arXiv:2611.32589v1 [physics.flu-dyn] 24 Nov 2026

阻尼海洋波的一致广义动理学方程

Rhys Ransome[1],Alberto Alberello[1,2], Davide Proment[1,3,4] 和 Raphael Stuhlmeier[5]

[1]工程、数学与物理学院，东英吉利大学，诺里奇研究园，诺里奇，NR4 7TJ，英国[2]工程系与能源、环境及可持续工程中心

，

哈德斯菲尔德大学，哈德斯菲尔德，HD1 3DH，英国[3]光子学与量子科学中心，东英吉利大学，诺里奇研究园，诺里奇，NR4 7TJ，英国[4]极端物质研究所 EMMI，GSI重离子研究中心，Planckstrasse 1，64291 达姆施塔特，德国[5]土木与环境工程学院，Technion—以色列理工学院，Technion城，海法，3200003，以色列

当代谱波模型，包括用于业务化海浪预报和耦合地球系统模型的模型，都假设阻尼与非线性波能量交换彼此独立。本文对这一假设进行了审慎考察。我们从弱非线性波的方程出发，严格推导出一个能够一致地耦合阻尼与非线性相互作用的控制方程。这个一致的广义动理学方程不会导致总波能量耗散发生显著变化，但与标准加性阻尼方法相比，波频率之间的能量分布存在明显差异。这种效应在弱阻尼情况下尤为重要，是模型中保留的记忆效应所致。当阻尼随波频率变化时，差异甚至更大；许多日益受到关注的波浪过程都具有这一特征，例如与地球系统其他组成部分（如冰冻圈）的相互作用。与纯加性形式相比，我们提出的新阻尼广义动理学方程具有更好的数值稳定性。因此，本文提出的形式可为未来的业务化海浪建模提供一种可能的基础。尽管本文的结果针对海洋波浪，但所推导的广义动理学方程也可应用于存在外部阻尼（或强迫）的其他弱非线性色散系统。

1. 引言

海洋波浪建模已成为现代海洋科学的重要基础工具之一。这类建模概括了海洋表面波背后的基本物理机制，起-

从风的生成开始，经过非线性耦合，直至因白浪破碎或其他过程（如与海冰或海底的相互作用）而耗散。如今，WAVEWATCH III 或 SWAN 等波浪模型是关键

组成部分，广泛应用于现代耦合地球系统模型，也是天气预报、沉积物输运研究、海洋生态学以及众多海上作业中不可或缺的工具（Cavaleri 等 2007, 2012; Kousal 等 2026）。这些模型的产出——例如有效波高或平均波周期——具有随机性，不依赖于单个波浪相位，并且适用于大范围的时空尺度。

这类模型通常被称为谱波模型，因为它们从根本上处理的是海洋波浪的平均傅里叶谱。事实上，水面的傅里叶变换可以直接与波浪能量联系起来，而 Sverdrup 与 Munk（1947）早已确认，波浪能量是波浪预报的关键变量。随着数字信号处理的发展，Pierson（1952）等人开始以傅里叶分析的语言重新表述预报问题。

傅里叶分析本质上是线性系统的一种工具，而人们早已认识到，水波的行为在本质上是非线性的（Stokes 1847）。尽管非线性波研究在19世纪下半叶取得了重大的数学进展，但其中几乎都涉及稳定的周期性波动。Tick（1959）首次尝试扩展不规则波的高阶理论——其中包含多个傅里叶谐波分量——由此开启了非线性海洋波研究中极其富有成果的十年。

Phillips（1960）发现深水波四元组之间存在共振能量交换，这为两年后 Hasselmann（1962）推导出第一个海洋表面波动理学方程奠定了基础。受等离子体物理学和固体理论发展成果的启发（相关综述参见 Peierls（1955）和 Kadomtsev（1965）），并将波场视为弱非高斯的——这与 Stokes 意义上的弱非线性思想相类比——Hasselmann 推导出了描述波浪谱中非线性能量传递的方程，从而为现代第三代谱波模拟铺平了道路。

对于处于精确共振状态的四波组，即四个波数和频率的代数和均为零时，Hasselmann 动理学方程描述了波能谱在慢时间尺度 T/ϵ_0^4，下的演化，其中 T 为典型波周期， ϵ_0 为海况的典型陡度。尽管这代表了理论上的重大进展，但这些结果的实际意义并未立即显现。

非线性能量交换是影响海洋波浪增长和传播的一种机制，但绝不是最重要的机制。事实上，第一代波浪模型完全建立在这样一种理念之上：谱波能量 C 以深水群速度$\mathbf{v}$，传播，

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla C = A + B \cdot C + S_{\mathrm{ds}}$$

同时加入外部湍流压力强迫 A （Phillips 1958）和线性反馈机制 $B \cdot C$ （Miles 1957）来模拟风致波浪增长，并配备一个开关式限制器 S_{ds} ，以防止谱超过指定的饱和水平。右端合在一起表示如今仍称为输入源项和耗散源项的内容，并记为 S_{in} 和 S_{ds}。

这些简单模型在描述观测到的风浪增长方面存在明显不足，加之人们对其能否准确体现底层物理机制心存疑虑，因此在20世纪70年代，人们重新评估了谱能量平衡（SWAMP Group 1985）。然而，非线性源项 S_{nl} 的计算实现仍面临挑战。根本问题在于，非线性交互积分必须在三维波数

空间中进行积分，这使得波演化模型成为五维模型；而确定共振流形的计算成本也很高。20世纪80年代，人们为克服这一难题付出了巨大努力，并取得了成果，尤其是 Hasselmann & Hasselmann (1985)；Hasselmann 等 (1985)开发出直接相互作用近似，最终由 The Wamdi Group (1988) 将动理学方程应用于所谓的第三代波浪模型（详情参见 Komen 等 (1996)）。此后几十年间，人们在数值方法上取得了许多重要改进，例如 Webb-Resio-Tracy（WRT）方法（Webb 1978；van Vledder 2006）。如今，这些方法已应用于 WAVEWATCH III（The WAVEWATCH III Development Group 2016）等先进的波浪预报模型。

随着 Hasselmann 动理学方程从理论创新发展为业务模型中一个完善且不可或缺的组成部分，研究开始越来越多地探究其适用性的边界。高效、大规模直接数值模拟的出现（Tanaka 2001）使研究人员能够检验其中一些基本假设，例如精确共振相互作用的首要地位。事实上，在 Hasselmann 方程中，非共振相互作用不应对谱演化产生贡献，这一事实与推导过程中涉及的长时间积分有关。

Annenkov & Shrira（2001a）和 Tanaka（2001）等人的工作对这些假设进行了批判性评估，而 Janssen（2003）首次将动理学方程推广到考虑在更快时间尺度上起作用的近共振相互作用。随后，Annenkov & Shrira 使用原始 Zakharov 方程进行直接数值模拟的研究突出了这样一个事实：在决定谱演化方面，近共振贡献与精确共振同样重要；该研究还提出了 Janssen 方程的推广形式（Annenkov & Shrira 2006）。Gramstad & Stiassnie（2013）的研究进一步将其扩展，以纳入斯托克斯频率修正。

这些广义动理学方程（GKE）不再采用 Hasselmann 公式中的长时间积分，而是纳入了一个针对非线性相互作用项的记忆积分。因此，它们能够描述快速T/ϵ_0^2和慢速 T/ϵ_0^4（动理学）时间尺度上的演化。近年来，这些方程已用于模拟与风强迫相关的瞬态行为（Annenkov & Shrira 2016），并与 Hasselmann 方程（Annenkov & Shrira 2018）进行比较，也已在波浪模型中得到检验（Gramstad & Babanin 2016； Liu 等 2021 ）。这些广义模型的一个缺点是，其计算成本高于常规动理学波浪模型，因为没有对波浪角频率施加共振条件，导致积分需要在四维空间中进行，而记忆项也增加了时间积分的复杂性。

在波浪模型中实现非线性贡献时，合并后的“源项”通常写作

$$S = S_{\mathrm{in}} + S_{\mathrm{ds}} + S_{\mathrm{nl}}, \tag{1.1}$$

包括风输入 S_{in} 和耗散过程 S_{ds} 的表示，例如白化破碎，以及四波共振相互作用。如今已有大量源项的半经验公式（Ardhuin 等 2010；Liu等 2019）。值得注意的是，对于许多物理过程，其强度是频率和谱形的函数。非线性相互作用项 S_{nl} 并非严格意义上的能量源，而是将能量重新分配到谱内。因此，假设各源项之间互不相互作用，而非线性项 S_{nl}

根据不同物理过程之间尺度分离的论据（Hasselmann 1974），与线性项 S_{ds} 和 S_{in} 相互独立。

最近，Maestrini 等（2025）重新评估了这一假设的有效性。他们直接从含阻尼的确定性原始方程推导出了 Hasselmann 动理学方程。在零非线性的极限下，当阻尼在缓慢的动理学时间尺度上演化时，可以得到加性形式（1.1）。在更快的阻尼时间尺度上，非线性 S_{nl} 会发生改变，此时该形式不再具有加性。

当放宽关于谱演化的假设、允许存在近共振贡献时，由此得到的 Hasselmann 动理学方程推广形式能够描述慢速和快速时间尺度上的谱演化。这引出了一个问题：在这种情况下，简单地将源项相加是否恰当。为研究阻尼、近共振和动理学时间尺度之间的相互作用，我们直接从原始方程推导出含阻尼条件下的一种新型广义动理学方程，并通过数值模拟探究其行为。

第 2 节介绍问题的基本形式，包括阻尼广义动理学方程的推导及其数值实现。第 3 节给出均匀、与频率无关的阻尼情况下的结果。第 4 节考察更为实际的阻尼依赖波频率的情形，并展示非均匀阻尼下谱演化的数值模拟。第 5 节讨论我们的结果并作出总结。

2. 数学表述

2.1. 深水中的非线性波-波相互作用

表面波的动理学理论是通过对无黏、无旋水波问题进行微扰展开推导出来的。在深水中，表面重力波具有频散性，且只有在三次非线性阶才会出现相互共振。因此，推导动理学方程时，首选的出发点（Janssen 2003；Mei 等 2005）是三次扎哈罗夫方程，

$$i\frac{db(k)}{dt} = \omega(k)b(k) + \iiint_{-\infty}^{\infty} T(k,k_1,k_2,k_3)b^*(k_1)b(k_2)b(k_3)\delta(k+k_1-k_2-k_3)dk_1dk_2dk_3. \tag{2.1}$$

该方程由 Zakharov（1968）通过水波问题的哈密顿表述推导而来。

复振幅 $b(k,\ t)$ 与自由表面 $\zeta(x,\ t)$ 的空间傅里叶变换相关，具体为

$$\hat{\zeta}(k,t) = \sqrt{\frac{\omega}{2g}}\left(b(k) + b^*(-k)\right) \tag{2.2}$$

在最低阶近似下，其中 $\omega^2 = g|k|$ 为深水中的圆频率，g 为重力加速度，k 为（标量或矢量）波数，$*$ 表示复共轭，函数 T 为相互作用核（见 Krasitskii（1994））。这个极为简洁的方程描述了深水波浪的三阶确定性演化，将斯托克斯定常波摄动展开推广至三阶（见 Stuhlmeier（2024）），同时也涵盖了非线性薛定谔方程（NLS）（Mei 等 2005）和 Dysthe方程（Stiassnie 1984）等重要模型方程。

确定性模型不适用于大尺度波浪预报，因为这需要关于个别相位的信息，而这类信息通常无法获得（尽管

在小尺度范围内，使用（2.1）进行相位分辨预报是可行的（Stuhlmeier 和 Stiassnie（2021））。此外，表面波的随机化（Annenkov & Shrira 2001b）除了确定性预报固有的几何限制外，还施加了动力学约束。因此，我们试图对海面 ζ 的方差密度谱的演化进行建模，该谱定义为双点相关的傅里叶变换

$$S(k) = \mathfrak{F}_{\xi \mapsto k} \left\{ \langle \zeta(x+\xi)\zeta(x) \rangle \right\},$$

其中，括号表示系综平均，$\mathfrak{F}_{\xi \mapsto k}$ 表示 ξ 到 k 的傅里叶变换。为了使这一定义合理，我们必须假设自由表面在空间上（弱）均匀，因此自相关与空间位置 x 无关，而只取决于间距 ξ.

根据方差密度谱的这一定义，可以定义若干用于表征波场的平均指标（Holthuijsen2007）。其中最重要的是零阶谱矩

$$m_0 = \int_0^\infty S(k) \mathrm{d}k, \tag{2.3}$$

它与（谱）有效波高 H_{m_0} 的关系为 $H_{m_0} \approx 4\sqrt{m_0}$. 下文中，为简便起见，我们将仅讨论单向波数谱，尽管我们的推导同样适用于方向谱。

在傅里叶空间中引入离散化，并将波数间隔记为 dk，随后可以建立复振幅 $b_i = b(k_i)$ 与方差密度谱 $S(k)$ 之间的关系：

$$\langle b_i b_i^* \rangle = \frac{g}{\omega_i} S(k_i) dk. \tag{2.4}$$

下文将在方便之处使用下标和上标表示波数指标，并将 $\omega(k)$ 等项简写为 ω_k，$T(k, k_1, k_2, k_3)$，记作 T_{0123}，或将 $\delta(k_n + k_p - k_q - k_r)$ 记作 δ_{np}^{qr}.

对于数值模拟而言，离散形式是必不可少的，这意味着物理域 $D = [0, L]$，是有限的，进而决定了傅里叶空间的离散化形式为 $\Delta k = 2\pi/L$。我们将扎哈罗夫方程（2.1）改写为离散形式：

$$\frac{db_n}{dt} = -i\omega_n b_n - \mu_n b_n - i \sum_{p,q,r} T_{npqr} b_p^* b_q b_r \delta_{np}^{qr}, \tag{2.5}$$

其中，我们加入了一个外部强迫或阻尼项，记为 $\mu_n b_n$；μ_n 的符号决定了起作用的是强迫（$\mu_n < 0$）还是阻尼（$\mu_n > 0$）。μ_n 的大小还决定了强迫/阻尼相对于线性项和非线性项所作用的时间尺度（Maestrini 等 2025），这一点将在下文中进一步详细探讨。尽管 μ_n 的两种符号在数学上是等价的，但在下面展示的结果中，我们将重点讨论包含阻尼的情形。

2.2. 阻尼广义动理学方程的推导

方程 (2.5) 是我们推导广义动理学方程的起点，该推导沿用了 Gramstad & Stiassnie (2013) 的工作思路。在假设波场具有空间均匀性的条件下，我们利用期望值的线性性，计算波作用谱 $C_n = \langle |b_n|^2 \rangle$ 的演化

值来表示

$$\frac{dC_n}{dt} = -2\mu_n C_n + 2\ \mathrm{Im} \sum_{p,q,r} T_{npqr} \langle b_n^* b_p^* b_q b_r \rangle \delta_{np}^{qr}. \tag{2.6}$$

方程 (2.6) 呈现了弱波湍流中由非线性导致的常见难题（Nazarenko 2011）：二阶平均的演化取决于四阶平均，这开启了一个无限延续的层级结构。由于线性波场由高斯过程描述（Trulsen 2004），且我们的波理论在三阶以内为弱非线性——也就是说，微扰展开相较于线性理论只带来微小修正——因此可以合理地假设，偏离高斯统计的程度同样很小。

据此，我们可以写出四阶和六阶相关函数，并引入四阶联合累积量 κ_{npqr} 以及六阶累积量 κ_{npqruv}，

$$\langle b_n^* b_p^* b_q b_r \rangle = C_n C_p (\delta_n^q \delta_p^r + \delta_n^r \delta_p^q) + \kappa_{npqr}, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
\langle b_n^* b_p^* b_q^* b_r b_u b_v \rangle = {} & C_n C_p C_q \left(\delta_n^r \delta_p^u \delta_q^v + \delta_n^r \delta_p^v \delta_q^u + \delta_n^u \delta_p^r \delta_q^v + \delta_n^u \delta_p^v \delta_q^r + \delta_n^v \delta_p^r \delta_q^u + \delta_n^v \delta_p^u \delta_q^r \right) \\
& + C_n \left(\kappa_{pquv}\, \delta_n^r \delta_{pq}^{uv} + \kappa_{pqrv}\, \delta_n^u \delta_{pq}^{rv} + \kappa_{pqru}\, \delta_n^v \delta_{pq}^{ru} \right) \\
& + C_p \left(\kappa_{nquv}\, \delta_p^r \delta_{nq}^{uv} + \kappa_{nqrv}\, \delta_p^u \delta_{nq}^{rv} + \kappa_{nqru}\, \delta_p^v \delta_{nq}^{ru} \right) \\
& + C_q \left(\kappa_{npuv}\, \delta_q^r \delta_{np}^{uv} + \kappa_{nprv}\, \delta_q^u \delta_{np}^{rv} + \kappa_{npru}\, \delta_q^v \delta_{np}^{ru} \right) + \kappa_{npqruv},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

并设 $\kappa_{npqr} = o(\epsilon^4)$ $\kappa_{npqruv} = o(\epsilon^6)$。请注意，该展开中出现的 δ-函数确保了波场均匀性。

定义频率失谐

$$\Delta_{np}^{qr} = \omega_n + \omega_p - \omega_q - \omega_r, \tag{2.9}$$

它在精确共振时为零，相关量为

$$\Delta\mu_{npqr} = \mu_n + \mu_p + \mu_q + \mu_r. \tag{2.10}$$

我们利用 (2.5) 得到四阶相关函数的演化方程：

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle b_n^* b_p^* b_q b_r \rangle = {} & \left(i\Delta_{np}^{qr} - \Delta\mu_{npqr} \right) \langle b_n^* b_p^* b_q b_r \rangle \\
& + i \sum_{u,v,w} T_{nuvw} \langle b_p^* b_v^* b_w^* b_q b_r b_u \rangle \delta_{nu}^{vw} + i \sum_{u,v,w} T_{puvw} \langle b_n^* b_v^* b_w^* b_q b_r b_u \rangle \delta_{pu}^{vw} \\
& - i \sum_{u,v,w} T_{quvw} \langle b_n^* b_p^* b_u^* b_r b_v b_w \rangle \delta_{qu}^{vw} - i \sum_{u,v,w} T_{ruvw} \langle b_n^* b_p^* b_u^* b_q b_v b_w \rangle \delta_{ru}^{vw}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

对关系式 (2.7) 关于时间求导，其中该关系式给出了四阶累积量与四点相关函数之间的联系，可得

$$\frac{d}{dt}\langle b_n^* b_p^* b_q b_r \rangle = \left(\frac{dC_n}{dt} C_p + C_n \frac{dC_p}{dt} \right) (\delta_n^q \delta_p^r + \delta_n^r \delta_p^q) + \frac{d\kappa_{npqr}}{dt}. \tag{2.12}$$

综上各方程，我们可以将四阶累积量的时间导数写为

$$\frac{d\kappa_{npqr}}{dt} = (i\Delta_{np}^{qr} - \Delta\mu_{npqr})\kappa_{npqr} + i\alpha_{npqr} + i\beta_{npqr}\kappa_{npqr}, \tag{2.13}$$

其中

$$\alpha_{npqr} = 2T_{npqr}\delta_{np}^{qr}[C_qC_r(C_n + C_p) - C_nC_p(C_q + C_r] = 2T_{npqr}\delta_{np}^{qr}f_{npqr}, \tag{2.14}$$

$$\beta_{npqr} = 2\sum_u C_u(T_{nunu} + T_{pupu} - T_{ququ} - T_{ruru}), \tag{2.15}$$

and

$$f_{npqr} = C_qC_r(C_n + C_p) - C_nC_p(C_q + C_r) = C_nC_pC_qC_r\left(\frac{1}{C_n} + \frac{1}{C_p} - \frac{1}{C_q} - \frac{1}{C_r}\right). \tag{2.16}$$

重新整理方程 (2.13)

$$\frac{d\kappa_{npqr}}{dt} - \left[i(\Delta_{np}^{qr} + \beta_{npqr}) - \Delta\mu_{npqr})\right]\kappa_{npqr} = i\alpha_{npqr} \tag{2.17}$$

并定义

$$\theta(t) = \Delta_{np}^{qr}t + \int_0^t \beta_{npqr}(\lambda)d\lambda \tag{2.18}$$

作为标准做法，我们假设采用冷启动，即累积量的初始值 $\kappa_{npqr}(0) = 0$，这样便可对时间积分：

$$\kappa_{npqr}e^{-i\theta(t)+\Delta\mu_{npqr}t} = i\int_0^t \alpha_{npqr}(t')e^{-i\theta(t')+\Delta\mu_{npqr}t'}\,dt'. \tag{2.19}$$

最后，将这一结果与 (2.7) 一同代入 (2.6)，得到

$$\frac{dC_n}{dt} = \underbrace{-2\mu_nC_n}_{S_{\rm ds}} + \underbrace{4\ \mathrm{Re}\sum_{p,q,r} T_{npqr}^2\delta_{np}^{qr}\int_0^t f_{npqr}(t')e^{i(\theta(t)-\theta(t'))}e^{-\Delta\mu_{npqr}(t-t')}\,dt'}_{S_{\rm nl,d}}. \tag{2.20}$$

这个以一致方式引入阻尼的广义动理学方程 (2.20)，是我们的主要理论结果。它的主要特点之一，也是它有别于 Hasselmann 的公式之处，在于等式右侧出现了记忆积分。通过严格推导可以清楚地看到，阻尼出现在两个位置。首先，它出现在项 $-2\mu_nC_n$ 中，该项与谱呈线性关系，也符合通常将阻尼建模为加性源项（$S_{\rm ds}$）的方式。其次，它出现在非线性项（$S_{\rm nl,\ d}$）中，作为记忆积分内涉及 $\Delta\mu_{npqr}$ 的指数项；这一点无法通过事后向保守方程添加阻尼而预见。我们将这种存在阻尼时非线性源项的新形式称为 $S_{\rm nl,\ d}$.

Hasselmann 动理学方程与广义动理学方程之间的另一项差异在于，后者允许记忆项导致相位相关性（微弱地）逐渐累积。这是因为保留了累积量随时间的演化（2.17），而不是将该积分视为定常的。因此，若初始时将累积量 κ_{npqr} 设为零，相位相关性就会根据（2.19）随时间累积，体现出偏离高斯统计的情况。累积量 κ_{npqr} 的实部与波场的动态峰度有关（Annenkov & Shrira 2016；Onorato 等 2016）。相比之下，Hasselmann 动理学方程将累积量 κ_{npqr} 明确表示为瞬时谱密度 f_{npqr}的函数，从而阻止了相位相关性的累积。

关于广义动理学方程的先前研究（Gramstad & Stiassnie 2013；Gramstad & Babanin 2016；Liu 等 2021）指出，现实中的波演化伴随着相位周期性去相关，这种现象由波浪破碎等过程引起。虽然无法在方程（2.20）本身中对这一过程进行解析建模，但可以通过数值方法定期将四阶累积量重新设为零来实现，从而使广义动理学方程发生快速调整。

2.3. 数值实现与设置

我们对式（2.20）的数值实现遵循 Gramstad & Stiassnie (2013) 最初提出的方法，并在此基础上加以扩展，以考虑耗散。相互作用在有限的一维波数网格上离散化，对每个离散模态 k_n演化波作用量密度$C_n(t)$。实际计算中，我们均采用 $N = 1024$ 个波模态， $k_n = n\Delta k$ 的范围为 0 至 $4k_{p,\,0}$，其中$k_{p,\,0}$ 表示初始谱的峰值波数。为计算非线性能量传递，该格式依赖于预先计算的相互作用核 T_{npqr}。利用相互作用中的对称性（$n + p = q + r$）可以更高效地识别相互作用四元组，从而减少冗余计算并降低内存使用量。

将线性耗散项和非线性相互作用项分别记为 $\mathcal{L}_n(\boldsymbol{C})$和 $\mathcal{N}_n(\boldsymbol{C})$，其对应的子问题分别为： $\dot{C}_n = \mathcal{L}_n(\boldsymbol{C})$和 $\dot{C}_n = \mathcal{N}_n(\boldsymbol{C})$。为在存在非保守阻尼项时维持数值稳定性和积分精度，我们采用算子分裂技术（Strang 1968）。与使用显式欧拉法同时积分非线性传递和线性耗散不同，分裂方法将线性项分离出来，采用精确的指数半步进行计算。在每个时间步 Δt中，首先通过线性子问题解析解的精确半步推进波作用量密度（即阻尼S_{ds}），随后使用 Gramstad & Stiassnie (2013) 提出的显式格式计算非线性项，以求解非线性子问题$C_n \to C_n + \Delta C_n^{\mathrm{NL}}$，最后再应用一个指数半步；

$$C_n^{*} = C_n^{s}\exp(-\mu_n\Delta t),\; C_n^{**} = C_n^{*} + \Delta C_n^{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{C}^{*}),\; C_n^{s+1} = C_n^{**}\exp(-\mu_n\Delta t) \quad (2.21)$$

其中 $C_n^{s} = C_n(s\Delta t)$，而在我们的严格推导中， ΔC_n^{NL}与加性形式相比，仅需在被积函数中加入因子 $e^{-\Delta\mu_{npqr}\,(t-t')}$。这种对物理算子的分离可以防止快速的指数阻尼函数削弱显式非线性求解器的稳定性约束。

为了更好地理解新推导出的$S_{\mathrm{nl,\,d}}$ 项在（2.20）中的影响，我们将数值解与相关阻尼广义动理学方程的数值解进行比较，后者仅包含加性阻尼项

$$\frac{dC_n}{dt} = \underbrace{-2\mu_n C_n}_{S_{\mathrm{ds}}} + \underbrace{4\ \mathrm{Re}\sum_{p,q,r} T_{npqr}^{2}\,\delta_{np}^{qr}\int_0^t f_{npqr}(t')\,e^{i(\theta(t)-\theta(t'))}\,dt'}_{S_{\mathrm{nl}}}, \qquad (2.22)$$

这与通常针对 Hasselmann 动理学方程所采用的方法类似。为将其与严格推导出的表述区分开来，我们将无阻尼情况下的非线性项（其与 Gramstad & Stiassnie (2013) 得出的结果相同）记为 S_{nl}.

作为参考情形，我们还仅考虑不存在任何相互作用时的线性阻尼

$$\frac{dC_n}{dt} = \underbrace{-2\mu_n C_n}_{S_{\mathrm{ds}}}, \tag{2.23}$$

这将便于直观、简洁地比较阻尼和非线性相互作用对谱形的影响。我们将此耗散源项称为 S_{ds}.

数值模拟的初始条件采用 JONSWAP 波数谱的形式

$$S(k) = \frac{\alpha}{2k^3}\exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{k}{k_{p,0}}\right)^{-2}\right]\gamma^{\exp\left[-\left(\sqrt{\frac{k}{k_{p,0}}}-1\right)/2\sigma^2\right]}. \tag{2.24}$$

该谱由能量尺度参数 α、峰值波数$k_{p,\ 0}$以及形状参数 γ 和 σ，表征，其中 γ 表示峰值增强参数，用于修正 Pierson-Moskowitz 谱（该谱中 $\gamma = 1$），用于描述充分发展海况。在所有数值模拟中，我们设定 $\alpha = 0.0176$，并选择一个具有 $\gamma = 6$ 的峰值谱，同时取初始$k_{p,\ 0} = 0.02\ \mathrm{m}^{-1}$，使得初始谱波陡度

$$\epsilon_0 = k_{p,0}\frac{H_{m_0}}{2}$$

取值为 $\epsilon_0 \approx 0.12$ （见 (2.4)），这与 Gramstad & Stiassnie (2013) 研究的情形等效。对于这些代表强风海况的参数，初始峰值波长为 314m，峰值周期为 $T_{p,\ 0} =$ 14。19 s。

2.3.1. 相位混合

由于海洋中的物理过程（如白化破碎）可能会周期性地重置广义动理学方程中相关性的累积，因此以往研究在将广义动理学方程的数值模拟与 Hasselmann 动理学方程进行比较时，采用了数值相位混合（Liu 等 2021）。周期性重置四阶累积量也有助于稳定数值解。因此，我们希望比较采用和不采用相位混合时，（加性且严格的）阻尼广义动理学方程的模拟结果。相位混合间隔有多种选择，我们选择每隔 50 个峰值周期重新初始化相位，以便与 Gramstad & Stiassnie (2013) 的研究进行比较。

2.3.2. 耗散强度的选择

为研究不同阻尼率下耗散与非线性波相互作用之间的相互影响，我们在数值模拟中改变阻尼幅度。我们将重点考察三个具有代表性的阻尼率，其范围从 Hasselmann 动理学方程的演化速率 $\mathcal{O}(\epsilon_0^4\omega_{p,\ 0})$ 到近共振动力学相互作用的演化速率 $\mathcal{O}(\epsilon_0^2\omega_{p,\ 0})$（Janssen 2003；Annenkov & Shrira 2006）。

这些阻尼率通过对初始谱进行作用量加权平均确定，

$$\langle\mu_n\rangle_C = \frac{\sum_n \mu_n C_n(0)}{\sum_n C_n(0)}, \tag{2.25}$$

这使得即使耗散

随频率变化，也能合理地定义平均阻尼。在恒定耗散的情况下 $\mu_n = \mu$，因此 $\langle \mu_n \rangle_C = \mu$。用于核心计算的平均阻尼率为 $\langle \mu_n \rangle_C = 1.6\epsilon_0^4 \omega_{p,\,0}$，$1.1\epsilon_0^3 \omega_{p,\,0}$，$0.79\epsilon_0^2 \omega_{p,\,0}$。

2.3.3. 量化谱形变化

为了量化不同表述中谱形的差异，我们计算两个归一化能量谱 $S_i(k)$ $S_j(k)$ 之间的Hellinger距离 d_H （Hellinger 1909），定义如下：

$$d_H(S_i, S_j) = \left[\frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\sqrt{\hat{S}_i(k)} - \sqrt{\hat{S}_j(k)} \right)^2 dk \right]^{1/2}, \quad \hat{S}(k) = \frac{S(k)}{m_0}. \tag{2.26}$$

对能量进行归一化，可确保 d_H 仅直接衡量谱形重塑，其取值范围为 $d_H \in [0, 1]$；其中， $d_H = 0$ 和 $d_H = 1$ 分别表示谱形完全相同和谱形完全不重叠。

3. 均匀阻尼下的结果

3.1. 谱演化

我们首先研究均匀线性阻尼 $\mu_n = \mu$ 这一简化情形，此时谱中的所有频率均以相同速率受到阻尼。虽然这显然无法代表真实海况，但其优点在于，仅含阻尼的方程 (2.23) 会保持谱形不变。因此，随时间发生的谱形变化完全可以归因于非线性相互作用，无论其采用通常的纯加性形式 S_{nl}，还是严格推导得到并在 (2.20) 中实现的形式 $S_{\mathrm{nl,\,d}}$。

对于每种初始配置，均采用严格形式（$S_{\mathrm{ds}} + S_{\mathrm{nl,\,d}}$）和纯加性形式（$S_{\mathrm{ds}} + S_{\mathrm{nl}}$）进行数值模拟，并分别考虑和不考虑相位混合的情况。此外，通过解析求解方程（2.23），还计算了仅包含线性阻尼且不含非线性相互作用的参考演化（仅S_{ds}）。

比较具有不同阻尼率的谱随时间的演化时，不应在固定时间比较这些谱，而应在固定能量下进行比较。为此，我们采用依赖于阻尼的积分时间 t^*， 使总谱能量降至其初始值的 10 %，即，

$$m_0(t^*) = m_0(0)/10\,. \tag{3.1}$$

对于所考虑的三种情况，分别为 $t^* = 585T_{p,\,0}$，$99T_{p,\,0}$， 和 $16.8T_{p,\,0}$。积分时间步长选为 $\Delta t = t^*/4000$.

图1展示了 t^* 处无量纲线性阻尼波数谱，以及基于严格形式和纯加性非线性项的模拟结果，并同时给出了三种均匀阻尼率下对应的相位混合结果。由于阻尼是均匀的，线性方程（2.23）的纯阻尼解只是初始谱按比例缩小后的结果（黑色点划线），其峰值为k_p^3

$_0\epsilon_0^{-2} S$ 从 1.05 降至 0.11，出现在 $k/k_{p,0} = 1$。

图1(a)所示的最弱阻尼 $\mathcal{O}(\epsilon_0^4 \omega_{p,\,0})$ 在未实现相位混合时，严格模拟（蓝色）与纯加性模拟（红色）之间表现出显著差异。从启发式角度来看，阻尼时间尺度足够长，从而允许发生显著的非线性相互作用（这一点将在第3.2节中进一步讨论）。与仅阻尼情形相比，加性 S_{nl} 产生了更高、更尖锐的谱峰，并在其两侧出现了局部极小值。

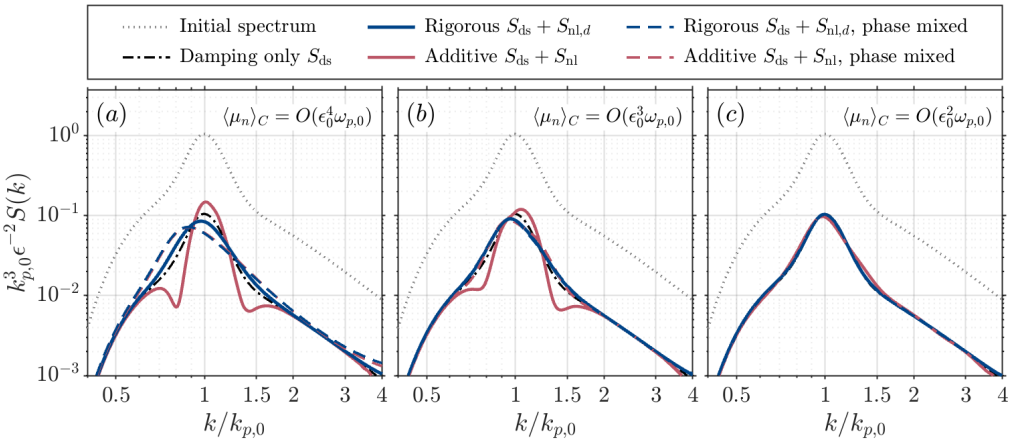

图1： t^* 仅考虑阻尼、严格形式和加性形式下的无量纲波数谱，其中展示了三种恒定阻尼率下有无相位混合的情况，分图为：(a) $\langle\mu_n\rangle_C = 1.6\epsilon_0^4\omega_{p,\,0}$；(b) $\langle\mu_n\rangle_C = 1.1\epsilon_0^3\omega_{p,\,0}$；(c) $\langle\mu_n\rangle_C = 0.79\epsilon_0^2\omega_{p,\,0}$。

相比之下，严格的 $S_{\rm nl,\,d}$ 呈现出更宽的谱，峰值较低，且没有局部极小值。

随着阻尼率增加至 $\mathcal{O}(\epsilon_0^3\omega_{p,\,0})$，谱形重塑随之减弱。然而，在图1(b)中仍可观察到与较弱阻尼下相同的定性差异，其中加性形式 $S_{\rm nl}$ 显示出明显更尖锐且更高的峰值，相较之下，仅考虑阻尼或严格推导的$S_{\rm nl,\,d}$ 所得到的谱则更低且更宽。当阻尼与非线性相互作用的初始速率相当时，各种形式之间的差异基本消失，如图1(c)所示。通过使用Hellinger距离量化这些谱形变化，我们发现 d_H 严格形式与加性形式模拟之间的差异从0.20降低至0.03，这是因为阻尼率从 $\mathcal{O}(\epsilon_0^4\omega_{p,\,0})$增加到 $\mathcal{O}(\epsilon_0^2\omega_{p,\,0})$。

将相位混合引入数值模拟（蓝色和红色虚线）后，我们看到，无论选择 $S_{\rm nl}$ 还是 $S_{\rm nl,\,d}$，它都具有正则化效应。事实上，在图1的三个分图中，加入相位混合的谱几乎完全重合。相位混合速率固定为 $50T_{p,\,0}$，因此，分图（a）所示的最弱阻尼和最长数值模拟（$t^* = 585T_{p,\,0}$）经历的相位混合事件多于分图（b）和（c）中的情况（分别为 $t^* = 99T_{p,\,0}$ 和 $17T_{p,\,0}$），因为谱更快地衰减，导致我们的数值模拟更早终止。这解释了为什么，与所考虑的其他情况相比，分图（a）中的相位混合模拟会导致谱显著展宽，并使谱峰向低频移动。

尽管从时间演化中可以明显看出谱形存在差异，但如图2(a)所示，在给定阻尼率下，不同形式的谱的总能量 m_0 变化很小（最大偏差为0.48%），因为不同形式对应的曲线彼此重合。因此，由 m_0 推导出的谱显著波高也不受所采用形式的影响。图1清楚地表明，峰值周期 T_p 在演化过程中可能发生显著偏移；对于所考虑的三种阻尼率，图2(b)–(d)对此进行了更详细的展示。

归一化峰值周期 $T_p/T_{p,\,0}$ 在所有包含非线性项的情况下均表现出快速的初始增加，这与快速的、近共振相互作用

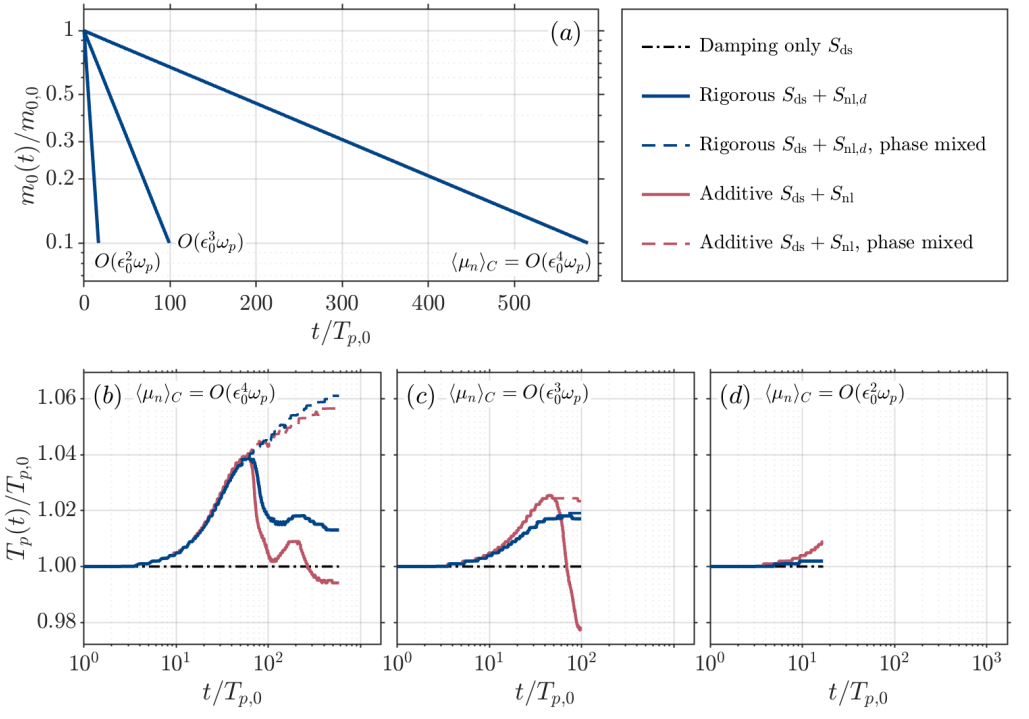

图2：（a）无量纲能量的时间演化，m_0；以及（b–d）均匀阻尼下各分图中的归一化峰值周期：（b）$\langle\mu_n\rangle_C = 1.6\epsilon_0^4\omega_{p,\,0}$；（c）$\langle\mu_n\rangle_C = 1.1\epsilon_0^3\omega_{p,\,0}$；（d）$\langle\mu_n\rangle_C = 0.79\epsilon_0^2\omega_{p,\,0}$。（a）使用垂直对数坐标轴，（b–d）各分图使用水平对数坐标轴。

时间尺度 $\mathcal{O}(\epsilon_0^{-2}\omega_{p,\,0}^{-1})$ 的广义动理学方程演化相吻合。在不存在相位混合的情况下（连续红线和蓝线），峰值周期的增加随后会转为下降，这一变化刻画了后续演化过程；其在 t^* 时的终态如图1所示。鉴于阻尼率本身已被纳入严格的$S_{\rm nl,\,d}$ 项中，因此，加性形式的谱峰随着耗散率从 $\mathcal{O}(\epsilon_0^4\omega_{p,\,0})$ 增加到 $\mathcal{O}(\epsilon_0^2\omega_{p,\,0})$，会在越来越早的时间偏离严格形式的对应结果，也就不足为奇了，如图2的分图(b)–(d)所示。

在初始谱下移之后，可以看到加性形式 $S_{\rm nl}$ （虚线）会导致快速上移，最终在情况（b）和（c）中超过初始谱峰。相比之下，$S_{\rm nl,\,d}$ 的严格公式保留下移的谱峰；在没有相位混合时，峰值调整似乎逐渐趋于平缓。当包含相位混合时，广义动理学方程的快速初始调整会每隔 $50T_{p,\,0}$，重新启动，从而使情况（b）中的谱下移在整个模拟过程中持续进行，同时在阻尼更强的情况（c）中也导致峰值周期出现幅度较小但明显的增加。

3.2. 时间尺度

图 1 和图 2 中明显的状态转变，可以与该问题中不同时间尺度之间的相互作用联系起来。虽然耗散率及其相关时间尺度保持不变，但广义动理学方程同时体现了快速的 $\mathcal{O}(\epsilon_0^{-2}\omega_{p\,0,}^{-1})$ 调整（与（2.20）中的记忆积分相关）和较慢的 $\mathcal{O}(\epsilon_0^{-4}\omega_{p\,0,}^{-1})$ 动力学时间尺度。耗散的作用意味着

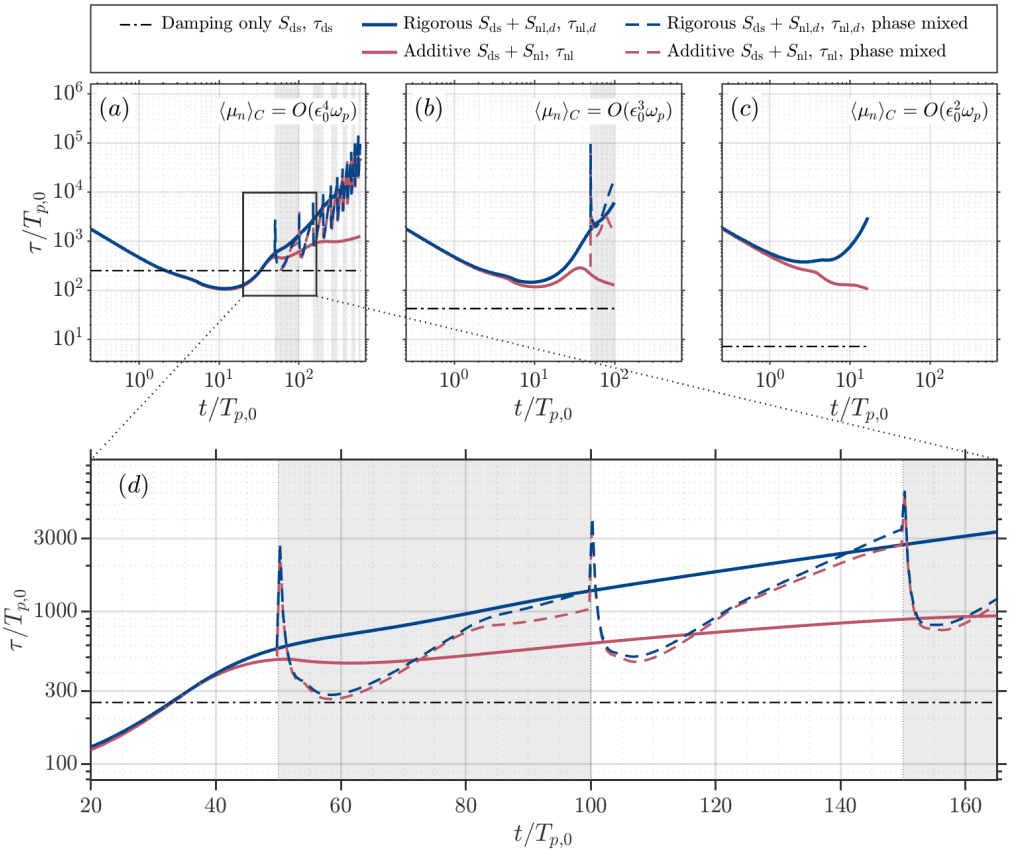

图3：均匀阻尼下阻尼与非线性时间尺度（3.2）的时间演化：（a）$\langle\mu_n\rangle_C = 1.6\epsilon_0^4\omega_{p,0}$；（b）$\langle\mu_n\rangle_C = 1.1\epsilon_0^3\omega_{p,0}$；（c）$\langle\mu_n\rangle_C = 0.79\epsilon_0^2\omega_{p,0}$。(a)–(c)中的坐标轴均为对数坐标。图（d）展示了图（a）中局部区域的放大图，采用线性时间水平轴。交替的灰色透明背景突出显示了用于数值模拟的相位混合区间$50T_{p,0}$。

非线性从 ϵ_0 开始持续减弱，因此与 $S_{\rm nl}$ 相关的时间尺度会在整个问题过程中发生变化。由于非线性相互作用的竞争效应，这种变化并非单调的。

回顾阻尼广义动理学方程的示意形式 $C_n' = S_{\rm ds} + S_{{\rm nl},\,{\rm d}}$（或具有纯加性阻尼的相关方程 $C_n' = S_{\rm ds} + S_{\rm nl}$），我们定义瞬时非线性时间尺度和耗散时间尺度，分别记为 τ_{nl}、$\tau_{nl,\,d}$和 τ_{ds}，即

$$\tau_{nl}(t) = \frac{\int C\,{\rm d}k}{\int |S_{\rm nl}|\,{\rm d}k}, \qquad \tau_{nl,d}(t) = \frac{\int C\,{\rm d}k}{\int |S_{{\rm nl,d}}|\,{\rm d}k}, \qquad \tau_{ds} = \frac{\int C\,{\rm d}k}{\int |S_{\rm ds}|\,{\rm d}k}, \tag{3.2}$$

其中 $S_{\rm ds} = -2\mu C_n$ 的简单形式确保 τ_{ds} 与时间无关。

图3展示了所有所考虑情形下局部非线性时间尺度和耗散时间尺度的演化。图3(a)中耗散率最小，可以看出非线性时间尺度迅速变得小于（即快于）耗散时间尺度，并一直保持这种关系，直至约为 $33T_{p,\,0}$，这与图2(b)中观察到的快速调整和下移相吻合。在这次调整之后不久，不同的

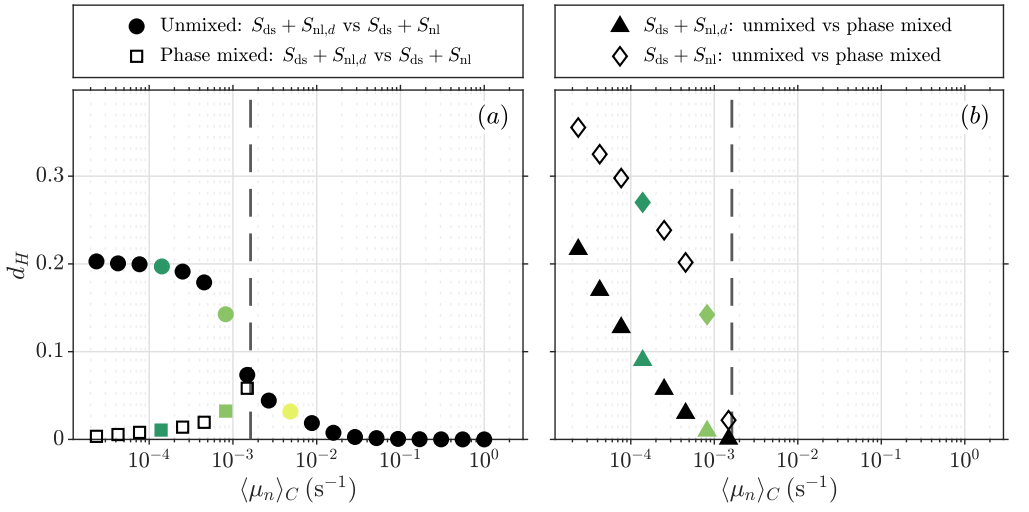

图 4：不同（均匀）阻尼率下 d_H 处的 Hellinger距离 t^* 。 (a) 有（方块）和无（圆圈）相位混合时的严格公式与加性公式对比。(b) 严格公式（三角形）与加性公式（菱形）中的相位混合与未混合情况对比。图1–3中考察的三个阻尼率以不同深浅的绿色突出显示。灰色虚线表示 $\mu_{n,\ \mathrm{crit}}$.

非线性时间尺度开始分化——在面板(d)中以放大形式显示——其中 τ_{nl} and$\tau_{nl,\ d}$ 均呈指数增长，但增长速率不同。这一差异可直接归因于记忆项：对于 $S_{\rm nl}$，记忆项与阻尼无关；而在 $S_{\mathrm{nl},\ \mathrm{d}}$ 中则包含耗散修正。当施加相位混合时，每次相位混合事件都会重新启动时间尺度 τ_{nl} and $\tau_{nl,\ d}$ 中伴随的快速调整，其形式与初始演化相似，如面板(d)所示。有趣的是，两种经过相位混合的时间尺度在长时间行为上都更接近严格的 $\tau_{nl,\ d}$ （未进行相位混合），而不是纯粹可加的、未经相位混合的时间尺度 τ_{nl}.

对于图 3(b)、(c) 所示的较强阻尼，在所有考察情形中，耗散时间尺度 τ_{ds} 均短于非线性时间尺度。虽然严格的$\tau_{nl,\ d}$ 尺度在三个阻尼率下均呈现最小值——这主要由非线性相互作用驱动，且最小值的位置仅受阻尼率本身的微弱影响——但加性的 τ_{nl} 尺度并非如此。这进一步体现了非线性与耗散的解耦：由于在式 (2.20) 中引入指数阻尼项 $\Delta\mu_{npqr}$ ，控制 $\tau_{nl,\ d}$ 的记忆积分会逐渐丢失有关过去状态的信息；与之相反，式 (2.22) 中的守恒记忆积分会产生 τ_{nl}。

3.3. 量化耗散强度引起的谱变化

我们在图1中观察到，改变耗散率会影响加性公式和严格公式中谱形变化的程度，相位混合的引入也会产生同样的影响。为全面量化这些变化，我们考虑 $\langle\mu_n\rangle_C = 2.35\times10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$ 至 $1\mathrm{s}^{-1}$之间的一系列耗散率，分别对应$2.1\epsilon_0^5\omega_{p,\ 0}$ 和 $2.3\epsilon_0^0\omega_{p,\ 0}$，并对第 2.3 节中给出的初始谱进行演化模拟，直至时间 $t=t^*$，见（3.1）；在有无相位混合的情况下，每隔 $50T_p$

,0·

我们测量 通过 Hellinger距离（2.26）来确保谱形变化，回顾

其中， d_H 的取值范围从归一化谱完全相同时的 0 到归一化谱不重叠时的 1。图 4(a) 比较了严格公式和加性形式。在不存在相位混合的情况下（圆形标记），较小的耗散率会导致 S_{nl} 与S_{nl}之间的谱形差异更大, $_{\mathrm{d}}$. 随着耗散增加，由于线性阻尼项相对于非线性项的主导作用，谱变得越来越相似——这在图 1(c) 中也有所体现——当 $\langle\mu_n\rangle_C \sim 0.1\mathrm{s}^{-1}$ 时，两种形式变得无法区分。在存在相位混合的数值模拟中（方形标记），情况则相反，尽管总体上的谱形差异较小。事实上，对于较弱的耗散，相位混合往往会减小加性形式与严格公式之间的差异。注意，当耗散率大于 $\mu_{n,\ \mathrm{crit}} = \frac{1}{2}T_r^{-1}\ln(10) = 1.62\times10^{-3}\mathrm{s}^{-1} \approx 2.1\epsilon_0^3\omega_{p\text{时}0}$ （图 4 中的虚线），总能量下降得如此迅速，以至于无法发生相位混合。

在比较每种单独形式中相位混合的影响时，图 4(b) 显示，加性形式 S_{nl} 导致的谱形变化大于严格形式 $S_{\mathrm{nl},\ \mathrm{d}}$；对于所考虑的所有阻尼率，菱形标记始终位于三角形标记上方。这反映了图 (1)(a) 中观察到的趋势：在 $S_{\mathrm{nl},\ \mathrm{d}}$ 的模拟中，无论有无相位混合，峰都更低、更宽；相比之下， S_{nl} 在无相位混合的模拟中呈现出更尖、更高的峰。随着阻尼率增大，图 4(b) 表明，相位混合造成的谱形差异会迅速减小，不受所用形式的影响。当阻尼超过 $\mu_{n,\ \mathrm{crit}}$ 时（包括$\langle\mu_n\rangle_C = 0.79\epsilon_0^2\omega_{p,\ 0}$这种情况），模拟会在相位混合发生之前终止，因此无法进行比较。

4. 频率依赖阻尼的结果

在第 3 节中，我们考察了一种理想化的频率无关耗散类型，即整个谱范围内的恒定耗散。在谱模型中，对耗散机制进行符合物理现实的建模，通常需要耗散随波频率变化（Komen 等 1994）。这种频率依赖性可能因耗散机制而呈现不同形式。例如，波浪与海冰相互作用通常建模为一种耗散 $\mu_n \propto \omega_n^N$（Meylan 等 2018; Ransome 等 2026）。本节将采用以下形式的频率依赖幂律阻尼

$$\mu_n = \beta\omega_n^2. \tag{4.1}$$

系数 β 的取值使得按照式 (2.25) 定义的平均阻尼率与第 2.3 节中给出的阻尼率一致：$\langle\mu_n\rangle_C = 1.6\epsilon_0^4\omega_{p,\ 0}$，$1.1\epsilon_0^3\omega_{p,\ 0}$，$0.79\epsilon_0^2\omega_{p,\ 0}$。数值配置也与第 2.3 节所述相同，最终模拟时间分别为 $t^* = 636T_{p,\ 0}$，$108T_{p,\ 0}$ 和 $18.2T_{p,\ 0}$，此时总谱能量降至初始值的 10%，见式 (3.1)。

与第 3 节不同，频率依赖阻尼本身会导致谱形发生变化，如图5 (a)–(c) 中黑色点划线所示；这一点也体现在仅阻尼情形的分图 (d)–(f) 中可见的峰值下移上。

对于分图 (a) 和 (b) 所示的两种较弱耗散情形，非线性源项 S_{nl} 的纯加性形式表现出明显不符合物理规律的行为：除了呈现出图1中均匀阻尼下已经观察到的高度尖峰形状外，谱在波数空间中还出现了间隙。相比之下，

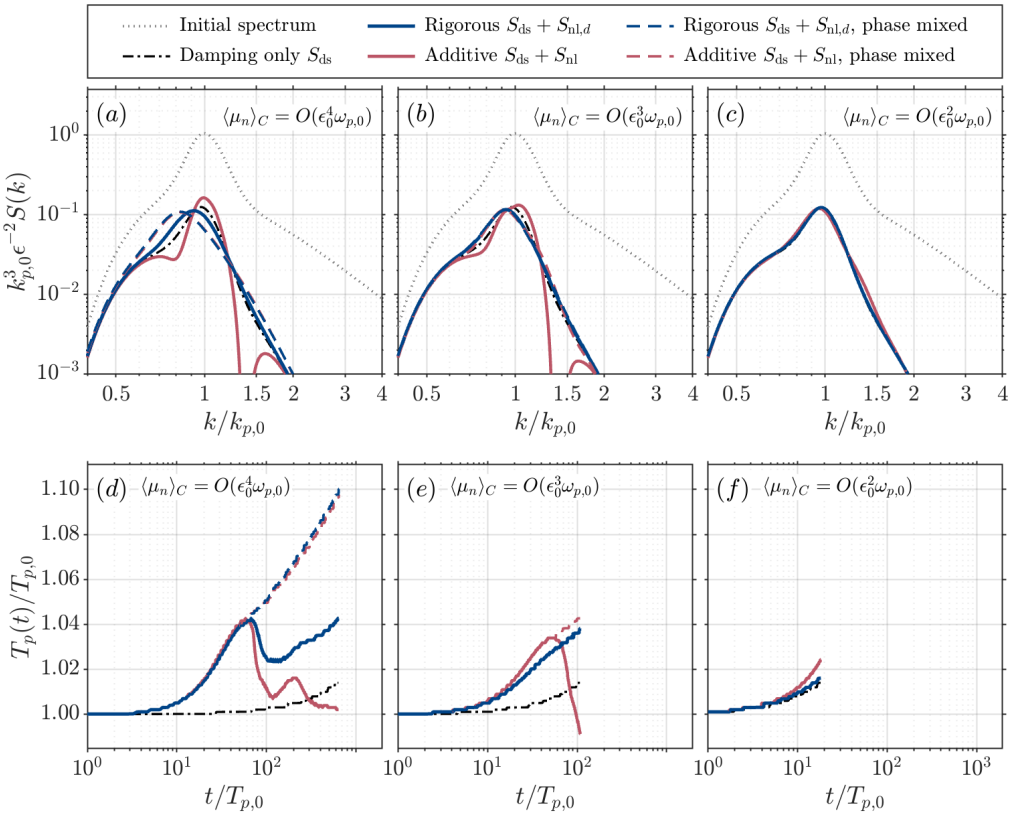

图5：频率依赖阻尼 $\mu_n \propto \omega_n^2$ 下 t^* 的无量纲波数谱（a–c）和归一化峰值周期（d–f）：(a; d) $\langle\mu_n\rangle_C = 1.6\epsilon_0^4\omega_{p,\,0}$，(b;e) $\langle\mu_n\rangle_C = 1.1\epsilon_0^3\omega_{p,\,0}$，(c; f) $\langle\mu_n\rangle_C = 0.79\epsilon_0^2\omega_{p,\,0}$。

严格公式 $S_{\rm nl,d}$ 呈现出较为宽广的形状，其下移的峰位于相位混合模拟与仅阻尼情形之间。

在所有情况下，谱的高频尾部都受到优先阻尼，因此在 $2k_{p,\,0}$ 之外的谱能量基本可以忽略（参见图1）。加性形式未能恰当地考虑阻尼，导致其与其他形式在大波数范围内出现偏差，即使在图5(c)所示的极高耗散率下也是如此。尽管如此，在耗散率足够高时，无论是否考虑相位混合，所有形式的演变都趋于相似，这与我们在图4中对均匀阻尼的观察一致。

纳入相位混合后，在所有情况下，$S_{\rm nl}$ 与 $S_{\rm nl,d}$ 之间的差异都几乎可以忽略。每隔 $50T_{p,0}$ 重置相位，会使谱峰在整个演化过程中持续下移，如图5(d)– (f)所示。没有相位混合时，由快速近共振相互作用引起的峰值下移会停止，因为较慢的共振动力学开始发挥作用，并与能量耗散相抗衡，共同重塑谱。

5. 讨论与结论

表面波传播中的耗散过程（如白化破碎）具有强烈的局部性和高度非线性。然而，由于它们在开阔海洋传播中每个周期的总体能量传递量很小，

当将这些过程纳入谱波模型时，它们在谱中表现为准线性项。这些线性阻尼项通常以事后方式加入，随后通过诉诸时间尺度层级来为这一添加提供依据。Maestrini等人（2025）最近对这套思想进行了批判性重新审视，他们直接从受阻尼的确定性扎哈罗夫方程推导出了一个动理学方程（另见 Lin（2026））。如果假定非线性和耗散作用于同一动力学时间尺度，他们发现这需要对碰撞积分作出修改。

我们旨在通过严格推导广义动理学方程，探究阻尼与非线性相互作用的分离。与 Maestrini 等 (2025) 所考虑的动理学方程不同，后者描述精确共振相互作用在长时间尺度 $\mathcal{O}(T/\epsilon_0^4)$ 上引起的谱演化；广义动理学方程还纳入了近共振相互作用，因此呈现出额外的快速演化 $\mathcal{O}(T/\epsilon_0^2)$。这使非线性与耗散尺度之间能够产生丰富的相互作用，而我们通过对相应方程进行数值模拟来捕捉其行为。

我们采用的广义动理学方程建立在 Janssen（2003）、Annenkov & Shrira（2006）以及 Gramstad & Stiassnie (2013) 的研究基础之上，也可视为 Hasselmann（1962）经典动理学方程的推广。事实上，若假设非线性项 f_{npqr} 随时间尺度足够缓慢地演化，则可将其从式（2.20）的时间积分中提出。随后对积分求值，可得到 Janssen 的修正动理学方程（Janssen 2003）（假设波场在有限初始时刻不相关），或 Hasselmann 方程（假设谱分量在 $t \to -\infty.$ 时不相关）。在后一种情况下，积分会收敛为狄拉克 δ 分布 $\delta(\omega_n + \omega_p - \omega_q - \omega_r)$，从而施加精确共振条件。通过类似的论证，可以将我们的阻尼广义动理学方程（2.20）化简为 Maestrini 等(2025) 得到的方程。

当阻尼从头开始纳入确定性原始方程时，它在广义动理学方程中表现为波谱中的一个线性项，同时也通过引入新的指数衰减项改变记忆积分。其效果是，在阻尼的作用下，过去状态的记忆会逐渐消退；这也解释了与仅加入简单加性阻尼相比，我们的新非线性项所呈现的正则化效应。同时，由于非线性与波陡成正比，耗散与非线性相互作用之间的关系十分复杂，无法仅根据初始条件进行简单分类。如果耗散不太强，在谱的演化初期，广义动理学方程中的快速非线性动力学可能构成主导时间尺度。在没有能量输入的情况下，经过足够长的时间，系统动力学最终必然会转入耗散主导区制，此时非线性处于次要地位。

在海洋波浪的传播过程中，人们通常认为波浪破碎会使波浪相位去相关（Babanin *et al.* 2010年）。由于广义动理学方程允许四阶累积量演化，而四阶累积量表示波场偏离高斯性的程度，因此在数值模拟中，通常会加入相位混合，以实现这种去相关（Gramstad & Stiassnie 2013；Gramstad 与 Babanin，2016；Liu *et al.* 2021）。在我们的模拟中加入这种相位混合后，可以看到它重新启动了广义动理学方程初始阶段快速的非线性演化，并且相较于我们严格推导出的方程，增强了谱下移和展宽。相位混合还有助于缓解离散化版本中的数值不稳定性

广义动理学方程的离散化版本中近期已有多项研究报告了这类问题（Liu *et al.* 2021年，第911页）（另见（Liu *et al.* 2021，图14）、（Gramstad & Stiassnie 2013，图16）以及 Andrade *et al.*（2019））。

我们的阻尼广义动理学方程的一项主要优势是不会出现此类不稳定性。在截至 2000 $T_{p,\ 0}$ 的数值模拟中，我们新推导的方程展现出稳健的谱演化。相比之下，如图 1 和图 5 所示，在广义动理学方程中加入纯加性阻尼项会产生多峰谱和不符合物理规律的演化，除非同时纳入相位混合。我们这一表述具有良好的稳定性，可能归因于严格纳入耗散所引入的记忆项具有瞬态特性。

尽管我们新提出的阻尼广义动理学方程适用于方向谱，但我们将数值模拟限制在计算上更简单的单向波情形。此外，为了与先前工作（Gramstad & Stiassnie 2013）进行比较，我们以特定方式纳入了相位混合，并将阻尼限制在两种理想化情形。因此，还需进一步研究，以评估如何将这一新表述纳入波浪模型，其中包括研究风强迫的影响。对于某些情形，例如波浪传播进入海冰（Alberello 等2022；Stuhlmeier 等2024），波浪与海冰相互作用导致的阻尼应采用空间演化而非时间演化来建模，并作相应修改。

我们新近以自洽方式推导得到的广义动理学方程，无需借助相位混合即可保证数值稳定性。这使相位混合的双重作用得以分离：在具有物理意义时——例如在某些频率域中——可以将其纳入，而在不具有物理意义时则将其省略，且不会对数值模拟的长时间保真度产生负面影响。这一情形也为探索耗散机制与混合速率之间的耦合开辟了可能，从而引入更为真实的海洋波浪物理。尽管本研究仅聚焦于阻尼，所给出的表述同样适用于强迫。因此，本文结果为未来在波浪模型和耦合地球系统模型中实现广义动理学方程展现了前景。

致谢

R.R. 得到自然环境研究委员会以及 ARIES 博士培训合作伙伴关系 [资助编号 NE/S007334/1] 的支持。R.R. 与 A.A. 感谢英国皇家学会（IEC/R3/243016）的资助。D.P. 得到工程与物理科学研究委员会资助项目 EP/Y021118/1 以及德国达姆施塔特 GSI 亥姆霍兹重离子研究中心极端物质研究所 EMMI 的支持。本研究受到“海冰数学”会议期间讨论的启发，该会议得以举办得益于艾萨克·牛顿数学科学研究所。

参考文献

Alberello, Alberto、Bennetts, Luke G、Onorato, Miguel、Vichi, Marcello、MacHutchon, Keith、Eayrs, Clare、Ntamba, Butteur Ntamba、Benetazzo, Alvise、Bergamasco, Filippo、Nelli, Filippo 等 2022 气旋期间边缘冰区中波浪和浮冰块的三维成像。*Nature Communications* **13**(1), 4590。Andrade, David、Stuhlmeier, Raphael 与 Stiassnie, Michael 2019 关于表面重力波的广义动力学方程、爆破及其抑制。*Fluids* **4** (1), 2。

Annenkov, Sergei Yu 与 Shrira, Victor I. 2001*a* 基于扎哈罗夫方程的水波演化数值建模。*J. Fluid Mech.* **449**, 341–371。Annenkov, Sergei Yu 与 Shrira, Victor I. 2001*b* 关于表面重力波和重力毛细波演化可预测性的研究。*Phys. D Nonlinear Phenom.* **152-153**, 665–675。Annenkov, Sergei Yu 与 Shrira, Victor I. 2006 非共振相互作用在非线性随机水波场演化中的作用。*J. Fluid Mech.* **561**, 181–207。Annenkov, Sergei Y 与 Shrira, Victor I 2016 使用广义动理学方程模拟瞬态海况。载于*Rogue Shock Waves Nonlinear Dispersive Media*（编者：Miguel Onorato、Stefania Resitori 与 Fabio Baronio），第 159–177 页。Cham：施普林格国际出版。Annenkov, Sergei Y 与 Shrira, Victor I 2018 弱非线性随机波的谱演化：动理学描述与直接数值模拟 弱非线性随机波的谱演化 767 对若干特定谱特征的研究要求重新审视相关基础。*J. Fluid Mech* **844**, 766–795。Ardhuin, Fabrice、Rogers, Erick、Babanin, Alexander V.、Filipot, Jean-François、Magne, Rudy、Roland, Aaron、van der Westhuysen, Andre、Queffeulou, Pierre、Lefevre, Jean-Michel、Aouf, Lotfi 与 Collard, Fabrice 2010 海洋波浪的半经验耗散源函数。第一部分：定义、标定与验证。*Journal of Physical Oceanography* **40** (9), 1917 – 1941。Babanin, Alexander V、Chalikov, Dmitry、Young, IR 与 Savelyev, Ivan 2010 深水中陡峭二维波破碎的数值与实验室研究。*Journal of Fluid Mechanics* **644**, 433–463。Cavaleri, L.、Alves, J.-H.G.M.、Ardhuin, F.、Babanin, A.、Banner, M.、Belibassakis, K.、Benoit, M.、Donelan, M.、Groeneweg, J.、Herbers, T.H.C.、Hwang, P.、Janssen, P.A.E.M.、Janssen, T.、Lavrenov, I.V.、Magne, R.、Monbaliu, J.、Onorato, M.、Polnikov, V.、Resio, D.、Rogers, W.E.、Sheremet, A.、McKee Smith, J.、Tolman, H.L.、van Vledder, G.、Wolf, J. 与 Young, I. 2007 波浪建模——最新进展。*Progress in Oceanography* **75** (4), 603–674。Cavaleri, L.、Fox-Kemper, B. 与 Hemer, M. 2012 耦合气候系统中的风浪。美国气象学会通报 **93** (11), 1651 – 1661。Gramstad, Odin 与 Babanin, Alexander 2016 广义动力学方程作为第三代波浪模型中非线性传递的模型。*Ocean Dyn.* **66** (4), 509–526。Gramstad, Odin 与 Stiassnie, Michael 2013 水波的相位平均方程。*J. Fluid Mech.* **718**, 280–303。Hasselmann, K 1962 重力波谱中的非线性能量传递 第一部分：一般理论。*J. Fluid Mech.* **12** (04), 481。Hasselmann, Klaus 1974 白冠导致的海洋波浪谱耗散。*Boundary-Layer Meteorology* **6** (1), 107–127。Hasselmann, S 与 Hasselmann, K 1985 重力波谱中的非线性能量传递的计算与参数化，第一部分：精确非线性传递积分的高效计算新方法。物理海洋学杂志 第 1369–1377 页。Hasselmann, S、Hasselmann, K、Allender, J H 与 Barnett, T P 1985 重力波谱中的非线性能量传递的计算与参数化。第二部分：用于波浪模型的非线性能量传递参数化。物理海洋学杂志 **15** (11), 1378–1392。Hellinger, Ernst 1909 无限多个变量的二次型理论的新论证。*Journal für die reine und angewandte Mathematik* **1909** (136), 210–271。Holthuijsen, Leo H 2007 海洋与沿岸水域中的波浪。剑桥大学出版社。Janssen, PAEM 2003 非线性四波相互作用与异常波。物理海洋学杂志 **33** (4), 863–884。Kadomtsev, B B 1965 等离子体湍流。伦敦：Academic Press。Komen, Gerbrand J、Cavaleri, Luigi、Donelan, Mark、Hasselmann, Klaus、Hasselmann, S 与 Janssen, PAEM 1996 海洋波浪的动力学与建模。剑桥大学出版社。Komen, G J、Hasselmann, K、Cavaleri, L、Donlan, M、Hasselmann, S 与 Janssen, P A 1994 海洋波浪的动力学与建模。剑桥大学出版社。Kousal, Josh、Pelletier, Charles、Denissen, Jasper M. C.、Schulte, Luise、Keeley,

Sarah, Dueben, Peter, Penny, Stephen G., Park, Rae-Seol, Miralles, Diego G., Shapkalijevski, Metodija M., Valmassoi, Arianna, Renfrew, Ian, Zampieri, Lorenzo, Kumar, Rajesh, Ruiz-Vásquez, Melissa, Schulz, Jan-Peter, Wu, Lichuan & Bagazgoitia, Xabier Pedruzo 2026 数值天气预报模型耦合——策略、挑战与展望。美国气象学会通报 107 (1), E183 – E189。Krasitskii, Vladimir P. 1994 弱非线性表面波哈密顿理论中的约化方程。流体力学杂志 272, 1–20。Lin, Guo-Bin 2026 带随机耗散与强迫的扎哈罗夫方程的波动力学方程。Journal of Physics Communications 10 (2), 025007。Liu, Qingxiang, Gramstad, Odin & Babanin, Alexander 2021 第三代谱波模型中的动力学方程。流体力学杂志 910, A50。Liu, Qingxiang, Rogers, W. Erick, Babanin, Alexander V., Young, Ian R., Romero, Leonel, Zieger, Stefan, Qiao, Fangli & Guan, Changlong 2019 第三代波浪模型 WAVEWATCH III 中基于观测的源项：更新与验证。物理海洋学杂志 49 (2), 489 – 517。Maestrini, Davide, Noto, Daniele, Dematteis, Giovanni & Onorato, Miguel 2025 关于存在强迫与耗散时的波动力学方程。流体力学杂志 1008, A44。Mei, C. C., Stiassnie, M. & Yue, D. K.-P. 2005 海洋表面波理论与应用，第2版。世界科学出版社。Meylan, M. H., Bennetts, L. G., Mosig, J. E. M., Rogers, W. E., Doble, M. J. & Peter, M. A. 2018 边缘冰区中波浪的色散关系、幂律与能量损失。Journal of Geophysical Research: Oceans 123 (5), 3322–3335。Miles, John W. 1957 3, 185 204 剪切流产生表面波。流体力学杂志 – 8, 441–455。Nazarenko, Sergey 2011 波湍流。柏林、海德堡：Springer Berlin Heidelberg，arXiv: 1211.6245。Onorato, Miguel, Proment, Davide, El, Gennady, Randoux, Stephane & Suret, Pierre 2016 非线性薛定谔型方程中重尾统计的起源。Physics Letters A 380 (39), 3173–3177。Peierls, R. 1955 固体量子理论。英国牛津：牛津大学出版社。Phillips, Oliver M 1958 风生波谱中的平衡范围。流体力学杂志 4 (4), 426–434。Phillips, O. M. 1960 有限振幅非定常重力波的动力学 第1部分：基本相互作用。流体力学杂志 9 (2), 193–217。Pierson, Willard James 1952 风暴生成的海洋表面波的分析、传播与折射的统一数学理论，第1、2部分。纽约大学工程学院研究部 461。Ransome, Rhys, Proment, Davide, Renfrew, Ian & Alberello, Alberto 2026 漂移海冰中的波衰减：针对观测衰减剖面的机理模型。流体力学杂志 1030, R3。Stiassnie, Michael 1984 关于深水波修正非线性薛定谔方程的注记。Wave Motion 6 (4), 431–433。Stokes, G G 1847 关于振荡波理论。Trans. Camb. Phil. Soc 8, 441–455。Strang, Gilbert 1968 差分格式的构造与比较。SIAM数值分析杂志 5 (3), 506–517。Stuhlmeier, Raphael 2024 深水波建模中的扎哈罗夫方程导论。载于《非线性色散波》（编者：D. Henry），第99–131页。Springer。Stuhlmeier, Raphael, Heffernan, Conor, Alberello, Alberto & Părău, Emilian 2024 非均匀阻尼宽频带波的调制不稳定性：在海冰中波浪方面的应用。Physical Review Fluids 9 (9), 094802。Stuhlmeier, Raphael & Stiassnie, Michael 2021 利用扎哈罗夫方程进行确定性波浪预报。流体力学杂志 913, 1–22。Sverdrup, H U & Munk, W H 1947 风、海与涌浪。预报关系理论。技术报告 601。美国海军海道测量局。SWAMP Group，编。1985 海洋波浪模拟。全会出版社，纽约。

Tanaka, Mitsuhiro 2001 通过原始方程的直接数值模拟验证表面重力波之间的 Hasselmann能量传递。流体力学杂志 **444**, 199–221。The Wamdi Group 1988 WAM模型——第三代海浪预报模型。物理海洋学杂志 **18**, 1775–1810。The WAVEWATCH III Development Group 2016 WAVEWATCH III 5.16版用户手册与系统文档。技术报告 329。NOAA/NWS/NCEP/MMAB，美国马里兰州大学公园市。Tick, L.J. 1959 重力波非线性随机模型 I。数学与力学杂志 **8** (5), 643–651。Trulsen, Karsten 2004 地球物理流体中的波，*CISM*国际力学科学中心，第489卷，第1章：海浪场的弱非线性与随机特性：极端波浪事件的应用，第1–52页。维也纳：Springer。van Vledder, Gerbrant Ph 2006 WRT方法在离散谱波模型中计算非线性四波相互作用的应用。海岸工程 **53** (2-3), 223–242。Webb, D. J. 1978 海浪之间的非线性能量传递。深海研究 **25** (3), 279–298。Zakharov, VE 1968 深流体表面有限振幅周期波的稳定性。应用力学与技术物理杂志 **9** (2), 190–194。