arXiv:2611.32581v1 [physics.optics] 24 Nov 2026

高斯共存的见证与相关椭圆层析

Wanting Hou[1], * Wei Liu[1], * Hong-Chao Liu[2] Jun Xiong[3] 和 Zhiyuan Ye[1], †

[1] *Department of Physics, Faculty of Arts and Sciences,Beijing Normal University, Zhuhai 519087, China*[2] *Institute of Applied Physics and Materials Engineering, University of Macau, Macao SAR, 999078, China*[3] *School of Physics and Astronomy, Applied Optics Beijing Area Major Laboratory,Beijing Normal University, Beijing 100875, China*

高斯光由二阶场矩描述，但其隐藏的关联几何可能需要通过高阶强度测量才能揭示。我们建立了“高斯共存”的测量层级，即交叉协方差与交叉伪协方差同时存在。对于具有圆对称边缘分布的两个零均值高斯模，所有未经扰动的二阶或三阶强度矩都无法探测共存。相比之下，平衡的四阶残差是必要且充分的见证量。然而，它们各自的身份仍存在根本性的歧义：仅仅恢复两个关联强度，并不能揭示哪一个属于协方差，哪一个属于伪协方差。出乎意料的是，加入热涨落可以消除这种歧义：独立且相关的热探针会选择性地改变协方差，同时保持伪协方差不变，从而能够分别识别两个关联强度。此外，仅在一条臂中加入相干参考，便可通过三阶强度相关获取它们的相对相位。这些测量共同重建出一个相关椭圆及其庞加莱球坐标，从而确定相对通道强度和椭圆方向。该框架区分了强度探测能够见证什么、热探测能够识别什么，以及单个相位参考能够确定什么方向，将原本无法获取的高斯关联结构转化为可定量重建的几何图像。

引言

高斯统计将光场的波动复杂性压缩为其均值和二阶场矩 [1]。Hanbury Brown–Twiss 强度干涉术利用这一结构推断相干性，而无需直接测量光学相位 [2, 3]。然而，对于复场，协方差和伪协方差是二阶描述中相互独立的部分 [4–6]。它们不同的光学响应构成了高斯相干理论的基础，并可支持互补的图像编码通道 [7–10]。对于均值为零、平稳且联合高斯的场 E_1, E_2 若其边缘分布为圆对称（$\langle E_i^2\rangle = 0$），则定义 $I_i = |E_i|^2$、$n_i = \langle I_i\rangle > 0$、$\Gamma = \langle E_1 E_2^*\rangle$ 和 $C = \langle E_1 E_2\rangle$。高斯矩分解给出了联合非圆对称情形下的关系 [7, 11]

$$G^{(2)} \equiv \langle I_1 I_2\rangle = \langle E_1 E_1^* E_2 E_2^*\rangle = n_1 n_2 + |\Gamma|^2 + |C|^2, \quad (1)$$

它同时保留协方差和伪协方差的贡献。熟悉的二阶强度测量 $G^{(2)}$ 只能观测到振幅平方之和。在这里，我们将它们同时存在的情形，即 $\Gamma \neq 0$ 和 $C \neq 0$，称为高斯共存。这构成了高斯关联中一种可通过实验观测、却常被忽视的结构，其要求不止于联合非圆性 $C \neq 0$ [12]。出人意料的是，两个共存的关联通道所产生的归一化强度聚束，可能弱于单个完全关联通道所产生的强度聚束 $g^{(2)}$ [10]。然而，仅凭聚束减弱并不能证实 C-Γ共存：互相相干性不完全的单个通道也能产生程度相同的 $g^{(2)}$ [13–16]。因此，实验上的挑战在于区分这些物理结构迥异的情形：通过什么测量才能明确证明两个通道都存在，并解析各自的贡献？更微妙的是，Γ 和 C 本身都是复数量，这促使我们探究能否测量它们的相对相位，以及它们传递了哪些物理信息。

高阶关联已成为强有力的诊断手段，应用范围从光子聚束和阻塞，到量子非高斯性和多体涨落 [17–26]。尤其是，利用 $g^{(2)}$ 和 $g^{(3)}$ 排除高斯量子态的混合态 [26]，促使我们探究：哪些测得关联的组合能够揭示经典高斯模型中的结构。此外，参考辅助重构以及对高斯态的光子统计表征也已十分成熟 [27–30]。在此，我们探讨一个更具体的问题：从强度统计中可以获取协方差与伪协方差共存的哪些特征？又需要哪些额外的探测资源，才能识别并重构其关联几何？我们将.....

建立测量层级：四阶矩见证量 C-Γ 共存，热探测确定其通道强度，单臂参考则通过三阶强度相关恢复相对相位。综合测得的通道强度和相对相位，即可重建相关椭圆，其几何形状源于两个反向旋转分量的叠加

* 这些作者对本工作的贡献相同。
† yezy@bnu.edu.cn

复分量 [31]。我们将这种重建称为相关椭圆层析：它确定了连接两个高斯场的条件均值轨迹的形状和方向。

相关椭圆与球面

以往的相干性庞加莱球描述矢量场相干性，但未纳入伪协方差 [32, 33]。为了直观地诠释这两个通道，我们根据一个场的条件均值构造椭圆，同时扫描另一场的相位，并在庞加莱球上表示其几何形态。此构造将通道强度和相对相位转化为椭圆的形状与方向，为下文发展的相关层析术提供几何坐标。全文中，我们令 $\gamma = \Gamma/\sqrt{n_1 n_2}$, $\chi = C/\sqrt{n_1 n_2}$, $a = |\gamma|^2$, $b = |\chi|^2$，且 $p = a + b$ 表示总体相关强度。我们考察 E_2 的条件均值，并令 E_1 的相位 θ在固定条件振幅 $\sqrt{n_1}$下变化。这定义了复振幅平面中的一条轨迹：

$$z(\theta) \equiv \frac{\mathbb{E}[E_2 \mid E_1 = \sqrt{n_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}]}{\sqrt{n_2}} = \gamma^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \chi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}. \quad (2)$$

两个交叉矩产生反向旋转的贡献，类似于矢量场的圆分量。它们的和描绘出一个条件均值相关椭圆，如图1(a)所示。其半轴为 $A = \sqrt{a}+\sqrt{b}$和 $B = |\sqrt{a} - \sqrt{b}|$，方向为 $\psi = \arg(\gamma^* \chi)/2$，遍历方向则由 $a - b$决定。在通道强度固定时， $\Delta\delta$ 使 δ =arg($\Gamma^* C$)发生变化，会使条件均值椭圆旋转 $\Delta\delta/2$ ，而所有原有的强度矩保持不变。这是一种双场回归几何：椭圆描述了 E_2 的条件均值如何随 E_1的相位变化，而每个场单独来看仍保持圆对称高斯统计。

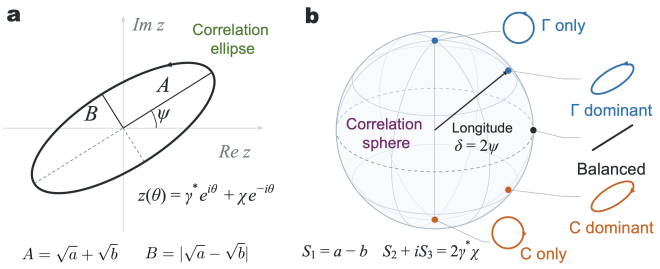


图 1. 关联几何的概念示意图。协方差和伪协方差的反向旋转分量生成了式（2）中的条件均值轨迹。二者的平衡关系及相对相位决定了椭圆和归一化相关球。两极是遍历方向相反的单通道圆；强度相等时位于赤道上，并形成一条直线。

介绍类斯托克斯相关坐标

$$S_0 = p, \qquad S_1 + \mathrm{i}S_2 = 2\gamma^* \chi, \qquad S_3 = a - b, \quad (3)$$

其满足 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_0^2$。对于 $p > 0$， $\boldsymbol{s} = (S_1, S_2, S_3)/p$ 位于单位庞加莱球面上，如图1（b）所示：经度表示 2ψ，而（北半球或南半球）则标识主导通道和遍历方向。需要注意的是，这一类比并未引入新的物理偏振，而是描绘了两个复交叉矩之间的几何关系。圆形轨迹也不意味着联合圆统计：仅含 C 的高斯关联在联合意义下是非圆的，但位于南极。振幅相等时会得到一条退化直线，仍然是 C-Γ 共存关联。回归推导以及与偏振椭圆的比较见补充材料第 S2 节。

共存的四阶见证量

图2总结了三种测量配置。令 $g_{mn} = \langle I_1^m I_2^n \rangle / (n_1^m n_2^n)$，其中 $m + n$ 是总强度阶数。理想的圆对称高斯场具有指数分布的强度，因此 $g_{m0} = m!$ 且 $g_{0n} = n!$ 。高斯因子分解得出 $g_{11} = 1 + p$， $g_{21} = g_{12} = 2 + 4p$， 以及

$$g_{22} = 4 + 16p + 4p^2 + 8ab. \quad (4)$$

直至三阶的所有矩都依赖于同一个 p，而式（4）中的平衡四阶矩则补上了缺失的乘积项：

$$\mathcal{W} \equiv g_{22} - 4g_{11}^2 - 8g_{11} + 8 = 8ab. \quad (5)$$

在规定的高斯类中， $\mathcal{W} > 0$ 是必要且充分的条件，用于 C-Γ共存。只有平衡的 $2 + 2$ 测量结果才有意义，而非平衡四阶矩 $g_{31} = g_{13} = 6+18p$ 对该乘积仍然无法揭示任何信息。补充材料的 S3.B 和 S3.C 节给出了证明。图2（a）中的球面映射采用理想混合$\sqrt{a}+\sqrt{b} = 1$，其中 $p = [1+\sqrt{1 - s_3^2}]^{-1}$。共存使 g_{11} 的值从任一极点处的 2 降至等比例混合（赤道）处的 1.5。然而， $g_{11} < 2$ 是 C-Γ共存的必要但非充分条件，并且在许多情况下都可以找到 [13–16]。

正性，$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 1$，施加了紧界$0 \leq \mathcal{W} \leq 2\min\{p^2, (1-p)^2\} \leq 1/2$。基于对 p和 $\mathcal{W}$的测量，可以确定

$$\{a, b\} = \left\{p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - \mathcal{W}/8}\right\}, \quad (6)$$

但不标注根。事实上， $E_2 \mapsto E_2^*$ ex- 会改变 Γ 和 C，同时保持每个强度样本不变。原始强度统计的任何阶数都无法消除这种歧义，任意局域相位旋转也不会改变这些统计量。在关联球面上， p和$\mathcal{W}$ 确定尺度和绝对纬度，但无法确定半球或经度。

三阶矩虽然无法单独见证共存性，但可以降低

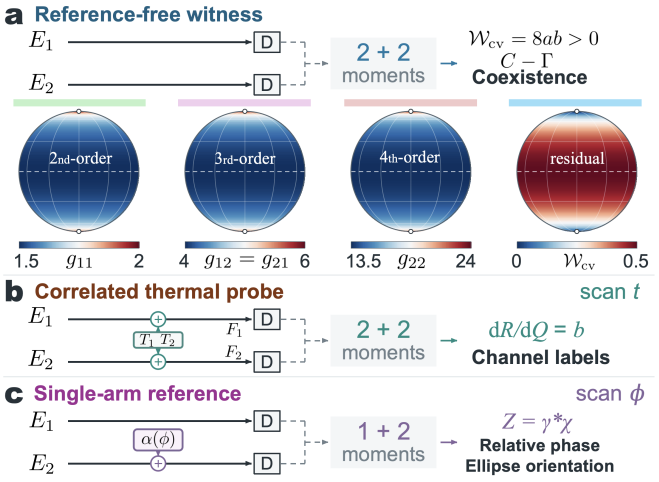


图2. 测量层级。(a) 无参考矩得出 $\mathcal{W}_{cv}$；下方的球面映射显示理想混合 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$的 g_{11}、g_{12}（g_{21}）、g_{22}和 $\mathcal{W}_{cv}$。南北极表示仅有 Γ/C 的高斯关联；虚线赤道标示强度相等。(b) 独立且相关的正规热探针通过 R–Q 斜率标示 b。(c) 单臂参考通过相位循环恢复 $Z=\gamma^*\chi$。

四阶检验中的采样噪声。通过从同一份同步记录中估计所有矩，可以构造高斯闭合残差

$\Delta_3 = g_{21} + g_{12} - 8g_{11} + 4$ 和 $\Delta_2 = g_{20} + g_{02} - 4$。它们的总体值为零，因此可作为控制变量：

$$\mathcal{W}_{cv} = \mathcal{W} - 4\Delta_3 + 2\Delta_2 \;\to 8ab. \tag{7}$$

该估计量无需额外的光学设置，即可保留相同的总体见证量。其构造和抽样不确定性推导见第 S3.F–S3.G 节。

热探测与信道识别

为将式（6）中的两个根对应到其物理信道，我们利用热涨落本身作为随机光的探针。关键在于引入具有可控关联结构的随机性。如图2(b)所示，我们将信号与一个联合正规高斯热光对 T_1、T_2叠加；该热光对内部相关，但与 E_1、E_2在统计上相互独立。记 $F_i(t) = E_i + \sqrt{t}\,T_i$，定义 $m_i = \langle |T_i|^2 \rangle$和 $d = \langle T_1 T_2^* \rangle \neq 0$，其中 $\langle T_i T_j \rangle = 0$，且探针功率缩放可调 t。由统计独立性可得 $N_i = n_i + t m_i$、$\Gamma_t = \Gamma + td$和 $C_t = C$。因此，新增的热随机性会选择性地改变协方差，同时保持伪协方差不变，从而无需相干本地振荡器即可分别识别两个通道强度。

利用归一化矩和测得的平均强度因子

$$g_{mn}^{\mathrm{th}}(t) = \frac{\langle |F_1|^{2m} |F_2|^{2n} \rangle}{N_1^m N_2^n}, \qquad \lambda(t) = \frac{N_1 N_2}{n_1 n_2}, \tag{8}$$

并定义 $\mathcal{W}_{cv}^{\mathrm{th}}$ 由方程式 (5)(7)利用 g_{mn}^{th}，我们现在构造无量纲组合

$$Q(t) = \lambda(t)[g_{11}^{\mathrm{th}}(t) - 1], \quad R(t) = \lambda(t)^2 \mathcal{W}_{cv}^{\mathrm{th}}(t)/8. \tag{9}$$

λ 的因子反映了探测引起的平均强度变化。测得的组合满足

$$R = bQ - b^2, \qquad a = Q(0) - b. \tag{10}$$

因此，R–Q 斜率可直接确定此前未标记的归一化伪协方差强度 b，而无需知道 d的复数值。由于 $Q(0) = p$，相关权重为 $w_C = b/p$ 和 $w_\Gamma = a/p = 1 - w_C$。从几何意义上看，$S_3 = Q(0) - 2b$ 现在确定了该球面的半球。详细推导请参阅补充材料S4节。

单参考椭圆层析

热探测可以确定振幅，但无法确定椭圆方向。如图2(c)所示，回到未受扰动的成对状态，并仅将一个相干参考 $\alpha(\phi)$添加到 E_2：$J_2(\phi) = |E_2 + \sqrt{P}e^{i\phi}|^2$，其参考强度已知 $P > 0$，$\rho = P/n_2$ 并调节相移 ϕ。归一化三阶强度相关为

$$g_{12}^{\mathrm{ref}}(\phi) \equiv \frac{\langle I_1 J_2(\phi)^2 \rangle}{n_1 (n_2 + P)^2} = \frac{4\rho}{(1+\rho)^2} \mathrm{Re}\left[e^{-2i\phi} \gamma^* \chi\right] + B_0 \tag{11}$$

以 $B_0 = (g_{12} + 4\rho g_{11} + \rho^2)/(1+\rho)^2$ 为背景。当两个通道同时存在时，相位相关项以 $\cos[2\phi - \arg(\gamma^*\chi)]$，的形式振荡，产生周期为 π 的条纹。因此，非零的条纹可见度提供了 C-Γ共存的参考辅助见证量（参见 S5.C节）。这种二次谐波响应源于对相干参考的二次依赖关系。其相位偏移直接决定关联椭圆方向，该方向定义为模 π。此外，在相同P 下采用四步参考相位，可以抵消与相位无关的背景，并给出

$$\begin{aligned} Z \equiv \frac{(1+\rho)^2}{8\rho} \{ & g_{12}^{\mathrm{ref}}(0) - g_{12}^{\mathrm{ref}}(\pi/2) \\ & + i\left[g_{12}^{\mathrm{ref}}(\pi/4) - g_{12}^{\mathrm{ref}}(3\pi/4)\right]\} = \gamma^* \chi. \end{aligned} \tag{12}$$

因此有 $S_1 + iS_2 = 2Z$ 和 $\psi = \arg Z/2$。结合热重构，这些量确定了椭圆尺度、轴、方向和遍历方向。仅采用单臂参考的二阶交叉强度测量不含相位相关项，因此在此配置中，三阶是第一个具有相位敏感性的混合矩。单臂参考仍无法标记这两个通道强度，因为 $E_1 \mapsto E_1^*$ ex- changes (Γ, C) 与 (C^*, Γ^*) 互换时，测得的数据和 Z 保持不变。因此，热探测恰好提供了这一缺失的标记（另见 S5.D节）。至此，理论上的测量层级得以完整：四阶

矩见证共存，热探针标记通道强度，而三阶矩借助单臂参考恢复它们的相对相位。相关椭圆将这些不同资源与双场回归几何的形状、方向和遍历方向联系起来。

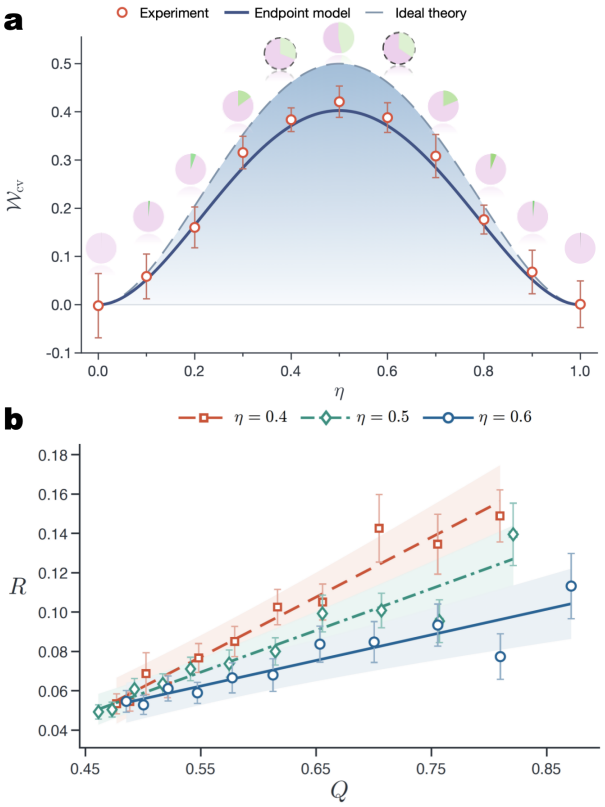


图 3. 两个通道的共存四阶探测与热识别。(a) 测得的 $\mathcal{W}_{\mathrm{cv}}$ 随协方差源功率分数 η的变化。实线（端点模型）使用在 $\eta = 0$ 和 1 处测得的 g_{11}，预测中间混合条件下的 $\mathcal{W}$。阴影区域的虚线边界表示理想预测（$u = v = 1$）。粉色和绿色区域分别显示两个通道的相对权重。(b) 对应于 (a) 中三个标出的设置进行的热探测扫描：符号表示在十一个探测功率设置下的 R-Q 值；实线为普通最小二乘拟合；阴影区域表示近似的逐点 95% 置信区间。

实验观测

为实现这一测量层级，一束扩展的相干光束照射到空间光调制器（SLM）上，该调制器依次显示一系列混合随机相位图样，从而产生一个可调节 C-Γ平衡的可编程高斯光源。每种图样都将两个统计独立的相位掩模组合起来，分别置于互补且面积相等的环带集合上：（1）中心对称随机相位图样 [34]，$\phi_{\Gamma}(\boldsymbol{r}) = \phi_{\Gamma}(-\boldsymbol{r})$，产生坐标相反处相等的傅里叶面场，并提供协方差通道；（2）二元随机相位图样，$\phi_C(\boldsymbol{r}) \in \{0, \pi\}$，产生实瞳面场，因而得到共轭傅里叶面场，从而提供伪协方差通道。环带随机分配至这两个集合，且在相位图样演变过程中保持该划分不变。光学傅里叶透镜通过 2f 系统将 SLM 平面投射到远场，并测量中心对称点组之间的强度统计涨落，以便随后计算高阶矩。通过重新分配环带，可控制两个通道的相对功率，而无需调节任一独立光源的内禀相关性。更多详情另见补充材料第 S7 节。混合分数 η 表示高斯源中 Γ 分量对探测到的平均强度所作的贡献比例，可用分配给该分量的环带面积比例近似表示。令 u 和 v 分别表示 Γ单独源分量和 C 单独源分量固定的归一化相关强度。因此，它们归一化的二阶交叉强度相关分别为 $1 + u$ 和 $1 + v$。对于两个探测模式中相同的协方差源功率分数 η，于是有 $a = u\eta^2$, $b = v(1-\eta)^2$, 和$\mathcal{W}(\eta) = 8uv\eta^2(1-\eta)^2$。

对于实验中的每个源分区 η，我们首先使用每对点对应的 10^5 个同步强度样本，分别评估十对中心对称点的 $\mathcal{W}_{\mathrm{cv}}$，每次运行总计得到 10^6 对样本。测得的见证量在两个单通道端点处均与零相符，并在 $\eta = 0.5$ [处达到 0.421 ± 0.033的峰值，见图 3(a)]。峰值低于 0.5 的理想源峰值，主要是因为 g_{11} 的 Γ 分量和 C单独分量（两个端点）均低于理想值 2。在端点校准模型中，对于每对点，我们取协方差单独端点（$\eta = 1$）处的 $u = g_{11} - 1 = 0.945$，以及伪协方差单独端点（$\eta = 0$）处的 $v = g_{11} - 1 = 0.850$；根据$\mathcal{W}(\eta) = 8uv\eta^2(1-\eta)^2$, 得到预测值 0.403。请注意，$C$-Γ 共存是直接根据混合高斯源的强度矩评估的。

在互补设置 $\eta = 0.4$和 0.6 下，测得的 $\mathcal{W}_{\mathrm{cv}}$ 几乎相等（0.384 ± 0.025 和0.388 ± 0.031）。两者都能见证 C-Γ 共存，但仅凭它们的数值无法判断各自对应哪种混合。为了区分这两种混合，我们通过一个功率可调的分束器，引入由另一台空间光调制器产生的独立偶对称伪热光束。如图3(b)所示，对R-Q扫描结果进行线性拟合后得到的伪协方差强度分别为 $b = 0.304$、0.212 和 0.130，对应的标称混合比例为 $\eta = 0.4$、0.5 和 0.6。相应的协方差强度由 $a = Q(0) - b$ 得到，分别为 0.173、0.249 和 0.355。在等比例混合附近，两种通道的强度相近；而主导贡献则从 $\eta = 0.4$ 时的伪协方差转变为 $\eta = 0.6$时的协方差。利用仅基于 C的端点校准，重建得到的协方差源功率比例$1 - \sqrt{b/v}$分别为 0.401 ± 0.028、0.500 ± 0.031和

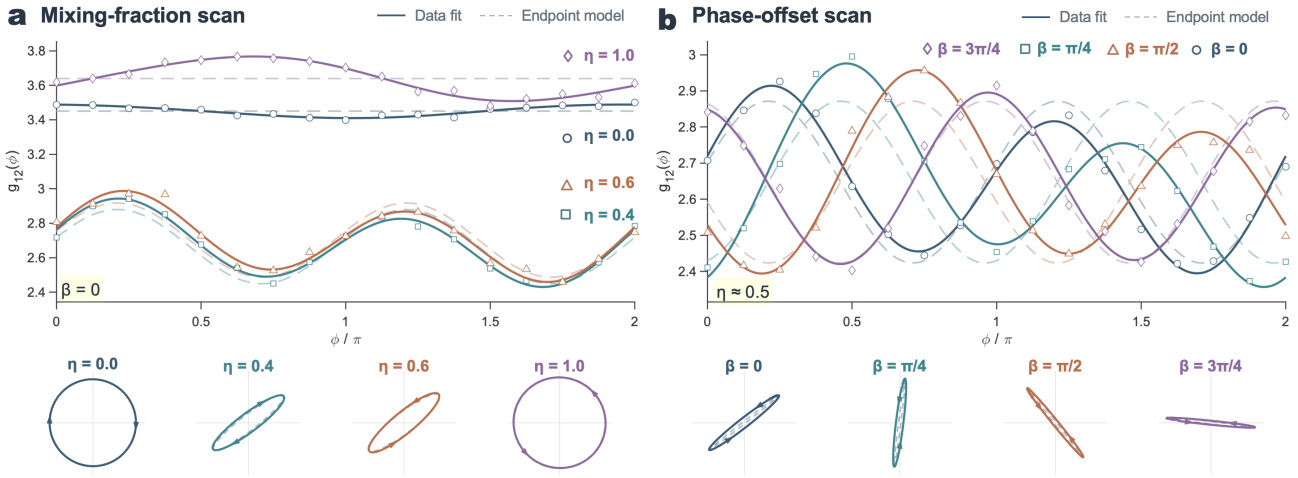


图 4. 通过 $g_{12}^{\mathrm{ref}}(\phi)$ 对八个相关椭圆进行单参考重构。(a) 在 $\beta = 0$ 处对 $\eta =$ 0 0.4 0.6 1 进行混合分数扫描。(b) 在处对 $\eta \simeq 0.5$ $\beta = 0\ \pi/4\ \pi/2\ 3\pi/4$ 进行相位偏移扫描。实线为保留一阶和二阶谐波的拟合曲线，浅色虚线为端点模型预测。下方复数 z 平面中的实线椭圆由拟合得到的背景和二阶谐波重构，并与相同模型（虚线）进行比较。

0.608 ± 0.037，与标称值一致。更多分析请参阅补充材料第 S7.B–S7.C 节。尽管端点校准为该方案提供了额外的定量检验，但无论是共存见证，还是利用热探针重建通道强度，都不需要将两个源的贡献分离并分别测量。

在确定通道强度后，我们最后展示如何通过等功率相干参考（$P = n_2$）恢复它们的相对相位。孔径将相干参考限制在检测到 E_2 的区域，使测量 E_1的中心对称区域不受参考光照射。随后，我们使用空间光调制器扫描参考相位，从 $\phi = 0$ 到 2π，间隔为 $\pi/8$。如图 4(a)所示，C-Γ 混合态呈现显著的二次谐波调制，并重构出细长的椭圆，而单通道端点则形成近乎圆形的轨迹。图4(b)固定 $\eta \simeq 0.5$，并在二元相位分量上增加均匀相位 β，即 $\phi_C(\boldsymbol{r}) \in \{\beta, \pi + \beta\}$。这会使 C 乘以 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta}$，因此模型预测在通道强度不变的情况下，椭圆旋转 β。重构结果符合这一旋转，同时长轴长度近似保持不变。这些参数在两次扫描中均保持固定。由于 $u \neq v$，相等的源分数不一定形成精确的直线。相位扫描分析和端点校准见补充材料第 S7.C–S7.D 节。

空间分辨相关椭圆纹理

接下来，我们使用数值模拟，将测量层级从固定模式对扩展到相关椭圆的空间纹理。图 5(a) 结合了两个统计独立的零均值高斯源对，即 $(E_{a1}$、$E_{a2})$ 和 $(E_{b1}$、E_{b2}。在源平面位置 tion $\boldsymbol{\rho} = (\rho, \varphi_\rho)$，其螺旋调制输出为

$$E_1 = E_{a1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell_{a1}\varphi_\rho} + E_{b1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell_{b1}\varphi_\rho},$$
$$E_2 = E_{a2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell_{a2}\varphi_\rho} + E_{b2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell_{b2}\varphi_\rho}. \tag{13}$$

该方程中的所有包络均在 $\boldsymbol{\rho}$处求值；$E_{\mu i}$表示臂 i 中、螺旋调制之前的源 μ，并包含其权重和径向光瞳。允许的源对交叉矩为协方差 Γ_a 和伪协方差 C_b；$C_a = \Gamma_b = 0$ 适用于所有源位置对。这些源对彼此独立，但每对中的成员相关。圆对称边缘随机场确保经过线性传播后得到圆对称高斯输出。探测器 1 对固定远场点进行采样，而探测器 2 则扫描，并仅向 E_2添加经校准的相干参考。

对于补充材料 S9 节中的匹配源实现，在径向光瞳为实数且空间白核相等的情况下，协方差携带荷差 $m_\Gamma = \ell_{a1} - \ell_{a2} = +2$，而伪协方差携带荷和 $m_C = \ell_{b1} + \ell_{b2} = -2$。当探测器 1 位于远场原点时，傅里叶传播给出

$$\gamma(\boldsymbol{r}) = \eta h_2(q_\perp)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi},$$
$$\chi(\boldsymbol{r}) = (1-\eta)h_2(q_\perp)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi + 2\mathrm{i}\beta}. \tag{14}$$

这里，$q_\perp = kr/f$ 中，$k = 2\pi/\lambda_0$ 为径向空间频率，η 为检测到的协方差源功率占比，h_2 为归一化径向相关振幅，而β 是两个 b源包络中均包含的公共相位。远场方位角 φ 不同于下文的源平面角度 φ_ρ 和参考相位 ϕ。局部椭圆具有

$$A = |h_2|,\ B = |2\eta - 1||h_2|,\ \psi = \beta - 2\varphi\ (\mathrm{mod}\pi). \tag{15}$$

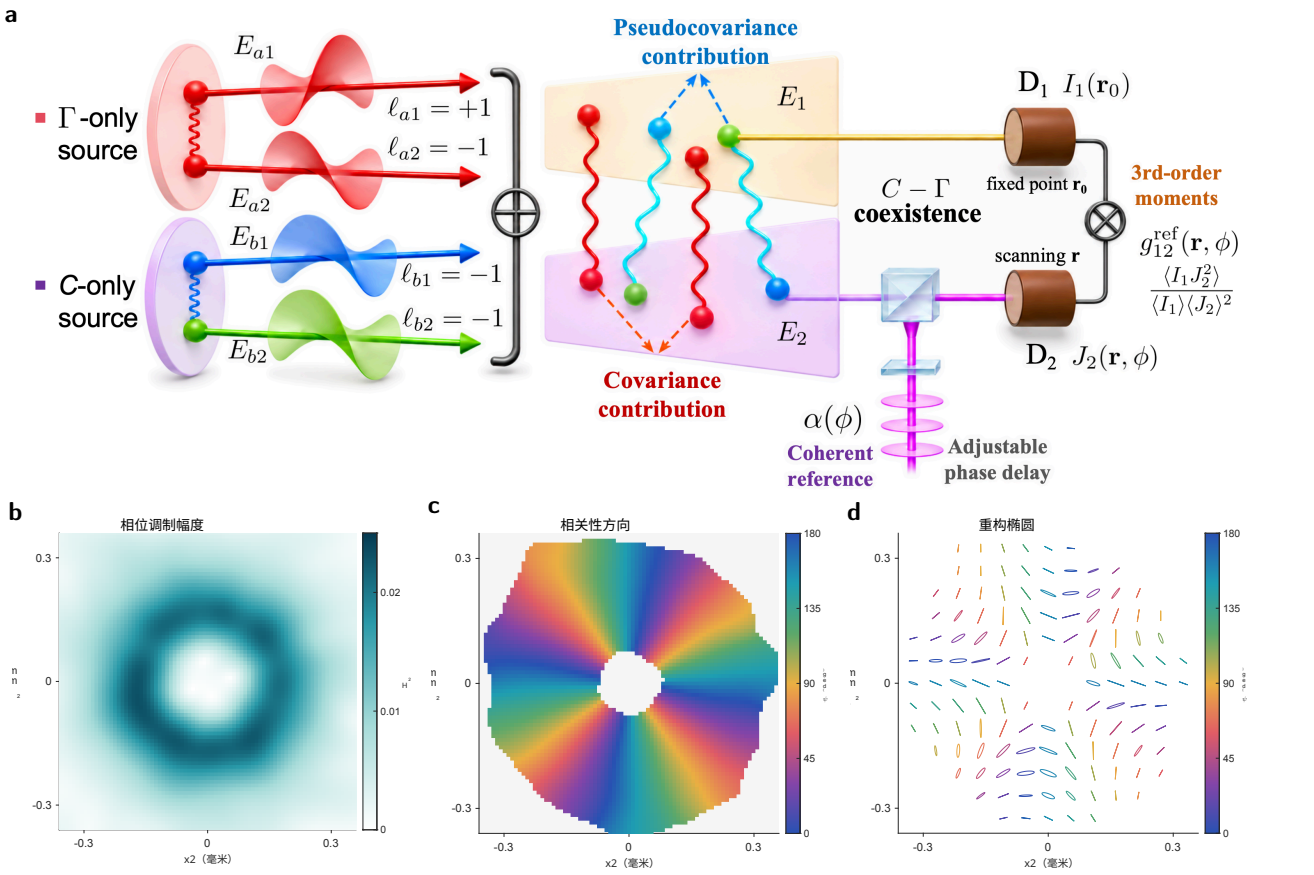


图 5. 空间分辨关联椭圆层析成像。(a) 如公式（13）所示，独立的仅含 Γ 和仅含 C 的源对叠加，其中 $(\ell_{a1},\ \ell_{a2}) = (+1,\ -1)$，且 $(\ell_{b1},\ \ell_{b2}) = (-1,\ -1)$。相干参考 $\alpha(\phi)$ 仅使臂 2 发生位移。探测器 D_1 在固定点记录 $I_1(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 = \mathbf{0})$，而 D_2 在扫描点记录 $J_2(\boldsymbol{r},\ \phi)$。成对强度给出 $g_{12}^{\mathrm{ref}}(\boldsymbol{r},\ \phi) = \langle I_1 J_2^2\rangle / \langle I_1\rangle\langle J_2\rangle^2$。面板（b–d）设定。(b) 从八个相位步进中提取的二次谐波振幅。(c) 关联椭圆方向 ψ，模 180°。(d) 重构椭圆；颜色编码 ψ，且图示半轴采用统一的显示比例。面板（c、d）保留 $H_2 > 0.2H_{2,\max}$。(d) 中的轴采用高斯约束拟合，包括直线极限 $B = 0$；由于仅凭相位扫描无法标记通道，省略遍历箭头。数值结果采用 10^6 次实现、$\eta = 1/2$ 和 $\beta = 0$。

权重相等时产生直线轨迹；权重不等时则产生方向双绕的椭圆。其几何形态对应于二阶矢量涡旋偏振纹理 [35]，其中的空间结构体现于联合标量场统计中。

在每个位置，位移后的探测器记录 $J_2(\boldsymbol{r},\ \phi) = |E_2(\boldsymbol{r}) + \sqrt{P}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|^2$。使用平坦或经相位校准的参考波前，以及 $\rho(\boldsymbol{r}) = P(\boldsymbol{r})/n_2(\boldsymbol{r})$，

$$g_{12}^{\mathrm{ref}}(\boldsymbol{r},\phi) = \frac{\langle I_1(\mathbf{0}) J_2(\boldsymbol{r},\phi)^2\rangle}{n_1(\mathbf{0})[n_2(\boldsymbol{r}) + P(\boldsymbol{r})]^2} = B_0(\boldsymbol{r}) + \frac{4\rho(\boldsymbol{r})}{[1+\rho(\boldsymbol{r})]^2}\,\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\phi}\gamma^*\chi]. \tag{16}$$

此处 $B_0 = 2 - \rho^2/(1+\rho)^2 + 4p/(1+\rho)$。相位循环在局部恢复 $Z = \gamma^*\chi$，而背景提供 $p = a + b$。二者共同确定椭圆轴和方向，热通道标记则分配其遍历方向。

对于等源权重（$\eta = 1/2$、$\beta = 0$），我们在八个参考相位下的 300×300 网格上分析 10^6 个模拟实现，$\phi_j = j\pi/4\,(j = 0,\ \ldots\ldots,\ 7)$。波长为 632.8 nm，焦距为 $f = 0.35$ m，采样横向间距为 $9\,\mu$m。参考比 $\rho(\boldsymbol{r})$ 由存储的参考功率和局部平均信号强度获得。保留一阶和二阶谐波的拟合可分离出复二阶谐波系数，从而得到 Z。

调制幅度 $H_2 = 4\rho|Z|/(1+\rho)^2$ 形成了一个半径约为 0.17 mm 的环带［图 5(b)］。其相位在 (c) 中产生双绕向方向纹理。传播程序保留了共同的菲涅尔相位，从而给出相对于参考的预测 $\psi = (2kf - \pi/2) - 2\varphi$（模 π）。在 $H_2 > 0.2H_{2,\max}$ 内，与该预测的角度均方根差为 3.1°，且未对角度偏移进行拟合。高斯-

约束拟合给出了相应的近线性椭圆纹理 [(d)]；原始短半轴平方值围绕直线极限波动，因此图中所示的轴是拟合估计值。这些图展示了单臂相位参考如何揭示出超越未受扰动强度关联强度的空间关联几何。

讨论与结论

我们通过实验制备了可编程高斯光源，并揭示了其隐藏的关联结构，从而验证了仅强度测量的 C-Γ共存见证的测量层级（通过 $\mathcal{W}_{\mathrm{cv}} > 0$）、热探针信道识别，以及对 $g_{12}(\phi)$进行相位扫描以实现单参考关联椭圆层析。未来可使用 S8 节提出的光学同相/正交调制器开展实验，通过将测得的见证量、通道强度和椭圆方向与电驱动所规定的数值进行比较，更精确地检验全部三个阶段。我们的结果区分了高斯描述在统计上的完备性与其各组成部分在实验上的可辨识性。尽管二阶场矩足以完全确定高斯统计，但解析这些场矩所需的强度关联阶数，取决于所寻求的信息和可用的探测资源。尤其值得注意的是额外热涨落的作用：受控随机探针能够揭示原始强度统计中隐藏的信息。这为统计光学提出了一种更广泛的策略：选择性扰动场矩，以区分原本在观测上等价的关联结构。

这也意味着，高斯关联在统计上的简洁性可能掩盖丰富的空间关联几何结构。图5 中的模拟通过类似于矢量涡旋偏振图样的关联椭圆纹理 [35]展示了这种可能性。它们的局部方向编码于 C 与Γ的相对相位中，而相对相位并不包含在传统的二阶强度关联信号中。因此，空间分辨层析将偏振的几何语言引入两个标量场的联合统计中，为通过空间结构化关联设计和提取光学信息开辟了一条路径用于通过空间结构化关联设计和检索光学信息。

补充材料推导了通道强度、相关椭圆和测量层级的界限（S1–S5 节）。材料还讨论了未分辨模式的探测（S6 节），记录了实验程序和不确定度（S7 节），并提出了一种采用光学同相/正交调制器的实现方案（S8 节）。S9 节给出了图5的空间模型和数值重建，包括其与偏振纹理的对应关系。S10 和 S11 节推导了采用两个相干参考的二阶读出，并比较了各测量方案所恢复的信息。

致谢

谨此感谢中国国家自然科学基金（12504411、12274037）、广东省基础与应用基础研究基金（2026A1515011704），以及澳门特别行政区科学技术发展基金（FDCT）（0105/2023/RIA2）对本研究的支持；本开放研究项目计划的研究成果由澳门特别行政区科学技术发展基金资助（档案编号：0002/2024/TFP）、粤港澳大湾区量子科学中心（GDZX2204004、GDZX2304001）及中央高校基本科研业务费专项资金资助。

利益冲突

作者没有需要披露的利益冲突。

数据可用性

支持本研究发现的数据和代码可根据合理请求从通讯作者处获取。

[1] J. W. Goodman, *Statistical Optics*第2版。（Wiley，新泽西州霍博肯，2015）。[2] R. Hanbury Brown 和 R. Q. Twiss，《相干光束中的光子之间的关联》，《自然》**177**，27（1956）。[3] D. Ferreira、R. Bachelard、W. Guerin、R. Kaiser 和 M. Fouch´e，《连接场与强度关联：西格特关系及其检验方法》，《美国物理学杂志》**88**，831（2020）。[4] F. D. Neeser 和 J. L. Massey，《应用于信息论的正规复随机过程》，《IEEE信息论汇刊》**39**，1293（1993）。[5] B. Picinbono，二阶复随机向量与正态分布，《IEEE信号处理汇刊》**44**，2637 1996( )。[6] P. J. Schreier 和 L. L. Scharf，非正规复随机向量与过程的二阶分析，《IEEE信号处理汇刊》**51**，714 (2003)。[7] B. I. Erkmen 和 J. H. Shapiro，高斯态光鬼成像的统一理论，《物理评论 A》**77**，043809 2008( )。[8] C. Verni`ere 和 H. Defienne，将图像隐藏在量子关联中，《物理评论快报》**133**，093601 (2024)。

[9] Z. Ye、C.-X. Ding、X.-J. Men、H.-B. Wang 和 J. Xiong，汉伯里·布朗-特维斯型光学秘密共享，《光学快报》32，45142 (2024)。[10] W. Hou、Z. Ye、H.-C. Liu、J. Xiong 和 K. Wang，双光子空间复用：光的高斯非圆性中的图像编码（ 2026 2610 19554 ），[ ] arXiv：物理学·光学。[11] P.-A. Lemieux 和 D. Durian，利用 n 阶强度关联函数研究非高斯散射过程，《美国光学学会杂志 A》16，1651 (1999)。[12] B. Picinbono，论圆性，《IEEE信号处理汇刊》42，3473 (1994)。[13] G. Lachs，热辐射与相干辐射混合的理论方面，《物理评论》138，B1012 (1965)。[14] A. Singer、U. Lorenz、F. Sorgenfrei、N. Gerasimova、J. Gulden、O. Yefanov、R. Kurta、A. Shabalin、R. Dronyak、R. Treusch、 *et al.*，自由电子激光器中的汉伯里·布朗-特维斯干涉测量，《物理评论快报》111，034802 (2013)。[15] H. E. Kondakci、A. Szameit、A. F. Abouraddy、D. N. Christodoulides 和 B. E. Saleh，通过对激发对称性的确定性控制，使无序晶格产生从亚热到超热的光统计特性，《光学》3，477 (2016)。[16] S. Han、N. Bender 和 H. Cao，调控三维散斑统计特性，《物理评论快报》130，093802 (2023)。[17] M. Aßmann、F. Veit、M. Bayer、M. van der Poel 和 J. M. Hvam，半导体微腔中的高阶光子聚束，《科学》325，297 (2009)。[18] M. Avenhaus、K. Laiho、M. Chekhova 和 C. Silberhorn，通过时间复用获取量子光学态中的高阶关联，《物理评论快报》104，063602 2010( )。[19] R. Dall、A. Manning、S. Hodgman、W. RuGway、K. Kheruntsyan 和 A. Truscott，大质量粒子的理想 n 体关联，《自然·物理》9，341 (2013)。[20] M. E. Pearce、T. Mehringer、J. Von Zanthier 和 P. Kok，利用高阶强度关联精密估计光源尺寸，《物理评论 A》92，043831 (2015)。[21] C. Hamsen、K. N. Tolazzi、T. Wilk 和 G. Rempe，原子驱动的腔量子电动力学系统中的双光子阻塞，《物理评论快报》118，133604 (2017)。[22] T. Schweigler、V. Kasper、S. Erne、I. Mazets、B. Rauer、F. Cataldini、T. Langen、T. Gasenzer、J. Berges 和 J. Schmiedmayer，通过高阶关联对量子多体系统进行实验表征，《自然》545，323 (2017)。[23] Q.-Y. Liang、A. V. Venkatramani、S. H. Cantu、T. L. Nicholson、M. J. Gullans、A. V. Gorshkov、J. D. Thompson, C. Chin, M. D. Lukin 和 V. Vuleti´c，《量子非线性介质中三光子束缚态的观测》，《科学》359，783（2018）。[24] T. Schweigler、M. Gluza、M. Tajik、S. Sotiriadis、F. Catal- dini、S.-C. Ji、F. S. Møller、J. Sabino、B. Rauer、J. Eisert、*et al.*，《量子多体系统中非高斯关联的衰减与复现》，《自然·物理》17，559（2021）。[25] F. Xia、S. Li、X.-Y. Pan、P. Wang 和 G.-Q. Liu，《四阶关联揭示的量子自旋浴从高斯到非高斯的转变》，《物理评论快报》134，253601（2025）。[26] C. Hotter、C. Henke、C. J. van Diepen、P. Lodahl 和 A. S. Sørensen，《基于光子关联的量子非高斯性判据》 $g^{(2)}$ 和 $g^{(3)}$，《物理评论快报》136，243601（2026）。[27] I. I. Arkhipov 和 J. Peˇrina Jr.，《利用参考孪生光束获取未知双模高斯态的协方差矩阵》，《光学通信》375，29（2016）。[28] L. Ruppert、V. C. Usenko 和 R. Filip，《宏观量子态协方差矩阵的估计》，《物理评论A》93，052114（2016）。[29] G. S. Thekkadath、S. Sempere-Llagostera、B. A. Bell、R. B. Patel、M. S. Kim 和 I. A. Walmsley，《带位移的高斯玻色采样的实验演示》，《PRX量子》3，020336（2022）。[30] P. Heinzel 和 R. Sondenheimer，《利用高阶关联函数进行基于光子统计的任意高斯态表征与重构》，《物理评论A》113，013717（2026）。[31] P. J. Schreier，《非平稳随机信号的偏振椭圆分析》，《IEEE信号处理汇刊》56，4330（2008）。[32] J. Laatikainen、A. T. Friberg、O. Korotkova 和 T. Set¨al¨a，《电磁空间相干性的庞加莱球》，《光学快报》46，2143（2021）。[33] J. Laatikainen、A. T. Friberg、O. Korotkova 和 T. Set¨al¨a，《部分偏振光束的相干庞加莱球》，《物理评论A》105，033506（2022）。[34] R.-J. He、Z. Ye、H.-C. Liu、H.-B. Wang 和 J. Xiong，《利用偶对称热光实现无标记关联自适应光学》，《APL光子学》10，126106（2025）。[35] G. Milione、H. I. Sztul、D. A. Nolan 和 R. R. Alfano，《高阶庞加莱球、斯托克斯参数与光的角动量》，《物理评论快报》107，053601（2011）。