1$，网格常数的阶为 $O(\log d)$。Piazzon 和 Vianello [27, 28] 研究了解析变换以及多项式网格的扰动。特别地，[28] 的扰动方法在 C^k 正则性条件下给出了基数为 $O(n^{1+2/k})$ 的网格，$k > 2$。这些是特定方法的产物，并不能说明所有 Jordan 边界的尖锐性。对于一条 C^2 若尔当曲线，伯恩斯坦不等式具有线性的次数尺度

$$\|p'\|_\Gamma \le C_\Gamma n \|p\|_\Gamma ;$$

例如，可参见 [22]。因此，按步长 $O(1/n)$ 进行弧长采样即可得到一个最优网格。Białas-Cież、Kenne、Sommariva 和 Vianello [12] 构造了由固定数量的多项式弧或三角多项式弧组成的边界上的显式最优网格。这类构造涵盖多边形以及许多曲线形或带尖点的例子。

因此，在若干正则或参数化形式明确的情形下，已知存在基数为线性的网格；而对于任意无限紧集，抽象地可得基数为 $O(n\log n)$ 的网格。这两种情形之间的差距使得几何在促成线性基数方面所起的作用仍未明朗，即便是在单复变量情形下也是如此。

Pinasco 和 Venuti [29] 最近提出了另一种方法，利用 Green次水平集为实轴上若干类紧子集构造最优多项式网格，其中包括高度不连通的例子。两种方法都利用 Bernstein–Walsh 将附近 Green水平线上的控制转化为赋范估计；而在本文中，计数机制则由约旦边界上的保角角参数提供。

1.2. 拟圆盘上的构造性逼近。 另有一支年代久远得多、且与当前问题的几何性质直接相关的文献。拟圆盘是边界为拟圆的 Jordan 域。自 Dzjadyk、Belyi 和 Andrievskii 及其合作者开展相关工作以来，拟圆盘和拟保角弧上的多项式逼近一直受到研究。Belyi 运用保角方法和拟保角方法，获得了关于具有拟保角边界的域的逼近定理 [10]；Andrievskii 将直接定理推广到任意拟保角弧，包括处处不可求长的拟保角弧 [2]。

这一理论的核心对象之一，是从边界点到邻近外部共形水平曲线的距离。按照下文采用的记号，这正是尺度

$$\rho_n(z) = \operatorname{dist}\big(z, \{|\Phi| = 1 + 1/n\}\big).$$

它的作用由来已久。具体而言，Andrievskii 根据这一距离 [3]表述了直接逼近定理；另见专著 [7]和综述 [4]。同一系列思想也构成了后续关于同时逼近与插值 [9], 、最大多项式值域 [5], 、拟圆盘上的最大模精细化结果 [6],以及拟圆盘的 Totik–Widom性质 [8]的研究基础。

同一尺度也出现在拟圆盘外部共形映射的畸变估计以及如下形式的 Bernstein–Dzjadyk不等式中

$$|p'(z)| \le C_\Gamma \frac{\|p\|_E}{\rho_n(z)}, \qquad z \in \Gamma, \quad p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C});$$

见 [7, 4]。我们对该尺度的运用有所不同：命题 3.1 给出了一个自成一体的差值估计，而推论 3.2 则将其转化为有限范数控制判据。

这些经典的共形与拟共形工具为本文提供了几何背景。本文探讨的问题是，能否将这一结构转化为具有最优基数的离散范数控制机制。

更具体地说，我们要探讨的是，能否仅用 $O(n)$个采样点替代拟圆盘的边界，同时对所有次数不超过 n 的多项式一致地保持范数控制不等式。自然的候选点是将单位圆上的等距点通过外部共形映射的反映射传送后得到的边界点，也就是经典的 Fejér点。Fejér [19] 在这一背景下引入了这些点，随后它们又在复插值中得到研究，例如 Curtiss [16]的工作。Koosis [24] 在足够光滑的若尔当曲线上使用外部调和测度下等距的节点，通过对数和估计多项式在内部点处的取值。

Chui 和 Zhong 的相关工作 [15]研究了 L形弧上的 Marcinkiewicz–Zygmund 不等式，使用的是相同的外部等值曲线尺度。他们的结果涉及L^p 不等式， $1 < p < \infty$；而本文研究的是带过采样的一致范数定范不等式；用采样离散化的术语来说， [23],本文要解决的是如何用数量与维数成比例的采样点离散化一致范数。

我们证明，经过适当过采样的 Fejér点，在每条拟圆上都能生成具有最优线性基数的容许网。这将线性网格情形从上述研究涉及的规则且可显式参数化的情形，扩展到包含不可求长边界和分形边界的一类曲线。关键步骤是将局部共形尺度与尺度比较原理结合起来，从而把等间距角度采样点转化为基数为 $O(n)$ 的可容许多项式网格。

1.3. 尺度比较机制。论证分为两部分。首先，Bernstein–Walsh 和柯西公式给出一个与几何无关的局部原理：任何相对于 $\rho_n(z)$足够稠密的边界集，都是 $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$的定范集。其次，我们提出尺度比较性质（SC），借此可以用 $O(n)$ 个点构造这样的变半径网。对于拟圆，（SC）可由一次拟对称性应用推出。因此，逻辑结构如下：

$$\text{quasicircle} \Longrightarrow (\text{SC}) \Longrightarrow \rho_n\text{-net with } O(n) \text{ points} \Longrightarrow \text{optimal mesh}.$$

中间条件完全以外部共形参数表述；本文将其作为采样论证的充分假设。

这一表述也清楚地表明，该结果并非微扰的。拟圆无需在豪斯多夫距离、弧长、Lipschitz 几何意义下，

或任何光滑意义下接近圆；它可能不可求长且具有分形结构。所控制的是相对尺度畸变。相等的角度增量可能具有非常不同的欧几里得大小，但当 c 很小时，大小为 c/n 的角度增量相对于局部外部尺度 $\rho_n(z)$ 一致地很小。

1.4. 论文结构。 第 2 节回顾复分析与拟共形理论的背景，并将共形水平曲线尺度置于其经典框架中。第 3 节证明局部 Green 尺度赋范原理。第 4 节引入 (SC)，并证明它能生成最优网格。第 5 节证明每个拟圆都满足 (SC)。第 6 节记录冯·科赫的推论，最后一节则包含一些总结性评论。

2. 预备知识

2.1. Jordan 域、Green函数与 Bernstein–Walsh。 从现在起，设 E 为一个闭 Jordan 域，并记 $\Gamma := \partial E$。令

$$\Omega := \widehat{\mathbb{C}} \setminus E.$$

归一化的外部共形映射

$$\Phi : \Omega \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}, \qquad \Phi(\infty) = \infty, \qquad \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0,$$

是唯一确定的；记为 $\Psi := \Phi^{-1}$。根据 Carathéodory定理， Ψ 可连续延拓至 $\mathbb{T}$，其在边界上的限制是从 $\mathbb{T}$ 到Γ的同胚；例如参见 Pommerenke [30]。

Ω 的无穷远极点 Green函数为

$$g_E(z) = \log|\Phi(z)|, \qquad z \in \Omega.$$

由于 $|\Phi(z)| \to 1$ 当 $z \to \Gamma$时，因此令$g_E = 0$ 在 E 上取值，即可将该函数连续延拓至 $\mathbb{C}$ 。对于 $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$，Bernstein–Walsh 给出

$$|p(z)| \le \|p\|_E \, e^{n g_E(z)}, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

其中， E 上的估计显然成立。势论背景可参见 Ransford [31] 。最大值原理推出

$$\|p\|_E = \|p\|_\Gamma . \tag{3}$$

在构造性复逼近中，利用到外部共形水平曲线的距离是经典做法。特别是，层级为 $1 + 1/n$ 的尺度已在 Belyi 和 Andrievskii [10, 3] 的研究中发挥核心作用；另见 [7, 4]。我们将这一经典尺度用于不同目的：提出一个有限范数控制判据。

2.2. 拟圆与拟对称性。若尔当曲线 Γ 是一个 K-拟圆，则存在黎曼球面上的 K-拟共形同胚 F ，使得 $\Gamma = F(\mathbb{T})$。我们将使用两个标准推论；参见 Ahlfors [1], 、Gehring–Hag [20], 和 Heinonen [21]。

首先，拟圆恰好是具有有界转弯性质的若尔当曲线：存在$B < \infty$，使得对于每个 a, $b \in \Gamma$，较小直径的子弧 $\Gamma[a, b]$ 满足

$$\operatorname{diam} \Gamma[a, b] \le B|a - b|. \tag{4}$$

其次，逆外部映射具有定量的拟共形延拓。事实上，设

$$J(w) := \frac{1}{\overline{w}}.$$

若 $\Gamma = F(\mathbb{T})$ 是 F K-拟共形的，则

$$R := F \circ J \circ F^{-1}$$

是跨越 Γ 的 K^2-拟共形反射。因此，通过反射得到的标准延拓

$$\widetilde{\Psi}(w) := \begin{cases} \Psi(w), & |w| \geq 1, \\ R\big(\Psi(J(w))\big), & |w| < 1, \end{cases}$$

定义了一个全局的 K^2-拟共形同胚，其在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上与 Ψ 一致。由于 $\widetilde{\Psi}(\infty) = \infty$，它在 $\mathbb{C}$ 上的限制是平面上的 K^2-拟共形同胚。因此，根据 [21, 定理 11.14]，取整个平面为定义域和目标域，可知它是 η_K-拟对称的，其中 η_K 仅依赖于 K。于是存在一个递增同胚

$$\eta_K : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty), \qquad \eta_K(0) = 0,$$

使得

$$\frac{|x-a|}{|x-b|} \leq t \quad \Longrightarrow \quad \frac{|\widetilde{\Psi}(x) - \widetilde{\Psi}(a)|}{|\widetilde{\Psi}(x) - \widetilde{\Psi}(b)|} \leq \eta_K(t), \tag{5}$$

对所有 x，a，$b \in \mathbb{C}$，满足 $x \neq b$。特别地，

$$\eta_K(t) \longrightarrow 0 \qquad (t \downarrow 0). \tag{6}$$

关于欧氏空间中拟共形 $\Rightarrow$ 拟对称映射的标准表述，另请参见 Tukia–Väisälä [32]。

3. A local Green-scale norming principle

对于 $n \geq 1$ 集合

$$r_n := 1 + \frac{1}{n}, \qquad \Gamma_n := \Psi(r_n \mathbb{T}), \tag{7}$$

并且，对于 $z \in \Gamma$，定义

$$\rho_n(z) := \operatorname{dist}(z, \Gamma_n). \tag{8}$$

由于 Γ_n 是紧的且与 Γ不相交，因此对于每个 $z \in \Gamma$，我们都有 $\rho_n(z) > 0$。

这是与层级 $1 + 1/n$相关联的经典局部共形尺度；下文使用它作为采样半径，而非逼近模数。由于在 Ω 上 $g_E = \log|\Phi|$，

$$\Gamma_n = \{z \in \Omega : g_E(z) = \log r_n\}. \tag{9}$$

除上述若尔当情形外，以下局部格林尺度估计不使用 Γ 的任何几何正则性。

命题 3.1。设 $n \geq 1$、$p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$、$z \in \Gamma$ 和 $\rho = \rho_n(z)$。若 $|\zeta - z| < \rho$，则

$$|p(\zeta) - p(z)| \leq e \, \|p\|_E \, \frac{|\zeta - z|}{\rho - |\zeta - z|}. \tag{10}$$

证明。若 $|u-z|<\rho$，则 $g_E(u) < \log r_n$。事实上，否则 g_E 在从 z 到 u 的线段上具有连续性，将得到水平集 (9) 上的一个点，该点比 z 更接近 ρ。因此，由 Bernstein–Walsh 可得

$$|p(u)| \le r_n^n \|p\|_E \le e \|p\|_E$$

在整个 $B(z,\ \rho)$ 中。

固定 $|\zeta - z| < r < \rho$。差值的柯西公式给出

$$p(\zeta)-p(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|u-z|=r} p(u)\frac{\zeta - z}{(u-\zeta)(u-z)}\,du.$$

因此

$$|p(\zeta)-p(z)| \le e\|p\|_E \frac{|\zeta - z|}{r-|\zeta - z|}.$$

令 $r \uparrow \rho$，即可证明 (10)。 □

局部估计立即给出以下 ρ_n-网原理。

推论 3.2. 固定 $0<q<1$ 并令

$$\tau := \frac{q}{e+q}. \tag{11}$$

假设 $A_n \subset \Gamma$ 具有以下性质：对每个 $z\in\Gamma$，都存在 $a\in A_n$ 使得

$$|a-z| \le \tau \rho_n(z). \tag{12}$$

Then

$$\|p\|_E = \|p\|_\Gamma \le \frac{1}{1-q}\|p\|_{A_n}, \qquad p\in\mathcal{P}_n(\mathbb{C}). \tag{13}$$

证明。选取满足 $|p(z_*)| = \|p\|_\Gamma$ 的 $z_*\in\Gamma$，并选取满足 (12) 的 $a\in A_n$。由命题 3.1 得

$$|p(a)-p(z_*)| \le e\|p\|_E \frac{\tau}{1-\tau} = q\|p\|_E.$$

利用 (3),

$$|p(a)| \ge (1-q)\|p\|_\Gamma,$$

即（13）。 □

注 3.3。推论 3.2 包含了该论证的分析核心。它并不要求均匀欧几里得网格。半径 $\rho_n(z)$ 允许随基点发生显著变化。几何学仅通过构造和计数一个 $\tau\rho_n$- 网这一问题引入。在实数情形中，基于伯恩斯坦型不等式的赋范网格相关构造也有所涉及；参见 [34] ；而对于涉及到边界的距离的多变量构造，参见 [26]。

4. 尺度比较性质

定义 4.1。若尔当曲线 Γ 被称为满足尺度比较性质（SC），如果存在 $c_0>0$ 以及一个函数

$$\omega_\Gamma : (0,c_0] \longrightarrow (0,\infty), \qquad \omega_\Gamma(c)\longrightarrow 0 \quad (c\downarrow 0),$$

使得，对于每个 $n\ge 1$、每个 $\theta\in\mathbb{R}$、每个 $0<c\le c_0$，以及满足$|h|\le c/n$的每个 $h\in\mathbb{R}$，

$$|\Psi(e^{i(\theta+h)}) - \Psi(e^{i\theta})| \le \omega_\Gamma(c)\,\rho_n(\Psi(e^{i\theta})). \tag{14}$$

性质（SC）的表述有意不使用拟共形术语。它比较附属于同一共形坐标的两个尺度：大小为 c/n 的切向角增量，以及从边界到共形高度为 $1/n$的外部水平曲线的欧几里得距离。下面的最优网格结果表明，这种比较足以支持网格论证。

定理 4.2. 设 Γ是满足 (SC) 的若尔当曲线， E 是由 Γ围成的闭 *Jordan* 域。那么对每个 $\Lambda > 1$ ，都存在有限集 $A_n \subset \Gamma$和常数 $C = C(\Gamma, \Lambda)$ ，使得

$$\mathrm{card}(A_n) \le Cn + 1$$

and

$$\|p\|_E = \|p\|_\Gamma \le \Lambda \|p\|_{A_n}, \qquad p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}).$$

集合 A_n 可以取为圆周 $\mathbb{T}$上等距点在外部共形映射的反映射下的像。

证明。令

$$q := 1 - \Lambda^{-1}, \qquad \tau := \frac{q}{e+q}.$$

选择 $0 < c \le c_0$ ，使得 $\omega_\Gamma(c) \le \tau$。定义

$$N_n := \left\lceil \frac{\pi n}{c} \right\rceil, \qquad \theta_j := \frac{2\pi j}{N_n}, \qquad A_n := \{\Psi(e^{i\theta_j}) : 0 \le j < N_n\}.$$

对每个 θ ，都存在 j ，使其圆周角距离

$$|\theta - \theta_j|_{\mathbb{T}} \le \frac{\pi}{N_n} \le \frac{c}{n}.$$

由性质（SC）可得

$$|\Psi(e^{i\theta}) - \Psi(e^{i\theta_j})| \le \tau \rho_n(\Psi(e^{i\theta})).$$

因此， A_n 满足推论 3.2 的假设。于是

$$\|p\|_E \le \frac{1}{1-q} \|p\|_{A_n} = \Lambda \|p\|_{A_n}.$$

最后，

$$\mathrm{card}(A_n) = N_n \le \frac{\pi}{c} n + 1.$$

□

备注 4.3。 定理 4.2 提炼出了可迁移的结论。拟圆性是获得（SC）的一种稳健方法，但它并非分析论证本身所必需。本文不试图刻画满足（SC）的若尔当曲线。

5. 拟圆满足尺度比较

现在，我们利用拟圆盘外部共形映射的拟共形延拓所提供的经典拟对称控制来验证（SC）；参见（5）和 [7, 4]。在此处所需的形式下，论证可归结为一次三点比较。

引理 5.1。 设 Γ是一个 K-拟圆。那么 Γ 满足 （SC）。更确切地说，可以取 $c_0 = 1$ 和

$$\omega_\Gamma(c) = \eta_K(c), \qquad 0 < c \le 1,$$

其中， η_K 仅取决于 K。

证明。 固定 $n \geq 1$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$。令

$$x = e^{i\theta}, \qquad z = \Psi(x).$$

选取 $u_n \in r_n\mathbb{T}$ 使得

$$|z - \Psi(u_n)| = \rho_n(z).$$

由紧致性可知，这样的点存在。由于 $|u_n| = 1 + 1/n$ 和 $|x| = 1$,

$$|x - u_n| \geq ||u_n| - |x|| = \frac{1}{n}. \tag{15}$$

令 $y = e^{i(\theta+h)}$ 满足 $|h| \leq c/n$。则

$$|x - y| = |1 - e^{ih}| \leq |h| \leq \frac{c}{n}.$$

由 (15),

$$\frac{|x-y|}{|x-u_n|} \leq c.$$

这三个点都位于 $\{|w| \geq 1\}$ 中，而拟共形延拓在此处与Ψ一致。因此，拟对称性给出

$$|\Psi(x) - \Psi(y)| \leq \eta_K(c)|\Psi(x) - \Psi(u_n)| = \eta_K(c)\rho_n(z).$$

由于当 $c \downarrow 0$ 时， $\eta_K(c) \to 0$ ，这就是 (SC)。 □

结合引理 5.1 与定理 4.2，可得主要结果。

定理 5.2。 设 $\Gamma \subset \mathbb{C}$ 是一个 K-拟圆，且 E 是由 Γ围成的闭 *Jordan* 域。对于每个 $\Lambda > 1$ ，存在常数 $C = C(K, \Lambda)$ 以及有限集$A_n \subset \Gamma$ ，使得

$$\operatorname{card}(A_n) \leq Cn + 1$$

and

$$\|p\|_E = \|p\|_\Gamma \leq \Lambda \|p\|_{A_n}, \qquad p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}).$$

集合 A_n 可取为圆 $\mathbb{T}$上等距点在外部共形映射的反映射下的像。

证明。 由引理 5.1，性质（SC）成立，且

$$\omega_\Gamma(c) = \eta_K(c),$$

其中 η_K 仅依赖于 K。

在定理 4.2 的证明中，量

$$q = 1 - \Lambda^{-1}, \qquad \tau = \frac{q}{e+q}$$

仅依赖于 Λ。因此，可以选择 $0 < c \leq 1$ ，使得

$$\eta_K(c) \leq \tau,$$

其中 c 仅依赖于 K 和 Λ。因此，该构造给出

$$\operatorname{card}(A_n) \leq \frac{\pi}{c}n + 1,$$

因此，常数 C 仅取决于 K 和 Λ。 □

注 5.3。 边界对应 $e^{i\theta} \mapsto \Psi(e^{i\theta})$ 将 $\mathbb{T}$ 上的归一化勒贝格测度推前为从无穷远处观察 Ω 的调和测度；在这里，它与 E 的平衡测度一致；例如参见 [31]。因此，定理 5.2 中的节点将边界分成若干调和测度相等的部分。它们的欧几里得间距在曲线的不同部分之间不一定具有可比性。

6. 经典冯·科赫雪花

冯·科赫雪花边界 Γ_{Koch} 是一个拟圆。事实上，其标准参数化是单射的 [33, , 参见命题 3.2], 之后的讨论； [33, 定理 3.3] 给出了在情形 $p = 1/3$下的有界转弯性质。由此，刻画式 (4) 即可得出结论。因此，定理 5.2 给出如下结果。

推论 6.1。 对于每个 $\Lambda > 1$，都存在有限集 $A_n \subset \Gamma_{\mathrm{Koch}}$，使得

$$\mathrm{card}(A_n) = O(n)$$

and

$$\|p\|_{\Gamma_{\mathrm{Koch}}} \le \Lambda \, \|p\|_{A_n}, \qquad p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}).$$

这些节点可以选取得到关于无穷远处调和测度等间距分布。

这一结论并不与 Γ_{Koch}的分形覆盖几何相矛盾。均匀的欧几里得网能够反映雪花的豪斯多夫维数和闵可夫斯基维数，而这里的网格仅在保角角参数下均匀。相应的欧几里得尺度是依赖于点的量 $\rho_n(z)$。

7. 最后说明

证明将网格构造中通常纠缠在一起的两个问题区分开来。Bernstein–Walsh 和柯西公式在不使用光滑性的情况下，给出了局部范数控制尺度 $\rho_n(z)$。几何问题是在该可变尺度下计算一个网的基数。对于拟圆，拟对称性通过 (SC) 解决了计数问题。

我们没有试图优化过采样常数 $C(K, \Lambda)$。该论证是一阶的，旨在确立线性基数。例如，在单位圆上，如果 $N > n$，那么

$$\|p\|_{\mathbb{T}} \le \sec\!\Big(\frac{\pi n}{2N}\Big) \max_{\omega^N = 1} |p(\omega)|, \qquad p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C});$$

见 [18]。当 N 能被 n 整除时，该估计是尖锐的。

关于人工智能辅助工具的披露

在本项目的探索阶段，使用了基于人工智能的工具进行数学讨论、文献辅助和起草支持。作者独立审阅了数学证明和最终稿件，并对其内容承担全部责任。

参考文献

[1] L. V. Ahlfors，《拟共形反射》，Acta Math. 109 (1963), 291–301。[2] V. V. Andrievskii，《拟保角弧上的逼近论直接定理》，Math. USSR-Izv. 16 (1981), 221–238。[3] V. V. Andrievskii，《区域的几何结构与函数的构造理论直接定理》，Math. USSR-Sb. 54 (1986), 39–56。[4] V. V. Andrievskii，《共形映射和拟共形映射及其性质在逼近论中的应用》，载 R. Kühnau（编），《复分析手册：几何函数论》，第1卷，North-Holland，阿姆斯特丹，2002，493–520。[5] V. V. Andrievskii，《拟圆盘的最大范围问题》，J. Approx. Theory 123 (2003), 52–67。[6] V. V. Andrievskii，《关于拟圆盘中多项式的最大模原理》，J. Anal. Math. 96 (2005), 283–295。[7] V. V. Andrievskii、V. I. Belyi 和 V. K. Dzjadyk，《复变量函数构造理论中的共形不变量》，World Federation Publishers，亚特兰大，1995。[8] V. V. Andrievskii 和 F. Nazarov，《关于拟圆盘的 Totik–Widom性质》，Constr. Approx. 50 (2019), 497–505。[9] V. V. Andrievskii、I. E. Pritsker 和 R. S. Varga，《复平面上连续统中的函数同时逼近与插值》，J. Math. Pures Appl. 80 (2001), 373–388。[10] V. I. Belyi，《具有拟共形边界的区域中的共形映射与解析函数逼近》，Math. USSR-Sb. 31 (1977), 289–317。[11] L. Białas-Cież 和 J.-P. Calvi，《伪Leja序列》，Ann. Mat. Pura Appl. 191 (2012), 53–75。[12] L. Białas-Cież、D. J. Kenne、A. Sommariva 和 M. Vianello，《切比雪夫可容许网格与复多项式投影的Lebesgue常数》，J. Comput. Appl. Math. 443 (2024), 115766。[13] T. Bloom、L. P. Bos、J.-P. Calvi 和 N. Levenberg，《 $\mathbb{C}^d$中的多项式插值与逼近》，Ann. Polon. Math. 106 (2012), 53–81。[14] J.-P. Calvi 和 N. Levenberg，《离散最小二乘多项式的一致逼近》，J. Approx. Theory 152 (2008), 82–100。[15] C. K. Chui 和 L. Zhong，《关于 Marcinkiewicz–Zygmund不等式及 A_p-权函数对 L形弧的应用》，J. Geom. Anal. 31 (2021), 9276–9294。[16] J. H. Curtiss，《利用调和多项式和复多项式进行插值以得到边界值》，J. Math. Mech. 9 (1960), 167–192。[17] F. Dai 和 A. Prymak，《任意多元凸域上都存在最优多项式网格》，Found. Comput. Math. 24 (2024), 989–1018。[18] V. N. Dubinin，《圆上多项式离散范数的下界》，Math. Notes 90 (2011), 284–287。[19] L. Fejér，《插值与共形映射》，Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1918), 319–331。[20] F. W. Gehring 和 K. Hag，《无处不在的拟圆盘》，Mathematical Surveys and Monographs 184，美国数学学会，普罗维登斯，RI，2012。[21] J. Heinonen，《度量空间上的分析讲义》，Springer，纽约，2001。[22] S. Kalmykov、B. Nagy 和 V. Totik，《有理函数的 Bernstein型和 Markov型不等式》，Acta Math. 219 (2017), 21–63。[23] B. Kashin、E. Kosov、I. Limonova 和 V. Temlyakov，《采样离散化及相关问题》，J. Complexity 71 (2022), 101653。[24] P. Koosis，《利用对数和估计多项式》，Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 26 (2001), 409–446。[25] A. Kroó，《关于最优多项式网格》，J. Approx. Theory 163 (2011), 1107–1124。[26] F. Piazzon，《 $\mathbb{R}^d$ 的某些紧子集类上的最优多项式容许网格》，J. Approx. Theory 207 (2016), 241–264。[27] F. Piazzon 和 M. Vianello，《容许网的解析变换》，East J. Approx. 16 (2010), 389–398。[28] F. Piazzon 和 M. Vianello，《多项式网格的小扰动》，Appl. Anal. 92 (2013), 1063–1073。

[29] D. Pinasco 和 M. V. Venuti，《通过 Green次水平集超越几何边界正则性的最优多项式网格》，arXiv:2608.27618，2026。[30] Ch. Pommerenke，《共形映射的边界行为》，《数学科学基础论丛》299，Springer，柏林，1992。[31] T. Ransford，《复平面上的势理论》，《伦敦数学学会学生教材》28，剑桥大学出版社，剑桥，1995。[32] P. Tukia 和 J. Väisälä，《度量空间的拟对称嵌入》，《芬兰科学院学报 *A I* 数学辑》**5**（1980），97–114。[33] S. van Golden、S. Kombrink 和 T. Samuel，《广义科赫雪花的几何》，arXiv:2601.07371，2026。[34] M. Vianello，《通过伯恩斯坦型不等式构造赋范网格》，《数学不等式及其应用》**17**（2014），929–936。

托尔夸托·迪·特利亚大学数学与统计系，阿根廷布宜诺斯艾利斯市菲格罗亚·阿尔科塔大道 7350 号（C1428BCW）；阿根廷国家科学技术研究委员会，阿根廷布宜诺斯艾利斯电子邮箱：dpinasco@utdt.edu

IMAS（UBA-CONICET），布宜诺斯艾利斯大学精确与自然科学学院数学系，阿根廷布宜诺斯艾利斯大学城吉拉尔德斯大道 2160 号 I 馆，C1428EGA电子邮箱：jpinasco@dm.uba.ar

托尔夸托·迪·特利亚大学数学与统计系，阿根廷布宜诺斯艾利斯市菲格罗亚·阿尔科塔大道 7350 号（C1428BCW）电子邮箱：victoria.venuti@utdt.edu