树的乘积中的新型顶点传递四元数格族

Justin Vast

2026年11月25日

arXiv:2611.32587v1 [math.GR] 24 Nov 2026

摘要

我们描述了作用于 $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_1) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_n)$ 的无限族四元数算术格；这些格在树的笛卡尔积 $\mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n$ 的顶点上具有传递作用，其中 $\mathcal{T}_1$、……、$\mathcal{T}_n$ 是正则树。我们提出了一种算法，用于确定这些格中每一个的表示。我们还介绍了一种构造此类格的方法，使其在顶点集合上正则作用。我们通过大量具体例子阐释了我们的结果，其中包括若干已知情形的族，以及任意特征下的许多新实例。

目录

1 引言 **2**

2 预备知识 **6**

3 传递四元数格 **9**

3.1 集合 $V(\Omega)$ 9 3.2 格 $\Gamma_O(S)$ .11 3.3 由型数为 1 的阶得到的传递格.16 3.4 由型数为 > 1 的阶得到的传递格.16 3.5 构造顶点传递子群族.18

4 群表示 **20**

5 数域上的例子 **24**

5.1 $(-1,-1 \mid \mathbb{Q})$.25 5.2 $(-2,-13 \mid \mathbb{Q})$.30 5.3 $(-13,-6 \mid \mathbb{Q})$.31 5.4 $(-7-\sqrt{7},-8+3\sqrt{7} \mid \mathbb{Q}(\sqrt{7}))$. 32 5.5 $(-1,-1 \mid \mathbb{Q}(\sqrt{13}))$.33 5.6 $(-1,-1 \mid \mathbb{Q}(\sqrt{21}))$.35 5.7 $(-1,-1 \mid \mathbb{Q}(\sqrt{69}))$.37 5.8 $(-75-19\sqrt{15},-4-\sqrt{15} \mid \mathbb{Q}(\sqrt{15}))$.37

6 g 上的例子　　全局函数域 **38**

6.1 $\mathbb{F}_q(t)$ 上的四元数代数，其分歧集为 $\mathrm{Ram}(B) = \{\infty, f\}$，且 f 为 1 次不可约多项式 39

6.2 $\mathbb{F}_q(t)$ 上的四元数代数，其分歧集为 $\mathrm{Ram}(B) = \{\infty, f\}$，且 f 为 2 次不可约多项式 40

特征零下型数为一的极大阶 **45**

Justin Vast 是一名 F.R.S.-FNRS 研究员，部分经费由 FWO 和 F.R.S.-FNRS 的 EOS 计划（项目 ID 40007542）提供。

1 引言

1.1 已知结果回顾

设 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 是两个度至少为二的正则树。**BMW 群** 是 $\Gamma \leqslant$自同构群（$\mathcal{T}$） $\times$自同构群（$\mathcal{T}'$）的一个子群，它正则地作用于 $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$（即自由且传递地作用于其顶点），其中 $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ 是这些树的笛卡尔积。这三个字母 BMW 是 M. Burger、S. Mozes 和 D. Wise 姓名的首字母，他们曾对这些群进行过广泛研究。关于这些群的综述，参见 [Cap19]，，BMW 这一名称便是在该文中提出的。可以将 BMW 群的定义推广为包含任意子群 $\Gamma \leqslant$ 自同构群（$\mathcal{T}_1$） $\times \cdots \times$ 自同构群（$\mathcal{T}_n$），该子群正则地作用于 $\mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n$ 的顶点，其中 $\mathcal{T}_1$、.....、$\mathcal{T}_n$ 是正则树，且$n \geq 1$。

A. Lubotzky 在 [Lub94, Section 7.4] 中构造了一个算术 BMW 群，它作用于一棵度为 $p+1$ 的正则树；对每个模 4 同余于 1 的素数 p，均可如此构造。他的目标是给出由这些群的同余商得到的 Ramanujan图的显式实例。为此，他考虑了如下 $\mathbb{Q}$代数群 G'：

$$G'(\mathbb{Q}) = \mathrm{PGL}_1(B) = B^\times/\mathbb{Q}^\times,$$

其中 B 是 $(-1,-1 \mid \mathbb{Q})$，即定义在有理数域上的哈密顿四元数代数。该四元数代数的分歧处为 ∞ 和 2。为了恰当地定义群 $\Gamma'_S = G'(\mathbb{Z}[S^{-1}])$，即 S-整点构成的 G'，这里采用通常的 $\mathbb{Q}$-基 1、i、j、k 作为 B 的基。根据 [Lub94, Lemma 7.4.1]，，对于模 4 同余于 1 的素数 p，同余子群 $\Gamma'_p(2)$ 属于 Γ'_p，其定义为约化映射的核

$$\Gamma'_p \to G'(\mathbb{Z}[p^{-1}]/(2)),$$

恰好是无挠的，并通过包含映射在 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 的 Bruhat-Tits 树的顶点上具有正则作用

$$\Gamma'_p(2) \hookrightarrow G'(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p).$$

换言之，$\Gamma'_p(2)$ 是一个无挠 BMW 群，作用于一棵度为$p+1$的正则树上。然而，若p 模 4 同余于 3，则同余子群 $\Gamma'_p(2)$ 在 Bruhat-Tits 树上不是顶点传递的，因此不是 BMW 群。

Lubotzky 在 [Lub94, Remarks 7.4.4 (iv)] 中指出，他的构造之所以成为可能，是因为 Hurwitz 极大序

$$O = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i \oplus \mathbb{Z}j \oplus \mathbb{Z}\frac{1+i+j+k}{2}$$

的类数为一，也就是说，每个右O-理想都是主理想。事实上，他证明传递性的主要工具是雅可比四平方定理，而该定理可由O 的类数为 1 推出。该定理指出，若p 是奇素数，则恰有 $8(p+1)$个整数四元组$(a、b、c、d)$ 满足$p = a^2+b^2+c^2+d^2$。这样的四元组可视为 Lipschitz 序中的一个元素

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i \oplus \mathbb{Z}j \oplus \mathbb{Z}k \subseteq B$$

约化范数为p。接下来可以证明，由这些元素生成的子群在 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 的 Bruhat-Tits 树上顶点传递。请注意，Lubotzky 选用非极大 Lipschitz 序的一组基 1、i、j、k 来定义其 $\mathbb{Q}$-代数群的 S-整数点，而没有采用 Hurwitz 极大序的一组基。尽管如此，他的评论启发人们可以对其他四元数代数进行相同的论证，无论是在 $\mathbb{Q}$ 上（甚至是在全局域上），前提是

某个极大阶的类数为一。P. Chiu 在 [Chi92], 中采用类似的方法构造了 3-正则拉曼努金图，但使用的是$(-2,-13\mid\mathbb{Q})$上的类数为一的极大阶；该四元数代数定义在 $\mathbb{Q}$ 上，并在 ∞ 和 13 处分歧。M. Morgenstern 在 [Mor94], 中也采用了这一策略：他通过考察定义在全局函数域 $\mathbb{F}_q(t)$ 上的类数为一的极大阶，构造了更多 Ramanujan 图；该四元数代数在无穷位以及赋值$t-1$处分歧。

在其论文 [Moz95], 中，S. Mozes 研究了算术群

$$\Gamma'_{p,q}=G'(\mathbb{Z}[\{p,q\}^{-1}]),$$

它位于同一个代数群 G' 中，与 Lubotzky [Lub94], 一样，关于 B 的同一个 $\mathbb{Q}$-基 1、i、j、k, 其中 p、q 是两个不同的素数，且都模 4 同余于 1。这一次，Γ'_{pq} 通过包含映射作用于 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 与 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_q)$ 的 Bruhat-Tits 树的笛卡尔积上

$$\Gamma'_{p,q}\hookrightarrow G'(\mathbb{Q}_p)\times G'(\mathbb{Q}_q)\simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)\times \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_q).$$

Mozes 证明了，同余子群 $\Gamma'_{p,q}(2)$ 对相应 Bruhat-Tits 树的笛卡尔积的作用是一个无挠 BMW 群。此外，Mozes 群是 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ $\times\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_q)$ 中的不可约余紧格，并且其投影的闭包分别包含 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 和 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q}_q)$。

D. Rattaggi 在其论文 [Rat04], 中更进一步推广了 Mozes 的思想。具体而言，对于任意一对不同的奇素数 p 和 q（不一定模 4 同余于 1），他在 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ $\times\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_q)$ 中构造了一个无挠不可约格，该格仍然使用有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的哈密顿四元数代数中的 Lipschitz 序，并正则地作用于顶点上。与 Lubotzky 一样，他证明传递性的主要工具是雅可比四平方定理。随后，他巧妙地找到了其群的正确生成元。我们将在第 5.1 节的第一个 BMW 族中看到，这种生成元的选择源于更大的算术群上的一个同余条件。

另一项进展来自 N. Rungtanapirom、J. Stix 和 A. Vdovina[RSV19], 的工作，他们构造了若干 BMW 群族，并由同余子群得到显式的立方 Ramanujan 复形。他们也使用了$\mathbb{Q}$上的哈密顿四元数代数B，但与前人不同的是，为了定义 $\mathbb{Q}$-代数群G的S-整点，使得$G(\mathbb{Q})=B^\times/\mathbb{Q}^\times$，他们采用极大 Hurwitz 序的基 1、$i$、$j$、$(1+i+j+k)/2$，而非 Lipschitz 序的基。他们发现，任取一个由奇素数组成的有限集S，仍可得到一个 BMW 群，使其作用于 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$的 Bruhat-Tits 树之积，其中$p\in S$。更确切地说，他们在 [RSV19，命题 3.11] 中证明，同余子群 $\Gamma_S(2)$ 是 BMW 群，其中

$$\Gamma_S=G(\mathbb{Z}[S^{-1}]),$$

且 Γ_S（2）是的核

$$\Gamma_S\to G(\mathbb{Z}[S^{-1}]/(2)).$$

注意，在他们最初的工作中，Γ_S（2）并未被视为同余子群。事实上，他们选择研究 $\Gamma_{S\cup\{2\}}$；由于 2 在$\mathbb{Z}[$（$S\cup\{2\}$）$^{-1}]$中可逆，该对象在 2 处没有同余商。为了解决这一问题，他们引入了 $\Gamma_{S\cup\{2\}}$的“2进滤过”。仔细考察定义后可以发现，这个滤过恰好就是同余子群 Γ_S（2）。他们关于传递性的证明同样基于雅可比四平方定理。不过，对于 Γ_S（2）的自由作用，他们采用了不同的方法。他们利用 Prasad体积公式计算出 $c=1/24$ 的顶点余体积，并证明 Γ_S（2）的指数为 $1/c=24$：于是该子群的顶点余体积为 1。结合传递性作用可知，它必然自由作用，正如所需。

此外，他们给出了 S 满足何种条件时 Γ_S（2）为无挠群的条件，并提到，如果$S = \{p、q\}$ 满足 p、$q \equiv 1$ 模 4，则得到与 Mozes 相同的群，即 Γ_S（2） $= \Gamma'_S$（2）。

通过仿照 Rattaggi 选取生成元的方式，并沿用此前相同的代数群G，他们还发现了另一个无穷族的无挠 BMW 群 [RSV19，定理 315]，，拓展了 Rattaggi 的发现。文章中并未明确说明这一点，但正如我们将在第5.1节的第二个 BMW 族中看到的，这些 BMW 群中的每一个都是 Γ_S 中某个S的同余子群。

在 [RSV19] 和 [SV17], 中，同一批作者将相同的方法应用于四元数代数上的一个极大t-阶O, 该代数定义在 $\mathbb{F}_q(t)$ 上，并在赋值t 和 ∞处发生分歧，其中$q > 1$是任意素数幂。通过这种方式，他们也发现了新的 BMW 群。这一构造是 [Mor94], 的推广，即将对一棵树的作用推广为对树的乘积的作用。更多细节请见第6.1节。

提及 Rungtanapirom 的论文 [Run18，第 4], 章；他的主要成果之一是构造了假二次曲面。为此，他使用了一个作用于两个 3-正则树乘积上的 BMW 群，该群来自定义在 $\mathbb{F}_2(t)$ 上的四元数代数，该代数在赋值 $t + 1$ 和$t^2 + t + 1$处分歧。我们将在第 6.2 节看到，这个群属于一个无限的 BMW 群族。据我们所知，对该族的描述是全新且原创的。

总结现有研究成果，近来在 [MY26], 中，J. Mendel 和 J. Yu 从数域上全定四元数代数中类数为一的阶构造了 BMW 群族。这推广了上述所有特征零情形的成果。他们还利用同余子群给出了立方 Ramanujan 复形的新显式例子。这回应了此前提及的 Lubotzky 的评论 [Lub94，评论 7.4.4 (iv)] 。

Mendel 和 Yu 的工作与我们的工作存在一些相似之处，尽管这两项工作是在同一时期、完全独立且未经过交流的情况下开展的。不过，两者之间仍存在一些实质性差异：他们主要研究类数为一的阶，并且只在数域上开展工作；而在我们的工作中，则没有涉及构造 Ramanujan 立方复形等动力学方面的内容。

1.2 论文的主要结果与内容

本文旨在为作用于 Bruhat-Tits 树的笛卡尔积上且顶点传递地作用的算术四元数群提供一个统一理论。随后，我们利用这一理论构造这些顶点传递四元数格的有限指数子群，使其仍然传递地作用，同时还是自由作用的，因而成为 BMW 群。不过需要注意的是，一般而言，一个顶点传递四元数格未必包含一个自由作用的顶点传递子群，见第5.7节。作为推论，我们将重新得到上文提到的所有 BMW 群族，并获得许多新的例子。

我们从第2节开始，在这一节中介绍必要的预备知识。首先回顾局部域 K_v 上 $\mathrm{PGL}_2(K_v)$ 的 Bruhat-Tits 树是什么。对我们的目的而言，最恰当的定义是将顶点视为 $M_2(K_v)$ 的极大阶。随后，我们阐述关于四元数代数，尤其是其算术的一些基本结果。

接着，我们在第3节研究算术四元数格。设 B 是整体域 K上的除四元数代数，且设O 是 B中的一个极大阶。我们假设B 是全定的，即在 B 中分歧的 K—赋值的子集 $\mathrm{Ram}(B) \subseteq V^K$ 包含 V_∞^K, 即阿基米德赋值的集合。在第3.1节中，我们研究定理3.1中定义的一个算术不变集：

$$V^K(O) := \{v \in V^K \backslash \mathrm{Ram}(B) \mid v\text{—邻点均与 } O \text{ 具有相同的型}\}。$$

关于这一集合的主要结果如下。

定理 （定理 3.5）。 如果集合 V^K（O） 非空，则它有一个只依赖于 B 的显式描述，并且包含不在Ram（B）中的全正主理想素理想。

在第3.2节中，我们随后研究算术格 $\Gamma_O(S)$，它在由 $S\backslash\mathrm{Ram}(B)$ 索引的 Bruhat-Tits 树乘积上具有自然作用。我们证明如下定理。

定理(定理3.10，定理 3.14)。若$\mathrm{Ram}(B) \subseteq S$，则 $\Gamma_O(S)$ 在树的乘积$\prod_{v\in S\setminus \mathrm{Ram}(B)} \mathcal{T}_v$ 上顶点传递，当且仅当$S\setminus \mathrm{Ram}(B) \subseteq V^K(O)$。若满足这些条件，则顶点稳定子共轭于 $\Gamma_O(\mathrm{Ram}(B))$。

根据这一结果，自然有必要考察使O 的$V^K(O)$ 非空的极大阶。型数为一的极大阶是典型例子，因为根据定义，它们正是满足$V^K(O) = V^K\backslash\mathrm{Ram}(B)$ 的极大阶。M. Kirschmer和D. Lorch在数域情形下对它们进行了分类，见 [KL16]（参见定理 3.18和A节）。在正特征下，我们在本文的框架中重新表述了E.-U. Gekeler关于Drinfeld模的一个定理，见 [Gek91] （参见定理 3.20）。该定理并未给出分类，而是为特定四元数代数的型数提供了一个显式公式。

Kirschmer 和 Lorch 还对数域情形中类型数为 2 的极大阶进行了分类。在定理 3.23 中，我们找出了其中 $V^K(O)$ 非空的那些。我们还在第 3.4 节列举了一些我们发现的其他类型数为 > 2 的散例。我们不知道这类例子是否只有有限多个，但预计还会有更多。无论如何，目前看来分类似乎遥不可及。

在第 3.5 节中，我们探讨 $\Gamma_O(S)$ 是否存在仍保持顶点传递性的真子群。我们给出了一种构造这类子群的方法，使其也能自由作用，因此它们是 BMW 群。我们的构造所需的条件并非普遍成立：事实上，正如上文所述，我们将在第 5.7 节构造一些例子，其中 $\Gamma_O(S)$ 是顶点传递的，但不包含任何自由且传递作用的子群。

第 4 节专门讨论群表示。主要结果是定理 4.10，它与 [CFH$^+$15 的算法 2.6]，非常相似，但更具一般性，适用于我们的情形。它也是 [Mac64] 或 [Bro84]，中更一般结果的一个特例，不过我们利用了树的乘积的结构。

最后，在第5节和第6节中，我们给出传递四元数格的具体例子，重点首先放在数域情形下的 BMW 群，其次放在整体函数域情形下的 BMW 群。我们使用所发展的工具重新考察了所有引用的例子，并提供了更多原创例子。在这两节中，我们广泛使用了 Magma代数系统 [BCP97] 。

A节包含了对来自 [KL16]，的数域上第一类四元数代数分类的描述，以及寻找顶点传递子群所需的相关信息。

人工智能声明

未使用人工智能。

致谢

我由衷感谢 Pierre-Emmanuel Caprace 和 Franc¸ois Thilmany 对我工作的关注，以及在本项目完成过程中给予我的慷慨指导。

2 预备知识

2.1 Bruhat-Tits 树

我们回顾与整体域 K 中的非阿基米德赋值v 相对应的 **Bruhat-Tits 树** $\mathcal{T}_v$ 的构造。参见 [Ser77，第二章 § 1], [Vig80，第二章 §2] 或 [Voi21，第23节5]。

令 K_v 为 K 在 v 处的完备化，令 R_v 为其赋值环，并令 k_v 为其剩余域。$\mathcal{T}_v$ 的顶点由 $M_2(K_v)$ 的极大阶组成；当且仅当 $O_v/O_v \cap O'_v$ 与 $O'_v/O_v \cap O'_v$ 都作为 R_v-模同构于 k_v 时，两个极大阶 O_v 与 O'_v 互为邻点。以此方式构造的图是一个度为 $q_v + 1$的正则树，其中 q_v 是 k_v的基数。

也可以如下定义 $\mathcal{T}_v$ 。R_v-格 L 是 K_v^2的有限生成 R_v-子模。若 $LK_v = K_v^2$，则称其为满的；若存在 $\alpha \in K_v^\times$ 使得 $L' = \alpha L$，则称两个格 L 和 L′ 相似。设 L、L′ 为满格。由于 R_v 是离散赋值环，而 L 和 L′ 是无挠 R_v-模，根据不变因子定理，它们都是秩2的自由模。此外，可以找到 L 的一组基 $\{u, v\}$ 以及整数 k、l，使得 $\{\pi^k u、\ \pi^l v\}$ 构成 L′的一组基，其中元素 $\pi \in R_v$ 是一个素元。整数 $|k - l|$ 仅取决于 L 和 L′的相似类代表元，称为这些类之间的距离。Bruhat-Tits 树是这样一个图：其顶点是 K_v^2中满 R_v-格的相似类；当且仅当两个相似类之间的距离为 1 时，它们互为邻点。

注意到，$\mathrm{End}_{R_v}(L) = \mathrm{End}_{R_v}(L')$ 当且仅当 L 与 L′ 相似。此外，对于任意 R_v-格 L，阶 $\mathrm{End}_{R_v}(L)$ 都是极大阶；反之，给定 $M_2(K_v)$ 中的一个极大阶 O，存在一个 R_v-格 L，使得 $O = \mathrm{End}_{R_v}(L)$。$M_2(K_v)$ 中的极大阶与 K_v^2 中的格的相似类之间的这一对应关系，产生了这两种构造之间的图同构。本文将采用第一种定义。

重要的是，群 $\mathrm{PGL}_2(K_v)$ 通过共轭极大阶，在 Bruhat-Tits 树 $\mathcal{T}_v$ 上忠实地且顶点传递地作用，而顶点稳定子是 $\mathrm{PGL}_2(R_v)$的共轭子群。

2.2 四元数代数与阶

现在我们介绍本文所需的关于四元数代数与阶的结果。读者可参阅参考文献 [Vig80] 和 [Voi21]，以了解更多细节。

设 K 为一个整体域，记 V^K 为其赋值集合。若 K 是数域，令 R 为其整数环，并令 V_∞^K 为阿基米德赋值的集合。若 K 具有正特征，固定一个赋值 $v_\infty \in V^K$，并令 R 为环 $\bigcap_{v \in V^K \setminus \{v_\infty\}}(R_v \cap K)$，其中 R_v 是完备化 K_v的赋值环；随后令 V_∞^K 为 $\{v_\infty\}$。无论哪种情况，令 V_f^K为 $V^K \setminus V_\infty^K$。我们通常将 V_f^K与 R 的素理想集合等同；若 R 是主理想整环，甚至将其与 R 中的素元集合（相差一个单位元）等同。以 $K = \mathbb{F}_q(t)$ 为例，可以取 $v_\infty = -\deg$；此时，$R = \mathbb{F}_q[t]$，而 V_f^K可视为 R 上的首一不可约多项式集合。

设B 是K上的四元数代数。如果K 的特征不为 2，我们记作

$$(a, b \mid K)$$

表示基为 1、i、j、k 的四元数代数，其中$i^2 = a$、$j^2 = b$ 且$ij = k = -ji$。如果K 的特征为 2，那么

$$[a, b \mid K)$$

是一个四元数代数，其基为 1、i、j、k，满足 $i^2 + i = a$、$j^2 = b$ 以及 $ij = k = j(i + 1)$。

2.3 从局部到整体

对每个 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}^K$，固定一个嵌入 $\iota_v : \mathrm{K} \hookrightarrow \mathrm{K}_v$；对于非阿基米德赋值，该嵌入限制为一个嵌入 $\theta_v : \mathrm{R} \hookrightarrow \mathrm{R}_v$。若完备化 $\mathrm{B}_v = \mathrm{B} \otimes_{\iota_v} \mathrm{K}_v$ 是除代数，则称四元数代数 B 在赋值 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}^K$ 处分歧。否则称其为非分歧，也就是说，B_v 与 $\mathrm{M}_2(\mathrm{K}_v)$ 作为 K_v-代数同构。记 Ram(B) 为 B 的分歧赋值集合。它是一个偶基数有限集，且不包含复处。反过来，若 $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{V}^K$ 是一个不含复处的偶基数有限子集，则存在一个满足 $\mathrm{Ram(B)} = \mathrm{S}$ 的四元数代数 B。此外，两个 K 上的四元数代数同构，当且仅当它们在相同的赋值处分歧。特别地，B 与 $\mathrm{M}_2(\mathrm{K})$ 同构，当且仅当对所有 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}^K$，$\mathrm{B}_v$ 与 $\mathrm{M}_2(\mathrm{K}_v)$ 同构：这是阿尔贝特–布劳尔–哈塞–诺特定理的一个特例。参见 [Vig80，第 III 章，定理 3.1] 或 [Voi21，主定理 14.6.1，推论 14.6.5]。

B 中的阶与完备化 $\mathrm{B}_v = \mathrm{B} \otimes_{\iota_v} \mathrm{K}_v$ 中的阶之间存在局部-整体对应，其中 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}_f^K$；该对应将 B 中的一个阶 O 映射为族 $(\mathrm{O}_v)^{v \in V_f^K}$，其中 O_v 是 B_v 中的阶 $\mathrm{O} \otimes_{\theta_v} \mathrm{R}_v$。完备化族完全决定阶 O。若 O' 是 B 中的另一个阶，则族 $(\mathrm{O}_v)^{v \in V_f^K}$ 和 $(\mathrm{O}'_v)^{v \in V_f^K}$ 在几乎所有赋值处重合。反之，给定一个局部阶族 $(\mathrm{O}'_v)^{v \in V_f^K}$，其在几乎所有赋值处与 $(\mathrm{O}_v)^{v \in V_f^K}$ 重合，则存在一个在 B 中具有这些完备化的（唯一）阶 O'（参见 [Vig80，第 III 章命题 5.1]，[Voi21，定理 9.4.9]）。极大性是一个局部性质，即 O 是极大阶，当且仅当对于每个赋值 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}_f^K$，$\mathrm{O}_v$ 是极大阶（参见 [Voi21，引理 10.4.3]）。此外，每个阶都包含于某个极大阶中（参见 [Vig80，第 I 章命题 4.2], [Voi21，10.4.2]）。因此，对于 B 中任意阶 O，完备化 O_v 在几乎所有 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}_f^K$ 处都是极大阶。

2.4 极大阶集合的几何

对于在 B 中不分歧的赋值 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}_f^K$，根据定义，代数 B_v 同构于 $\mathrm{M}_2(\mathrm{K}_v)$，而 B_v 中的极大阶与 v 处 Bruhat-Tits 树的顶点相对应，正如我们在第 2.1 节中所述。另一方面，如果 v 在 B 中分歧，则 B_v 是一个除代数，并且通过对所有 $\mathrm{x} \in \mathrm{B}_v$ 定义 $\mathrm{v(x)} := \mathrm{v(Nrd(x))}/2 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$，赋值唯一延拓到 B_v，其中 Nrd 是约化范数（参见 [Vig80，第 II 章引理 1.4], [Voi21，引理 13.2.1]）。在此情形下，B_v中存在唯一的极大阶，即 $\mathrm{O}_v = \{\mathrm{x} \in \mathrm{B}_v \mid \mathrm{v(x)} \geq 0\}$（参见 [Vig80，第 II 章引理 1.5], [Voi21，命题 13.3.4]）。根据局部-整体对应，对于固定的极大阶 O，B 中的极大阶与受限直积中的顶点之间存在一个双射

$$\prod_{v \in V_f^K \setminus \mathrm{Ram}(B)}{}' \mathcal{T}_v,$$

当且仅当对于几乎所有$v \in V^K \backslash \mathrm{Ram}(B)$，全直积中的局部阶族（$O'_v$）属于受限直积，其中$O_v = O'_v$。

记号 2.1。 若T 是一个不在B中分歧的有限赋值有限集，我们将滥用记号表示

$$\prod_{v \in T} \mathcal{T}_v$$

由满足对所有$w \in V_f^K \backslash T$均有$O_w = O'_w$ 的极大**全局** 阶O' 组成的集合。注意，固定的极大阶O 在该记号中是隐含的，而选择不同的极大阶可能会得到不同的极大阶集合。若T 是单元素集 $\{v\}$，我们将简单地记为 $\mathcal{T}_v$。在这种情况下请注意， $\mathcal{T}_v$ 中的极大阶O' 是B中的阶，而不是完备化B_v中的阶。

对于在$v \in V_f^K$处不分歧的B，极大阶O 的v**-邻点** 是一个极大阶O' ，满足O'_v 是O_v 在赋值v处的 Bruhat-Tits 树 $\mathcal{T}_v$ 中的一个邻点，并且

$O'_w = O_w$ 对于每个$w \in V_f^K$，其不同于v。特别地，按照我们的记号，$O' \in \mathcal{T}_v$。v-**邻域** 是 O 的所有v-邻点的集合。v-邻域的基数等于正则树 $\mathcal{T}_v$的度，即 $|k_v| + 1$，其中k_v是K_v的剩余域。如果 $\mathfrak{p}$ 表示与赋值v对应的素R-理想，则约化范数为 $\mathfrak{p}$ 的积分右O-理想集合与O的v-邻域之间存在一个双射。该双射由下式给出

$$I \mapsto O_{\mathrm{L}}(I),$$

其中$O_{\mathrm{L}}(I) = \{\alpha \in B \mid \alpha I \subseteq I\}$ 是I 的左阶（参见 [Voi21，引理 26.4.1]）。

2.5 型数和类数

设O、O' 是四元数代数B中的阶。若O 和O' 局部同构，即对于所有赋值$v \in V_f^K$，O_v 与O'_v 作为 R_v-代数同构，则称它们属于同一个**属**。若它们作为R-代数同构，则称它们具有相同的**型**。具有相同的型意味着具有相同的属，但反之通常不成立。我们将 $\mathrm{Typ}(O)$ 记作与O具有相同属的各阶的R-代数同构类的集合。**O** 的**型数**是 $\mathrm{Typ}(O)$ 的基数，并且是有限的（参见 [Vig80，第 III 章，推论 5；5], [Voi21，推论 27.6.25]）。极大阶O 的型数统计了极大阶之间R-代数同构类的数量，因为阶O' 是极大的，当且仅当它与O局部同构。因此，我们将四元数代数B 的型数称为其任一极大阶的型数。

群 $\mathrm{PGL_1(B)} = \mathrm{B^\times/K^\times}$ 通过共轭自然地作用于 B 中各阶的集合上。若$\gamma \in \mathrm{B^\times}$ 是元素 $\mathrm{g} \in \mathrm{PGL_1(B)}$ 的一个代表元，且 O 是一个阶，我们将阶 $\gamma \mathrm{O} \gamma^{-1}$记作 $\mathrm{g} \cdot \mathrm{O}$。注意，阶之间的同构可延拓为 B 的一个自同构；由 Skolem-Noether 定理可知，两个阶具有相同的型，当且仅当它们通过四元数代数中的一个可逆元素共轭（参见[Voi21，引理 17.42]）。因此，一个阶 O 的型数对应于 $\mathrm{PGL_1(B)}$ 对与 O 具有相同属的阶的集合的作用所产生的轨道数。特别地，B 的型数就是 $\mathrm{PGL_1(B)}$ 作用于树的受限直积$\prod' \mathrm{v} \in \mathrm{V_f^K} \backslash \mathrm{Ram(B)}$ $\mathcal{T}_v$的顶点所产生的轨道数。

设O 是B中的一个阶。根据定义，两个右分式O-理想I 和J 属于同一个**右类**，当且仅当它们作为右 O-模同构。等价地，当且仅当存在 $\alpha \in B^\times$ 使得 $I = \alpha J$（参见 [Voi21，引理 17.3。3]）。我们将 $\mathrm{Cl_R}(O)$记为O的右类集，即可逆右分式O-理想的右类所组成的集合。右类集是有限的，其基数称为 O 的（右）**类数**（参见 [Voi21，主要定理 17.7。1] 以及 [Vig80，第三章定理´eor`ème 5。4]）。如果O 是极大阶——这正是本文所关注的情形——则每个右分式O-理想都是可逆的（参见 [Voi21，命题 16.1。2]）。

2.6 双边理想

设 O 是 B 中的一个极大阶。O 的分式双边理想集合在非零素双边理想集上构成一个自由阿贝尔群（参见 [Voi21，推论 18.3.5]）。我们将该群记为 Idl(O)。若存在元素 $\mathrm{x} \in \mathrm{B^\times}$，使得 $\mathrm{I} = \mathrm{xO} = \mathrm{OxO} = \mathrm{Ox}$，则称分式双边理想 I 为主理想。O 的主分式双边理想构成 Idl(O) 的一个子群，记为 PIdl(O)。类似地，分别令 Idl(R) 和 PIdl(R) 表示 R 的分式理想群和主分式理想群。我们用 Cl(K) 表示 K 的理想类群，即商 Idl(R)/ PIdl(R)。从现在起，我们始终用“理想”表示“分式理想”。

存在一个双射，其定义为

$$\{\text{Prime two-sided } O\text{-ideals}\} \to \{\text{Prime } R\text{-ideals}\}$$
$$P \mapsto P \cap R$$

（参见 [Voi21，定理 18.3.6，（18.3.7）]）。R-理想群 Idl(R) 通过将 R-理想 I 与双边 O-理想 IO 对应，嵌入 Idl(O)。若 $\mathrm{I} = \mathfrak{p}$ 是一个不整除 B 的 R-判别式 $\mathfrak{D} = \prod_{v \in \mathrm{Ram}(B) \cap V_f^K} \mathfrak{p}_v$ 的素 R-理想，则 $\mathfrak{p}\mathrm{O}$ 是满足 $\mathrm{P} \cap \mathrm{R} = \mathfrak{p}$的唯一素双边 O-理想 P。另一方面，若素理想 $\mathfrak{p}$ 整除 $\mathfrak{D}$，则存在唯一的素双边 O-理想 $\mathfrak{P}$，满足 $\mathfrak{P} \cap \mathrm{R} = \mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{P}^2 = \mathfrak{p}\mathrm{O}$，且 $\mathfrak{P} \not\in \mathrm{Idl(R)}$。本段可概括为以下正合序列

$$1 \to \mathrm{Idl}(R) \to \mathrm{Idl}(O) \to \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{D}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1,$$

其中乘积遍历所有整除 $\mathfrak{D}$ 的素 R-理想（参见 [Voi21，定理 18.3.6，（18.3.8）]）。映射

$$\mathrm{Idl}(O)/\,\mathrm{PIdl}(O) \to \{[I] \in \mathrm{Cl_R}(O) \mid O_{\mathrm{L}}(I) \simeq O\} : I \mapsto [I]$$

是集合的一个同构，其中$O_{\mathrm{L}}(I)$ 是理想I 的左阶（参见 [Voi21，引理 18.5.10]）。此外，该映射

$$\mathrm{Cl_R}(O) \to \mathrm{Typ}(O) : [I] \mapsto \text{type of } O_{\mathrm{L}}(I)$$

是满射（参见 [Voi21，引理 17.4.13]）。特别地，O 的类数大于或等于O的型数。

3 传递四元数格

如预备知识中所述，设K 为一个整体域，并记V^K 为其赋值集合。若K 是数域，令R 为其整数环，并令V_∞^K 为阿基米德赋值的集合。否则，若K具有正特征，固定一个赋值$v_\infty \in V^K$，并令R 为环 $\bigcap_{v \in V^K \setminus \{v_\infty\}} (R_v \cap \mathrm{K})$，其中$R_v$ 是完备化K_v的赋值环；随后令V_∞^K 为 $\{v_\infty\}$。在两种情况下，令V_f^K为 $V^K \setminus V_\infty^K$。

设B 是定义在K上的除四元数代数，并假设$V_\infty^K \subseteq$ 分歧集(B)。若K 是数域，则称B 为**全定**的。在此情形下可知K 是全实的。令O 为B中的一个极大（R-）阶。令S 为包含V_∞^K的有限个赋值，并定义S_0 为S ∩与分歧集(B)的交集。

我们将 $\mathrm{R}[\mathrm{S}^{-1}]$ 记作环 $\bigcap_{\mathrm{v} \in \mathrm{V}^K \setminus \mathrm{S}} (\mathrm{R}_v \cap \mathrm{K})$，即将 S 中的（有限）赋值对应的元素取逆，从而得到 R 的局部化。类似地，记号 $\mathrm{O}[\mathrm{S}^{-1}]$ 表示（极大）$\mathrm{R}[\mathrm{S}^{-1}]$-阶 $\bigcap_{\mathrm{v} \in \mathrm{V}^K \setminus \mathrm{S}} (\mathrm{O}_v \cap \mathrm{B}) \simeq \mathrm{O} \otimes_R \mathrm{R}[\mathrm{S}^{-1}]$，其位于 B 中。我们还将 $\mathrm{PGL_1(B)}$记作群 $\mathrm{B}^\times/\mathrm{K}^\times$。

3.1 集合$V^K(O)$

定义 3.1. 定义集合

$$V^K(O) := \{v \in V^K \setminus \text{分歧集}(B) \mid \text{所有} v\text{-邻点与} O \text{ 的型相同} \quad \}.$$

引理 3.2. 赋值 $v \in V^K \setminus S_0$ 属于 $V^K(O)$ 当且仅当每个阶 $O' \in \mathcal{T}_v$ 都与 O 具有相同的型。

证明。 O 的 v-邻点 O' 满足 $O\,O_w = O'_w$ 对所有赋值 $w \in V^K\backslash(S_0 \cup \{v\})$均成立，因此从右向左的蕴含显然。

对于另一个蕴含，令 $v \in V^K(O)$，并令 $O_1,\ldots,O_n$ 为 v-邻点。根据 Skolem-Noether 定理，存在元素 $g_1,\ldots,g_n \in \mathrm{PGL}_1(B)$，使得对于所有 $1 \le i \le n$，都有 $g_i \cdot O = O_i$。于是显然，由这些元素生成的子群 G 在树 $\mathcal{T}_v$ 上传递于顶点，从而证明任意 $O' \in \mathcal{T}_v$ 都与O具有相同的型。 □

备注 3.3。 回顾第2.4节，我们看到，B 中的极大阶集合是受限直积 $\prod'_{v\in V^K\backslash 分歧集(B)} \mathcal{T}_v$的顶点集。根据定理 3.2，极大阶 O 满足$V^K(O) = V^K\backslash 分歧集(B)$，当且仅当每个极大阶都与$O$同构；这又当且仅当$O$的型数为 1（参见第 2.5 节）。

引理 3.4。 设 O 和 O' 是 B 中同一型的极大阶。那么 $V^K(O) = V^K(O')$。

证明。根据 Skolem-Noether 定理，阶 O 和 O′ 共轭，因此设 $\alpha \in \mathrm{B}^\times$ 使得 $\mathrm{O}' = \alpha\mathrm{O}\alpha^{-1}$。令 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}^K(\mathrm{O})$，并令 N_v 为 O 的 v-邻域。那么 $\alpha\mathrm{N}_v\alpha^{-1} = \{\alpha\mathrm{U}\alpha^{-1} \mid \mathrm{U} \in \mathrm{N}_v\}$ 是 O′ 的 v-邻域。于是，所有 v-邻居都同构于 O 的某个邻点；由于 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}^K(\mathrm{O})$，它们也就同构于 O，并且由于 O 和 O′ 按假设同构，它们也同构于 O′。因此 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}^K(\mathrm{O}')$，这意味着 $\mathrm{V}^K(\mathrm{O}) \subseteq \mathrm{V}^K(\mathrm{O}')$。由对称性，$\mathrm{V}^K(\mathrm{O}) = \mathrm{V}^K(\mathrm{O}')$。 □

令 $\mathrm{Cl}^+(R)$ 为 R 的窄类群。这是商 $\mathrm{Idl}(R)/\mathrm{PIdl}^+(R)$，其中 $\mathrm{PIdl}^+(R)$ 是由全正元素生成的非零主分式理想子群。回忆一下，元素 $a \in K^\times$ 在所有实嵌入$v \in V_\infty^K$ 下满足 $v(a) > 0$ 时，称其为全正元素；全正元素群记作 $K^\times_{>0}$。特别地，当K 是函数域时，$\mathrm{Cl}^+(R)$ 就是通常的类群 $\mathrm{Cl}(R)$。

令 $\mathcal{I}_B^+(R)$ 为 $\mathrm{Idl}(R)$ 的子群，该子群由 $\mathrm{PIdl}^+(R)$、$\mathrm{Ram}(B) \cap V_f^K$中的素理想，以及$V^K\backslash \mathrm{Ram}(B)$中的素理想的平方生成。显然，$\mathrm{Idl}(R)/\mathcal{I}_B^+(R)$ 是一个初等阿贝尔 2-群，也是窄类群 $\mathrm{Cl}^+(R)$的一个商。

或者，也可以如下给出这个广义类群 $\mathrm{Idl}(R)/\mathcal{I}_B^+(R)$的一个幂理描述。首先将窄类群 $\mathrm{Cl}^+(R)$ 视为

$$\widehat{K}^\times/(K^\times_{>0}\widehat{R}^\times),$$

其中，$\widehat{\ }K^\times = \prod'_{v\in V_f^K} K_v^\times$是 K 的有限幂群，而 $\widehat{\ }R^\times$ 是子群 $\prod_{v\in V_f^K} R_v^\times$。群 $\mathrm{Idl}(R)/\mathcal{I}_B^+(R)$ 于是就是进一步的商

$$\widehat{K}^\times/(K^\times_{>0}\widehat{R}^\times(\widehat{K}^\times)^2 \prod_{v\in \mathrm{Ram}(B)\cap V_f^K} K_v^\times).$$

记 $\widehat{\ }B^\times$ 为 B 的有限幂群，其定义为受限直积 $\prod'_{v\in V_f^K} B_v^\times$，相对于子群$O_v^\times \leqslant B_v^\times$：

$$\widehat{B}^\times = \{(x_v)_v \in \prod_{v\in V_f^K} B_v^\times \mid x_v \in O_v^\times \text{ for all but finitely many } v \in V_f^K\}.$$

现在可以看出，$\widehat{\ }B^\times$ 中正规化 $\widehat{\ }O = \prod_{v\in V_f^K} O_v$ 的元素，其约化范数属于$\widehat{\ }R^\times(\widehat{\ }K^\times)^2\prod_{v\in \mathrm{Ram}(B)\cap V_f^K} K_v^\times \leqslant \widehat{\ }K^\times$；反过来，对于该子群中的给定元素$a$，存在$B^\times$ 中正规化O 且约化范数为a的元素。因此，

$$\widehat{R}^\times(\widehat{K}^\times)^2 \prod_{v\in \mathrm{Ram}(B)\cap V_f^K} K_v^\times = \mathrm{Nrd}(N_{\widehat{B}^\times}(\widehat{O})),$$

由此可得

$$\mathrm{Idl}(R)/\mathcal{I}_B^+(R) = \widehat{K}^\times/(K_{>0}^\times \mathrm{Nrd}(N_{\widehat{B}^\times}(\widehat{O}))).$$

这恰好是 Voight 在 [Voi21, 28.5.9] 中描述的广义类群 $\mathrm{Cl}^{GN(O)}R$。

定理 3.5. 假设 $V^K(O)$ 非空。那么

$$V^K(O) = (V^K \setminus \mathrm{Ram}(B)) \cap \mathcal{I}_B^+(R).$$

证明。设 $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}^K(\mathrm{O})$，并令 I 为约化范数为 $\mathfrak{p}$ 的整右 O-理想。I 的左阶是 O 的一个 $\mathfrak{p}$-邻点，因此根据关于 $\mathfrak{p}$ 的假设，它们具有相同的型。于是可以找到元素 $\mathrm{g} \in \mathrm{B}^\times$，使得 $\mathrm{g} \cdot \mathrm{O}$ 是 I 的左阶。因此，右 O-理想 $\mathrm{g}^{-1}\mathrm{I}$ 是一个双边 O-理想，并可分解为若干素双边 O-理想的乘积。根据素双边 O-理想的分类，其约化范数是 $\mathrm{Ram(B)} \cap \mathrm{V}_f^K$ 中素 R-理想的乘积，以及 $\mathrm{V}^K \setminus \mathrm{Ram(B)}$ 中素 R-理想的平方的乘积。特别地，$\mathrm{Nrd}(\mathrm{g}^{-1}\mathrm{I}) \in \mathcal{I}^+\mathrm{B}\ (\mathrm{R})$。另一方面，g 的约化范数是全正的，因此 $\mathrm{Nrd(g)R} \in \mathcal{I}_B^+(\mathrm{R})$。由此可得

$$\mathfrak{p} = \mathrm{Nrd}(I) = \mathrm{Nrd}(g)\,\mathrm{Nrd}(g^{-1}I) \in \mathcal{I}_B^+(R),$$

这就证明了从左到右的包含关系。

现在设 $\mathfrak{q} \in (\mathrm{V}^K \setminus \mathrm{Ram(B)}) \cap \mathcal{I}_B^+(\mathrm{R})$。我们想证明 $\mathfrak{q}$ 属于 $\mathrm{V}^K(\mathrm{O})$。根据假设，$\mathfrak{p}$ 属于 $\mathrm{V}^K(\mathrm{O})$，因此不妨设 $\mathfrak{q}$ 不同于 $\mathfrak{p}$。设 O' 是 O 的一个 $\mathfrak{q}$-邻点。存在一个约化范数为 $\mathfrak{q}$、左阶为 O'的整右 O-理想。将其右乘一个适当选取的双边 O-理想，可以得到一个右 O-理想 J，使其约化范数属于 $\mathrm{PIdl}^+(\mathrm{R})$。注意，J 的左阶同样是 O'。根据 [Vig80，第 III 章，定理 ´eor`eme 5.7]（或参见 [Voi21，推论 28.5.5]），对于 $\mathrm{S} = \mathrm{V}_\infty^K \cup \{\mathfrak{p}\}$，右 $\mathrm{O}[\mathrm{S}^{-1}]$-理想 $\mathrm{JO}[\mathrm{S}^{-1}]$ 是主理想，由某个元素 $\mathrm{x} \in \mathrm{B}^\times$生成。在局部情形下，由于 $\mathrm{O}'[\mathrm{S}^{-1}]$ 是 $\mathrm{JO}[\mathrm{S}^{-1}] = \mathrm{xO}[\mathrm{S}^{-1}]$的左 $\mathrm{R}[\mathrm{S}^{-1}]$-阶，对于所有不同于 $\mathfrak{p}$的 $\mathfrak{r} \in \mathrm{V}_f^K$，都有 $\mathrm{x} \cdot \mathrm{O}_\mathfrak{r} = \mathrm{x} \cdot (\mathrm{O}[\mathrm{S}^{-1}])_\mathfrak{r} = (\mathrm{O}'[\mathrm{S}^{-1}])_\mathfrak{r} = \mathrm{O}'_\mathfrak{r}$。考虑 U，即满足对所有 $\mathfrak{r} \in \mathrm{V}_f^K \setminus \{\mathfrak{p}\}$ 都有 $\mathrm{U}_\mathfrak{r} = \mathrm{O}_\mathfrak{r}$ 且 $\mathrm{U}_\mathfrak{p} = \mathrm{x}^{-1} \cdot \mathrm{O}_\mathfrak{p}$的极大阶。显然，$\mathrm{U} \in \mathcal{T}_\mathfrak{p}$，因此根据定理 3.2，存在 $\mathrm{y} \in \mathrm{B}^\times$ 使得 $\mathrm{U} = \mathrm{y} \cdot \mathrm{O}$。最后，再次考察局部情形可知，$(\mathrm{xy}) \cdot \mathrm{O}_\mathfrak{p} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{U}_\mathfrak{p} = \mathrm{O}_\mathfrak{p} = \mathrm{O}'_\mathfrak{p}$，并且对于所有 $\mathfrak{r} \in \mathrm{V}_f^K \setminus \{\mathfrak{p}\}$，有 $(\mathrm{xy}) \cdot \mathrm{O}_\mathfrak{r} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{U}_\mathfrak{r} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{O}_\mathfrak{r} = \mathrm{O}'_\mathfrak{r}$，也说是说 $(\mathrm{xy}) \cdot \mathrm{O} = \mathrm{O}'$。因此，阶 O 与 O' 具有相同的型。由于对于 O 的所有 $\mathfrak{q}$-邻点 O' 这都成立，所以有 $\mathfrak{q} \in \mathrm{V}^K(\mathrm{O})$，从右到左的包含关系得证。 □

推论 3.6. 如果窄类群 $\mathrm{Cl}^+(R[\text{分歧集}(B)^{-1}])$ 是平凡的，那么当且仅当 O 的型数为 1 时，$V^K(O)$ 非空。

证明. 首先，如果O 的型数为 1，那么根据定义，$V^K(O)$ 显然非空，无需对窄类群作任何假设。

反过来，$\mathrm{Cl}^+(\mathrm{R}[\text{分歧集}(\mathrm{B})^{-1}])$ 平凡这一条件可以改述为：Idl(R) 等于由 $\mathrm{PIdl}^+(\mathrm{R})$ 和分歧集 Ram(B) 中的素理想生成的子群$\cap \mathrm{V}_f^K$。特别地，这意味着 $\mathcal{I}_B^+(\mathrm{R})$ 也等于 Idl(R)。如果 $\mathrm{V}^K(\mathrm{O})$ 非空，那么根据定理 3.5，可得 $\mathrm{V}^K(\mathrm{O}) = \mathrm{V}^K \setminus$分歧集 Ram(B)，即 O 的型数为 1。 □

3.2 格 $\Gamma_O(S)$

对于每个赋值 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}^K$，完备化映射 $\iota_v : \mathrm{K} \hookrightarrow \mathrm{K}_v$ 诱导出一个群嵌入 $\mathrm{PGL}_1(\mathrm{B}) := \mathrm{B}^\times/\mathrm{K}^\times \hookrightarrow \mathrm{PGL}_1(\mathrm{B}_v) := \mathrm{B}_v^\times/\mathrm{K}_v^\times$，其中 $\mathrm{B}_v := \mathrm{B} \otimes_{\iota_v} \mathrm{K}_v$。于是，群 $\mathrm{PGL}_1(\mathrm{B})$ 对角地嵌入到阿代尔群中，该群定义为受限直积

$$\mathrm{PGL}_{1,O}(\mathcal{A}) := \prod_{v \in V^K}{}' \mathrm{PGL}_1(B_v),$$

相对于子群 $\mathrm{PGL}_1(O_v) := O_v^\times/R_v^\times$，其中 $v \in V_f^K$；以及对于 $v \in V_\infty^K$ 的 $\mathrm{PGL}_1(B_v)$。换言之，一个元素

$$(g_v)_v \in \prod_{v\in V^K} \mathrm{PGL}_1(B_v)$$

属于（完整）乘积的元素当且仅当对于几乎所有$g_v \in \mathrm{PGL}_1(O_v)$，$v \in V_f^K$。**S-整`阿代尔**群是该子群

$$\mathrm{PGL}_{1,O}(\mathcal{A}(S)) := \prod_{v\in S} \mathrm{PGL}_1(B_v) \times \prod_{v\in V^K\setminus S} \mathrm{PGL}_1(O_v),$$

由此，我们定义S**-算术群**

$$\Gamma_O(S) := \mathrm{PGL}_1(B) \cap \mathrm{PGL}_{1,O}(\mathcal{A}(S)).$$

换一种写法,

$$\Gamma_O(S) = \{g \in \mathrm{PGL}_1(B) \mid \forall v \in V^K\setminus S, g \in \mathrm{PGL}_1(O_v)\}.$$

注记 3.7。S-整阿代尔群作用于树的乘积 $\prod_{S\setminus S_0} \mathcal{T}_v$（我们回顾定理 2.1：乘积的顶点是极大全局阶，而不是极大局部阶的族）。它自然地限制为 $\Gamma_O(S)$ 在树的乘积上的作用。

引理 3.8。群 $\Gamma_O(S_0)$ 是有限的。

证明。由于 K 在其阿代尔环 $\mathcal{A}$ 中是离散的，因此 $\mathrm{PGL}_1(B)$ 在 $\mathrm{PGL}1,_O(\mathcal{A})$ 中也是离散的，从而 $\Gamma_O(S_0)$ 在 $\mathrm{PGL}1,_O(\mathcal{A}(S_0))$ 中是离散的。由于 $S_0 \subseteq \mathrm{Ram}(B)$，群 $\mathrm{PGL}_1(B_v)$ 对于 S_0 中的每个 v 都是紧的；因此，根据 Tychonoff 定理，$\mathrm{PGL}1,_O(\mathcal{A}(S_0))$ 是紧的。群 $\Gamma_O(S_0)$ 作为紧群中的离散子群，因而是有限的。

□

引理 3.9。如果 S_0 严格包含于 S 中，则群 $\Gamma_O(S)$ 是乘积$\prod_{v\in S\setminus S_0} \mathrm{PGL}_2(K_v)$中的余紧格。

证明。由于 B 是除代数，$\mathrm{PGL}_1(B)$ 作为代数 K-群是各向异性的。根据 Borel–Harish-Chandra 定理推广到任意特征的版本（例如参见 [Mar91，定理 3.2。4]），群 $\Gamma_O(S)$ 是 $\prod_{v\in S} \mathrm{PGL}_1(B_v)$ 中的余紧格。按照定义，$S_0 = S \cap \mathrm{Ram}(B)$，因此群 $\prod_{v\in S_0}\mathrm{PGL}_1(B_v)$ 是紧的；又由于根据假设 S_0 严格包含于 S 中，$\Gamma_O(S)$ 遂成为$\prod_{v\in S\setminus S_0}\mathrm{PGL}_1(B_v)$ 中的余紧格。此外，对于所有 $v \in S\setminus S_0$，都有 $v \notin \mathrm{Ram}(B)$，因此 $B_v \simeq M_2(K_v)$，且 $\prod_{v\in S\setminus S_0} \mathrm{PGL}_1(B_v) \simeq \prod_{v\in S\setminus S_0} \mathrm{PGL}_2(K_v)$。 □

引理 3.10。$\Gamma_O(S)$ 在 $\prod_{v\in S\setminus S_0} \mathcal{T}_v$ 的顶点集上的作用具有有限多个轨道，且顶点 O 的稳定子为 $\Gamma_O(S_0)$。

P证明。若 $S_0 = S$，则该引理显然成立，因此设 S_0 严格包含于 S.

根据定理 3.9，$\Gamma_O(S)$ 是 $\prod_{v\in S\setminus S_0}\mathrm{PGL}_2(K_v)$ 中的余紧格，并且由于后一个群在 $\prod_{v\in S\setminus S_0} \mathcal{T}_v$ 上余紧地作用，群 $\Gamma_O(S)$ 也在树的乘积上余紧地作用。特别地，顶点具有有限多个轨道。

根据定理 3.11，$\mathrm{PGL}_1(B)$ 作用于树的乘积时，O 的稳定子为Γ_O（分歧集（B））。而 $\Gamma_O(S)$ 作用下的O 的稳定子，便是 $\Gamma_O(S)$ 与Γ_O（分歧集（B））的交，即为 $\Gamma_O(S \cap$分歧集（B）$) = \Gamma_O(S_0)$。

□

命题 3.11。有

$$\Gamma_O(S \cup \mathrm{Ram}(B)) = \{g \in \mathrm{PGL}_1(B) \mid g \cdot O \in \prod_{v\in S\setminus S_0} \mathcal{T}_v\},$$

并且有如下形式的正合序列:

$$1 \to \Gamma_O(S) \to \Gamma_O(S \cup \mathrm{Ram}(B)) \to \prod_{v \in \mathrm{Ram}(B)\setminus S_0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

特别地，群 $\Gamma_O(S)$ 是 $\Gamma_O(S \cup \mathrm{Ram}(B))$ 的正规子群，其指数是 *2*的幂。此外，当 $\mathrm{Idl}(O[S_0^{-1}]) = \mathrm{PIdl}(O[S_0^{-1}])$时，右侧的映射是满射。

证明。我们首先证明等式 $\Gamma_O(S \cup \mathrm{Ram}(B)) = \{g \in \mathrm{PGL}_1(B) \mid g \cdot O \in \prod_{v \in S\setminus S_0} \mathcal{T}_v\}$。从左到右的包含关系显然成立，因为根据定理 3.7， $\Gamma_O(S \cup \mathrm{Ram}(B))$ 作用于树的乘积上。反之，设 $g \in \mathrm{PGL}_1(B)$ 且 $g \cdot O \in \prod_{v \in S\setminus S_0} \mathcal{T}_v$。对于所有 $v \in V^K \setminus (S \cup \mathrm{Ram}(B))$，都有 $g \cdot O_v = O_v$。由于 v 不在四元数代数处分歧，$\mathrm{PGL}_1(B_v) \simeq \mathrm{PGL}_2(K_v)$ 对 Bruhat-Tits 树 $\mathcal{T}_v$ 的作用下，O_v 的稳定子是 $\mathrm{PGL}_1(O_v)$，因此 $g \in \mathrm{PGL}_1(O_v)$，从而得到另一重包含关系。

现在我们来描述这个正合序列。对于 $v \in \mathrm{Ram}(B) \cap V_f^K$，赋值唯一地延拓为一个满射态射 $v : B_v^\times \to \frac{1}{2}\mathbb{Z}$。随后它诱导出一个满射态射 $v : \mathrm{PGL}_1(B_v) \to (\frac{1}{2}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，其核恰为 $\mathrm{PGL}_1(O_v)$。因此，群 $\mathrm{PGL}_1(O_v)$ 是 $\mathrm{PGL}_1(B_v)$中指数为 2 的正规子群，并且有如下短正合序列

$$1 \to \mathrm{PGL}_{1,O}(\mathcal{A}(S)) \to \mathrm{PGL}_{1,O}(\mathcal{A}(S \cup \mathrm{Ram}(B))) \to \prod_{v \in \mathrm{Ram}(B)\setminus S_0} \mathrm{PGL}_1(B_v)/\mathrm{PGL}_1(O_v) \to 1.$$

将 $\mathrm{PGL}_1(B)$与 S-整及 $(S \cup \mathrm{Ram}(B))$-整的阿代尔相交，即得所需的正合序列。

现在假设 $\mathrm{Idl}(O[S_0^{-1}]) = \mathrm{PIdl}(O[S_0^{-1}])$。令 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ram}(B)\setminus S_0$ 为对应于赋值 $v_\mathfrak{p}$的一个素理想，并令 $P_\mathfrak{p}$ 为满足 $P_\mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{p}$的唯一素双边 O-理想。根据假设，$O[S_0^{-1}]$-理想 $P_\mathfrak{p} O[S_0^{-1}]$ 是主理想。换言之，可以找到 I，它是 $\{P_\mathfrak{q} : \mathfrak{q} \in S_0 \cap V_f^K\}$中若干素双边 O-理想的乘积，使得 $P_\mathfrak{p} I$ 是主理想；设其等于 $aO = Oa$，其中某个 $a \in B^\times$。显然 $a \in \Gamma_O(S \cup \mathrm{Ram}(B))$，且 $v_\mathfrak{p}(a) = \frac{1}{2}$，而对于所有不同于 $\mathfrak{p}$的 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ram}(B)\setminus S_0$，$v_\mathfrak{q}(a) = 0$。因此该映射是满射的。

□

回顾第2.6节，将双边O-理想映射到其右类的映射 $I \mapsto [I]$,，诱导出一个双射

$$\mathrm{Idl}(O)/\mathrm{PIdl}(O) \to \{[I] \in \mathrm{Cl}_R(O) \mid O_L(I) \simeq O\}.$$

将其逆映射与自然商映射复合，可得到一个满射

$$\psi : \{I \in \mathrm{Idl}_R(O) \mid O_L(I) \simeq O\} \to \mathrm{Idl}(O)/\mathrm{PIdl}(O),$$

其中 $\mathrm{Idl}_R(O)$ 是（分式）可逆右O-理想的集合。

注意，如果I是一个左阶同构于O的右O-理想，而J是一个双边O-理想，那么IJ是一个左阶与I相同的右O-理想，并且有

$$\psi(IJ) = \psi(I)\psi(J).$$

此外， $\psi(I)$ 是平凡的，当且仅当I是主理想。

令 $\mathfrak{p} \in V^K(O)$，并令 $N(O, \mathfrak{p})$ 表示约化范数为 $\mathfrak{p}$ 的整右 O-理想集合。正如预备知识中的第2.4节所述，将右O-理想映射到其左阶的函数，在 $N(O, \mathfrak{p})$ 与 O 的 $\mathfrak{p}$-邻点集合之间诱导出一个双射。根据假设，有 $\mathfrak{p} \in V^K(O)$，因此对于 $N(O, \mathfrak{p})$ 中的所有 I，I 的左阶与 O具有相同的型。因此，可以考虑子群

$$\mathcal{G}(O, \mathfrak{p}) := \langle \psi(I) : I \in N(O, \mathfrak{p}) \rangle \leqslant \mathrm{Idl}(O)/\mathrm{PIdl}(O).$$

对于子集 $T \subseteq V^K(O)$，我们定义子群

$$\mathcal{G}(O,T) := \langle \mathcal{G}(O,\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in T \rangle \leqslant \mathrm{Idl}(O) / \mathrm{PIdl}(O).$$

现在回顾素两侧O-理想与素R-理想之间的映射$P \mapsto P \cap R$，该映射是一个双射。对于 $\mathfrak{p}$ 一个素 R-理想，记$P_\mathfrak{p}$ 为满足条件 $P_\mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{p}$ 的唯一素两侧O-理想。若 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ram}(B)$，则有 $P_\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}O$；否则有 $P_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}O$。

定理 3.12。 群 $\Gamma_O(S)$ 在树的乘积 $\prod_{v \in S \backslash S_0} \mathcal{T}_v$ 上顶点传递地作用，当且仅当

(1) $S \backslash S_0 \subseteq V^K(O)$并且

(2) $\mathcal{G}(O, S\backslash S_0) \leqslant \langle \mathrm{PIdl}(O), \mathrm{Idl}(R), \langle P_\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in S_0 \cap V_f^K \rangle \rangle / \mathrm{PIdl}(O)$.

证明。 记H为右侧的群，并记$v_\mathfrak{p}$为对应于素R-理想 $\mathfrak{p}$的赋值。注意，$\mathrm{Idl}(O)$ 中由 $\mathrm{Idl}(R)$ 和 $\langle P_\mathfrak{p}$ 生成的子群为满足对于所有 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ram}(B)\backslash$，其$S_0$的$P_\mathfrak{q}$-赋值均为偶数的两侧$O$-理想群：$\mathfrak{p} \in S_0 \cap V_f^K \rangle$。

首先假设 Γ_O（S）顶点传递地作用。对于每个 $\mathfrak{p} \in S \backslash S_0$ 以及 O' 的每个 $\mathfrak{p}$-邻点，存在 Γ_O（S）中的元素将 O 映射到O'。由此可知，O 与O' 共轭且具有相同的型，从而有$S \backslash S_0 \subseteq V^K$（$O$）。

接下来，我们证明包含关系 $\mathcal{G}(O, S\backslash S_0) \leqslant H$。令 $\mathfrak{p} \in S\backslash S_0$，，并令 $I \in N(O, \mathfrak{p})$；我们需要证明 $\psi(I) \in H$。I 的左阶是 O′ 的一个 $\mathfrak{p}$-邻点，因此根据假设，存在 $g \in \Gamma_O(S)$，使得 $g \cdot O = O'$。若 $a \in B^\times$ 是 g 的一个代表元，则 O′ 是右 O-理想 aO 的左阶。由于 I 与 aO 具有相同的左阶，乘积 $J := (aO)^{-1}I$ 定义良好，并且是一个双边 O-理想。

对所有素数 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ram}(B)\backslash S_0$，，由假设可知 $g \in \mathrm{PGL}_1(O_\mathfrak{q})$，因此存在一个标量$\lambda_\mathfrak{q} \in K_\mathfrak{q}^\times$，使得 $\lambda_\mathfrak{q} a \in O_\mathfrak{q}^\times$。由此可得，双边 $O_\mathfrak{q}$-理想 $JO_\mathfrak{q}$ 等于 $\lambda_\mathfrak{q} O_\mathfrak{q}$，因而是 $\mathfrak{q}O_\mathfrak{q} = (P_\mathfrak{q}O_\mathfrak{q})^2$, 的幂，所以 J 的 $P_\mathfrak{q}$-赋值为偶数。于是，理想 J 属于 $\langle \mathrm{Idl}(R), \langle P_\mathfrak{q} : \mathfrak{q} \in S_0 \cap V_f^K \rangle \rangle$。因此可得

$$\psi(I) = \psi(aO)\psi(J) = \psi(J) \in H.$$

反过来，假设 $S\backslash S_0 \subseteq V^K(O)$ 且 $\mathcal{G}(O, S\backslash S_0) \leqslant H$。设 O′ 是 O 的一个 $\mathfrak{p}$-邻点，满足 $\mathfrak{p} \in S\backslash S_0$，，并令 I 为 $N(O, \mathfrak{p})$ 中左阶为 O′的理想。由假设，$\psi(I) \in H$。因此存在一个双边 O-理想 $J \in \langle \mathrm{Idl}(R), \langle P_\mathfrak{q} : \mathfrak{q} \in S_0 \cap V_f^K \rangle \rangle$，使得 $\psi(I) = \psi(J)$。乘积 IJ^{-1} 定义良好，且是一个左阶为 O′的右 O-理想。此外，$\psi(IJ^{-1})$ 是平凡的，也就是说 IJ^{-1} 是主理想，记作 $IJ^{-1} = aO$，其中 $a \in B^\times$。记 $g \in \mathrm{PGL}_1(B)$ 为 a 模 $K^\times$所得的等价类。可知 $g \cdot O = aOa^{-1} = O'$，因此只需证明 $g \in \Gamma_O($ S)。

局部地，对于任意不同于 $\mathfrak{p}$ 的素 R-理想 $\mathfrak{q}$，有 $g \cdot O_\mathfrak{q} = O_\mathfrak{q}$。若 $\mathfrak{q} \not\in \mathrm{Ram}(B)$，则 $O_\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{q}$ 处 Bruhat-Tits 树的一个顶点，其关于 $\mathrm{PGL}_1(B_\mathfrak{q})$ 作用的稳定子为 $\mathrm{PGL}_1(O_\mathfrak{q})$，因此 $g \in \mathrm{PGL}_1(O_\mathfrak{q})$。现在假设 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ram}(B)\backslash S_0$。理想 $aO_\mathfrak{q}$ 是双边理想，且等于 $J^{-1}O_\mathfrak{q}$，其 $P_\mathfrak{q}O_\mathfrak{q}$-赋值为偶数；换言之，$aO_\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{q}O_\mathfrak{q}$ 的幂。由于 $\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}$ 是主 $R_\mathfrak{q}$-理想，因此 a 在 $K_\mathfrak{q}^\times$ 中某个标量倍的意义下是 $O_\mathfrak{q}^\times$ 的元素，从而 $g \in \mathrm{PGL}_1(O_\mathfrak{q})$。综上，有 $g \in \Gamma_O(S_0 \cup \{\mathfrak{p}\}) \leqslant \Gamma_O(S)$，如所要求。 □

推论 3.13。 若 $\mathrm{Idl}(O[S_0^{-1}]) = \mathrm{PIdl}(O[S_0^{-1}])$，则 $\Gamma_O(S)$ 在 $\prod_{v \in S \backslash S_0} \mathcal{T}_v$ 个树的乘积上顶点传递地作用，当且仅当 $S \backslash S_0 \subseteq V^K(O)$。

证明。条件 $\mathrm{Idl}(O[S_0^{-1}]) = \mathrm{PIdl}(O[S_0^{-1}])$ 等价于 Idl(O) 由 PIdl(O) 和 $\langle P_\mathfrak{p}$ 生成这一条件：$\mathfrak{p} \in S_0 \cap V_f^K \rangle$。定理 3.12 中右侧的 (2) 所对应的群于是就是整个群 Idl(O)/ PIdl(O)，并且只要 $S\backslash S_0 \subseteq V^K(O)$，$\mathcal{G}(O, S\backslash S_0)$ 自然是它的一个子群。结果立即得到。

□

推论 3.14。 如果 分歧集(B) $\subseteq S$（即，如果 S_0 = 分歧集(B)），那么 $\Gamma_O(S)$ 在树的积上顶点传递地作用，当且仅当 $S\backslash S_0 \subseteq V^K(O)$。

证明。 事实上，在这种情况下，由 Idl(R) 和 $\langle P_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \in S_0 \cap V_f^K \rangle$ 生成的群就是 Idl(O)。因此，定理 3.12 中的子群条件 (2) 便是多余的，结论随之得出。 □

人们或许会关注格 $\Gamma_S(O)$ 与“朴素”商群之间的区别

$$\mathrm{PGL}_1(O[S^{-1}]) := O[S^{-1}]^\times / R[S^{-1}]^\times.$$

下面的命题给出了一个答案。

命题 3.15。 存在一个正合序列

$$1 \to \mathrm{PGL}_1(O[S^{-1}]) \to \Gamma_O(S) \to \mathrm{PIdl}(O[S^{-1}]) / \mathrm{PIdl}(R[S^{-1}]) \to 1.$$

特别地，当 S_0 严格包含于 S 时，$\mathrm{PGL}_1(O[S^{-1}])$ 是一个算术群，也是 $\prod_{v\in S\backslash S_0} \mathrm{PGL}_2(K_v)$ 中的余紧格。

证明。若 g 是 Γ_O(S) 的一个元素，则它稳定 O[S^{-1}]，因此，对于 g 的任一代表元 a $\in B^\times$，aO[S^{-1}] 是一个双边 O[S^{-1}]-理想。模去主理想 R[S^{-1}] 后，aO[S^{-1}] 的类与 g 的代表元 a 的选取无关。此外，任一主双边 O[S^{-1}]- 理想都具有 aO[S^{-1}] 的形式，其中 a 是某个规范化 O[S^{-1}] 的元素。因此，我们有一个满群同态

$$\phi : \Gamma_O(S) \to \mathrm{PIdl}(O[S^{-1}]) / \mathrm{PIdl}(R[S^{-1}]).$$

还需证明其核为 PGL_1(O[S^{-1}])。若 a $\in$ O[S^{-1}]$^\times$，则 aO[S^{-1}] = O[S^{-1}]，这表明 PGL_1(O[S^{-1}]) 包含于该核中。反之，若 a $\in B^\times$ 是核中元素 g $\in \Gamma_O$(S) 的一个代表元，则存在主理想 R[S^{-1}]-ideal (λ)，使得 aO[S^{-1}] =λO[S^{-1}]，即 λ^{-1}a $\in$ O[S^{-1}]$^\times$，如欲证明。

由正合序列可知，群 $\mathrm{PGL}_1(O[S^{-1}])$ 是 $\Gamma_O(S)$的有限指标子群。由于根据定理 3.9，$\Gamma_O(S)$ 是 $\prod_{v\in S\backslash S_0}\mathrm{PGL}_2(K_v)$ 中的算术群和余紧格，因此 $\mathrm{PGL}_1(O[S^{-1}])$也具有同样的性质。

□

注记 3.16。 如果 Ram（B）$\subseteq S$，那么 Idl（$O[S^{-1}]$）和 Idl（$R[S^{-1}]$）是同一个群，并且

$$\mathrm{Cl}(R[S^{-1}]) = \mathrm{Idl}(O[S^{-1}]) / \mathrm{PIdl}(R[S^{-1}]).$$

特别地，定理 3.15 中的商 PIdl（$O[S^{-1}]$）/PIdl（$R[S^{-1}]$）是 $R[S^{-1}]$ 的类群的一个子群。

除了 $(-1,-1 \mid \mathbb{Q}(\sqrt{15}))$ 中的某个极大阶之外，对于目前已知的所有其他极大阶 O，其中 $V^K(O)$ 非空（这些极大阶将在下面两个小节中描述），环 $R[\mathrm{Ram}(B)^{-1}]$ 都是主理想整环。因此，下面的结果很有用。

推论 3.17。 假设 S_0 = Ram（B），且 $R[S_0{}^{-1}]$ 是主理想整环。那么 $\mathrm{PGL}_1(O[S^{-1}]) = \Gamma_O(S)$ 和 $\mathrm{PGL}_1(O[S_0{}^{-1}]) = \Gamma_O(S_0)$。

特别地，群 $\mathrm{PGL}_1(O[S^{-1}])$ 在树的乘积 $\prod_{v\in S\backslash S_0} \mathcal{T}_v$ 上顶点传递地作用，其顶点稳定子与 $\mathrm{PGL}_1(O[S_0{}^{-1}])$共轭，当且仅当 $S\backslash S_0 \subseteq V^K(O)$。

证明。 事实上，若$R[S_0{}^{-1}]$ 是主理想整环，则$R[S^{-1}]$也是主理想整环，二者的类群均为平凡群。根据定理 3.15 中的正合序列以及定理 3.16，群 $\Gamma_O(S)$ 与 $\mathrm{PGL}_1(O[S^{-1}])$ 相同；同理，群与 $\Gamma_O(S_0)$ 和 $\mathrm{PGL}_1(O[S_0{}^{-1}])$也相同。最后利用定理 3.14 即可得出结论。

□

3.3 型数为一的阶的传递格

型数为 1 的极大阶最受关注，因为根据定义，它们正是满足$V^K(O) = V^K\backslash$分歧集(B) 的极大阶（由定理 3.3 可知）；因此，对于任何包含分歧集(B)的S，群 $\Gamma_O(S)$ 根据定理 3.14 都在树的乘积 $\prod_{S\backslash S_0}\mathcal{T}_v$ 上顶点传递。对于数域K，这类阶已有完整分类。

定理 3.18（Kirschmer–Lorch [KL16]）。 在同构意义下，数域上型数为1的全定四元数代数恰有 *105* 个。

附录中列出了这些四元数代数，以及用于确定顶点传递子群的相关信息。逐一检查后，可得到以下事实。

推论 3.19。 如果 B 的型数为一且 K 是数域，那么 $R[$分歧集$(B)^{-1}]$ 是一个主理想整环。

特别地，对于任意满足 分歧集$(B) \subseteq S$ 的 S，群 $\Gamma_O(S)$ 和 $\mathrm{PGL}_1(O[S^{-1}])$ 相等，并且在树的乘积 $\prod_{S\backslash S_0}\mathcal{T}_v$ 上顶点传递地作用，其顶点稳定子与 $\Gamma_O(S_0)$ $=\mathrm{PGL}_1(O[{S_0}^{-1}])$ 共轭，这是由定理*3.17*得到的。

实际上，除了一个例子，即$B =(-75-19\sqrt{15}, -4-\sqrt{15} \mid \mathbb{Q}(\sqrt{15}))$之外，所有例子中的整数环$R$ 也是主理想环。在这种情况下，$R = \mathbb{Z}[\sqrt{15}]$ 的类群阶为 2。

在正特征情形下，Gekeler 运用 Drinfeld模理论，为某些恰有两个分歧处的四元数代数给出了型数 $|\mathrm{Typ}(O)|$ 的显式公式。

定理 3.20 (Gekeler [Gek91])。 设 $K = \mathbb{F}_q(t)$ 且 $v_\infty = -\deg$。设 $f \in \mathbb{F}_q[t]$ 为不可约首一多项式。那么，具有$\mathrm{Ram}(B)=\{v_\infty,\ v_f\}$ 的 K 上四元数代数 B 的型数为一，当且仅当$\deg(f)\in\{1,2\}$。

证明。 令$d = \deg(f)$，并令O为B中的一个极大阶。根据 [Gek91, (4.7)]，当$d \in \{1,2\}$时它等于 1。一般而言，我们有以下不等式：

$$|\mathrm{Typ}(O)| > \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{q^d-q}{q^2-1}+1\right) & \text{if } d \text{ is odd,} \\ \frac{1}{2}\frac{q^d-1}{q^2-1} & \text{if } d \text{ is even.} \end{cases}$$

由此可得，只要$(O)| > 1$，就有 |Typ。 □

3.4 型数大于 > 1 的阶所对应的传递格

正如我们将看到的，型数为 1 的极大阶并非唯一能使 $V^K(O)$ 非空的极大阶。我们先从型数为 2 的极大阶开始。

引理 3.21. 设 O 和 O' 是四元数代数 B 中两个不同构的极大阶，且其型数为2。则 $V^K(O) = V^K(O')$。

证明。设 v $\in$ V$^K\backslash$Ram(B)，且 v 不属于 V^K(O′)。根据定义，存在 O 的一个 v-邻域 U，使其不同构于 O′。由于 B 的型数为 2，U 与 O 同构，因此由定理 3.4 可得 V^K(U) = V^K(O)。由于 O′ 是 U 的一个 v-邻域，且不同构于 U，故赋值 v 不属于 V^K(U)，于是 V^K(O) $\subseteq$ V^K(O′)。由对称性，V^K(O) = V^K(O′)。

□

在上述论文中， [KL16], Kirschmer 和 Lorch 还对型数为二的数域上四元数代数中的序进行了分类。

定理 3.22 (Kirschmer–Lorch [KL16])。 在同构意义下，型数为 2 的数域上恰有 *246* 个全定四元数代数。

根据这一分类，可以得到以下结果。

命题 3.23。 在型数为 2 的数域上，恰有 3 个全定四元数代数，使得对于其中一个（因而也对于所有）极大阶 O，$V^K(O)$ 非空。它们是

$$(-1,-1 \mid \mathbb{Q}(\sqrt{3})), (-1,-1 \mid \mathbb{Q}(\sqrt{21})) \textit{ and } (-1,-1 \mid \mathbb{Q}(\zeta_{15}+\zeta_{15}^{-1})),$$

其中 ζ_{15} 是一个 15 次本原单位根。

证明。由定理 3.5 可知，若 $\mathrm{V}^K(\mathrm{O})$ 非空，则 $\mathrm{V}^K(\mathrm{O}) = (\mathrm{V}^K \setminus \mathrm{Ram(B)}) \cap \mathcal{I}_B^+(\mathrm{R})$。枚举定理 3.22 中的 246 个四元数代数，并在 $(\mathrm{V}^K \setminus \mathrm{Ram(B)}) \cap \mathcal{I}_B^+(\mathrm{R})$ 中任取一个（较小的）素理想 $\mathfrak{p}$。随后检查 O 的所有 $\mathfrak{p}$-邻点是否都与 O 同构。结果表明，在整个列表中，上述 3 个四元数代数是仅有的使 $\mathrm{V}^K(\mathrm{O})$ 非空的代数。这一检查使用 Magma [BCP97] 完成。 □

对于所有这些例子，都有 $\mathrm{Ram(B)} = \mathrm{V}_\infty^K$，因此 $\mathrm{S}_0 = \mathrm{V}_\infty^K$。此外，$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$、$\mathbb{Q}(\sqrt{21})$ 和 $\mathbb{Q}(\zeta_{15}+\bar{\zeta}_{15}^{-1})$ 的类群均为平凡群。根据定理 3.17，对于这六个阶中的每一个，群 $\Gamma_O(\mathrm{S}) = \mathrm{PGL}_1(\mathrm{O}[\mathrm{S}^{-1}])$ 在树的乘积上顶点传递地作用，当且仅当 $\mathrm{S}\setminus\mathrm{S}_0 \subseteq \mathrm{V}^K(\mathrm{O})$，且顶点稳定子与 $\Gamma_O(\mathrm{S}_0) = \mathrm{PGL}_1(\mathrm{O})$ 共轭。此外，$\Gamma_O(\mathrm{S}_0)$ 同构于

$$D_{12} \text{ and } \mathrm{Sym}(4) \text{ for the orders of } (-1,-1 \mid \mathbb{Q}(\sqrt{3})),$$
$$D_6 \text{ and } \mathrm{Alt}(4) \text{ for the orders of } (-1,-1 \mid \mathbb{Q}(\sqrt{21})),$$
$$D_{30} \text{ and } \mathrm{Alt}(5) \text{ for the orders of } (-1,-1 \mid \mathbb{Q}(\zeta_{15}+\zeta_{15}^{-1})).$$

注意，对于所有这些阶，$\mathrm{Idl}(O) = \mathrm{PIdl}(O)$，且基域的窄类群的阶均为 2。

据我们所知，在数域情形下，目前还没有关于型数为 > 2 的阶的分类。数值实验使我们认为，那些型数为 > 2 且 $V^K(O)$ 非空的极大阶相当罕见：我们只找到 9 个例子，但预计还会有更多例子存在。我们不知道对于每个特征，这类阶的数量是否有限。

定理 3.6 给出了此类阶存在性障碍的一个例子。事实上，如果该域的窄类群平凡（例如$K = \mathbb{Q}$），那么一个O 满足$V^K(O)$ 非空的极大四元数阶，其型数必为 1。

我们使用 Magma [BCP97], 测试了以下形式的四元数代数：

$$(-1,-1 \mid K)$$

对于若干全实数域，我们发现了其他有趣的例子。具体而言，若$P(X)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的不可约多项式，则由以下列表中的X给出的域为$K = \mathbb{Q}[X]/(P(X))$：

$$X^2-6, X^2-7, X^2-15, X^2-69, X^4-5X^2+5, X^4-4X^2+1,$$

$$X^4-6X^2-4X+2, X^4-2X^3-3X^2+4X+1, X^4+2X^3-7X^2-8X+1.$$

相应四元数代数的型数分别为 3、3、8、5、3、3、4、4、4。对于其中每一个，都存在一个极大阶O（在共轭意义下唯一），使得$V^K(O)$ 非空，并且 $\mathrm{Ram}(B) = V_\infty^K$ 且 $\mathrm{Idl}(O) = \mathrm{PIdl}(O)$。注意，因此当$B$ 的型数为 > 2 时，定理 3.21 不再成立。

根据定理 3.13，群 $\Gamma_O(S)$ 在树的乘积上顶点传递地作用，当且仅当$S\backslash S_0 \subseteq V^K(O)$，其稳定子根据定理 3.10 与 $\Gamma_O(S_0)$ 共轭。此外，这些稳定子分别同构于以下群：

$$D_4, \mathrm{Sym}(3), C_2 \times C_2, C_2, \mathrm{Sym}(4), D_8,$$
$$\mathrm{Sym}(3), \mathrm{Sym}(3), D_5.$$

这些域的类群均为平凡群，但对于 $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$ 而言，其阶为 2。这些域的窄类群的阶均为 2，但对于 $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$ 而言，它同构于$C_2 \times C_2$。集合$V^K(O)$的描述如下。

推论 3.24。 如果 O 是定理 *3.23* 中型数为2 的四元数代数之一中的极大阶，或者是上面刚刚给出的型数为 > 2 的9 个极大阶之一，那么

$$V^K(O) = V_f^K \cap \mathrm{PIdl}^+(R) = \{\mathfrak{p} \in V_f^K \mid \mathfrak{p} \textit{ is a totally positive principal } R\textit{-ideal}\}.$$

证明。 对于这些四元数代数中的每一个，$\mathrm{Ram}(B) = V_\infty^K$。根据定义，定理 3.5 中的群 $\mathcal{I}_B^+(R)$ 是 $\mathrm{Idl}(R)$ 的子群，由 $\mathrm{PIdl}^+(R)$ 以及V_f^K中的素理想的平方生成。但是，由于K 的窄类群都是初等阿贝尔 2-群（要么是C_2，要么是$C_2 \times C_2$），任意素理想的平方都属于 $\mathrm{PIdl}^+(R)$，因此 $\mathcal{I}_B^+(R) = \mathrm{PIdl}^+(R)$，结论由定理 3.5 得出。 □

3.5 构造顶点传递子群族

本小节旨在说明如何找到$\Gamma_O(S)$的顶点传递子群族，重点关注 BMW 子群，即正则作用的子群。

We 首先介绍两个关于传递群作用的基本引理。

引理 3.25. 设群 G 在非空集合 X 上传递地作用，且 G_0 是元素 $x \in X$ 的稳定子。设 H 是 G 的有限指标子群，H_0 是 H 在 X 上的限制作用中 x 的稳定子。那么，H 在 X 上传递，当且仅当 H 在 G 中的指数等于 H_0 在 G_0中的指数。

证明。我们有

$$|G/H| \geq |(G_0H)/H| = |G_0/(G_0 \cap H)| = |G_0/H_0|,$$

且等号成立当且仅当 $G = G_0H$，当且仅当 H 在X上传递。 □

引理 3.26. 设群 G 在非空集合 X 上传递地作用，且 G_0 是元素 $x \in X$ 的稳定子。设 $f\colon G \to$ 有理数域是满群同态，并设 A 是有理数域 Q 的一个子群。如果

$$[Q : A] = [f(G_0) : A \cap f(G_0)],$$

那么 $f^{-1}(A)$ 在 X 上传递。

证明。设 n 为指数 $[\mathrm{Q} : \mathrm{A}] = [\mathrm{f}(\mathrm{G}_0) : \mathrm{A} \cap \mathrm{f}(\mathrm{G}_0)]$。对于 $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{A})$ 在 X 上的作用，x 的稳定子是 $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{G}_0$。由于 f 是满射，子群 $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{A})$ 在 G 中的指数为 n。注意，根据基本集合论，有 $\mathrm{f}(\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{G}_0) = \mathrm{A} \cap \mathrm{f}(\mathrm{G}_0)$。

一方面，

$$[G_0 : f^{-1}(A) \cap G_0] \leq [G : f^{-1}(A)] = n.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}[G_0 : f^{-1}(A) \cap G_0] &\geq [f(G_0) : f(f^{-1}(A) \cap G_0)] \\ &= [f(G_0) : A \cap f(G_0)] = n.\end{aligned}$$

因此，根据定理 3.25，我们有 $[G_0 : f^{-1}(A) \cap G_0] = n$，这表明$f^{-1}(A)$ 借助定理 3.25 在X 上传递。 □

如前所述，在目前已知的所有具有非空 $V^K(O)$ 的极大四元数阶 O 的例子中，我们有 $\mathrm{Idl}(O[\mathrm{Ram}(B)^{-1}]) = \mathrm{PIdl}(O[\mathrm{Ram}(B)^{-1}])$。根据定理 3.14，$\Gamma_O(S)$ 当且仅当满足 $S\backslash S_0 \subseteq V^K(O)$，并附加条件 $S_0 = \mathrm{Ram}(B)$ 时，作用为顶点传递，且稳定子与 $\Gamma_O(S_0)$ 共轭。

对于所有这些已知例子，除了 $(-1,-1 \mid \mathbb{Q}(\sqrt{15}))$ 的一个极大阶之外，环 $R[\overline{\mathrm{Ram}(B)}^{-1}]$ 是主理想整环；因此，根据定理 3.17，群 $\mathrm{PGL}_1(O[S^{-1}])$ 和 $\Gamma_O(S)$ 相同，相应的顶点稳定子 $\mathrm{PGL}_1(O[S_0^{-1}])$ 和 $\Gamma_O(S_0)$ 也相等。因此，人们或许更愿意采用 $\mathrm{PGL}_1(O[S^{-1}])$ 的定义，而不是 $\Gamma_O(S)$ 的阿代尔描述。对于 $(-1,-1 \mid \mathbb{Q}(\sqrt{15}))$，有 $\mathrm{Ram}(B) = V_\infty^K = S_0$，并且由定理 3.15 中的正合序列可知，$\mathrm{PGL}_1(O[S^{-1}])$ 和 $\mathrm{PGL}_1(O)$ 在 $\Gamma_O(S)$ 和 $\Gamma_O(S_0)$ 中的指数分别为 2。

定理 3.12 中子群条件 (2) 所涉及的两个群可能随S而变化。因此，对于给定的S，这有助于证明 $\Gamma_O(S)$ 是传递的；但若要寻找S 变化而$S_0 = S \cap \mathrm{Ram}(B)$ 固定的族，则不太实用。因此，我们通常会假设

$$\mathrm{Idl}(O[S_0^{-1}]) = \mathrm{PIdl}(O[S_0^{-1}]),$$

这是一个仅取决于S_0, 且确保 $\Gamma_O(S)$ 的顶点传递性的条件，前提是$S\backslash S_0 \subseteq V^K(O)$，由定理 3.13 可得。

接下来的思路是寻找同时具有顶点传递性的同余子群。这时定理 3.26 就派上用场了。从现在起，我们假设S严格包含S_0。

令 $\mathfrak{m}$ 是R的一个非零理想，且与$S \cap V_f^K$中的素理想互素。设

$$\mathfrak{m} = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i^{e_i},$$

其中 $\mathfrak{p}_i$ 是两两互素的素理想。记

$$\pi_{\mathfrak{m}} : \mathrm{PGL}_{1,O}(\mathcal{A}(S)) \to \mathrm{PGL}_1(O/\mathfrak{m}O) \simeq \prod_{i=1}^{n} \mathrm{PGL}_1(O_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_i^{e_i} O_{\mathfrak{p}_i})$$

表示S-整数化 ad`ele 群模 $\mathfrak{m}$ 的约化映射。我们将使用如下记号

$$\Gamma_{O/\mathfrak{m}}(S) := \pi_{\mathfrak{m}}(\Gamma_O(S)),$$

作为 SL_1（B）的强逼近定理的推论，由于 S 包含一个在 B中不分歧的赋值，约化 $\Gamma_{O/\mathfrak{m}}$（S）至少包含

$$\mathrm{PSL}_1(O/\mathfrak{m}O) \simeq \prod_{i=1}^{n} \mathrm{PSL}_1(O_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_i^{e_i} O_{\mathfrak{p}_i});$$

参见 [Voi21，推论 28.5.14]。

然后，寻找 $\Gamma_{O/\mathfrak{m}}$（S）的一个子群 A，使得

$$[\Gamma_{O/\mathfrak{m}}(S) : A] = [\Gamma_{O/\mathfrak{m}}(S_0) : A \cap \Gamma_{O/\mathfrak{m}}(S_0)].$$

定理 3.26 保证 $\pi_{\mathfrak{m}}^{-1}$（A）$\cap \Gamma_O$（S）的作用是传递的，其稳定子与 $\pi_{\mathfrak{m}}^{-1}$（A）$\cap \Gamma_O$（S_0）共轭。

如果关注正则作用，可以尝试使用给定的方法，并附加限制：$[\Gamma_{O/\mathfrak{m}}$（S）：$A]$ 也是 Γ_O（S_0）的阶。换言之，态射 $\pi_{\mathfrak{m}}$ 在 Γ_O（S_0）上是单射，即 Γ_O（S_0）$\simeq \Gamma_{O/\mathfrak{m}}$（$S_0$），且 $A \cap \Gamma_{O/\mathfrak{m}}$（$S_0$）$= 1$。

注记 3.27。 如果理想 $\mathfrak{m}$ 是素数理想，则代数$O/\mathfrak{m}O$ 同构于矩阵代数M_2（$k_\mathfrak{m}$），其中$k_\mathfrak{m}$ 是 $K_\mathfrak{m}$的剩余域。于是有 PSL_1（$O/\mathfrak{m}O$） $\simeq \mathrm{PSL}_2$（$k_\mathfrak{m}$）以及 PGL_1（$O/\mathfrak{m}O$） $\simeq \mathrm{PGL}_2$（$k_\mathfrak{m}$），以及正合序列

$$1 \to \mathrm{PSL}_1(O/\mathfrak{m}O) \to \mathrm{PGL}_1(O/\mathfrak{m}O) \xrightarrow{\overline{\mathrm{Nrd}}} k_\mathfrak{m}^\times/(k_\mathfrak{m}^\times)^2 \to 1.$$

由此可知，若对所有 $x \in \Gamma_O(S)$，$\mathrm{Nrd}(x)$ 模 $\mathfrak{m}$ 是平方，则 $\Gamma_{O/\mathfrak{m}}$ 是 $\mathrm{PSL}_1(O/\mathfrak{m}O)$；否则为 $\mathrm{PGL}_1(O/\mathfrak{m}O)$。

4 群表示

本节介绍一种方法，用于求出群 $\Gamma \leqslant \prod_{k=1}^n \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_k)$ 的有限表示。该群以传递方式（从左侧）作用于局部有限树 $\mathbb{T} = \prod_{k=1}^n \mathcal{T}_k$ 的笛卡尔积的顶点上，且顶点稳定子有限。我们的结果与 [CFH+15 的算法 2.6], 类似，但更适用于我们的情形。它也是更一般结果的一个特例，这些结果见 [Mac64] 和 [Bro84]，适用于通过等距变换作用于道路连通且单连通空间的群；不过，我们利用了树的乘积的结构。

作为一个图，树的乘积并非单连通，除非是平凡情形。不过，树也可以看作一维立方复形，而 n 棵树的乘积则可以看作一个n维立方复形，它是单连通且道路连通的。Γ 在将树的乘积视为图时所施加的作用，可以延拓为将树的乘积视为立方复形时的同胚作用。

注意，对于所有 $1 \le k \le n$，由于群 Γ 通过投影到第 k 个坐标上对树 $\mathcal{T}_k$ 传递作用，该树必然是正则树，设其度为 d_k。为避免平凡情形，我们假设 d_k 至少为 1。

固定一个顶点 $x = (x_k)_{1\le k\le n}$，令 Γ_0 为 Γ的作用下 x 的稳定子。对于所有 $1 \le i \le n$，我们将 Γ_i 定义为 Γ 中固定 x_k 的子群，其中 $1 \le k \le n$ 且不同于 i。显然，$\Gamma_0 \leqslant \Gamma_i$。

对于所有 $1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n}$ 和 $1 \le \mathrm{j} \le \mathrm{d}_i$，我们将 $\mathrm{x}^{i,j} = (\mathrm{x}_{i,}{}^j{}_{\mathrm{k}})_{1\le k\le n} \in \mathbb{T}$ 记作满足以下条件的顶点：当 $\mathrm{k} \ne \mathrm{i}$ 时，$\mathrm{x}_{i,j\,\mathrm{k}} = \mathrm{x}_k$，而 $\mathrm{x}_{i,}{}^j{}_{\mathrm{i}}$ 是 $\mathcal{T}_i$中 x_i 的第 j 个邻点。由于 Γ 的作用是传递的，存在 $\mathrm{g}^{i,j} \in \Gamma$ 使得 $\mathrm{g}^{i,j} \cdot \mathrm{x} = \mathrm{x}^{i,j}$。根据定义，有 $\mathrm{g}^{i,j} \in \Gamma_i$。令 $\mathrm{S}_i = \{\mathrm{g}^{i,j} : 1 \le \mathrm{j} \le \mathrm{d}_i\}$。

以下定理由 A. M. MacBeath 于 [Mac64], 给出，提供了群Γ的一个表示。该结果没有利用 $\mathbb{T}$ 的几何结构，因此给出的表示并不十分合适。不过，它将对我们寻找更自然的表示大有帮助（参见定理 4.10）。

定理 4.1（A. M. Macbeath，1964年）。设 X 是一个非空、道路连通且单连通的拓扑空间。设 Γ 是一个通过同胚作用于 X 的群，并设 $U \subseteq X$ 是一个道路连通的开子集，使得 $X = \Gamma \cdot U$。定义

$$S = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot U \cap U \ne \emptyset\},$$

并设 S 是一个符号集合，且配有一个双射 $S \to S : s \mapsto \bar{s}$。那么 Γ 由 S 生成，且 Γ 的一个表示为 $\langle S \mid \mathcal{Q}\rangle$，其中

$$\mathcal{Q} = \{s\bar{t}(\overline{st})^{-1} : s,t \in S \mid st \in S\} \subseteq \langle \bar{S}\rangle.$$

在我们的设定中，空间 X 将是树的乘积 $\mathbb{T}$，并将其视为一个立方复形。对于每个$1 \le k \le n$，在树 $\mathcal{T}_k$ 的几何实现上赋予通常的度量 d，使任意两个

相邻顶点之间的距离均为 1。然后在树的乘积上赋予 ∞-度量 $d = d_\infty$。换言之，若 $u = (u_k)_{1\le k\le n}$ 和 $v = (v_k)_{1\le k\le n}$ 是立方复形 $\mathbb{T}$ 中的点，那么

$$d(u,v) = \max_{1\le k\le n} d(u_k, v_k).$$

注意，Γ 在 $\mathbb{T}$上等距作用。令U 为 $\mathbb{T}$ 中以x 为中心、半径为 2/3 的开球。由于 $\mathbb{T}$ 中的任意点到最近顶点的距离均为 $\leqslant 1/2$，Γ 对顶点的传递性意味着 $\mathbb{T} = \Gamma \cdot U$。与定理 4.1 中一样，记$S$ 为集合 $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot U \cap U \neq \varnothing\}$。

引理 4.2. 有

$$S = \{\gamma \in \Gamma \mid d(x, \gamma \cdot x) \le 1\},$$

且 S 的基数为 $|\Gamma_0| \cdot \prod_{k=1}^{n}(d_k + 1)$。

证明。若 $\gamma \in S$，令$u \in \gamma \cdot U \cap U$。则$d(x, \gamma \cdot x) \leqslant d(x,u) + d(u, \gamma \cdot x) < 4/3$。由于$d(x, \gamma \cdot x)$是整数，因此它为 ≤ 1。

反过来，若 γ 满足 $\mathrm{d}(\mathrm{x}, \gamma \cdot \mathrm{x}) \le 1$，则对所有 $1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n}$，都有 $\mathrm{d}(\mathrm{x}_k, \gamma \cdot \mathrm{x}_k) \le 1$。令 $\mathrm{u}_k \in \mathrm{T}_k$ 为顶点 x_k 和 $\mathrm{g} \cdot \mathrm{x}_k$之间的中点，它到两者的距离均为 $\le 1/2$。于是点 $\mathrm{u} = (\mathrm{u}_k)_{1\le k\le n}$ 既属于 U，也属于 $\gamma \cdot$U，这说明它们的交集非空，且 $\gamma \in$ S。

对于每个 $1 \le k \le n$，$\mathcal{T}_k$ 中与x_k 距离为 ≤ 1 的顶点数为$d_k + 1$。由此可知，与x 距离为 ≤ 1 的顶点数是乘积 $\prod_{k=1}^{n}(d_k + 1)$。此外，由于 Γ 在顶点集上传递，且 Γ_0 是x的稳定子，对于每个顶点y，Γ 中恰有$|\Gamma_0|$ 个元素将x 映射到y，证明完毕。 □

命题 4.3. 函数

$$(S_1 \cup \{e\}) \times \cdots \times (S_n \cup \{e\}) \times \Gamma_0 \to S,$$

将$(s_1, \ldots, s_n, \gamma_0)$ 映射到乘积 $s_1 \cdots s_n \gamma_0$ 的映射是双射。

证明。设 $\mathrm{s} \in$ S。根据定理 4.2，有 $\mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{s} \cdot \mathrm{x}) \le 1$，因此对于所有 $1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n}$，$\mathrm{d}(\mathrm{x}_k, \mathrm{s} \cdot \mathrm{x}_k) \le 1$。令 t_0 为元素 s。现在假设对于某个 $0 \le \mathrm{i} < \mathrm{n}$，$\mathrm{t}_i$ 已定义，且对于所有 $1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{i}$，都有 $\mathrm{t}_i \mathrm{x}_k = \mathrm{x}_k$；对于所有 $\mathrm{i} + 1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n}$，都有 $\mathrm{d}(\mathrm{x}_k, \mathrm{t}_i \cdot \mathrm{x}_k) \le 1$。存在唯一的 $\mathrm{s}_{i+1} \in \mathrm{S}_{i+1} \cup \{\mathrm{e}\}$，使得 $\mathrm{s}_{i+1} \cdot \mathrm{x}_{i+1} = \mathrm{t}_i \cdot \mathrm{x}_{i+1}$。定义 t_{i+1} 为 $\mathrm{s}^{-1}\, \mathrm{i}_{+1} \mathrm{t}_i$。由构造可知，$\mathrm{t}_{i+1} \cdot \mathrm{x}_{i+1} = \mathrm{x}_{i+1}$；于是对于所有 $1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{i}$，都有 $\mathrm{t}_{i+1} \cdot \mathrm{x}_k = \mathrm{s}^{-1} \mathrm{i}_{+1} \cdot \mathrm{x}_k = \mathrm{x}_k$；对于所有 $\mathrm{i} + 2 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n}$，都有 $\mathrm{d}(\mathrm{x}_k, \mathrm{t}_{i+1} \cdot \mathrm{x}_k) = \mathrm{d}(\mathrm{s}_{i+1} \cdot \mathrm{x}_k, \mathrm{t}_i \cdot \mathrm{x}_k) = \mathrm{d}(\mathrm{x}_k, \mathrm{t}_i \cdot \mathrm{x}_k) \le 1$。

元素 t_n 具有形式 $s_n^{-1} \cdots s_1^{-1} s$，其中对于所有 $1 \le k \le n$，有 $s_k \in S_k \cup \{e\}$，并且它稳定 x，因此它等于某个元素 $\gamma_0 \in \Gamma_0$。于是有 $s = s_1 \cdots s_n \gamma_0$。根据定理 4.2，集合 $(S_1 \cup \{e\}) \times \cdots \times (S_n \cup \{e\}) \times \Gamma_0$与 S 的基数相同，故可得该陈述中的函数定义良好且为双射。 □

推论 4.4。令 $1 \le i \le n$。存在唯一的函数 $\sigma_i \colon \Gamma_0 \times S_i \to S_i$ 和 $\alpha_i \colon \Gamma_0 \times S_i \to \Gamma_0$，使得对于所有 $\gamma_0 \in \Gamma_0$ 以及 $s_i \in S_i$，

$$\gamma_0 s_i = \sigma_i(\gamma_0, s_i)\alpha_i(\gamma_0, s_i).$$

证明。事实上，对于所有不同于 i 的 $1 \le k \le n$，有 $\gamma_0 s_i \cdot x_k = x_k$；而 $\gamma_0 s_i \cdot x_i$ 是 x_i的一个邻点，因此 $\gamma_0 s_i \in S$。根据定理 4.3，元素 $\gamma_0 s_i$ 可以唯一地写成命题中所示的形式 $s_1' \cdots s_n' \gamma_0'$，并且显然对于所有不同于 i 的 k，有 $s_k' = e$。 □

推论 4.5. 设 $1 \le i,j \le n$，且 $i > j$。存在唯一的函数 $\lambda_{i,j} : S_i \times S^j \to S^j$, $\mu_{i,j} : S_i \times S^j \to S_i$ 以及 $\beta_{i,j} : S_i \times S_j \to \Gamma_0$，使得对于所有 $s_i \in S_i$ 和 $s^j \in S^j$,

$$s_i s_j = \lambda_{i,j}(s_i, s_j)\mu_{i,j}(s_i, s_j)\beta_{i,j}(s_i, s_j)$$

证明. 注意到 $s_i s_j \in S$ 后，证明与定理 4.4 的证明类似。 □

引理 4.6。 设 $1 \leq i \leq n$。存在唯一的函数 $\iota_i : S_i \to S_i$ 和 $\delta_i : S_i \to \Gamma_0$，使得对所有 $s_i \in S_i$，

$$s_i \iota_i(s_i) = \delta_i(s_i).$$

此外，对所有 s_i，$t_i \in S_i$，有 $d(x,\ s_i t_i \cdot x) \leq 1$ 当且仅当 $t_i = \iota_i(s_i)$。

证明。设 $s_i \in S_i$。集合 $\{s_i t_i \cdot x_i : t_i \in S_i\}$ 是树 $\mathcal{T}_i$ 中 $s_i \cdot x_i$ 的邻点集合。因此，只有一个 $t_i \in S_i$ 使得 $s_i t_i$ 稳定 x_i，也就是说，满足 $s_i t_i \in \Gamma_0$，这证明了 ι_i 和 δ_i 的存在性与唯一性。此外，若 $t_i \in S_i$ 不等于 $\iota_i(s_i)$，则 $s_i t_i \cdot x_i$ 与 x_i 的距离为 2，从而证明 $d(x, s_i t_i \cdot x) \leq 1$ 当且仅当 $t_i = \iota_i(s_i)$。 □

注记 4.7。 由于集合 S_1,.....、S_n、Γ_0 两两不交，我们可以去掉函数 α_i、β_i、$_j$、δ_i、σ_i、$\lambda_{i,j}$、$\mu_{i,j}$、ι_i 的下标，直接写成 α、β、δ、σ、λ、μ、ι，不会引起任何混淆。

设 $\overline{\Gamma_0}$ 和 $\overline{S_k}$（$1 \leq k \leq n$）是符号集，并给定双射

$$\Gamma_0 \to \overline{\Gamma_0} : \gamma_0 \mapsto \overline{\gamma_0},$$

$$S_k \to \overline{S_k} : s_k \mapsto \overline{s_k}.$$

设 $\overline{\alpha}$、$\overline{\beta}$、$\overline{\delta}$、$\overline{\sigma}$、$\overline{\lambda}$、$\overline{\mu}$、$\overline{\iota}$ 是定义在这些新集合上的函数，分别与 α、β、δ、σ、λ、μ、ι 相对应，使图表交换。

再设

$$\langle \overline{S_0} \mid \mathcal{R}_0 \rangle$$

是有限群 Γ_0 的有限表示。设

$$\omega : \overline{\Gamma_0} \to \langle \overline{S_0} \rangle$$

是一个函数，它将 Γ_0 中的元素 γ_0 关联到由 $\overline{S_0}$ 生成的自由群中的一个字，该字在该表示中代表 γ_0。

定义

$$\overline{A} = \bigcup_{i=0}^{n} \overline{S_i},$$

$$\mathcal{R}_1 = \bigcup_{i=1}^{n} \{\overline{s}_0 \overline{s}_i [\overline{\sigma}(\overline{s}_0, \overline{s}_i)\omega(\overline{\alpha}(\overline{s}_0, \overline{s}_i))]^{-1} : \overline{s_0} \in \overline{S}_0, \overline{s_i} \in \overline{S}_i\} \subseteq \langle \overline{A} \rangle,$$

$$\mathcal{R}_2 = \bigcup_{i,j=1, i>j}^{n} \{\overline{s}_i \overline{s}_j [\overline{\lambda}(\overline{s}_i, \overline{s}_j)\overline{\mu}(\overline{s}_i, \overline{s}_j)\omega(\overline{\beta}(\overline{s}_i, \overline{s}_j))]^{-1} : \overline{s}_i \in \overline{S}_i, \overline{s}_j \in \overline{S}_j\} \subseteq \langle \overline{A} \rangle,$$

$$\mathcal{R}_3 = \bigcup_{i=1}^{n} \{\overline{s}_i \overline{\iota}(\overline{s}_i)\omega(\overline{\delta}(\overline{s}_i))^{-1} : \overline{s}_i \in \overline{S}_i\} \subseteq \langle \overline{A} \rangle,$$

$$\mathcal{R} := \bigcup_{i=0}^{3} \mathcal{R}_i \subseteq \langle \overline{A} \rangle.$$

注 4.8。 集合 $\mathcal{R}_1$、$\mathcal{R}_2$ 和 $\mathcal{R}_3$ 分别编码了在定理 4.4、定理 4.5 和定理 4.6 中观察到的 Γ 中的关系。

非正式地说，在群 $\langle A \mid \mathcal{R} \rangle$ 中，$\mathcal{R}_1$ 中的关系允许将 S_0 中的生成元与 S_i 中的生成元互换。$\mathcal{R}_2$ 中的关系允许将 S_i 中的生成元与 S_j 中的生成元互换，而 $\mathcal{R}_3$ 中的关系则允许对 S_i 中生成元的乘积作一些简化。

注记 4.9。 如果 Γ 在树的乘积上正则地作用，也就是说，如果 Γ_0 是平凡群，那么 $\mathcal{R}$ 中的关系会变得更简单。事实上，可以令 S_0 和 $\mathcal{R}_0$ 为空，$\mathcal{R}_1$ 中的关系便成为恒等式，而 $\mathcal{R}_2$ 中的关系则变为

$$\overline{s}_i\overline{s}_j(\overline{\lambda}(\overline{s}_i,\overline{s}_j)\overline{\mu}(\overline{s}_i,\overline{s}_j))^{-1},$$

而 $\mathcal{R}_3$ 中的那些变为

$$\overline{s}_i\overline{\iota}(\overline{s}_i).$$

此外，对于所有 $1 \leq i \leq n$，集合 S_i 都是唯一确定的。

定理 4.10。 Γ 的一个表示为

$$\langle \overline{A} \mid \mathcal{R} \rangle.$$

证明。 根据定理 4.4、定理 4.5 和定理 4.6，显然，该态射

$$\langle \overline{A} \rangle \to \Gamma : \overline{s}_i \in \overline{A} \mapsto s_i$$

诱导出一个态射

$$\pi : \langle \overline{A} \mid \mathcal{R} \rangle \to \Gamma.$$

根据定理 4.1，集合 S 生成 Γ，由定理 4.3 可知， π 是满射。由同一定理， Γ 的一个表示为 $\langle S \mid \mathcal{Q} \rangle$，其中

$$\mathcal{Q} = \{\overline{s}\overline{t}(\overline{st})^{-1} : s,t \in S \mid st \in S\} \subseteq \langle \overline{S} \rangle,$$

由态射 $\langle S \rangle \to \Gamma$ 诱导的同构为： $s \in S \mapsto s$。复合后，得到一个满射态射

$$\phi : \langle \overline{A} \mid \mathcal{R} \rangle \to \langle \overline{S} \mid \mathcal{Q} \rangle.$$

将关系 $\mathcal{Q}$ 中出现的每个符号 s 替换为自由群 $\langle A \rangle$ 中的一个字 $w(s)$ ，使得 $\bar{\phi}(w(s)) \equiv s$，便得到一个新的表示 $\langle \overline{A} \mid \mathcal{Q}' \rangle$，以及一个满射态射

$$\psi : \langle \overline{A} \mid \mathcal{R} \rangle \to \langle \overline{A} \mid \mathcal{Q}' \rangle.$$

由定理 4.3 可得 $w(s)$ 的一个良好选择。也就是说， 若 $s = s_1 \cdots s_n\gamma_0$ ，其中 $s_k \in S_k \cup \{e\}$ 且 $\gamma_0 \in \Gamma_0$，则定义 $w(s) = s_1 \cdots s_n\omega(\gamma_0) \in \langle A \rangle$。

我们的目标是证明该态射

$$\psi' : \langle \overline{A} \rangle \to \langle \overline{A} \mid \mathcal{R} \rangle$$

诱导出一个态射 $\langle A \mid \mathcal{Q}' \rangle \to \langle A \mid \mathcal{R} \rangle$，而它必然是 ψ 的逆态射。

设 s、$t \in S$，且 $st \in S$。我们需要证明 $\psi'(w(s)w(t)) = \psi'(w(st))$。设 $w(s) = s_1 \cdots s_n\omega(g_0)$，$w(t) = t_1 \cdots t_n\omega(h_0)$，而 $w(st) = a_1 \cdots a_n\omega(i_0)$，其中 s_k、t_k、$a_k \in S_k \cup \{e\}$，并且 $g_0, h_0, i_0 \in \Gamma_0$。

利用 $\mathcal{R}_0$、$\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$ 中的关系，可以看出 $\psi'(w(s)w(t))$ 可写成 $(u_1v_1) \cdots (u_nv_n)\omega(j_0)$ 的形式，其中 u_k、$v_k \in S_k \cup \{e\}$ 且 $j_0 \in \Gamma_0$。将 π 应用于该元素后，可得 $st = (u_1v_1) \cdots (u_nv_n)j_0$ in Γ。

有 $d(x, st \cdot x) = \max_{1 \leq k \leq n} d(x_k, u_kv_k \cdot x_k)$，根据 $st \in S$ 的假设和定理 4.2，该数为 ≤ 1。由定理 4.6，对于所有 $1 \leq k \leq n$，有 $u_k = e$，或 $v_k = e$，或 $(u_k \neq e \neq v_k$ and $v_k = \iota(u_k))$。无论哪种情况，根据 $\mathcal{R}_0$、$\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_3$ 中的关系，都可以将 $\psi'(w(s)w(t))$ 重写为 $a'_1 \cdots a'_nw(i'_0)$ 的形式，其中 $a'_k \in S_k \cup \{e\}$ and $i'_0 \in \Gamma_0$。

再次对该元素应用 π，得到 $st = a'_1 \cdots a'_ni'_0$。作为 S 的一个元素，st 根据定理 4.3 可唯一地写成这种形式。总之，由此可得 $a_1 = a'_1, \cdots, a_n = a'_n$ 以及 $i_0 = i'_0$，因此 $\psi'(w(s)w(t)) = \psi'(w(st))$，如所需

□

现在回到我们感兴趣的情形。设 $\Gamma \leqslant \Gamma_O(S)$ 是一个在树的乘积 $\mathbb{T} = \prod_{v\in S\setminus S_0} \mathcal{T}_v$ 上顶点传递作用的子群，并假设 $S_0 = \mathrm{Ram}(B)$。为了找到 Γ 的一个表示，我们需要确定顶点 x 的稳定子 Γ_0，以及$g^{i,j}$，它们是 Γ 中将 x 映到其邻点的元素。

对于x，最自然的选择是O的完备化族，即$(O_v)^{v\in S\setminus S_0}$。根据定理 3.10，$x$ 的稳定子是有限群 $\Gamma_O(S_0)\cap\Gamma$，可以很容易地将其确定。在 Magma 中，$\Gamma_O(S_0)$ 使用方法 `Normalizer(O)`计算。

现在回顾一下，对于任意 $\mathfrak{p} \in S\setminus S_0$，由约化范数为$\mathfrak{p}$ 的整右O-理想组成的集合$N(O,\mathfrak{p})$ 与O的 $\mathfrak{p}$-邻点集合之间存在双射。对于这些素理想，可以计算$N(O,\mathfrak{p})$。例如，在 Magma 中可以使用方法 `MaximalRightIdeals(O,p)`完成这一任务。

然后，给出一个由双边 O-理想组成的集合 X，使其元素代表 Idl(O)/PIdl(O) 的元素。在 Magma 中可使用方法 `TwoSidedIdealClasses(O)` 完成这一操作。如果有 $\mathrm{Idl}(O[S_0^{-1}]) = \mathrm{PIdl}(O[S_0^{-1}])$，那么可以取 X 为素双边 O-理想 $P_\mathfrak{p}$ 的乘积组成的集合，其中 $\mathfrak{p} \in S_0 \cap \mathbb{V}_f^K$。回顾一下，$P_\mathfrak{p}$ 是满足 $P_\mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{p}$ 的唯一的素双边 O-理想。在这种情况下，可以在 Magma 方法中指定可选参数 `Support` 为 $S_0 \cap \mathbb{V}_f^K$，也就是说，计算 `TwoSidedIdealClasses(O: Support := S0 ∩ V_f^K)`。

现在，对于所有 $I \in N(O,\mathfrak{p})$，都存在唯一的 $J \in X$，使得 IJ 是一个主右 O-理想，由某个 $a_I \in O$ 生成。显然，$a_I \in \Gamma_O(S)$，因为 $a_I \cdot O = a_I O a_I^{-1}$是 I 的左阶，而它是 O 的一个 $\mathfrak{p}$-邻点。这个生成元通过 Magma 中的方法`IsPrincipal(I * J)`计算。此外，如果 $\gamma \in B^\times$ 是 $\gamma_\perp \in \Gamma_O(S_0)$ 中某个元素的代表元，那么 $a_I\gamma$ 也是 IJ 的一个生成元，并且至少存在一个γ使得 $a_I\gamma \in \Gamma$。将每个 a_I 替换为 γa_I后，不妨设 γ 为平凡的。

对于 a_I's，若 $I \in N(O,\mathfrak{p})$，且 $\mathfrak{p} \in S\setminus S_0$，它们就是所求的 $g^{i,j}$'s，因此借助定理 4.10，可以计算出 Γ 的一个表示。

5 数域上的例子

在本节及下一节中，我们给出一些四元数算术格族的例子，这些格在树的乘积上正则地作用，即 BMW 群的例子，并给出其中一些群的表示。我们重新得到第 1.1 节中介绍的全部例子，同时还引入新的格族。

首先，我们陈述以下结果，这些结果将有助于证明我们构造的某些群是无挠的。

引理 5.1。设 $\Gamma \leqslant \prod_{k=1}^n$自同构群$(\mathcal{T}_k)$ 是一个 *BMW* 群。若 $\gamma \in \Gamma$ 具有有限阶，则 $\gamma^2 = 1$。

证明。群 Γ 通过投影分别作用于每棵树上。若 $\gamma \in \Gamma$ 具有有限阶，则 γ 在每棵树中稳定一个顶点或一条边。无论哪种情况，γ^2 都会在每棵树中稳定一个顶点，因此它在树的乘积中稳定一个顶点。由于 Γ 在乘积的顶点集上的作用是自由的，元素 γ^2 是平凡的。 □

引理 5.2. 设 $x \in B^\times$，并假设 特征$(K) \neq 2$。那么，x 在 $\mathrm{PGL}_1(B)$ 中的阶为2，当且仅当其约化迹为零。

证明。若 $x \in K^\times$，则 x 在 $\mathrm{PGL}_1(B)$ 中的阶为 1，且 $\mathrm{Trd}(x) = 2x \neq 0$，因此等价性成立。现在假设 $x \not\in K^\times$，那么 x 在 $\mathrm{PGL}_1(B)$ 中的阶为 2，当且仅当 $x^2 \in K^\times$。于是有

$$x^2 - \mathrm{Trd}(x)x + \mathrm{Nrd}(x) = 0, \text{ i.e. } x^2 = \mathrm{Trd}(x)x - \mathrm{Nrd}(x).$$

现在显然，$x^2 \in K^\times$ 当且仅当 $\mathrm{Trd}(x) = 0$，正如所需。 □

5.1 $(-1、\ -1 \mid \mathbb{Q})$

取 $K = \mathbb{Q}$、$R = \mathbb{Z}$、$B = (-1,-1 \mid \mathbb{Q})$。这或许是文献中用于构造 BMW 群的研究最多的四元数代数。例如，它出现在 [Lub94 第 7 节。4]，[Moz95], [Rat04] 和 [RSV19]中。这些论文研究了下面将要介绍的第一族和第二族，但我们还找到了更多 BMW 族。

$\mathbb{Q}$ 的类群是平凡的，因此 $\mathrm{Ram}(B) = \{\infty, 2\}$；$B$ 的型数为 1，从而$V^K(O) = V^K \backslash \mathrm{Ram}(B)$，且极大 Hurwitz 序$O$ 的类数为 1：

$$O = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i \oplus \mathbb{Z}j \oplus \mathbb{Z}\frac{1+i+j+k}{2}.$$

我们将 $[a、b、c、d]$，（其中$a、b、c、d \in \mathbb{Z}$）记作该元素

$$a + bi + cj + d\frac{1+i+j+k}{2} \in O.$$

对于包含无穷赋值的所有有限个赋值S ，群 $\Gamma_O(S)$ 在 Bruhat-Tits 树的乘积 $\prod_{v \in S \backslash S_0} \mathcal{T}_v$ 上顶点传递地作用，其稳定子与 $\Gamma_O(S_0)$共轭；这是由定理 3.10 和定理3.13 得到的，其中$S_0 = S \cap \mathrm{Ram}(B)$。注意，每个有限赋值$v$对应于一个素数$p$，因此 $\mathcal{T}_v$ 是度为$p+1$的正则图。

定理3.11同样适用，从而得到正合序列

$$1 \to \Gamma_O(V_\infty^K) \to \Gamma_O(\mathrm{Ram}(B)) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1.$$

众所周知且不难看出，$\Gamma_O(V_\infty^K) = \mathrm{PGL}_1(O)$ 同构于交错群 $\mathrm{Alt}(4)$，其阶为 12。集合 O 中对应于 $\Gamma_O(V_\infty^K)$ 中各元素的一组代表元为

$$U = \{[1,0,0,0], [0,1,0,0], [0,0,1,0], [-1,-1,-1,2]\} \cup \{[\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, 1] : \epsilon_i \in \{0,-1\}\}$$

换一种写法，

$$U = \{1, i, j, k, \frac{\pm 1 \pm i \pm j + k}{2}\}.$$

那么，$\Gamma_O(\mathrm{Ram}(B))$ 同构于对称群 $\mathrm{Sym}(4)$，一组代表元为 y

$$U \cup (1+i)U.$$

第一族。 取任意有限集 S 使得 $S_0 = S \cap \mathrm{Ram}(B) = V${v20>。模 2 约化群 $\mathrm{PGL}_1(O/2O)$ 的阶为 12。将约化态射 $\pi_2 : \Gamma_O(S) \to \mathrm{PGL}_1(O/2O)$限制在 $\Gamma_O(S_0)$ 上是单射，因此由于两群的阶相同，它也是一个同构。因此，根据定理 3.26，核 $\pi_2^{-1}(1)$ 在具有平凡稳定子的树的乘积上是传递的。换言之，它在树的乘积上正则地作用。

备注 5.3。 该构造等价于 Rungtanapirom Stix 和 Vdovina 在 [RSV19 命题 3.11] 中描述的构造。他们注意到，当 $S = \{\infty, p, q\}$ 时，其中p 和q 是不同的奇素数，它给出了 Mozes 在 [Moz95 第 3] 节中构造的格，条件是$p \equiv 1 \equiv q$ 模 4。还可在 [Rat04 的定理 3.30、定理 3.35] 中恢复 Rattaggi 群 Γ_{p,l,e_0}，条件是$p \equiv \pm 1$且$q \equiv \pm 1$ 模 8。

现在我们给出下表中某些赋值的群生成元示例。素理想 $\mathfrak{p}$ 写在表格的第一列。在第二列中，给出了O 中的代表元，它们是将O 映射到其各个 $\mathfrak{p}$ 个邻点的格的生成元。

随后，我们给出一些作用于两个树的乘积上的格的表示。对于作用在与 $\mathfrak{p}$和 $\mathfrak{q}$ 这两个不同素理想相对应的 Bruhat-Tits 树的乘积上的格，我们记作$\Gamma_{\mathfrak{p}、\mathfrak{q}}$。

以下其他族也适用同样的说明。请注意，来自不同族的两个格可能同名但并不相等。比较本族的 $\Gamma_{3,5}$ 与下一族的 $\Gamma_{3,5}$。

3	$i-j-k,\quad -i+j-k,\ i+j+k,\ i+j-k$
5	$1-2k,\quad -1-2j,\quad 1+2i,\quad 1-2i,\quad -1+2j,\quad 1+2k$
7	$2+i+j+k,\quad 2-i-j+k,\quad -2-i+j-k,\quad -2+i-j-k,\quad -2-i+j+k,$ $-2+i-j+k,\ 2+i+j-k,\ 2-i-j-k$
11	$-3i+j+k,\ i+3j-k,\quad -3i+j-k,\ i+3j+k,\quad -i+3j+k,\ i+j-3k,$ $3i+j+k,\quad -i+3j-k,\ i-j-3k,\ i+j+3k,\ 3i+j-k,\quad -i+j-3k$
13	$-1+2i+2j-2k,\quad -3+2k,\quad -3-2j,\quad -1+2i-2j-2k,\quad -3+2i,$ $1-2i+2j-2k,\quad 1+2i+2j+2k,\quad 1-2i-2j-2k,\quad 1+2i-2j+2k,$ $-3-2i,\quad -1-2i+2j+2k,\quad -3+2j,\quad -3-2k,\quad -1-2i-2j+2k$
17	$1-4k,\quad 1-4i,\quad -3+2j-2k,\quad 3+2i-2k,\quad -3+2j+2k,\quad 3+2i-2j,$ $-3+2i+2k,\quad -3+2i+2j,\quad 1+4j,\quad 1-4j,\quad -3-2i-2j,\quad -3-2i-2k,$ $3-2i+2j,\quad -3-2j-2k,\quad 3-2i+2k,\quad -3-2j+2k,\quad 1+4i,\quad 1+4k$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{3,5} =&\langle a_1,a_2,a_3,a_4,\ b_1,b_2,b_3 \mid a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\ a_4^2,\ a_1b_1a_3b_2^{-1},\ a_1b_3a_4b_1,\ a_1b_3^{-1}a_2b_2,\ a_2b_1a_4b_2,\\
&a_2b_3^{-1}a_3b_1,\ a_3b_2a_4b_3\rangle\\
\Gamma_{3,7} =&\langle a_1,a_2,a_3,a_4,\ b_1,b_2,b_3,b_4 \mid a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\ a_4^2,\ a_1b_1a_2b_2,\ a_1b_2a_3b_3^{-1},\ a_1b_4a_1b_4^{-1},\\
&a_1b_3^{-1}a_4b_1,\ a_2b_1a_4b_4^{-1},\ a_2b_3a_2b_3^{-1},\ a_2b_4^{-1}a_3b_2,\ a_3b_1a_3b_1^{-1},\ a_3b_3a_4b_4,\ a_4b_2a_4b_2^{-1}\rangle\\
\Gamma_{3,11} =&\langle a_1,a_2,a_3,a_4,\ b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7,b_8,b_9,b_{10},b_{11},b_{12} \mid a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\ a_4^2,\ b_1^2,\ b_2^2,\\
&b_3^2,\ b_4^2,\ b_5^2,\ b_6^2,\ b_7^2,\ b_8^2,\ b_9^2,\ b_{10}^2,\ b_{11}^2,\ b_{12}^2,\ a_1b_1a_3b_7,\ a_1b_2a_4b_5,\ a_1b_3a_1b_{10},\\
&a_1b_4a_1b_{11},\ a_1b_6a_1b_8,\ a_1b_9a_2b_{12},\ a_2b_1a_2b_6,\ a_2b_2a_2b_7,\ a_2b_3a_4b_{11},\ a_2b_4a_3b_8,\\
&a_2b_5a_2b_{10},\ a_3b_2a_3b_{12},\ a_3b_3a_3b_5,\ a_3b_6a_4b_{10},\ a_3b_9a_3b_{11},\ a_4b_1a_4b_8,\ a_4b_4a_4b_9,\\
&a_4b_7a_4b_{12}\rangle\\
\Gamma_{5,7} =&\langle a_1,a_2,a_3,\ b_1,b_2,b_3,b_4 \mid a_1b_1a_3^{-1}b_3,\ a_1b_2a_3b_4,\ a_1b_3a_2b_2,\ a_1b_4a_2^{-1}b_1,\ a_1b_4^{-1}a_1b_4^{-1},\\
&a_1b_3^{-1}a_1b_3^{-1},\ a_1b_2^{-1}a_1b_2^{-1},\ a_1b_1^{-1}a_1b_1^{-1},\ a_2b_1a_2b_1,\ a_2b_3a_3^{-1}b_4^{-1},\ a_2b_4a_2b_4,\\
&a_2b_3^{-1}a_2b_3^{-1},\ a_2b_2^{-1}a_2b_2^{-1},\ a_2b_1^{-1}a_3b_2,\ a_3b_1a_3b_1,\ a_3b_3a_3b_3,\ a_3b_4^{-1}a_3b_4^{-1},\\
&a_3b_2^{-1}a_3b_2^{-1}\rangle
\end{aligned}$$

第二族。再次取满足 $S_0 = S \cap \mathrm{Ram}(B) = V_\infty^K$ 的任意 S。让我们通过考察同余商 $PGL_1(O/4O)$ 更进一步。自然态射 $PGL_1(O/4O) \to PGL_1(O/2O)$ 是满射，其核是一个阶为 8 且同构于 C_2^3 的群；由此可知，$PGL_1(O/4O)$ 的阶为 96。该群有一个阶为 8 且同构于 $C_2 \times C_4$ 的非正规子群 H，由 $[1,0,2,0]$ 和 $[0,1,0,2]$ 生成。H 的元素为

$$[1,0,0,0],[0,1,0,2],[1,2,0,0],[2,1,0,2],[1,0,2,0],[2,1,2,2],[1,2,2,0],[0,1,2,2].$$

还可以观察到，H 与 $\Gamma_O(S_0) = PGL_1(O)$ 在 $PGL_1(O/4O)$ 中的（单射）像的交是平凡的。由定理 3.26 立即可知，$\pi_4^{-1}(H)$ 在树的乘积上正则地作用，其中 $\pi_4 \colon \Gamma_O(S) \to PGL_1(O/4O)$ 是约化映射。

命题 5.4. 群 $\pi_4^{-1}(H)$ 是无挠的。

证明. 令 Γ 为 $\pi_4^{-1}(H)$。由定理 5.1，只需证明 Γ 中不存在 2 阶元素；也就是说，根据定理 5.2，Γ 中每个元素在 $B^\times$ 中都有一个约化迹非零的代表元。令 $\gamma = [a,b,c,d] \in \Gamma$。有

$$\gamma = (a + d/2) + (b + d/2)i + (c + d/2)j + d/2k.$$

注意到 H 中每个元素的第四个坐标都是偶数，因此 d 本身也是偶数，设 $d = 2d'$。此外，a 与 d' 的奇偶性不同，因此 $a + d/2 = a + d'$ 是奇整数。由此可知，γ 具有非零约化迹，且为无限阶。□

注 5.5：这等价于 Rungtanapirom Stix 和 Vdovina 在 [RSV19，定理 3.15]中的构造。若 $S = \{\infty, p, l\}$，其中 p 和 l 是不同的奇素数，且 p 或 l模 4 同余于 3，则相应的格为 $\Gamma_{p,l}$，由 Rattaggi 在 [Rat04，定理 3.30、定理 3.35]中构造。

	$3 \quad -1+j-k, \quad -1-j-k, \quad -1+j+k, \quad -1-j+k5 \quad -1-2j, \quad -1-2k, \quad 1+2$
$i,$	$1-2i, \quad -1+2k, \quad -1+2j_{7} \quad -1+2i+j-k, \quad 1-2i-j-k, \quad -1+2i-j-k,$
	$-1-2i+j-k, \quad -1+2i-j+k, \quad -1-2i+j+k, \quad 1+2i+j+k_{11} \quad -3-j+k,$
	$-1-3j+k, \quad 1+j-3k, \quad 3-j-k, \quad 1-3j-k, \quad 1-j-3k, \quad 1+j+3k, \quad 1+3j+k,$
	$3+j+k, \quad 1-j+3k, \quad -1+3j-k, \quad -3+j-k-1+2i-2j-2k, \quad 1+2i+2j+2k,$
	$-3+2j, \quad -3+2k, \quad 1-2i+2j-2k, 13 \quad -3+2i, \quad 1+2i+2j-2k, \quad 1-2i-2j+2$
$k,$	$-3-2i, \quad 1+2i-2j+2k, -3-2k, \quad -3-2j, \quad 1-2i-2j-2k, \quad -1-2i+2j+2k$
	$3+2i-2j, \quad 3+2i+2j, \quad -3-2j+2k, \quad 3+2j+2k, \quad 1-4k, \quad 1-4i, 17 \quad 3+2i-2k,$
	$-1+4j, \quad 3+2i+2k, \quad 3-2i-2k, \quad -1-4j, \quad 3-2i+2k, 1+4i, \quad 1+4k, \quad 3-2j-2$
$k,$	$-3+2j-2k, \quad 3-2i-2j, \quad 3-2i+2j$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{3,5} =& \langle a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 \mid a_1b_1a_1b_2^{-1}, a_1b_2a_2b_3^{-1}, a_1b_3a_2b_2, a_1b_3^{-1}a_2^{-1}b_1^{-1}, a_1b_1^{-1}a_2^{-1}b_3, \\
& a_2b_2^{-1}a_2b_1^{-1}\rangle \\
\Gamma_{3,7} =& \langle a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4 \mid a_1b_1a_2b_2^{-1}, a_1b_2a_1^{-1}b_3, a_1b_3a_2b_4, a_1b_4a_2^{-1}b_2, a_1b_4^{-1}a_1b_1^{-1}, \\
& a_1b_3^{-1}a_2^{-1}b_1, a_2b_1a_2^{-1}b_4^{-1}, a_2b_2a_2b_3^{-1}\rangle \\
\Gamma_{3,11} =& \langle a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \mid a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}, a_1b_2a_2b_5, a_1b_3a_2^{-1}b_6^{-1}, a_1b_4a_1b_2^{-1}, a_1b_5a_2b_2, \\
& a_1b_6a_1b_5^{-1}, a_1b_6^{-1}a_2^{-1}b_3, a_1b_4^{-1}a_1b_3^{-1}, a_2b_1a_2b_5^{-1}, a_2b_3a_2b_2^{-1}, a_2b_4a_2^{-1}b_4^{-1}, \\
& a_2b_6^{-1}a_2b_1^{-1}\rangle \\
\Gamma_{5,7} =& \langle a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4 \mid a_1b_1a_1^{-1}b_4^{-1}, a_1b_2a_3^{-1}b_1, a_1b_3a_1^{-1}b_2, a_1b_4a_3b_3^{-1}, a_1b_4^{-1}a_2^{-1}b_1^{-1}, \\
& a_1b_2^{-1}a_2b_3, a_2b_1a_2^{-1}b_4^{-1}, a_2b_2a_2^{-1}b_3, a_2b_4^{-1}a_3^{-1}b_2, a_2b_3^{-1}a_3b_1^{-1}, a_3b_1a_3b_4^{-1}, \\
& a_3b_2a_3b_3\rangle
\end{aligned}$$

第三族。据我们所知，文献中没有提及这一第三族及以下各族的参考资料。现在取任意满足 Ram(B) $\subseteq$ S 且 3 $\notin$ S 的 S。由于 3 $\notin$ Ram(B)，代数 O/3O 同构于 $M_2(\mathbb{F}_3)$，因此 PGL_1(O/3O) 同构于 $PGL_2(\mathbb{F}_3)$，其阶为 24。群 $\Gamma_O(S_0)$ 的阶也为 24，而约化映射π_3： $\Gamma_O(S) \to PGL_1(O/3O)$ 限制在 $\Gamma_O(S_0)$ 上是单射，因而是双射。再次由定理 3.26，核 $\pi_3^{-1}(1)$ 在树的乘积上正则地作用。

命题 5.6。 群 $\pi_3^{-1}(1)$ 是无挠的。

证明。 记 Γ 为 $\pi_3^{-1}(1)$。对于所有 $n > 1$，有约化态射

$$\Gamma_O(S) \to \mathrm{PGL}_1(O/(3^n)O),$$

且 Γ 的像包含于

$$\mathrm{PGL}_1((1+3O)/(3^n)O),$$

它是一个 3-群。因此， Γ 是剩余有限 3-群，所以 Γ中不可能存在 2 阶元素，定理 5.1 适用。 □

5	$1-3j,\quad -1-3k,\quad 1-3i,\quad 1+3i,\quad -1+3k,\quad 1+3j$
7	$1/2+3/2i\ -3/2j\ +3/2k,\ -1/2+3/2i\ -3/2j\ -3/2k,$ $1/2+3/2i\ +3/2j\ -3/2k, 1/2+3/2i\ +3/2j\ +3/2k,$ $1/2-3/2i\ -3/2j\ -3/2k, 1/2-3/2i\ -3/2j\ +3/2k,$ $-1/2-3/2i\ +3/2j\ +3/2k, 1/2-3/2i\ +3/2j\ -3/2k$
11	$2+3j\ +3k,\quad -2+3i\ -3j,\quad -2+3i\ -3k,\quad 2+3i\ +3j,\quad -2-3i\ -3k,$ $2+3j\ -3k,\quad 2-3j\ +3k,\quad -2+3i\ +3k,\quad 2-3i\ -3j,\quad -2-3i\ +3k,$ $-2-3i\ +3j,\quad 2-3j\ -3k$
13	$-2+3i,\quad -5/2+3/2i\ -3/2j\ -3/2k,\quad -5/2+3/2i\ -3/2j\ +3/2k,$ $-2+3k,\quad -5/2-3/2i\ -3/2j\ +3/2k,\quad -2+3j,\quad -5/2+3/2i\ +3/2j\ +3/2k,$ $-5/2-3/2i\ -3/2j\ -3/2k,\quad -2-3j,\quad -5/2+3/2i\ +3/2j\ -3/2k,$ $-2-3k,\quad -5/2-3/2i\ +3/2j\ -3/2k,\quad -5/2-3/2i\ +3/2j\ +3/2k,$ $-2-3i$
17	$-4+3i\ -3k,\quad 4-3i\ -3j,\quad -4+3j\ -3k,\quad 5+3i,\quad -5-3k,$ $4+3i\ -3j,\quad -4+3i\ +3k,\quad 4+3j\ +3k,\quad -5+3j,\quad -5-3j,$ $4-3j\ -3k,\quad -4-3i\ -3k,\quad 4-3i\ +3j,\quad -5+3k,\quad 5-3i,\quad -4-3j\ +3k,$ $4+3i\ +3j,\ -4-3i\ +3k$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{5,7} =&\langle a_1,a_2,a_3,\ b_1,b_2,b_3,b_4 \mid a_1b_1a_1b_3^{-1},\ a_1b_2a_2^{-1}b_1^{-1},\ a_1b_3a_3b_2,\ a_1b_4a_1b_2^{-1},\ a_1b_4^{-1}a_2b_3,\\
&a_1b_1^{-1}a_3^{-1}b_4^{-1},\ a_2b_1a_3b_3,\ a_2b_2a_2b_3^{-1},\ a_2b_4a_2b_1^{-1},\ a_2b_4^{-1}a_3^{-1}b_2^{-1},\ a_3b_4^{-1}a_3b_3^{-1},\\
&a_3b_2^{-1}a_3b_1^{-1}\rangle\\
\Gamma_{5,11} =&\langle a_1,a_2,a_3,\ b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6 \mid a_1b_1a_3^{-1}b_3^{-1},\ a_1b_2a_2b_5^{-1},\ a_1b_3a_2^{-1}b_2,\ a_1b_4a_2b_4,\\
&a_1b_5a_3^{-1}b_4^{-1},\ a_1b_6a_3b_6,\ a_1b_6^{-1}a_2^{-1}b_5,\ a_1b_5^{-1}a_3b_1,\ a_1b_4^{-1}a_3b_3,\ a_1b_3^{-1}a_2b_6^{-1},\\
&a_1b_2^{-1}a_3^{-1}b_2^{-1},\ a_1b_1^{-1}a_2^{-1}b_1^{-1},\ a_2b_2a_3^{-1}b_1^{-1},\ a_2b_3a_3^{-1}b_3,\ a_2b_5a_3b_5,\ a_2b_4^{-1}a_3^{-1}b_6,\\
&a_2b_2^{-1}a_3b_4^{-1},\ a_2b_1^{-1}a_3b_6^{-1}\rangle\\
\Gamma_{7,11} =&\langle a_1,a_2,a_3,a_4,\ b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6 \mid a_1b_1a_3b_6,\ a_1b_2a_2^{-1}b_3,\ a_1b_3a_2b_5^{-1},\ a_1b_4a_3b_2,\\
&a_1b_5a_4b_4^{-1},\ a_1b_6a_3^{-1}b_2^{-1},\ a_1b_6^{-1}a_2^{-1}b_5,\ a_1b_5^{-1}a_4^{-1}b_3^{-1},\ a_1b_4^{-1}a_4^{-1}b_1^{-1},\ a_1b_3^{-1}a_4b_1,\\
&a_1b_2^{-1}a_2b_6^{-1},\ a_1b_1^{-1}a_3^{-1}b_4,\ a_2b_1a_4^{-1}b_4^{-1},\ a_2b_2a_4^{-1}b_6^{-1},\ a_2b_3a_3^{-1}b_5,\ a_2b_4a_3^{-1}b_1,\\
&a_2b_5a_3b_1^{-1},\ a_2b_4^{-1}a_4b_6,\ a_2b_3^{-1}a_3b_4,\ a_2b_1^{-1}a_4b_2,\ a_3b_3a_4^{-1}b_6,\ a_3b_5a_4^{-1}b_2^{-1},\\
&a_3b_5^{-1}a_4b_3,\ a_3b_2^{-1}a_4b_6^{-1}\rangle
\end{aligned}$$

第四族。现在取满足 Ram(B) $\subseteq$ S 且 5 $\notin$ S 的 S。由于 5 $\notin$ Ram(B)，代数 O/5O 同构于 $M_2(\mathbb{F}_5)$，因此 $PGL_1(O/5O)$ 同构于 $PGL_2(\mathbb{F}_5)$，其阶为 120。令 $\pi_5 : \Gamma_O(S) \to PGL_1(O/5O)$ 为约化态射。根据定理 3.27，它是满射的，因为 $Nrd(1+i) = 2$ 模 5 不是平方。当 π_5 限制在 $\Gamma_O(S_0)$ 上时，它是单射的，且像的指数为 5。取 A 为 $PGL_1(O/5O)$ 的六个 5-西洛子群中的任意一个。则 π_5^{-1}(A) 在树的乘积上正则地作用。事实上，由于这些 5-西洛子群在 $PGL_1(O/5O)$ 中共轭，相应的格在 $\Gamma_O(S)$ 中也共轭，并且它们各自在树的乘积上的作用是等价的。

命题 5.7。 群 $\pi_5^{-1}(A)$ 是无挠的。

证明。 其思路与定理 5.6 的证明类似。由定理 5.1 可知， $\pi_5^{-1}(A)$ 是剩余 5-群且是无挠的。 □

3	$-1-2i+j,\ 1+i+2j,\ 1-i-2j,\ -1+2i-j$
7	$-3+i+2j,\ -3+2i-j,\ -2+i-3j,\ -2+3i+j,\ -2-3i-j,$ $-2-i+3j,\ -3-2i+j,\ -3-i-2j$
11	$-1+3i+j,\ 3/2+3/2i+1/2j-5/2k,\ -3/2-3/2i-1/2j-5/2k,$ $1+i-3j,\ 3/2-1/2i+3/2j-5/2k,\ -3/2-1/2i+3/2j+5/2k,$ $-3/2+1/2i-3/2j-5/2k,\ 3/2+1/2i-3/2j+5/2k,\ 1-i+3j,$ $-3/2+3/2i+1/2j+5/2k,\ 3/2-3/2i-1/2j+5/2k,\ -1-3i-j$
13	$1+5j,\ 1+5i,\ -1-4i-3j,\ 4-i+3j,\ -1+5k,\ -4-3i-j,$ $-1-3i+4j,\ -1+3i-4j,\ -4+3i+j,\ -1-5k,\ 4+i-3j,$ $-1+4i+3j,\ 1-5i,\ 1-5j$
17	$3-5i,\ 3+4i+3j,\ -3+5j,\ -2-i-2j-5k,\ 3-3i+4j,$ $-2-2i+j+5k,\ -2-i-2j+5k,\ -2-2i+j-5k,\ 3+5k,$ $3-5k,\ -2+2i-j+5k,\ -2+i+2j-5k,\ -2+2i-j-5k,$ $3+3i-4j,\ -2+i+2j+5k,\ -3-5j,\ 3-4i-3j,\ 3+5i$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{3,7} =&\langle a_1, a_2,\ b_1, b_2, b_3, b_4 \mid a_1b_1a_1b_3^{-1},\ a_1b_2a_1^{-1}b_2^{-1},\ a_1b_3a_2^{-1}b_3,\ a_1b_4a_2b_4,\ a_1b_4^{-1}a_1b_1^{-1},\\
&a_2b_1a_2^{-1}b_1^{-1},\ a_2b_2a_2b_3,\ a_2b_4^{-1}a_2b_2^{-1}\rangle\\
\Gamma_{3,11} =&\langle a_1, a_2,\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \mid a_1b_1a_1b_4^{-1},\ a_1b_2a_1^{-1}b_3^{-1},\ a_1b_3a_2b_2,\ a_1b_4a_2^{-1}b_5,\ a_1b_5a_1^{-1}b_6,\\
&a_1b_6a_2^{-1}b_5^{-1},\ a_1b_6^{-1}a_2^{-1}b_4,\ a_1b_3^{-1}a_2b_1^{-1},\ a_1b_1^{-1}a_2b_2^{-1},\ a_2b_1a_2b_4,\ a_2b_3a_2^{-1}b_2^{-1},\\
&a_2b_5a_2^{-1}b_6\rangle\\
\Gamma_{7,11} =&\langle a_1, a_2, a_3, a_4,\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \mid a_1b_1a_2b_3^{-1},\ a_1b_2a_1b_6^{-1},\ a_1b_3a_1b_5,\ a_1b_4a_2^{-1}b_5^{-1},\\
&a_1b_6a_2^{-1}b_4,\ a_1b_5^{-1}a_3b_1^{-1},\ a_1b_4^{-1}a_4^{-1}b_2^{-1},\ a_1b_3^{-1}a_4^{-1}b_4^{-1},\ a_1b_2^{-1}a_2b_1,\ a_1b_1^{-1}a_3b_6,\\
&a_2b_2a_2b_5^{-1},\ a_2b_3a_2b_6,\ a_2b_4a_4^{-1}b_3^{-1},\ a_2b_5a_3^{-1}b_1^{-1},\ a_2b_2^{-1}a_4^{-1}b_4,\ a_2b_1^{-1}a_3^{-1}b_6^{-1},\\
&a_3b_2a_4^{-1}b_6^{-1},\ a_3b_3a_3^{-1}b_2^{-1},\ a_3b_4a_3^{-1}b_4^{-1},\ a_3b_5a_4^{-1}b_3,\ a_3b_6^{-1}a_4b_3^{-1},\ a_3b_2^{-1}a_4b_5,\\
&a_4b_1a_4^{-1}b_1^{-1},\ a_4b_6a_4^{-1}b_5\rangle
\end{aligned}$$

更多族。 群 $PGL_2(\mathbb{F}_p)$ 仅在有限多个素数 p （均小于 23）下具有指数为 $12 = |\Gamma_O(\{\infty\})|$ 或 $24 = |\Gamma_O(\{\infty, 2\})|$ 的子群，因此，用于上述各族的论证至多只能适用于这些素数。对于 $p \in \{7, 11, 23\}$，确实可以进行这些论证，并找到其他 BMW 族。

5.2 $(-2,\ -13\,|\,\mathbb{Q})$

取 $K = \mathbb{Q}$、$R = \mathbb{Z}$、$B = (-2,-13\,|\,\mathbb{Q})$。我们给出这个例子，是因为它曾由 [Chi92] 研究过，而且比第5.1节中的例子更容易处理。事实上，$\Gamma_O(S)$ 的作用的顶点稳定子很小。

有 Ram（B）$= \{\infty, 13\}$，该四元数代数的型数为 1，并且对于所有极大阶O，Idl（O）$=$ PIdl（O）。例如，取O 为

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i \oplus \mathbb{Z}\frac{2-i+k}{4} \oplus \mathbb{Z}\frac{1+i+j}{2}.$$

根据定理 3.10 和定理3.13，如果S 是包含V_∞^K的有限个赋值，则 Γ_O（S）在树的乘积上顶点传递地作用，其稳定子与 Γ_O（S_0）共轭，其中$S_0 =$ 为$S \cap$Ram（B）。

容易验证，群 Γ_O（V_∞^K）是平凡的。因此，如果$S_0 = \{\infty\}$，则群Γ_O（S）已经在顶点上正则作用，从而得到一个 BMW 群族。下面给出该族的生成元和群表示示例。

注记 5.8。这是 Chiu格的推广 [Chi92], ，将其在赋值 2 处的 3-正则 Bruhat-Tits 树上的正则作用推广到树的乘积上的作用。然而，Chiu格并不像其论文所声称的那样是自由群：实际上它同构于 $\mathbb{Z} * C_2$。

另一方面，根据定理 3.11 中的正合序列，Γ_O(Ram(B)) 的阶为 2，并且由 j 生成，因为 v_{13}(j) $= \frac{1}{2}v_{13}$(约化范数(j)) $= \frac{1}{2} \not\in \mathbb{Z}$。若 $S_0 =$ Ram(B), $^-$取一个不属于 S 的素数 p，使得约化范数(j) $= 13$ 不是模 p 平方，即根据二次互反律，p 为奇数且模13同余于 2、5、6、7、8 或 11。则 $\pi_p^{-1}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p))$ 也是一个 BMW 群，其中 f^p : Γ_O(S) $\to \mathrm{PGL}_1$(O/pO) $\simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p)$ 是约化映射；根据关于 p 的假设，该映射为满射。

2	$1/2 - 1/4i + 1/4k,\ i,\ 1/2 + 1/4i - 1/4k$
3	$1/2 - 3/4i - 1/4k,\quad 1 - i,\quad 1 + i,\ \ 1/2 + 3/4i + 1/4k$
5	$-3/2 + 3/4i + 1/4k,\quad -1/2 - 5/4i + 1/4k,\ \ 1/4i - 1/2j + 1/4k,$ $1/4i + 1/2j + 1/4k,\ \ -1/2 + 5/4i - 1/4k,\ \ -3/2 - 3/4i - 1/4k$
7	$-1 - 3/4i - 1/2j + 1/4k,\quad -1 - 3/4i + 1/2j + 1/4k,\quad -3/2 - 5/4i + 1/4k,$ $1/2i + 1/2k,\ \ 1/2i - 1/2k,\quad -3/2 + 5/4i - 1/4k,\quad -1 + 3/4i - 1/2j - 1/4k,$ $-1 + 3/4i + 1/2j - 1/4k$
11	$-2 + 1/2i + 1/2k,\quad 3 - i,\quad -5/2 - 5/4i + 1/4k,\quad -2 + 1/2i - 1/2k\quad ,$ $3/2i - 1/2k,\ \ 3/2i + 1/2k,\ \ 7/4i - 1/2j - 1/4k,\ \ 7/4i + 1/2j - 1/4k,$ $-2 - 1/2i + 1/2k,\quad -5/2 + 5/4i - 1/4k,\quad 3 + i,\quad -2 - 1/2i - 1/2k$
17	$-1/2 + 11/4i + 1/4k, 3/2 - 1/4i - 3/4k,\ \ -3 + 5/4i + 1/2j + 1/4k,$ $-2 - j,\ \ -3 + 5/4i - 1/2j + 1/4k,\ \ -3/2 + 1/4i - j - 1/4k,$ $3 - 2i,\ \ -7/2 + 5/4i - 1/4k,\ \ -3/2 + 1/4i + j - 1/4k,\ \ -3/2 - 1/4i - j + 1/4k,$ $-7/2 - 5/4i + 1/4k,\ \ 3 + 2i,\ \ -3/2 - 1/4i + j + 1/4k,\ \ -3 - 5/4i + 1/2j - 1/4k,$ $-2 + j,\quad -3 - 5/4i - 1/2j - 1/4k,\ \ 3/2 + 1/4i + 3/4k,\quad -1/2 - 11/4i - 1/4k$

$\Gamma_{2,3} = \langle a_1, a_2, b_1, b_2 \mid a_2^2, a_1b_1a_2b_1, a_1b_2a_1b_2, a_1b_2^{-1}a_1b_1^{-1}, a_2b_2a_2b_2^{-1}\rangle \Gamma_{2,5} = \langle a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4 \mid a_2^2, b_3^2, b_4^2, a_1b_1a_1b_2^{-1}, a_1b_2a_2b_2, a_1b_3a_1^{-1}b_4, a_1b_4a_2b_1^{-1}, a_1b_1^{-1}a_2b_3\rangle \Gamma_{2,7} = \langle a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \mid a_2^2, b_4^2, b_5^2, a_1b_1a_2b_3^{-1}, a_1b_2a_1^{-1}b_1^{-1}, a_1b_3a_1b_4, a_1b_5a_1^{-1}b_5, a_1b_3^{-1}a_2b_2, a_1b_1^{-1}a_2b_2^{-1}, a_2b_4a_2b_5\rangle$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{2,11} =&\langle a_1, a_2,\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8 \mid a_2^2,\ b_5^2,\ b_6^2,\ b_7^2,\ b_8^2,\ a_1b_1a_1b_5,\ a_1b_2a_1b_3^{-1},\\
&a_1b_3a_2b_8,\ a_1b_4a_1^{-1}b_4^{-1},\ a_1b_6a_1^{-1}b_7,\ a_1b_7a_2b_3,\ a_1b_8a_1^{-1}b_6,\ a_1b_2^{-1}a_1b_1^{-1},\\
&a_2b_1a_2b_4^{-1},\ a_2b_2a_2b_2^{-1},\ a_2b_5a_2b_6\rangle\\
\Gamma_{3,5} =&\langle a_1, a_2,\ b_1, b_2, b_3, b_4 \mid b_3^2,\ b_4^2,\ a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1},\ a_1b_2a_2^{-1}b_3,\ a_1b_3a_1^{-1}b_4,\ a_1b_4a_2^{-1}b_2,\\
&a_1b_2^{-1}a_1b_2^{-1},\ a_2b_1a_2b_1,\ a_2b_2a_2b_1^{-1},\ a_2b_3a_2^{-1}b_4\rangle\\
\Gamma_{3,7} =&\langle a_1, a_2,\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \mid b_4^2,\ b_5^2,\ a_1b_1a_1b_1,\ a_1b_2a_1b_2,\ a_1b_3a_2b_4,\ a_1b_4a_2b_3,\ a_1b_5a_2^{-1}b_1^{-1},\\
&a_1b_3^{-1}a_2b_2^{-1},\ a_1b_2^{-1}a_2^{-1}b_5,\ a_1b_1^{-1}a_2b_3^{-1},\ a_2b_1a_2^{-1}b_2^{-1}\rangle\\
\Gamma_{5,7} =&\langle a_1, a_2, a_3, a_4,\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \mid a_3^2,\ a_4^2,\ b_4^2,\ b_5^2,\ a_1b_1a_1^{-1}b_2^{-1},\ a_1b_2a_3b_3^{-1},\ a_1b_3a_1b_5,\\
&a_1b_4a_2b_1^{-1},\ a_1b_3^{-1}a_4b_1,\ a_1b_2^{-1}a_2b_4,\ a_2b_1a_3b_5,\ a_2b_2a_2^{-1}b_1^{-1},\ a_2b_3a_2^{-1}b_3^{-1},\\
&a_2b_5a_4b_2,\ a_3b_1a_4b_2^{-1},\ a_3b_3a_4b_3^{-1},\ a_3b_4a_4b_4\rangle
\end{aligned}$$

5.3 $(-13、\ -6 \mid \mathbb{Q})$

取 $K = \mathbb{Q}$、$R = \mathbb{Z}$、$B = (-13, -6 \mid \mathbb{Q})$。至于第 5.2 节，$\Gamma_O(S)$ 的作用的顶点稳定子很小。此外，这是一个极大阶的类群并非平凡群的例子。$\mathrm{Ram}(B) = \{\infty, 2, 3, 13\}$，该四元数代数的型数为 1，并且对于所有极大阶 O，$\mathrm{Idl}(O)/\ \mathrm{PIdl}(O)$ 的阶为 2。例如，取 O 为

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i \oplus \mathbb{Z}\frac{1+i+j}{2} \oplus \mathbb{Z}\frac{1+i+k}{2}.$$

令 P_2,P_3,P_{13} 表示与 R 的交分别为理想 (2)、(3)、(13) 的素双边 O-理想。可以看出，P_{13} 是由 i 生成的主理想，而 P_2 和 P_3 不是主理想，并且它们各自生成 Idl(O)/PIdl(O)，因此当 $2 \in S_0$ 或 $3 \in S_0$ 时，Idl(O[S_0^{-1}]) =PIdl(O[S_0^{-1}])。根据定理 3.10 和定理 3.13，若 $2 \in S$ 或 $3 \in S$，则 Γ_O(S) 在树的乘积上顶点传递地作用，其稳定子与 $\Gamma_O(S_0)$ 共轭，其中一如既往，$S_0 = S \cap$ Ram(B)。此外，若 $S_0 \cap V_f^K$ 等于 $\{2\}$ 或 $\{3\}$，则 $\Gamma_O(S_0)$ 是平凡的。由此我们得到两个 BMW 群族。

第一族，具有$S_0 \cap V_f^K = \{2\}$。

5	$2+j,\ 1/2-1/2i-1/2j,\ 1/2-1/2i+1/2j,\ 1/2+1/2i-1/2j,$ $1/2+1/2i+1/2j,\ 2-j$
7	$3/2-1/2i+1/2j,\ 1+j,\ 3/2-1/2i-1/2j,\ 1-i,\ 1+i,\ 3/2+1/2i+1/2j,$ $1-j,\ 3/2+1/2i-1/2j$
11	$5/2+1/2i-1/2j,\ 5/2-1/2i-1/2j,\ 1-1/2j+1/2k,\ 3+i,$ $4-j,\ -1+1/2j+1/2k,\ -1-1/2j-1/2k,\ 4+j,\ 3-i,\ 1+1/2j-1/2k,$ $5/2+1/2i+1/2j,\ 5/2-1/2i+1/2j$
17	$1-3/2j-1/2k,\ 1/2-1/2i-3/2j,\ 1-3/2j+1/2k,\ 7/2-1/2i+1/2j,$ $2+i,\ 1/2+1/2i-3/2j,\ 7/2+1/2i+1/2j,\ i-1/2j+1/2k,$ $i-1/2j-1/2k,\ i+1/2j+1/2k,\ i+1/2j-1/2k,\ 7/2-1/2i-1/2j,$ $1/2-1/2i+3/2j,\ 2-i,\ 7/2+1/2i-1/2j,\ 1+3/2j-1/2k,$ $1/2+1/2i+3/2j,\ 1+3/2j+1/2k$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{5,7} =&\langle a_1, a_2, a_3,\ b_1, b_2, b_3, b_4 \mid a_1b_1a_1b_1,\ a_1b_2a_1^{-1}b_2^{-1},\ a_1b_3a_3b_4,\ a_1b_4a_3b_3,\ a_1b_4^{-1}a_2^{-1}b_1^{-1},\\
&a_1b_3^{-1}a_1b_3^{-1},\ a_1b_1^{-1}a_2^{-1}b_4^{-1},\ a_2b_2a_3^{-1}b_2,\ a_2b_3a_2^{-1}b_3^{-1},\ a_2b_4^{-1}a_3b_4^{-1},\ a_2b_2^{-1}a_2b_1^{-1},\\
&a_3b_1a_3^{-1}b_1^{-1},\ a_3b_2a_3b_3^{-1}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{5,11} =&\langle a_1,a_2,a_3,\ b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6 \mid a_1b_1a_2b_4,\ a_1b_2a_3^{-1}b_4^{-1},\ a_1b_3a_1b_6,\ a_1b_4a_2b_1,\ a_1b_5a_1^{-1}b_5^{-1},\\ &a_1b_6^{-1}a_2b_1^{-1},\ a_1b_4^{-1}a_3^{-1}b_2,\ a_1b_3^{-1}a_3^{-1}b_2^{-1},\ a_1b_2^{-1}a_3^{-1}b_6^{-1},\ a_1b_1^{-1}a_2b_3^{-1},\ a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1},\\ &a_2b_3a_3^{-1}b_5,\ a_2b_5a_3^{-1}b_6,\ a_2b_6a_2^{-1}b_3^{-1},\ a_2b_5^{-1}a_2b_4^{-1},\ a_3b_1a_3^{-1}b_1^{-1},\ a_3b_5a_3b_4^{-1},\\ &a_3b_6a_3^{-1}b_3^{-1}\rangle\\ \Gamma_{7,11} =&\langle a_1,a_2,a_3,a_4,\ b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6 \mid a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1},\ a_1b_2a_4^{-1}b_5,\ a_1b_3a_2^{-1}b_4^{-1},\ a_1b_4a_3b_4,\\ &a_1b_5a_4^{-1}b_2,\ a_1b_6a_3^{-1}b_5^{-1},\ a_1b_6^{-1}a_1b_6^{-1},\ a_1b_5^{-1}a_3^{-1}b_3,\ a_1b_4^{-1}a_2^{-1}b_6,\ a_1b_3^{-1}a_1b_3^{-1},\\ &a_1b_2^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1},\ a_2b_1a_3b_1,\ a_2b_3a_4^{-1}b_2^{-1},\ a_2b_5a_2^{-1}b_5^{-1},\ a_2b_6a_4b_1^{-1},\ a_2b_6^{-1}a_3b_4^{-1},\\ &a_2b_4^{-1}a_3b_3^{-1},\ a_2b_2^{-1}a_4^{-1}b_6,\ a_2b_1^{-1}a_4b_3,\ a_3b_2a_3^{-1}b_2^{-1},\ a_3b_3a_3b_3,\ a_3b_6a_3b_6,\\ &a_3b_5^{-1}a_4^{-1}b_1^{-1},\ a_3b_1^{-1}a_4^{-1}b_5^{-1},\ a_4b_4a_4^{-1}b_4^{-1},\ a_4b_6a_4^{-1}b_3^{-1}\rangle\end{aligned}$$

第二族，具有$S_0 \cap V_f^K = \{3\}$。

5	$1/2+1/2\mathrm{i}\ -1/2\mathrm{j},\ 1/2-1/2\mathrm{i}\ -1/2\mathrm{j},\ \ 3-\mathrm{j},\ \ 3+\mathrm{j},\ 1/2+1/2\mathrm{i}\ +1/2\mathrm{j},\ 1/2-1/2\mathrm{i}\ +1/2\mathrm{j}$
7	$3/2+1/2\mathrm{i}\ +1/2\mathrm{j},\ 3/2+1/2\mathrm{i}\ -1/2\mathrm{j},\ \ 1+\mathrm{j},\ 1/2\mathrm{j}\ +1/2\mathrm{k},\ 1/2\mathrm{j}\ -1/2\mathrm{k},\ 1-\mathrm{j},$
	$3/2-1/2\mathrm{i}\ +1/2\mathrm{j},\ 3/2-1/2\mathrm{i}\ -1/2\mathrm{j}\ 3/2+3/2\mathrm{i}\ -1/2\mathrm{j},\ \ 3+2\mathrm{j},\ 5/2-1/2\mathrm{i}\ +1/2\mathrm{j},\ 3/$
	$2+3/2\mathrm{i}\ +1/2\mathrm{j},$
11	$5/2-1/2\mathrm{i}\ -1/2\mathrm{j},\ 3/2\mathrm{j}\ -1/2\mathrm{k},\ 3/2\mathrm{j}\ +1/2\mathrm{k},\ 5/2+1/2\mathrm{i}\ +1/2\mathrm{j},\ 3/$
	$2-3/2\mathrm{i}\ -1/2\mathrm{j},\ 5/2+1/2\mathrm{i}\ -1/2\mathrm{j},\ \ 3-2\mathrm{j},\ 3/2-3/2\mathrm{i}\ +1/2\mathrm{j}2+\mathrm{i},\ 3/2-3/2\mathrm{i}\ +1/2\mathrm{k},$
	$9/2+3/2\mathrm{i}\ -1/2\mathrm{j},\ 9/2-3/2\mathrm{i}\ -1/2\mathrm{j},\ 7/2+1/2\mathrm{i}\ +1/2\mathrm{j},\ 1/2+1/2\mathrm{i}\ -3/2\mathrm{j},\ 1/2-1/2\mathrm{i}$
	$-3/2\mathrm{j},\ 3/2+3/2\mathrm{i}\ +1/2\mathrm{k},$
17	$7/2+1/2\mathrm{i}\ -1/2\mathrm{j},\ 7/2-1/2\mathrm{i}\ +1/2\mathrm{j},\ 3/2-3/2\mathrm{i}\ -1/2\mathrm{k},$
	$1/2+1/2\mathrm{i}\ +3/2\mathrm{j},\ 1/2-1/2\mathrm{i}\ +3/2\mathrm{j},\ 7/2-1/2\mathrm{i}\ -1/2\mathrm{j},\ 9/2+3/2\mathrm{i}\ +1/2\mathrm{j},\ 9/2-3/2\mathrm{i}$
	$+1/2\mathrm{j},\ 3/2+3/2\mathrm{i}\ -1/2\mathrm{k},\ \ 2-\mathrm{i}$

$$\begin{aligned}\Gamma_{5,7} =&\langle a_1,a_2,a_3,\ b_1,b_2,b_3,b_4,b_5 \mid b_4^2,\ b_5^2,\ a_1b_1a_3^{-1}b_5,\ a_1b_2a_1^{-1}b_2^{-1},\ a_1b_3a_2b_3,\ a_1b_4a_3^{-1}b_1,\\ &a_1b_5a_1^{-1}b_4,\ a_1b_3^{-1}a_1b_1^{-1},\ a_2b_1a_2^{-1}b_1^{-1},\ a_2b_2a_2b_3^{-1},\ a_2b_4a_2^{-1}b_5,\ a_2b_5a_3^{-1}b_2^{-1},\\ &a_2b_2^{-1}a_3^{-1}b_4,\ a_3b_1a_3b_2^{-1},\ a_3b_3a_3^{-1}b_3^{-1}\rangle\\ \Gamma_{5,11} =&\langle a_1,a_2,a_3,\ b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7 \mid b_6^2,\ b_7^2,\ a_1b_1a_3b_5^{-1},\ a_1b_2a_1b_4,\ a_1b_3a_1^{-1}b_3^{-1},\\ &a_1b_5a_3b_7,\ a_1b_6a_3b_5,\ a_1b_7a_2b_2^{-1},\ a_1b_5^{-1}a_3b_1,\ a_1b_4^{-1}a_2^{-1}b_1^{-1},\ a_1b_2^{-1}a_2b_6,\\ &a_1b_1^{-1}a_2^{-1}b_4^{-1},\ a_2b_2a_2b_1^{-1},\ a_2b_3a_3b_4^{-1},\ a_2b_5a_2^{-1}b_5^{-1},\ a_2b_7a_3b_3^{-1},\ a_2b_4^{-1}a_3b_3,\\ &a_2b_3^{-1}a_3b_6,\ a_3b_2a_3^{-1}b_2^{-1},\ a_3b_4a_3b_1^{-1}\rangle\\ \Gamma_{7,11} =&\langle a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,\ b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7 \mid a_4^2,\ a_5^2,\ b_6^2,\ b_7^2,\ a_1b_1a_2^{-1}b_4^{-1},\ a_1b_2a_4b_3^{-1},\\ &a_1b_3a_3^{-1}b_3,\ a_1b_4a_3^{-1}b_6,\ a_1b_5a_1^{-1}b_5^{-1},\ a_1b_6a_1^{-1}b_7,\ a_1b_7a_3^{-1}b_4,\ a_1b_4^{-1}a_2^{-1}b_1,\\ &a_1b_3^{-1}a_5b_2,\ a_1b_2^{-1}a_1b_1^{-1},\ a_2b_1a_3b_6,\ a_2b_2a_2b_4^{-1},\ a_2b_3a_2^{-1}b_3^{-1},\ a_2b_5a_3b_5,\\ &a_2b_6a_2^{-1}b_7,\ a_2b_7a_3b_1,\ a_2b_5^{-1}a_5b_2^{-1},\ a_2b_2^{-1}a_4b_5^{-1},\ a_3b_2a_3^{-1}b_2^{-1},\ a_3b_3a_5b_4,\\ &a_3b_4a_4b_3,\ a_3b_5^{-1}a_4b_1^{-1},\ a_3b_1^{-1}a_5b_5^{-1},\ a_4b_1a_5b_1^{-1},\ a_4b_4a_5b_4^{-1},\ a_4b_6a_5b_7\rangle\end{aligned}$$

5.4 $(-7-\sqrt{7},^{-}\ -8+3\sqrt{7}^{-} \mid \mathbb{Q}(\sqrt{7}))$

取 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{7})$、$R=\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ 和 $B=(-7-\sqrt{7},^{-}\ -8+3\sqrt{7}^{-} \mid K)$。这是我们的第一个基域不是 $\mathbb{Q}$ 的例子。极大阶的类群并不平凡，这与第 5.3 节的情形相同。

注 5.9。 有趣的是，本例以及第 5.5 节中的下一个例子，正是本项目的起点。当时，我们已经知道下文给出的 BMW 群 $\Gamma_{2-\alpha,\,-2-\alpha}$ 以及第 5.5 节中的其他 BMW 群，却不了解它们的算术性。我们最初是通过枚举所有作用于两个 4-正则树乘积上的 BMW 群发现它们的。随后，我们发现了非平凡的四元数表示，例如 $\Gamma_{2-\alpha,\,-2-\alpha} \to \mathrm{PGL}_1(B)$；具体做法是仔细分析由 Jambor 开发、在 Magma [BCP97] 中实现的算法所提供的 L_2-商，并由 Jambor 开发了该算法。现在我们理解了，这些表示与我们在此处作为 $\Gamma_O(S) \leq \mathrm{PGL}_1(B)$ 的子群所给出的描述相对应。

四元数代数 B 的型数为一，且 K 的类群是平凡的。$\mathrm{Ram(B)} = \{\infty_1, \infty_2, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_7\}$，其中 ∞_1 和 ∞_2 是两个无穷处， $\mathfrak{p}_2$ 和 $\mathfrak{p}_7$ 分别是素理想 $(3+\sqrt{7})$ 和 $(\sqrt{7})$。注意， $\mathfrak{p}_2^2 = (2)$ 和 $\mathfrak{p}_7^2 = (7)$。对于任意极大阶 O，商 Idl(O)/PIdl(O) 非平凡，阶为 4，且同构于 $C_2 \times C_2$。它由约化范数为 $\mathfrak{p}_2$ 和 $\mathfrak{p}_7$的素双边 O-理想生成，因此 $\mathrm{Idl}(O[\mathrm{Ram(B)}^{-1}]) = \mathrm{PIdl}(O[\mathrm{Ram(B)}^{-1}])$。例如，取 O 为以下极大阶：

$$R \oplus Ri \oplus R\frac{1}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{7}i + j) \oplus R\frac{2+\sqrt{7}}{6}((1+\sqrt{7}) + \sqrt{7}i + k).$$

设 S 是一个包含 $\mathrm{Ram}(B)$ 的有限个赋值的有限集，且 $S_0 = S \cap \mathrm{Ram}(B) = \mathrm{Ram}(B)$。由定理 3.10 和定理 3.13， $\Gamma_O(S)$ 在 Bruhat-Tits 树的乘积上顶点传递，其稳定子与 $\Gamma_O(S_0)$共轭。群 $\Gamma_O(S_0)$ 的阶为 2，由 j 生成。

现在令 $\mathfrak{p}$ 为一个不属于 S 的素理想，且 $\mathrm{Nrd(j)} = 8 - 3\sqrt{7}$ 在模 $\mathfrak{p}$ 意义下不是平方。此类素理想的例子有 $(2-\sqrt{7})$ 或 $(3-2\sqrt{7})$。由于 $\mathfrak{p}$ 在 B 中不分歧，R/$\mathfrak{p}$-代数 O/$\mathfrak{p}$O 同构于 M_2(R/$\mathfrak{p}$)。此外，约化映射$\pi_{\mathfrak{p}}$： Γ_O(S) $\to \mathrm{PGL}_1$(O/$\mathfrak{p}$O) $\simeq \mathrm{PGL}_2$(R/$\mathfrak{p}$) 是满射，因为 Nrd(j) 在模 $\mathfrak{p}$ 意义下不是平方。注意，R/$\mathfrak{p}$ 的特征不为 2，因此 PSL_1(O/$\mathfrak{p}$O) $\simeq \mathrm{PSL}_2$(R/$\mathfrak{p}$) 在 PGL_1(O/$\mathfrak{p}$O) $\simeq \mathrm{PGL}_2$(R/$\mathfrak{p}$) 中的指数为 2。令 A 为 PSL_1(O/$\mathfrak{p}$O)，则定理 3.26 保证群 $\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}$(A) 正则地作用于树的乘积的顶点上。

带有 $\mathfrak{p} = (3-2\sqrt{7})$ 的族。 我们将 α 记作 $\sqrt{7}$。

$2-\alpha$	$1/2(3\alpha+7) + 1/6(\alpha+2)i + 1/6(14\alpha+37)k,\ 1/6(-\alpha+1)i + 1/6(\alpha+5)k,$ $(3\alpha+8)k,\ 1/2(3\alpha+7) + 1/6(-\alpha-2)i + 1/6(-14\alpha-37)k$
$-2-\alpha$	$1/2(-3\alpha-7) + 1/6(-\alpha-2)i + 1/6(4\alpha+11)k,$ $1/3(-\alpha-2)i + 1/3(-5\alpha-13)k,\ 1/6(5\alpha+13)i + 1/6(-5\alpha-13)k,$ $1/2(-3\alpha-7) + 1/6(\alpha+2)i + 1/6(-4\alpha-11)k$

$$\begin{aligned}\Gamma_{2-\alpha,-2-\alpha} = \langle a_1, a_2, a_3,\ b_1, b_2, b_3 \mid\ & a_2^2,\ a_3^2,\ b_2^2,\ b_3^2,\ a_1b_1a_1b_2,\ a_1b_3a_1b_3,\ a_1b_1^{-1}a_3b_1^{-1},\ a_2b_1a_2b_1^{-1},\\ & a_2b_2a_3b_3\rangle\end{aligned}$$

5.5 $(-1,-1 \mid \mathbb{Q}(\sqrt{13}))$

取 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$、$R = \mathbb{Z}[\alpha]$，其中 $\alpha = (1+\sqrt{13})/2$，以及 $B = (-1,-1 \mid K)$。与第 5.4 节中的例子相比，这是一个在二次域上的更简单例子。如定理 5.9 所述，它在本项目中也具有一定的重要性。

域K 具有平凡的类群，四元数代数的型数为 1，有 $\mathrm{Ram}(B) = V_\infty^K$ 以及 $\mathrm{Idl}(O) = \mathrm{PIdl}(O)$ 对于任意极大阶O均成立。例如，取O 为

$$R \oplus Ri \oplus R\left(\frac{1-\sqrt{13}}{4} + \frac{1+\sqrt{13}}{4}i + \frac{1}{2}j\right) \oplus R\left(\frac{1+\sqrt{13}}{4} + \frac{1-\sqrt{13}}{4}i + \frac{1}{2}k\right).$$

令S 为包含 Ram(B) 的有限个赋值。在所有情形下，$S_0 = S \cap \text{Ram}(B) = \text{Ram}(B)$。根据定理 3.10 和定理3.13， $\Gamma_O(S)$ 在 Bruhat-Tits 树的乘积上是顶点传递的，其稳定子与 $\Gamma_O(S_0)$共轭。可以验证

$$\Gamma_O(S_0) = \{1, i, j, k, \frac{1 \pm i \pm j \pm k}{2}\};$$

它是一个 12 阶群，同构于 Alt（4）。

第一族。 理想 $I_2 =$ （2） 是素数理想；取不包含它的 S 。$R[S^{-1}]/I_2$-代数$O[S^{-1}]/I_2$ 同构于 M_2（$\mathbb{F}_4$），因此 PGL_1（$O[S^{-1}]/I_2$） $\simeq \text{PGL}_2$（$\mathbb{F}_4$） $\simeq$ Alt（5），并且

约化映射 $\pi_{(2)}$： Γ_O（S） $\to \text{PGL}_1$（O/I_2） $\simeq \text{PGL}_2$（$\mathbb{F}_4$） $\simeq$ Alt（5） 根据强逼近定理是满射。容易验证，将 $\pi_{(2)}$ 限制在 Γ_O（S_0） 上是单射。由定理 3.26 可知，若 A 是 PGL_1（O/I_2）的任意一个 5-西洛子群，则群 π^{-1}（2）（A） 在树的乘积上正则地作用。

α	$1/2(-\alpha-2) - 1/2i + 1/2(\alpha+1)j$, $1/2(-\alpha-1) + 1/2(-\alpha-2)i + 1/2j$, $1/2(-\alpha-1) + 1/2(\alpha+2)i - 1/2j$, $1/2(-\alpha-2) + 1/2i + 1/2(-\alpha-1)j$
$1-\alpha$	$1/2 + 1/2(-\alpha-1)i - 1/2\alpha j$, $1/2\alpha - 1/2i + 1/2(\alpha+1)j$, $1/2\alpha + 1/2i + 1/2(-\alpha-1)j$, $2 + 1/2(\alpha+1)i + 1/2\alpha j$
$-1+2\alpha$	$1/2(-\alpha-3) + 1/2(\alpha+2)i - 1/2j$, $1/2 + 1/2(-\alpha-3)i + 1/2(\alpha+2)j$, $1/2(-2\alpha-1) + 1/2(-\alpha-1)i - 1/2\alpha j$, $1/2(\alpha+1) + 1/2\alpha i + 1/2(2\alpha+1)j$, $-i + (-\alpha-1)j$, $i + (-\alpha-1)j$, $j + (\alpha+1)k$, $(-\alpha-1)i + k$, $j + (-\alpha-1)k$, $(-\alpha-1)i - k$, $1/2(\alpha+1) - 1/2\alpha i + 1/2(-2\alpha-1)j$, $1/2(-2\alpha-1) + 1/2(\alpha+1)i + 1/2\alpha j$, $1/2 + 1/2(\alpha+3)i + 1/2(-\alpha-2)j$, $1/2(-\alpha-3) + 1/2(-\alpha-2)i + 1/2j$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\alpha,1-\alpha} =& \langle a_1, a_2,\ b_1, b_2 \mid a_1b_1a_1b_1,\ a_1b_2a_1^{-1}b_2^{-1},\ a_1b_1^{-1}a_2b_1^{-1},\ a_2b_1a_2b_2,\ a_2b_2^{-1}a_2b_2^{-1}\rangle \\
\Gamma_{\alpha,-1+2\alpha} =& \langle a_1, a_2,\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10} \mid b_5^2,\ b_6^2,\ b_7^2,\ b_8^2,\ b_9^2,\ b_{10}^2,\ a_1b_1a_1b_4,\ a_1b_2a_2^{-1}b_2, \\
& a_1b_3a_2b_{10},\ a_1b_5a_1b_3^{-1},\ a_1b_6a_1^{-1}b_6,\ a_1b_7a_1^{-1}b_8,\ a_1b_8a_2b_3,\ a_1b_9a_2^{-1}b_4^{-1},\ a_1b_{10}a_1^{-1}b_9, \\
& a_1b_4^{-1}a_2^{-1}b_7,\ a_1b_2^{-1}a_1b_1^{-1},\ a_2b_1a_2^{-1}b_1^{-1},\ a_2b_2a_2b_3^{-1},\ a_2b_5a_2^{-1}b_9,\ a_2b_6a_2b_4^{-1}, \\
& a_2b_7a_2^{-1}b_5,\ a_2b_8a_2^{-1}b_{10}\rangle \\
\Gamma_{1-\alpha,-1+2\alpha} =& \langle a_1, a_2,\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10} \mid b_5^2,\ b_6^2,\ b_7^2,\ b_8^2,\ b_9^2,\ b_{10}^2,\ a_1b_1a_2b_7,\ a_1b_2a_2^{-1}b_{10}, \\
& a_1b_3a_1^{-1}b_3^{-1},\ a_1b_4a_2^{-1}b_4,\ a_1b_5a_1^{-1}b_8,\ a_1b_6a_1b_2^{-1},\ a_1b_7a_1^{-1}b_9,\ a_1b_8a_2^{-1}b_2, \\
& a_1b_9a_2b_1,\ a_1b_{10}a_1^{-1}b_5,\ a_1b_4^{-1}a_1b_1^{-1},\ a_2b_2a_2b_3^{-1},\ a_2b_3a_2b_4,\ a_2b_5a_2b_1^{-1},\ a_2b_6a_2^{-1}b_6, \\
& a_2b_9a_2^{-1}b_8,\ a_2b_{10}a_2^{-1}b_7\rangle
\end{aligned}$$

第二族。R-理想 (3) 分解为两个素理想 $\mathfrak{p}_3 = (\alpha)$ 和$\mathfrak{p}_3' = (1-\alpha)$ 的乘积。取不包含 $\mathfrak{p}_3$ 的 S。约化映射 $\pi_{\mathfrak{p}_3}$： Γ_O(S) $\to \text{PGL}_1$(O/$\mathfrak{p}_3$O) $\simeq \text{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ 将 $\Gamma_O(S_0)$ 双射到其像，而该像必然是 $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$。若 A 是 $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ 中任意一个阶为 2 且与 $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ 交集平凡的子群，则 $\pi_{\mathfrak{p}_3}^{-1}$(A) 根据定理 3.26 是一个 BMW 群。

2	$1/2\alpha+1/2i+1/2(\alpha-1)j,\ 1/2(\alpha-1)i+1/2j+1/2\alpha k,$ $i-j,\ 1/2(-\alpha+1)i-1/2j+1/2\alpha k,\ 1/2\alpha-1/2i+1/2(-\alpha+1)j$
$1-\alpha$	$1/2\alpha-1/2i+1/2(\alpha+1)j,\ 1/2(\alpha+1)i-1/2j-1/2\alpha k,$ $1/2(-\alpha-1)i+1/2j-1/2\alpha k,\ 1/2\alpha+1/2i+1/2(-\alpha-1)j$
$2\alpha-1$	$1/2\alpha+1/2(2\alpha+1)i+1/2(-\alpha-1)j,$ $-1/2\alpha+1/2(\alpha+2)i+1/2(-\alpha-2)j-1/2\alpha k,$ $1/2\alpha+1/2(\alpha+2)i+1/2(-\alpha-2)j+1/2\alpha k,$ $1/2(-\alpha-3)+1/2(-\alpha-2)i-1/2j,$ $1/2(-\alpha-1)i+1/2(2\alpha+1)j+1/2\alpha k,\ 1/2i+1/2(\alpha+2)j+1/2(-\alpha-3)k,$ $1/2i+1/2(\alpha+2)j+1/2(\alpha+3)k,\ (-\alpha-1)i+j,$ $1/2(-\alpha-1)i+1/2(2\alpha+1)j-1/2\alpha k,\ i+(-\alpha-1)j,$ $1/2(-\alpha-3)+1/2(\alpha+2)i+1/2j,$ $1/2\alpha+1/2(-\alpha-2)i+1/2(\alpha+2)j-1/2\alpha k,$ $-1/2\alpha+1/2(-\alpha-2)i+1/2(\alpha+2)j+1/2\alpha k,$ $1/2\alpha+1/2(-2\alpha-1)i+1/2(\alpha+1)j$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{2,1-\alpha} =&\langle a_1, a_2, a_3, a_4,\ b_1, b_2, b_3 \mid a_2^2,\ a_3^2,\ a_4^2,\ b_2^2,\ b_3^2,\ a_1b_1a_3b_1,\ a_1b_2a_2b_1^{-1},\ a_1b_3a_1^{-1}b_2,\\
&a_1b_1^{-1}a_4b_3,\ a_2b_1a_4b_1^{-1},\ a_2b_3a_3b_3,\ a_3b_2a_4b_2\rangle\\
\Gamma_{2,-1+2\alpha} =&\langle a_1, a_2, a_3, a_4,\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10} \mid a_2^2,\ a_3^2,\ a_4^2,\ b_5^2,\ b_6^2,\ b_7^2,\ b_8^2,\ b_9^2,\\
&b_{10}^2,\ a_1b_1a_1b_6,\ a_1b_2a_3b_4,\ a_1b_3a_2b_9,\ a_1b_4a_3b_2,\ a_1b_5a_1b_3^{-1},\ a_1b_7a_4b_1^{-1},\\
&a_1b_8a_1^{-1}b_7,\ a_1b_9a_1^{-1}b_8,\ a_1b_{10}a_1b_4^{-1},\ a_1b_2^{-1}a_2b_3,\ a_1b_1^{-1}a_4b_2^{-1},\ a_2b_1a_2b_4,\\
&a_2b_5a_2b_8,\ a_2b_6a_3b_7,\ a_2b_{10}a_4b_2,\ a_3b_1a_3b_3,\ a_3b_5a_4b_9,\ a_3b_8a_3b_{10},\ a_4b_3a_4b_4^{-1},\\
&a_4b_6a_4b_8\rangle\\
\Gamma_{1-\alpha,-1+2\alpha} =&\langle a_1, a_2, a_3,\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10} \mid a_2^2,\ a_3^2,\ b_5^2,\ b_6^2,\ b_7^2,\ b_8^2,\ b_9^2,\ b_{10}^2,\\
&a_1b_1a_2b_1,\ a_1b_2a_2b_3,\ a_1b_3a_2b_7,\ a_1b_4a_2b_6,\ a_1b_5a_3b_4,\ a_1b_6a_1^{-1}b_5,\ a_1b_7a_1^{-1}b_{10},\\
&a_1b_8a_1^{-1}b_8,\ a_1b_9a_3b_1^{-1},\ a_1b_{10}a_1^{-1}b_9,\ a_1b_4^{-1}a_1b_2^{-1},\ a_1b_3^{-1}a_3b_3^{-1},\ a_1b_1^{-1}a_3b_2,\\
&a_2b_2a_3b_8,\ a_2b_4a_3b_4^{-1},\ a_2b_5a_2b_9,\ a_2b_{10}a_3b_{10},\ a_3b_6a_3b_7\rangle
\end{aligned}
$$

5.6 $(-1,-1 \mid \mathbb{Q}(\sqrt{21}))$

现在给出一个型数不为 1 的例子。取 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{21})$、$R=\mathbb{Z}[\alpha]$ 其中$\alpha=(1+\sqrt{21})/2$ 和 $B=(-1,-1 \mid K)$。数域 K 的类数为 1，其窄类群的阶为 2，且 $\mathrm{Ram}(B)=V_\infty^K$。四元数代数 B 的型数为 2；换言之，B 中有两个极大阶的共轭类，其代表元如下：

$$
\begin{aligned}
O_1 &= R\oplus Ri\oplus R\frac{1}{2}((1+\alpha)+\alpha i+j)\oplus R\frac{1}{2}(\alpha+(1+\alpha)i+k),\\
O_2 &= R\oplus R(1+\alpha)i\oplus R\frac{1}{2}((1+\alpha)+\alpha i+j)\oplus R\frac{1+\alpha}{6}(3+i+j+k).
\end{aligned}
$$

$V^K(O_1)$ 和$V^K(O_2)$ 均非空，并且根据定理 3.24，它们都由全正主理想素数R-理想组成。

有 $\Gamma_{O_1}(S_0)\simeq \mathrm{Alt}(4)$，而 $\Gamma_{O_2}(S_0)\simeq D_6$。此外，每个双边 O_1-理想都是主理想，O_2 也同样如此。根据定理 3.10 和定理3.13，群 $\Gamma_{O_1}(S)$ 和 $\Gamma_{O_2}(S)$ 在条件 $S\cap V_f^K\subseteq V^K(O_1)=V^K(O_2)$ 下都顶点传递地作用，其稳定子分别与 $\Gamma_{O_1}(S_0)$ 和 $\Gamma_{O_2}(S_0)$ 共轭。

第一族。 $\Gamma_{O_1}(S_0)$ 的代表元由集合给出

$$\{1, i, j, k, \frac{\pm 1 \pm i \pm j + k}{2}\}.$$

记 $\mathfrak{p}_3$ 为由 $1+\alpha$ 生成的 R-理想。注意 $\mathfrak{p}_3^2 = (3)$，且 $\mathfrak{p}_3$ 不是全正的，因此根据定理 3.24，它不属于 $S \cap V_f^K \subseteq V^K(O)$。有 $PGL_1(O_1/\mathfrak{p}_3O_1) \simeq PGL_2(3)$。此外，约化映射 $\pi_{\mathfrak{p}_3}: \Gamma_{O_1}(S) \to PGL_1(O_1/\mathfrak{p}_3O_1)$ 限制在$\Gamma_{O_1}(S_0)$上时是单射，其像必然是 $PSL_1(O_1/\mathfrak{p}_3O_1)$。若 A 是 $PGL_1(O_1/\mathfrak{p}_3O_1)$ 中阶为 2 且与 $PSL_1(O_1/\mathfrak{p}_3O_1)$ 的交平凡的任意子群，则 $f_{\mathfrak{p}_3}^{-1}(A)$ 是一个 BMW 群。

2	$1/2(\alpha+1) + 1/2(-\alpha-2)i + 1/2j,\ -i+j,$ $-1/2i + 1/2(\alpha+2)j + 1/2(-\alpha-1)k,$ $-1/2i + 1/2(\alpha+2)j + 1/2(\alpha+1)k,\ 1/2(\alpha+1) + 1/2(\alpha+2)i - 1/2j$
$3+\alpha$	$1/2(-\alpha-1) + 1/2\alpha i + 1/2j,\ 1/2(-\alpha-1) + 1/2(\alpha+2)i + 1/2(-2\alpha-3)j,$ $-1/2i - 1/2\alpha j + 1/2(\alpha+1)k,\ 1/2(2\alpha+3)i + 1/2(-\alpha-2)j + 1/2(\alpha+1)k,$ $1/2(2\alpha+3)i + 1/2(-\alpha-2)j + 1/2(-\alpha-1)k,$ $1/2i + 1/2\alpha j + 1/2(\alpha+1)k,\ 1/2(-\alpha-1) + 1/2(-\alpha-2)i + 1/2(2\alpha+3)j,$ $1/2(-\alpha-1) - 1/2\alpha i - 1/2j$

$$\begin{aligned}\Gamma_{2,3+\alpha} = \langle & a_1, a_2, a_3, a_4,\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \mid a_2^2,\ a_3^2,\ a_4^2,\ b_3^2,\ b_4^2,\ b_5^2,\ b_6^2,\ a_1b_1a_3b_6,\ a_1b_2a_2b_1^{-1},\\ & a_1b_3a_4b_1,\ a_1b_4a_3b_2^{-1},\ a_1b_5a_1^{-1}b_4,\ a_1b_6a_1^{-1}b_3,\ a_1b_2^{-1}a_4b_5,\ a_1b_1^{-1}a_2b_2,\ a_2b_3a_3b_5,\\ & a_2b_4a_4b_6,\ a_3b_1a_4b_1^{-1},\ a_3b_2a_4b_2^{-1}\rangle\end{aligned}$$

第二族。O_2 的情形更为棘手。事实上，约化映射 $\pi_{\mathfrak{p}_3}: \Gamma_{O_2}(S) \to PGL_1(O_2/\mathfrak{p}_3O_2) \simeq PGL_2(\mathbb{F}_3)$ 在限制于 $\Gamma_{O_2}(S_0)$ 时并非单射。尽管如此，我们仍可更进一步，考虑约化映射 $\pi_{(3)}: \Gamma_{O_2}(S) \to PGL_1(O_2/(3)O_2)$；当限制于 $\Gamma_{O_2}(S_0)$ 时，该映射是单射的。由于 $(3) = \mathfrak{p}_3^2$，群 $PGL_1(O_2/(3)O_2)$ 同构于 $PGL_2(\mathbb{F}_3[X]/(X^2))$，其阶为 648。通过仔细分析该群，可以在 $PGL_1(O_2/(3)O_2)$ 中找到 $\Gamma_{O_2}(S_0)$ 的像的一个补群（阶为 54），从而得到一个 BMW 族。

2	$1/2\ (\alpha-2)\ + 1/2j + 1/2\ (\alpha-3)\ k,$ $1/3(\alpha-2)i\ + 1/3(-2\alpha+4)j\ + 1/3(\alpha-2)k,$ $1/6(\alpha-5)i\ + 1/6(-2\alpha+1)j\ + 1/6(\alpha+4)k,$ $1/2(-\alpha+2)i\ + 1/2(-\alpha+3)j\ - 1/2k,$ $1/2(\alpha-2)\ - 1/2j\ + 1/2(-\alpha+3)k$
$3+\alpha$	$1/2(-\alpha-1)\ + 1/3(\alpha+1)i\ + 1/6(-\alpha+2)j\ + 1/6(2\alpha-1)k,$ $1/2(-\alpha+2)\ + 1/6(\alpha+1)i\ + 1/3(-\alpha+2)j\ + 1/6(-2\alpha+1)k,$ $1/6\ (-\alpha-1)\ i + 1/6\ (-4\alpha-1)\ j + 1/6\ (-\alpha-4)\ k,$ $1/6(4\alpha-5)i\ + 1/6(\alpha-2)j\ + 1/6(\alpha-5)k,$ $1/6(\alpha+7)i\ + 1/6(-2\alpha-5)j\ + 1/6(\alpha-2)k,$ $1/6\ (-\alpha-1)\ i + 1/6\ (2\alpha-7)\ j + 1/6\ (-\alpha+8)\ k,$ $1/2(-\alpha+2)\ + 1/6(-\alpha-1)i\ + 1/3(\alpha-2)j\ + 1/6(2\alpha-1)k,$ $1/2(-\alpha-1)\ + 1/3(-\alpha-1)i\ + 1/6(\alpha-2)j\ + 1/6(-2\alpha+1)k$

$$\Gamma_{2,3+\alpha} = \langle a_1, a_2, a_3, a_4,\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \mid a_2^2,\ a_3^2,\ a_4^2,\ b_3^2,\ b_4^2,\ b_5^2,\ b_6^2,\ a_1b_1a_2b_1,\ a_1b_2a_2b_4,\ a_1b_3a_3b_2,\ a_1b_4a_3b_1^{-1},\ a_1b_5a_1^{-1}b_3,\ a_1b_6a_1b_2^{-1},\ a_1b_1^{-1}a_4b_5,\ a_2b_2a_4b_2^{-1},\ a_2b_3a_4b_3,\ a_2b_5a_3b_6,\ a_3b_1a_4b_2,\ a_4b_4a_4b_6 \rangle$$

5.7 $(-1,-1 \mid \mathbb{Q}(\sqrt{69}))$

这里，与第 5.6 节一样，我们所考虑的四元数代数的型数大于 1。此外，这个例子颇为特殊，因为存在一些集合 S，使得 $\Gamma_O(S)$ 是顶点传递的，但不包含 BMW 子群。

取 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{69})$、$R = \mathbb{Z}[\alpha]$，其中 $\alpha = (1+\sqrt{69})/2$，以及 $B = (-1, -1 \mid K)$。K 的类数为 1，其窄类群的阶为 2，并且 $\mathrm{Ram}(B) = V_\infty^K$。$B$的型数为 5，但只有一个极大阶的共轭类满足 $V^K(O)$ 非空，其代表元为

$$O = R \oplus Ri \oplus R\frac{1}{2}(-1+(-5+\alpha)i+(4-\alpha)j) \oplus R\frac{3+\alpha}{10}(5+5i+7j+k).$$

有 $\mathrm{Idl}(O) = \mathrm{PIdl}(O)$，因此根据定理 3.10 和定理 3.13，在 $S \cap V_f^K \subseteq V^K(O)$ 这一条件下，$\Gamma_O(S)$ 在树的乘积上顶点传递地作用，其稳定子与 $\Gamma_O(S_0)$ 共轭。回顾定理 3.24，我们证明了 $V^K(O)$ 是全正主素理想的集合。

可以证明，$\Gamma_O(S_0)$ 的阶为 2，由i生成。i 的约化范数为 1，因此 $\Gamma_O(S_0)$ 嵌入于 $\mathrm{PSL}_1(O/\mathfrak{p}O) \simeq \mathrm{PSL}_2(R/\mathfrak{p})$，其中所有素$R$-理想 $\mathfrak{p}$ 均不包含于S中。在所有情况下，$\mathrm{PGL}_1(O[S^{-1}]/\mathfrak{p})$ 都不存在不含i的指数为 2 的子群。不同于本节介绍的其他例子，无法找到作为同余子群的 BMW 子群。

通过枚举 $\Gamma_O(S)$ 的所有指数为 2 的子群（其中 $S = V_\infty^K \cup \{2, -5+\alpha\}$），还可以证明它们都不是顶点传递的。

5.8 $(-75-19\sqrt{15}, -4-\sqrt{15} \mid \mathbb{Q}(\sqrt{15}))$

取 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{15})$、$R = \mathbb{Z}[\sqrt{15}]$、$B = (-75-19\sqrt{15}, -4-\sqrt{15} \mid K)$。这是数域上型数为 1 且具有非平凡类群的唯一四元数代数：$\mathrm{Cl}(K)$ 的阶为 2。可知 $\mathrm{Ram}(B) = \{\infty_1, \infty_2, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3\}$，其中 ∞_1 和 ∞_2 是两个无穷处，分别为$\mathfrak{p}_2 = (2, 1+\sqrt{15})$ 和 $\mathfrak{p}_3 = (3, \sqrt{15})$。注意，$\mathfrak{p}_2$ 和 $\mathfrak{p}_3$ 都生成 K 的类群，并且$\mathfrak{p}_2^2 = (2)$ 和 $\mathfrak{p}_3^2 = (3)$。令 O 为以下极大阶：

$$R \oplus Ri \oplus R\frac{1+i+j}{2} \oplus R\frac{5+2\sqrt{15}}{70}((15+\sqrt{15})+19i+k).$$

商群 $\mathrm{Idl}(O)/\mathrm{PIdl}(O)$ 的阶为 8，由约化范数为 $\mathfrak{p}_2$ 和 $\mathfrak{p}_3$的素双边 O-理想生成。因此，$\mathrm{Idl}(O[\mathrm{Ram}(B)^{-1}]) = \mathrm{PIdl}(O[\mathrm{Ram}(B)^{-1}])$。还可以看到，$\mathrm{PGL}_1(O[\mathrm{Ram}(B)^{-1}]) = \mathrm{PGL}_1(O)$ 的阶为 2，由 j 生成。根据定理 3.10 和定理 3.13，$\Gamma_O(S)$ 以顶点传递的方式作用，其稳定子与 $\Gamma_O(S_0)$ 共轭，若 $\mathrm{Ram}(B) \subseteq S$。

要找到 BMW 族，取一个不属于 S 的素理想 $\mathfrak{p}$，使得 $\mathrm{Nrd}(j) = 4+\sqrt{15}$在模 $\mathfrak{p}$意义下不是平方。以 $\mathfrak{p}$ 取为 $(7, 1+\sqrt{15})$、$(7, 1-\sqrt{15})$、$(2+\sqrt{15})$ 或 $(2-\sqrt{15})$ 为例。于是 $\pi_\mathfrak{p}^{-1}(\mathrm{PSL}_2(R/\mathfrak{p}))$ 在树的乘积上正则作用，其中 $\pi_\mathfrak{p}: \Gamma_O(S) \to \mathrm{PGL}_1(O/\mathfrak{p}O) \simeq \mathrm{PGL}_2(R/\mathfrak{p})$ 是约化映射。

$1-\mathrm{j}$、$(\alpha+4)\ +1/70(\alpha-15)\mathrm{i}\ +1/70(-11\alpha+25)\mathrm{k}$、$(5,\alpha)\ 1/10(\alpha+5)\mathrm{i}\ -\mathrm{j}\ +1/10(-\alpha+5)\mathrm{k}$、$1/10(-\alpha-5)\mathrm{i}\ -\mathrm{j}\ +1/10(\alpha-5)\mathrm{k}$、$(\alpha+4)\ +1/70(-\alpha+15)\mathrm{i}\ +1/70(11\alpha-25)\mathrm{k}$、$1+\mathrm{j}\ 1/2(-\alpha+3)\ +1/70(-13\alpha+55)\mathrm{i}\ +1/2(-\alpha+3)\mathrm{j}\ +1/35(19\alpha-75)\mathrm{k}$、$1/2(-\alpha+3)\ +1/70(13\alpha-55)\mathrm{i}\ +1/2(-\alpha+3)\mathrm{j}\ +1/35(-19\alpha+75)\mathrm{k}$、$1/2(-\alpha-3)\ +1/70(2\alpha+5)\mathrm{i}\ +1/70(-22\alpha+85)\mathrm{k}$、$(7,1+\alpha)\ 1/10(\alpha-5)\mathrm{i}\ +1/10(-\alpha+5)\mathrm{k}$、$1/35(-9\alpha+30)\mathrm{i}\ +1/35(-41\alpha+160)\mathrm{k}$、$1/2(-\alpha-3)\ +1/70(-2\alpha-5)\mathrm{i}\ +1/70(22\alpha-85)\mathrm{k}$、$1/2(-\alpha+3)\ +1/70(-13\alpha+55)\mathrm{i}\ +1/2(\alpha-3)\mathrm{j}\ +1/35(19\alpha-75)\mathrm{k}$、$1/2(-\alpha+3)\ +1/70(13\alpha-55)\mathrm{i}\ +1/2(\alpha-3)\mathrm{j}\ +1/35(-19\alpha+75)\mathrm{k}\ 1/2(-\alpha-3)\ +1/70(9\alpha+5)\mathrm{i}\ +1/2(-\alpha-3)\mathrm{j}\ +1/35(3\alpha-10)\mathrm{k}$、$1/2(-\alpha-3)\ +1/70(-9\alpha-5)\mathrm{i}\ +1/2(-\alpha-3)\mathrm{j}\ +1/35(-3\alpha+10)\mathrm{k}$、$1/70(-11\alpha+25)\mathrm{i}\ +1/70(-19\alpha+75)\mathrm{k}$、$(7,6+\alpha)\ 1/35(-3\alpha+10)\mathrm{i}\ +1/35(-2\alpha-5)\mathrm{k}$、$1/70(-4\alpha+25)\mathrm{i}\ +1/2(\alpha-3)\mathrm{j}\ +1/70(9\alpha-30)\mathrm{k}$、$1/70(-4\alpha+25)\mathrm{i}\ +1/2(-\alpha+3)\mathrm{j}\ +1/70(9\alpha-30)\mathrm{k}$、$1/2(-\alpha-3)\ +1/70(9\alpha+5)\mathrm{i}\ +1/2(\alpha+3)\mathrm{j}\ +1/35(3\alpha-10)\mathrm{k}$、$1/2(-\alpha-3)\ +1/70(-9\alpha-5)\mathrm{i}\ +1/2(\alpha+3)\mathrm{j}\ +1/35(-3\alpha+10)\mathrm{k}$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{(5,\alpha),(7,1+\alpha)} =&\langle a_1, a_2, a_3, a_4,\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \mid a_3^2,\ a_4^2,\ b_4^2,\ b_5^2,\ a_1b_1a_1b_2,\ a_1b_3a_2b_1^{-1},\ a_1b_4a_1b_4,\\
&a_1b_5a_1b_5,\ a_1b_3^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1},\ a_1b_2^{-1}a_4b_3^{-1},\ a_1b_1^{-1}a_3b_3,\ a_2b_1a_3b_5,\ a_2b_2a_2^{-1}b_1,\\
&a_2b_4a_2b_3^{-1},\ a_2b_5a_4b_2^{-1},\ a_3b_2a_3b_2,\ a_3b_4a_3b_4,\ a_3b_3^{-1}a_4b_3,\ a_4b_1a_4b_1,\ a_4b_4a_4b_4\rangle\\
\Gamma_{(5,\alpha),(7,6+\alpha)} =&\langle a_1, a_2, a_3, a_4,\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \mid a_3^2,\ a_4^2,\ b_3^2,\ b_4^2,\ b_5^2,\ b_6^2,\ a_1b_1a_1b_2,\ a_1b_3a_1b_3,\\
&a_1b_4a_1b_4,\ a_1b_5a_3b_2^{-1},\ a_1b_6a_4b_1^{-1},\ a_1b_2^{-1}a_2^{-1}b_5,\ a_1b_1^{-1}a_2b_6,\ a_2b_1a_2b_1,\ a_2b_3a_2b_3,\\
&a_2b_4a_4b_2,\ a_2b_5a_2^{-1}b_6,\ a_2b_2^{-1}a_2b_2^{-1},\ a_2b_1^{-1}a_3b_4,\ a_3b_2a_4b_1,\ a_3b_3a_3b_6,\ a_4b_3a_4b_5\rangle\\
\Gamma_{(7,1+\alpha),(7,6+\alpha)} =&\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \mid a_4^2,\ a_5^2,\ b_3^2,\ b_4^2,\ b_5^2,\ b_6^2,\ a_1b_1a_3^{-1}b_3,\ a_1b_2a_3^{-1}b_6,\\
&a_1b_3a_1^{-1}b_5,\ a_1b_4a_1b_1^{-1},\ a_1b_5a_3b_2,\ a_1b_6a_4b_1,\ a_1b_2^{-1}a_5b_2^{-1},\ a_2b_1a_3b_5,\ a_2b_2a_3b_3,\\
&a_2b_3a_2^{-1}b_6,\ a_2b_4a_2b_2^{-1},\ a_2b_5a_4b_2,\ a_2b_6a_3^{-1}b_1,\ a_2b_1^{-1}a_5b_1^{-1},\ a_3b_1a_4b_2^{-1},\\
&a_3b_4a_3b_4,\ a_4b_3a_5b_4,\ a_5b_5a_5b_5,\ a_5b_6a_5b_6\rangle
\end{aligned}
$$

关于全局函数域的 6 个例子

设 $q>1$ 为素数幂，设 ∞ 为 $K=\mathbb{F}_q(t)$ 的等于 $-$度的赋值，从而 $R=\mathbb{F}_q[t]$，并设 $f\in R$ 为一个次数为 $d\in\{1,2\}$的不可约首一多项式。设 B 为 K 上的四元数代数，其分歧集为 $\mathrm{Ram}(B)=\{\infty,f\}$，并设 O 为一个极大阶。

根据定理 3.20，我们知道 B 的型数为 1。此外，根据 [Gek90][Th´eor`eme 1 (iii)]，，O 的质量为

$$\mathrm{mass}(O)=\frac{q^d-1}{q^2-1},$$

其中O 的质量定义为

$$\mathrm{mass}(O)=\sum_{[I]\in \mathrm{Cl}_{\mathrm{R}}(O)}[O_{\mathrm{L}}(I)^{\times}:R^{\times}]^{-1}.$$

还可以进一步说明：由 [Gek90][Th´eor`eme 1 (i),(ii)], 可知，右类集 $\mathrm{Cl_R}(O)$ 是单元素集，因此 $\mathrm{mass}(O) = [O^\times : R^\times]^{-1}$。换言之，群 $\mathrm{PGL}_1(O) \simeq \Gamma_O(V_\infty^K)$ 的阶为$q+1$（若$d=1$），若$d=2$则阶为 1。

由于右类集 $\mathrm{Cl_R}$（O）是平凡的，商 Idl（O）/ PIdl（O）也同样是平凡的。根据定理 3.10 和定理 3.13，群 Γ_O（S）在树的乘积上顶点传递地作用，其稳定子与 Γ_O（S_0）共轭。另请注意，根据定理 3.11 中的正合序列，Γ_O（V_∞^K）在 Γ_O（分歧集（B））中的指数为 2。

6.1 关于 $\mathbb{F}_q$（t）的四元数代数，其中 分歧集（B）$= \{\infty, f\}$，且f 为 1 次不可约多项式

设 L 是 $\mathbb{F}_{q^2}$（t）的可分二次扩张，扩张于 $K = \mathbb{F}_q$（t）。设 i 是 $\mathbb{F}_{q^2}$ 中不属于$\mathbb{F}_q$ 的一个元素，使得当 q 为奇数时，$\alpha = i^2$ 属于 $\mathbb{F}_q$；当 q 为偶数时，$\alpha = i^2 + i$ 属于 $\mathbb{F}_q$。四元数代数 B 同构于 （L，f | K），即

$$(\alpha, f \mid K)$$

在奇数情形下，以及

$$[\alpha, f \mid K)$$

在偶数情形下。

以 1、i、j、k 为基的阶是极大的。可以看出 $\Gamma_O(\mathrm{V}_\infty^K) = \mathrm{PGL}_1(\mathrm{O}) = \{\mathrm{i}\} \cup \{1 + \lambda\mathrm{i} \mid \lambda \in \mathbb{F}_q\}$。另一方面，代数 O/(f)O 中的元素 $\mathrm{x} = \mathrm{a} + \mathrm{bi} + \mathrm{cj} + \mathrm{dk}$ 可逆，当且仅当它的约化范数非零。在奇数情形下，我们有 $\mathrm{Nrd(x)} = \mathrm{a}^2 - \alpha\mathrm{b}^2 - \mathrm{f\,c}^2 + \alpha\mathrm{f\,d}^2 \equiv \mathrm{a}^2 - \alpha\mathrm{b}^2$,；在偶数情形下，我们有 $\mathrm{Nrd(x)} = \mathrm{a}^2 + \mathrm{ab} + \alpha\mathrm{b}^2 + \mathrm{f\,c}^2 + \mathrm{f\,cd} + \alpha\mathrm{f\,d}^2 \equiv \mathrm{a}^2 + \mathrm{ab} + \alpha\mathrm{b}^2$。在这两种情形下，根据 α 的定义，O/(f)O 中有 $(\mathrm{q}^2 - 1)\mathrm{q}^2$ 个可逆元素，因此 PGL_1(O/(f)) 的阶为 $(\mathrm{q}+1)\mathrm{q}^2$。若 $\pi\colon \Gamma_O(\mathrm{S}) \to \mathrm{PGL}_1(\mathrm{O/(\,f\,)O})$ 是约化映射，并假设 $\mathrm{f} \not\in \mathrm{S}$，那么显然 π 将 $\Gamma_O(\mathrm{S}_0)$ 单射地映入其中。若 P 是 $\mathrm{PGL}_1(\mathrm{O/(\,f\,)O})$ 的任意 p-西洛子群，其中 q 是素数 p 的幂，则根据定理 3.26，π^{-1}(P) 正则地作用于树的乘积上。

注记 6.1。Rungtanapirom Stix 和 Vdovina 在他们的文章 [SV17]和 [RSV19]中构造了这些格。这也是对 [Mor94], 的推广，将在一棵树上的作用推广到在树的乘积上的作用。

参数为 $q = 3$。参数为

$$q = 3, \alpha = 2, f = t.$$

$t+1$	$2+2j+2k,\ 1+j+2k,\ 1+2j+k,\ 2+j+k$
$t+2$	$1+2j,\ 1+k,\ 1+2k,\ 1+j$

$$\Gamma_{t+1,t+2} = \langle a_1, a_2,\ b_1, b_2 \mid a_1b_1a_2b_1,\ a_1b_2a_1b_1^{-1},\ a_1b_2^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1},\ a_2b_2^{-1}a_2b_1^{-1} \rangle$$

具有 $q = 5$**的族**。参数为

$$q = 5, \alpha = 2, f = t.$$

$t+1$	$3+3j+3k,\quad 2+2j+3k,\quad 1+2j,\quad 1+3j,\quad 2+3j+2k,\quad 3+2j+2k$
$t+2$	$4+3j+k,\quad 3+k,\quad 3+j+3k,\quad 3+4j+2k,\quad 3+4k,\quad 4+2j+4k$
$t+3$	$1+k,\quad 1+j+3k,\quad 2+3j+k,\quad 2+2j+4k,\quad 1+4j+2k,\quad 1+4k$
$t+4$	$4+3j+3k,\ 4+2j+3k,\ 3+2j,\ 3+3j,\ 4+3j+2k,\ 4+2j+2k$

$$\Gamma_{t+1,t+2} = \langle a_1, a_2, a_3,\ b_1, b_2, b_3 \mid a_1 b_1 a_2^{-1} b_3^{-1},\ a_1 b_2 a_1 b_1^{-1},\ a_1 b_3 a_3 b_2^{-1},\ a_1 b_3^{-1} a_2^{-1} b_1,\ a_1 b_2^{-1} a_3 b_3,\ a_2 b_1 a_3 b_2,\ a_2 b_2 a_3 b_1,\ a_2 b_3^{-1} a_2 b_2^{-1},\ a_3 b_3^{-1} a_3 b_1^{-1} \rangle$$

$$\Gamma_{t+1,t+4} = \langle a_1, a_2, a_3,\ b_1, b_2, b_3 \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1},\ a_1 b_2 a_3^{-1} b_2,\ a_1 b_3 a_2 b_3,\ a_1 b_3^{-1} a_1 b_2^{-1},\ a_2 b_1 a_2 b_3^{-1},\ a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1},\ a_2 b_1^{-1} a_3^{-1} b_1^{-1},\ a_3 b_2 a_3 b_1^{-1},\ a_3 b_3 a_3^{-1} b_3^{-1} \rangle$$

具有 $q = 7$的族。 参数为

$$q = 7, \alpha = 3, f = t.$$

$t+1$	$4+5j+4k,\quad 4+2j+4k,\quad 1+2j+5k,\quad 5+3j+3k,\quad 5+4j+4k,$ $1+5j+2k,\quad 4+5j+3k,\quad 4+2j+3k$
$t+2$	$2+5j+4k,\quad 5+2j+4k,\quad 3+2j+5k,\quad 6+3j+3k,\quad 6+4j+4k,$ $3+5j+2k,\quad 5+5j+3k,\quad 2+2j+3k$
$t+3$	$3+4j+5k,\quad 3+k,\quad 5+2j+k,\quad 6+4j,\quad 6+3j,\quad 5+5j+6k,\quad 3+6k,$ $3+3j+2k$
$t+4$	$6+2j+4k,\quad 6+5j+4k,\quad 4+3j+3k,\quad 2+2j+5k,\quad 2+5j+2k,$ $4+4j+4k,\quad 6+2j+3k,\quad 6+5j+3k$
$t+5$	$1+k,\quad 4+2j+k,\quad 1+4j+5k,\quad 2+4j,\quad 2+3j,\quad 1+3j+2k,\quad 4+5j+6k,$ $1+6k$
$t+6$	$6+2j+k,\quad 2+4j+5k,\quad 4+4j,\quad 5+k,\quad 5+6k,\quad 4+3j,\quad 2+3j+2k,$ $6+5j+6k$

$$\Gamma_{t+1,t+2} = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1},\ a_1 b_2 a_3 b_4^{-1},\ a_1 b_3 a_4^{-1} b_3,\ a_1 b_4 a_2^{-1} b_3^{-1},\ a_1 b_4^{-1} a_3 b_2,\ a_1 b_3^{-1} a_2^{-1} b_4,\ a_1 b_2^{-1} a_4 b_2^{-1},\ a_2 b_1 a_3^{-1} b_1,\ a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1},\ a_2 b_4 a_3 b_4,\ a_2 b_3^{-1} a_4^{-1} b_1^{-1},\ a_2 b_1^{-1} a_4^{-1} b_3^{-1},\ a_3 b_1 a_4^{-1} b_2^{-1},\ a_3 b_3 a_3^{-1} b_3^{-1},\ a_3 b_2^{-1} a_4^{-1} b_1,\ a_4 b_4 a_4^{-1} b_4^{-1} \rangle$$

$$\Gamma_{t+1,\ t+3} = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \mid a_1 b_1 a_4 b_4,\ a_1 b_2 a_4^{-1} b_3,\ a_1 b_3 a_4^{-1} b_2,\ a_1 b_4 a_4 b_1,\ a_1 b_4^{-1} a_2^{-1} b_4^{-1},\ a_1 b_3^{-1} a_3 b_3^{-1},\ a_1 b_2^{-1} a_1 b_1^{-1},\ a_2 b_1 a_4^{-1} b_1,\ a_2 b_2 a_3 b_1^{-1},\ a_2 b_3 a_2 b_2^{-1},\ a_2 b_4^{-1} a_3^{-1} b_3^{-1},\ a_2 b_3^{-1} a_3^{-1} b_4^{-1},\ a_2 b_1^{-1} a_3 b_2, a_3 b_1 a_3 b_4^{-1},\ a_3 b_2^{-1} a_4^{-1} b_2^{-1},\ a_4 b_3 a_4 b_4^{-1} \rangle$$

$$\Gamma_{t+1,\ t+6} = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \mid a_1 b_1 a_2 b_2,\ a_1 b_2 a_2 b_1,\ a_1 b_3 a_4^{-1} b_2^{-1},\ a_1 b_4 a_4 b_1^{-1},\ a_1 b_4^{-1} a_3^{-1} b_3^{-1},\ a_1 b_3^{-1} a_3^{-1} b_4^{-1},\ a_1 b_2^{-1} a_4^{-1} b_3,\ a_1 b_1^{-1} a_4 b_4,\ a_2 b_3 a_4 b_4^{-1},\ a_2 b_4 a_3^{-1} b_2^{-1},\ a_2 b_4^{-1} a_4 b_3,\ a_2 b_3^{-1} a_3 b_1^{-1},\ a_2 b_2^{-1} a_3^{-1} b_4,\ a_2 b_1^{-1} a_3 b_3^{-1},\ a_3 b_1 a_4 b_2^{-1},\ a_3 b_2^{-1} a_4 b_1 \rangle$$

6.2 $\mathbb{F}_q(t)$ 上的四元数代数，其中 分歧集$(B) = \{\infty, f\}$，且 f 为度为2的不可约多项式

群 $\Gamma_O(V_\infty^K) = \mathrm{PGL}_1(O)$ 是平凡的，因此当$f \not\in S$时， $\Gamma_O(S)$ 在树的乘积上正则作用。下面给出这个族的例子。

或者，现在假设$f \in S$。若q为奇数，则可找到一个不属于S的不可约多项式$g \in R$，使得f模g不是平方。若$\pi_g\colon \Gamma_O(S) \to \mathrm{PGL}_1(O/(g)O) \simeq \mathrm{PGL}_2(R/(g))$是约化映射，则该映射为满射，进而根据定理 3.26，$\pi_g^{-1}(\mathrm{PSL}_2(R/(g)))$ 在树的乘积上正则作用。

注 6.2。Rungtanapirom 在 [Run18] 中研究了格 $\Gamma = \Gamma_U(\{\infty, \mathrm{t}, \mathrm{t}+1\})$，其中 U 是四元数代数 B 上的一个 $\mathbb{F}_2[(\mathrm{t}+1)^{-1}]$-极大阶，B 在 $\mathbb{F}_2(\mathrm{t})$ 处、$\mathrm{t}+1$ 以及 $\mathrm{t}^2+\mathrm{t}+1$ 处分歧。他观察到，Γ 正则地作用于分别对应赋值 ∞ 和 t 的 Bruhat-Tits 树的乘积上。在域自同构意义下，该格等价于上文描述的格 $\Gamma_O(\mathrm{S})$，其中 $\mathrm{q}=2$、$\mathrm{f}=\mathrm{t}^2+\mathrm{t}+1$，且 $\mathrm{S}=\{\infty, \mathrm{t}, \mathrm{t}+1\}$；后者正则地作用于分别对应赋值 t 和 $\mathrm{t}+1$ 的 Bruhat-Tits 树的乘积上。

具有 $q=3$ 的族。 参数为

$$q = 3, f = t^2+1, B = (-t^2-1, t-1 \mid K),$$

$$O = R \oplus Ri \oplus R\frac{1}{t+2}(j+2k) \oplus Rk$$

t	$1+1/(t+2)j+2/(t+2)k,\ 1+(t+1)/(t+2)j+1/(t+2)k,$ $1+(2t+2)/(t+2)j+2/(t+2)k,\ 1+2/(t+2)j+1/(t+2)k$
$t+1$	$1+2j,\ t/(t+2)j+2/(t+2)k,\ 1/(t+2)j+2/(t+2)k,\ 1+j$
$t+2$	$1+t/(t+2)j+2/(t+2)k,\ (t+1)/(t+2)j+1/(t+2)k,\ j,$ $1+2t/(t+2)j+1/(t+2)k$

$\Gamma_{t,t+1} = \langle a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 \mid b_2^2, b_3^2, a_1b_1a_1b_1, a_1b_2a_2b_1^{-1}, a_1b_3a_1^{-1}b_3, a_1b_1^{-1}a_2b_2, a_2b_1a_2b_3\rangle$
$\Gamma_{t+1,t+2} = \langle a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \mid a_2^2, a_3^2, b_2^2, b_3^2, a_1b_1a_3b_1, a_1b_2a_1b_1^{-1}, a_1b_3a_1^{-1}b_3, a_2b_1a_2b_1^{-1}, a_2b_2a_3b_3\rangle$

具有 $q=5$。 参数为

$$q = 5, f = t^2+3, B = (3t^2+4, t+2 \mid K),$$

$$O = R \oplus Ri \oplus R\frac{1}{t+2}(j+4k) \oplus Rk$$

t	$1+(4t+4)/(t+2)j+4/(t+2)k,\ 1+1/(t+2)j+4/(t+2)k,$ $(t+4)/(t+2)j+3/(t+2)k, (t+3)/(t+2)j+4/(t+2)k,$ $1+4/(t+2)j+1/(t+2)k,\ 1+(t+1)/(t+2)j+1/(t+2)k$
$t+1$	$3+1/(t+2)j+4/(t+2)k,\ 1+(t+4)/(t+2)j+3/(t+2)k,$ $1+j,\ 1+4j,\ 1+(4t+1)/(t+2)j+2/(t+2)k,\ 3+4/(t+2)j+1/(t+2)k$
$t+2$	$4+3t/(t+2)j+1/(t+2)k,\ 4+(2t+1)/(t+2)j+3/(t+2)k,$ $j,\ (t+1)/(t+2)j+1/(t+2)k,\ 4+(3t+4)/(t+2)j+2/(t+2)k,$ $4+2t/(t+2)j+4/(t+2)k$
$t+3$	$1+(t+3)/(t+2)j+4/(t+2)k,\ 4+2j,\ 1/(t+2)j+4/(t+2)k,$ $t/(t+2)j+2/(t+2)k,\ 4+3j,\ 1+(4t+2)/(t+2)j+1/(t+2)k$

$1+4t/(t+2)j+3/(t+2)k,\ 4+(3t+2)/(t+2)j+4/(t+2)k,\ t+4 \quad 4+(3t+3)/(t+2)j+3/(t+2)k,\ 4+(2t+2)/(t+2)j+2/(t+2)k, 4+(2t+3)/(t+2)j+1/(t+2)k,\ 1+t/(t+2)j+2/(t+2)k$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{t,t+1} =&\langle a_1,a_2,a_3,a_4,\ b_1,b_2,b_3 \mid a_3^2,\ a_4^2,\ a_1b_1a_3b_3^{-1},\ a_1b_2a_1b_3,\ a_1b_3^{-1}a_3b_1,\ a_1b_2^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1},\\
&a_1b_1^{-1}a_4b_1^{-1},\ a_2b_1a_2^{-1}b_1^{-1},\ a_2b_3a_4b_2^{-1},\ a_2b_3^{-1}a_2b_3^{-1},\ a_2b_2^{-1}a_4b_3,\ a_3b_2a_3b_2^{-1}\rangle\\
\Gamma_{t,t+2} =&\langle a_1,a_2,a_3,a_4,\ b_1,b_2,b_3,b_4 \mid a_3^2,\ a_4^2,\ b_3^2,\ b_4^2,\ a_1b_1a_3b_2,\ a_1b_2a_3b_1,\ a_1b_3a_2b_1^{-1},\\
&a_1b_4a_1^{-1}b_4,\ a_1b_2^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1},\ a_1b_1^{-1}a_2b_3,\ a_2b_1a_4b_1,\ a_2b_4a_2b_2^{-1},\ a_3b_3a_4b_4,\\
&a_4b_2a_4b_2^{-1}\rangle\\
\Gamma_{t+1,t+4} =&\langle a_1,a_2,a_3,\ b_1,b_2,b_3 \mid a_1b_1a_1b_2^{-1},\ a_1b_2a_3b_3^{-1},\ a_1b_3a_2b_1^{-1},\ a_1b_3^{-1}a_3b_2,\ a_1b_1^{-1}a_2b_3,\\
&a_2b_1a_3b_1,\ a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1},\ a_2b_3^{-1}a_3^{-1}b_3^{-1},\ a_3b_2^{-1}a_3b_1^{-1}\rangle
\end{aligned}$$

族，其 $q=7$. 参数为

$$q=7, f=t^2+4, B=(6t^2+3, t+1 \mid K),$$

$$O=R\oplus Ri\oplus R\frac{1}{t+1}(j+5k)\oplus Rk$$

t	$4+4j,\quad 4+(3t+1)/(t+1)j+4/(t+1)k,\quad 1+2t/(t+1)j+4/(t+1)k,$ $1+(2t+5)/(t+1)j+1/(t+1)k,\ 1+(5t+2)/(t+1)j+6/(t+1)k,$ $1+5t/(t+1)j+3/(t+1)k,\ 4+(4t+6)/(t+1)j+3/(t+1)k,$ $4+3j$
$t+1$	$2+(t+4)/(t+1)j+1/(t+1)k,\quad 2+t/(t+1)j+2/(t+1)k,$ $4+(3t+6)/(t+1)j+1/(t+1)k, 4j, (4t+5)/(t+1)j+5/(t+1)k,$ $4+(4t+1)/(t+1)j+6/(t+1)k,\ 2+6t/(t+1)j+5/(t+1)k,$ $2+(6t+3)/(t+1)j+6/(t+1)k$
$t+2$	$2+(6t+2)/(t+1)j+1/(t+1)k,\ 1+(2t+1)/(t+1)j+2/(t+1)k,$ $2+(6t+4)/(t+1)j+4/(t+1)k,\quad 3+1/(t+1)j+5/(t+1)k,$ $3+6/(t+1)j+2/(t+1)k,\ 2+(t+3)/(t+1)j+3/(t+1)k,$ $1+(5t+6)/(t+1)j+5/(t+1)k,\quad 2+(t+5)/(t+1)j+6/(t+1)k$
$t+3$	$1+(2t+3)/(t+1)j+5/(t+1)k,\ 4+3t/(t+1)j+6/(t+1)k,$ $4+(4t+5)/(t+1)j+5/(t+1)k,\quad (4t+2)/(t+1)j+4/(t+1)k,$ $(4t+3)/(t+1)j+2/(t+1)k,\ 4+(3t+2)/(t+1)j+2/(t+1)k,$ $4+4t/(t+1)j+1/(t+1)k,\ 1+(5t+4)/(t+1)j+2/(t+1)k$
$t+4$	$1+1/(t+1)j+5/(t+1)k,\quad 2+6j,\quad 2+(6t+1)/(t+1)j+3/(t+1)k,$ $(4t+6)/(t+1)j+3/(t+1)k, (4t+1)/(t+1)j+6/(t+1)k,$ $2+(t+6)/(t+1)j+4/(t+1)k,\ 2+j,\ 1+6/(t+1)j+2/(t+1)k$
$t+5$	$1+(5t+1)/(t+1)j+1/(t+1)k,\quad 1+(5t+3)/(t+1)j+4/(t+1)k,$ $4+(3t+4)/(t+1)j+5/(t+1)k,\ 5+1/(t+1)j+5/(t+1)k,$ $5+6/(t+1)j+2/(t+1)k,\ 4+(4t+3)/(t+1)j+2/(t+1)k,$ $1+(2t+4)/(t+1)j+3/(t+1)k,\ 1+(2t+6)/(t+1)j+6/(t+1)k$
$t+6$	$4+(3t+5)/(t+1)j+3/(t+1)k,\quad 2+(t+2)/(t+1)j+5/(t+1)k,$ $1+2j, 4t/(t+1)j+1/(t+1)k, 1/(t+1)j+5/(t+1)k,\ 1+5j,$ $2+(6t+5)/(t+1)j+2/(t+1)k,\ 4+(4t+2)/(t+1)j+4/(t+1)k$

$$\Gamma_{t,t+1} = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \mid b_4^2, b_5^2, a_1 b_1 a_4^{-1} b_2^{-1}, a_1 b_2 a_2 b_5, a_1 b_3 a_2^{-1} b_3, a_1 b_4 a_1^{-1} b_4, a_1 b_5 a_2 b_2, a_1 b_3^{-1} a_3^{-1} b_1^{-1}, a_1 b_2^{-1} a_4^{-1} b_1, a_1 b_1^{-1} a_3^{-1} b_3^{-1}, a_2 b_1 a_2 b_1, a_2 b_3 a_4^{-1} b_1^{-1}, a_2 b_4 a_4 b_2^{-1}, a_2 b_2^{-1} a_4 b_4, a_2 b_1^{-1} a_4^{-1} b_3, a_3 b_2 a_3^{-1} b_2^{-1}, a_3 b_4 a_3 b_1^{-1}, a_3 b_5 a_4^{-1} b_3^{-1}, a_3 b_3^{-1} a_4^{-1} b_5 \rangle$$

$$\Gamma_{t,t+2} = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \mid a_1 b_1 a_4 b_3^{-1}, a_1 b_2 a_2 b_4^{-1}, a_1 b_3 a_3 b_4, a_1 b_4 a_3 b_3, a_1 b_4^{-1} a_2 b_2, a_1 b_3^{-1} a_4 b_1, a_1 b_2^{-1} a_1 b_1^{-1}, a_2 b_1 a_2^{-1} b_1^{-1}, a_2 b_3 a_3^{-1} b_2^{-1}, a_2 b_4 a_4^{-1} b_3^{-1}, a_2 b_3^{-1} a_4^{-1} b_4, a_2 b_2^{-1} a_3^{-1} b_3, a_3 b_1 a_4^{-1} b_1, a_3 b_4^{-1} a_3 b_1^{-1}, a_3 b_2^{-1} a_4 b_2^{-1}, a_4 b_2 a_4 b_4 \rangle$$

$$\Gamma_{t+1,t+3} = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \mid a_4^2, a_5^2, b_4^2, b_5^2, a_1 b_1 a_2^{-1} b_3^{-1}, a_1 b_2 a_5 b_1^{-1}, a_1 b_3 a_4 b_3, a_1 b_4 a_1^{-1} b_4, a_1 b_5 a_1 b_2^{-1}, a_1 b_3^{-1} a_2^{-1} b_1, a_1 b_1^{-1} a_5 b_2, a_2 b_1 a_3^{-1} b_4, a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}, a_2 b_4 a_3^{-1} b_1, a_2 b_5 a_3 b_3^{-1}, a_2 b_3^{-1} a_3 b_5, a_3 b_1 a_4 b_2, a_3 b_2 a_4 b_1, a_3 b_3 a_3 b_2^{-1}, a_4 b_4 a_5 b_5, a_5 b_3 a_5 b_3^{-1} \rangle$$

参考文献

[BCP97] Wieb Bosma、John Cannon 和 Catherine Playoust。《Magma代数系统：I. 用户语言》。J. Symbolic Comput., 24(3-4):235–265，1997年。计算代数与数论（伦敦，1993年）。[Bro84] Kenneth S. Brown。《作用于单连通复形上的群的表示》。Journal of Pure and Applied Algebra, 32(1):1–10，1984年。[Cap19] Pierre-Emmanuel Caprace。《离散群与不可离散群的有限商和无限商》。载于《Groups St Andrews 2017 in Birmingham》，London Math. Soc. Lecture Note Ser. 第455卷，第16–69页。剑桥大学出版社，剑桥，2019年。[CFH+15]Ted Chinburg、Holley Friedlander、Sean Howe、Michiel Kosters、Bhairav Singh、Matthew Stover、Ying Zhang 和 Paul Ziegler。《四元数S-单位群的表示》。Exp. Math., 24(2):175–182，2015年。[Chi92] Patrick Chiu。《三次Ramanujan图》。Combinatorica, 12(3):275–285，1992年。[Gek90] E.-U. Gekeler。《关于某些四元数代数的几何》。Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2), 2(1):143–153，1990年。[Gek91] Ernst-Ulrich Gekeler。《关于有限Drinfeld模》。J. Algebra, 141(1):187–203，1991年。[Jam15] Sebastian Jambor。《任意多个生成元的有限表示群上的 L_2-商算法》。J. Algebra, 423:1109–1142，2015年。[KL16] Markus Kirschmer 和 David Lorch。《具有小类数的数域上的三元二次型》。J. Number Theory, 161:343–361，2016年。[Lub94] Alexander Lubotzky。《离散群、扩展图与不变测度》。附录作者：Jonathan D. Rogawski，Prog. Math. 第125卷。巴塞尔：Birkhäuser，1994年。¨Mac[A. M. MacBeath。《单连通空间的同胚群》。Ann. Math. (2), 79:473–488，1964年。64] Mar[Grigori A. Margulis。《半单李群的离散子群》，Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics 第17卷。Springer-Verlag，柏林、海德堡，1991年。91] Mor[Moshe Morgenstern。《对于每个素数幂 q 存在且可显式构造 q94] 正则Ramanujan图》。J. Comb. Theory, Ser. B, 62(1):44–62，1994年。 + 1 Moz[Shahar Mozes。《Cartan子群的作用》。Israel J. Math., 90(1-3):253–294，1995年。95] MY[Jonah Mendel 和 Jiahui Yu。《作用在 Bruhat-Tits 树乘积上的 S-算术群》。预印本，arXiv:2305.04448v3，2026年。

[Rat04] Diego Attilio Rattaggi。《作用于树的乘积上的群中的计算：正规子群结构与四元数格》。ProQuest LLC，美国密歇根州安娜堡，2004年。论文（数学博士）——苏黎世联邦理工学院（瑞士）。[RSV19] Nithi Rungtanapirom、Jakob Stix 和 Alina Vdovina。《四元数单顶点立方复形的无穷级数、倍增构造与显式立方拉马努金复形》。Internat. J. Algebra Comput., 29(6):951–1007，2019年。[Run18] Nithi Rungtanapirom。《秩2的四元数算术格与特征 2 中的一个拟二次曲面》。Internat. J. Algebra Comput., 28(6):1049–1090，2018年。[Ser77] Jean-Pierre Serre。《树、合并与 SL_2，Astérisque 第46卷。法国数学学会，巴黎，1977年。附英文摘要，由 Hyman Bass 协作编写。[SV17] Jakob Stix 和 Alina Vdovina。《(t) 上的秩2单传递四元数格与一个非经典拟二次曲面》。Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 163(3):453–498，2017年。[Vig80] Marie-France Vignéras。《四元数代数的算术》，Lecture Notes in Mathematics 第800卷。Springer，柏林，1980年。`Voi[John Voight。《四元数代数》，Graduate Texts in Mathematics 第288卷。Springer，Cham，21]©2021。

umber one in totally definite quater-

$\in \mathbb{Q}[X]$ is given, and the base field of

sented by an element in K generating

$_0^{-1}]$). This column serves to apply
only if $S \backslash S_0 \subseteq V^K \backslash \mathrm{Ram}(B)$.

iser of the vertex O for the action of

Theorem 3.10, this is the stabiliser of

	$\mathrm{Sym}(4)$	$\mathrm{Alt}(4)$	1
	D_6	$\mathrm{Sym}(3)$	1
	$\mathrm{Sym}(3)$	C_3	1
	D_6	C_3	2
	C_2^2	C_2	1
	D_4	C_2	2

	C_2^2	1	2
	C_2	1	1
	C_2^2	1	2
	Alt(5)	Alt(5)	1
	D_{10}	C_5	1
	D_5	C_5	2
	D_4	C_2	1
$3\alpha\}$	Sym(3)	C_3	2
	D_4	C_2	1
$\alpha\}$	Sym(3)	C_3	2
$\alpha\}$	C_2	1	2
$5\alpha\}$	C_2	1	2
	C_2	1	2
	C_2	1	2
	Sym(4)	Sym(4)	1
	D_8	C_4	1
	D_8	C_4	1

	D_6	C_3	1
	C_2	1	2
	C_2	1	2
	$\mathrm{Sym}(3)$	C_3	2
	$\mathrm{Sym}(3)$	C_3	2
	C_2^2	1	1
	D_{12}	C_{12}	2
	C_2^2	C_2	2
	C_2	1	2
	C_2^2	C_2	2
	C_2	1	2
	C_2	1	2
	$\mathrm{Alt}(4)$	$\mathrm{Alt}(4)$	1
	D_4	C_2	1
	D_4	C_2	1
	D_6	$\mathrm{Sym}(3)$	2
}	C_2	1	2

	C_2	1	2
	Sym(3)	Sym(3)	1
	Sym(4)	Alt(4)	2
}	C_2	1	2
}	C_2	1	2
	C_4	C_2	2
	C_2	1	2
	C_2	1	2
	C_2	C_2	4
	D_4	C_4	2
	C_2	1	2
	C_2	1	2
	Sym(3)	C_3	2
	Sym(3)	C_3	2

	C_2	C_2	4
	C_2^2	C_2	2
	C_2^2	C_2	2
}	C_2	C_2	8
	$\mathrm{Sym}(4)$	$\mathrm{Alt}(4)$	1
	D_{14}	D_7	1
	D_7	C_7	1
	D_7	C_7	1
	D_7	C_7	1
	$\mathrm{Sym}(3)$	C_3	1
	$\mathrm{Sym}(3)$	C_3	1
	$\mathrm{Sym}(3)$	C_3	1
	C_2^2	C_2	1
	C_2^2	C_2	1
	C_2^2	C_2	1

	D_{18}	D_9	1
	C_2^2	C_2	1
	C_2^2	C_2	1
	C_2^2	C_2	1
	C_2	1	1
	C_2	1	1
	C_2	1	1
	$\mathrm{Sym}(4)$	$\mathrm{Alt}(4)$	1
	$\mathrm{Sym}(3)$	C_3	1
	C_2	1	1
	$\mathrm{Sym}(3)$	C_3	1
	$\mathrm{Sym}(3)$	C_3	1
	$\mathrm{Sym}(3)$	C_3	1
	C_2	1	1

	$\mathrm{Alt}(4)$	$\mathrm{Alt}(4)$	2
	$C_2 \times C_2$	$C_2 \times C_2$	2
	C_2	C_2	2
	$\mathrm{Sym}(3)$	$\mathrm{Sym}(3)$	2
	C_3	C_3	2
	C_2	C_2	2
	$\mathrm{Sym}(3)$	C_3	1
	C_2^2	C_2	1
	$\mathrm{Alt}(5)$	$\mathrm{Alt}(5)$	1
	C_2	1	2
	$\mathrm{Alt}(4)$	$\mathrm{Alt}(4)$	1
$\alpha^2\}$	C_2^2	C_2	2

$^3\}$	C_2^2	C_2	2
	C_2^2	C_2	2
	Sym(3)	Sym(3)	1
$^3\}$	C_2	1	2
	C_2	1	2
	C_2	1	2
	Sym(3)	C_3	1
$-\alpha^4\}$	Sym(3)	Sym(3)	2
	C_2	C_2	2
$-2\alpha^4\}$	1	1	2