arXiv:2611.32596v1 [physics.flu-dyn] 24 Nov 2026

随机气团微物理跳跃模型涌现出的云模式

Mickaël D. Chekroun, [1,2] Ilan Koren, [2] 和 Honghu Liu[3]加州大学洛杉矶分校大气与海洋科学系，美国加利福尼亚州洛杉矶，邮编 *90095-1565*[2]魏茨曼科学研究所地球与行星科学系，以色列雷霍沃特 *76100*[*3]弗吉尼亚理工学院数学系，美国弗吉尼亚州布莱克斯堡，邮编 *24061*(日期：2026年11月25日)

暖云会组织成带状结构、胞状结构和复杂的波网络，但连接这些形态的动力学机制仍难以厘清。为衔接尚未充分解析的气团微物理与云组织，我们针对活化状态下的云水和雨水异常，建立了空间跳跃过程模型，并分析其平均场闭合。通过消除液滴生长和水汽输运中的快速过饱和度调整，可得到一个屏蔽环境核，并将其与Hopf起始附近的三次振荡定律耦合。对泊松气团事件取平均并闭合三阶矩后，得到伪抛物型金兹堡–朗道方程（PGLE），其时空混合导数表征动态惯性，使细尺度弛豫减慢。与经典扩散型振幅方程不同，PGLE分解为一个正则化的非线性薛定谔哈密顿扇区和一个由守恒诺特荷支配的伪抛物型艾伦–卡恩梯度扇区；此外，它还包含开放系统液态水收支，可区分转化与水汽交换、沉降以及三元组驱动的区域平均振荡。精确稳定性分析揭示了动态惯性和振幅依赖的频率偏移（扭转）如何控制调制失同步，以及临界扭转阈值以上的共振交叉载波边带放大。数值积分表明，扭转增强会通过缺陷增殖，使相干波状云带转变为富含缺陷的粗糙云样波动；而在亚临界状态下，模态竞争会将胞状干涉整合为平行滚动结构。即使没有扭转，无结构的随机异常也会演化出持续性胞状排斥尺度和向外辐射的放射状螺旋臂，而一维波破碎则会重组为双频组合音谱。该跳跃表述指出了未来与大涡模拟进行校准时需要考虑的涨落矩，这些涨落矩在当前模型中被省略——

涡旋模拟。

PACS 编号：89.75.Kd、52.35.Mw、05.45.-a、05.45.Yv、05.40.-a、92.60.Nv、47.54.-r 关键词：伪抛物型金兹堡–朗道方程、动态惯性、云雨振荡、边带不稳定性、拓扑缺陷、图案形成、跳跃过程

目录

一、引言 2

二、伪抛物型模型的物理基础 3

A. 从液滴生长到空间种群场 3B. 动态惯性的出现 4C. 屏蔽响应的格林函数 5D. 云–雨可观测量及其振荡反馈 6

III. 气块事件、平均场闭合与云场解释 6

A. 未解析云物理的空间跳跃过程 7 B. 精确平均方程与非线性闭合 8 C. PGLE 在物理上所描述的内容 9

IV. 色散与非线性效应 10A. 色散关系、相速度和群速度 10

B. 非线性频移、扭转与相位滞后 10C. 动态惯性与扩散弛豫 11

V. 液态水与振幅收支 12

A. 液态水收支与未解析储库 12B. 振幅与谱平衡 14C. 相位对称性、诺特荷与图样选择的动力学约束 14

VI. 不稳定性与非线性转变 15

A. 我们的扰动方法 15B. 不稳定区域 16C. 边带及向准周期态的跃迁 17D. 均匀振荡的调制不稳定性 19

VII. 非线性波相互作用 19

A. 模式耦合与相位匹配 20B. 双边带放大机制 20C. 失稳条件：失谐与共振增益 21D. 对云雨组织的解释 22

* mchekroun@atmos.ucla.edu

VIII. 建模结果 22
A. 类似波状云的带状解 22B. 从平面波到复杂图样 23C. 拓扑缺陷 23 D. 缺陷核心附近的振幅与相位 24E. 胞元到卷的整合 25F. 从纯随机性中涌现相干图样 26

IX. 讨论 28**附录 A. 傅里叶耦合与双边带判据** 30附录 A.1. 残差与完整线性化耦合 30 附录 A.2. 中性穿越与不稳定性 31 附录 A.3. 单个行波载波的精确稳定性 31**附录 B. 旋转坐标系与特征指数** 32**附录 C. 振幅依赖的计时、等时线与缺陷** 32附录 C.1. 反应频率与受抑制的相位响应 32 附录 C.2. 扭转与等时线 32 附录 C.3. 核心与移动的振幅凹陷 33**附录 D. 随机场实验的数值演化与诊断** 33**参考文献** 34

I. 引言

暖云会组织成带状结构、胞状结构和簇，其几何形态会随云场演化而变化。被称为糖块状、砾石状、鱼鳞状云型和花状云型的信风云型，展现了这种多样性 [1]；它们的出现随环境条件而变化，并与云覆盖率的差异相关 [2]。要理解这些排列方式，不能只识别其形态，还需要解释有序结构如何形成，以及一种排列如何转变为另一种。云解析研究表明，降水、冷池相互作用以及波动介导的扰动能够重组云场 [3, 4]。降水的空间分布会影响开放胞状对流的发展 [5], , 而对层积云状态之间跃迁的分析则揭示了降水与卷入如何共同塑造不断演变的水量收支 [6]。这些结果引出了一个互补的理论问题：哪些集体机制足以在一种易于处理的演化定律中连接不同的云型?

这个问题跨越多个尺度。凝结和蒸发发生在液滴表面，而连贯的云结构则延伸至许多气块。液滴生长消耗水汽并释放潜热，从而改变驱动后续生长的过饱和度；输运和混合会重新分配这种热力学响应 [7]。因此，相邻的液滴群体通过一个它们也会共同改变的环境相互作用。若要将微物理活动与云的集体演变联系起来，简化描述就必须保留这种共同调整的某种迹象，若要将微物理活动与云的集体演变联系起来，就需要共享调整机制。

光学上微弱的暮光云处于霾与充分发展的云之间的过渡阶段，并会影响名义上的晴空的辐射特性 [8–10]。近期提出的一种云形成液滴—过饱和度理论提供了这样一种联系 [11]。该理论从液滴生长和过饱和度输运出发，得到相互耦合的群体场，其中过饱和度在空间上重新分布，而液滴群体变量则在局部作出响应。消去环境场后，其空间响应便转移到群体方程中：由此出现一个时空混合导数。所得方程为伪抛物型，而这个混合导数体现了动态惯性——改变液滴群体及其周围过饱和度包络所需克服的阻力。该理论可以描述从霾中涌现的云斑；本文关注的是，它揭示了一种变化率本身具有空间耦合的演化定律的物理起源 [11]。

这类混合导数在连续介质物理学中早已占有一席之地 [12–14]。裂隙与多孔块体之间的交换会使裂隙岩石中的流动产生内部调整 [15]；类似结构也出现在双温热传导 [16] 和黏弹性响应的本构描述 [17–19]中。本构耦合由此能够改变宏观演化的特性 [20], , 而辐射传输理论则提供了非局域环境响应的更多例子 [21, 22]。对于云而言，具体的耦合发生在液滴群体与输运中的过饱和度场之间。消去后会得到一种受屏蔽的空间响应：扰动会在一个特征调整长度范围内影响邻近区域 [11]。

为了描述活跃且可能产生降水的云场中的组织结构，空间调整必须与云水和雨水的演变相耦合。开放胞状结构 [3]中的降水诱发振荡，以及分档微物理大涡模拟（LES）对云质量与雨质量相空间中闭合的补给–耗竭循环的解析 [4] , 为将这种演变视为振荡过程提供了直接的物理依据。概念性的云–雨模型同样会通过延迟反馈产生振荡，霍普夫分岔则决定其起始过程 [23–25]。在接近起始点时，复振幅将两个振荡分量结合起来，三次 Stuart–Landau 定律描述振幅饱和以及振荡时序对振幅的依赖关系 [26–28]。这些性质表明，可以在振幅层面对云雨组织进行描述，并由屏蔽环境响应耦合相邻振荡。这种约化为振荡状态引入了云–雨振幅坐标，将液滴群体理论中的屏蔽环境响应带入新的变量中。

非空间Koren–Tziperman–Feingold（KTF）云—雨延迟模型提供了一个具体先例 [29]；另见[23]。其Hopf 约化为代表间歇性降雨和湍流效应的随机扰动提供了指导；通过剪切诱导的拉伸与折叠，这些扰动将周期循环转变为不规则振荡，其主导周期和谱结构与开放胞状结构的WRF模拟结果高度吻合 [28]。这使Stuart–Landau 定律具有云—

水特异性动机。振荡频率取决于云水和雨水变化的振幅。因此，改变这一振幅的扰动会改变系统经历其循环的速率，从而使后续极大值提前或延迟。这种频率对振幅的依赖称为扭转，并使循环的时间安排对振幅扰动十分敏感 [28, 30–33]。当前模型探讨了当相邻振荡通过屏蔽环境相互作用时，这种响应如何组织一个场。

未解析的云团活动提供了第二个要素。卷入与蒸发过程，或通过碰撞–聚并形成雨滴并随后将其移除的过程，会在短于云场描述所能解析的时间尺度内改变水含量 [7]。随机对流模型已经提供了多种保留未解析变率的方法。晶格多云模型描述离散云类型之间的跃迁及其不断演变的面积分数 [34–36]。条件马尔可夫链根据已解析的模拟或观测结果推断云状态跃迁，其中包括具有局部空间耦合的形式 [37, 38]。其他参数化方案则将涨落引入对流强迫和闭合关系，或描述向强对流的噪声驱动跃迁 [39–42]。这些方法确立了随机变率对于对流的重要性；同时也表明，事件所改变变量的选择，是模型物理含义的核心。

在这里，每次跃迁都表示一次未解析云团过程期间连续云水和雨水异常的累积变化，其中系统性增量由Hopf振荡律控制 [25, 28]，而侧向影响则通过经过筛选的环境核分布到相邻单元。通过以随机水路径偏离为特征明确规定泊松事件律，可以将空间耦合基于输运的起源与未解析微物理的统计闭合区分开来；未来的研究可直接利用大涡模拟（LES）诊断得到的卷入、降水和水收支演变结果对其进行校准 [6, 43]，并利用其涨落方差进行分析 [44]。取系综平均并对三阶涨落矩进行闭合后，伪抛物型金兹堡–朗道方程（PGLE）便成为描述云–雨变率的主导连续介质方程（第 III节）。不同于其平均场极限会将空间形态压缩为总体云量方程的晶格云模型 [45]，PGLE 在平均场层面保留了非局部空间耦合和动态惯性，同时明确了确定性闭合所省略的精确矩修正。

为了确定这种平均场动力学能够维持什么，以及它为何不同于经典扩散型振幅方程，我们先研究其色散、收支和稳定性结构，再转向数值实验。将 PGLE 与标准复Ginzburg–Landau方程及线性随机扩散云模型进行对比 [46, 47] 表明，动态惯性会逆转短波长运动学，使精细结构的弛豫减慢，而非通过扩散将其平滑（第 IV节）。我们建立开放系统液态水质量收支——说明仅发生转化的事件如何守恒液态水，而共振波三元组如何驱动有界的区域平均水振荡——并揭示一种度量耦合的哈密顿量和梯度分解，其中包括一个经 Benjamin–Bona–Mahony 正则化的非线性薛定谔扇区以及一个伪抛物 Allen–Cahn 扇区；其守恒的 $U(1)$诺特荷 $\mathcal{N}_\epsilon$将保守的相位剪切与全局振幅饱和区分开来（第 V 节）。精确的线性和弱非线性稳定性分析进一步揭示，动态惯性和依赖振幅的时序偏移如何通过非谐边带使单个行波和均匀振荡失稳（第 VI节），并得出一个由扭转比 $|\beta/\alpha| > \sqrt{5}/2$ 控制跨载波放大的闭合增益—失谐判据（第VII节）。

确定性 PGLE 的数值积分展示了这些机制如何统一看似迥异的云形态（第 VIII节）。在一维情形中，不稳定的行进波跃迁为调制态，其饱和谱组织成一个尖锐的组合音梳，与初始线性频率明显不同（第 VIC节）。在二维情形中，在增长与饱和系数固定时增强依赖于振幅的定时扭转，会将诺特荷重新分配到强烈的梯度丝状结构中，并通过缺陷迅速增殖，将连贯的波状云状带状结构——其中点缀着孤立的 ±1相位缺陷，类似于自然界中的带状结构断裂——转变为错综复杂的粗糙云状波网络；这为剪切—沉降机制之外提供了一种振荡性的波相互作用视角（第VIIIA–VIIID节） [49, 50]。

反之，在跨载波放大阈值以下，随着空间振幅方差消失，三次模态竞争会将胞状干涉图样整合为平行对流卷（第VIIIE节）。最引人注目的是，即便没有相位扭转或预设载波，微小的空间不相关异常也会组织成持续性胞状排斥尺度[51]——呈现出线性对照中不存在的持续负振幅相关性波瓣，并在相位奇点周围形成向外辐射的螺旋状云水臂，令人联想到海洋放射状云 [52], ，且无需像 Swift–Hohenberg 描述那样预设优选波数 [53] （第VIIIF节）。这些结果共同确立了确定性平均场动力学的组织能力，并为未来恢复经 LES 校准的气块涨落研究提供了定量基线（第IX节）。

II. 伪抛物型模型的物理基础

A. 从液滴生长到空间种群场

下文所采用的空间耦合源于相邻液滴群体共享的环境。液滴生长会消耗水汽并释放潜热；空气运动、混合和冷却则补充或重新分配驱动这种生长的过饱和度。在规定事件模型之前，我们先回顾这种环境响应如何进入种群场描述。令 $s = e/e_s(T) - 1$ 表示过饱和度，其中 e 为蒸气压，$e_s(T)$为温度 T下的饱和值。结合水汽和温度平衡可得输-

运方程 [7,第 5.2 节。7]

$$\partial_t s + \mathbf{v}\cdot\nabla s = \kappa_\chi \Delta s + A_1 w - A_2 \dot{q}_l - s\frac{1}{\bar{\rho}_a}\partial_{x_i}(\bar{\rho}_a v_i). \quad (1)$$

这里， s表示无量纲过饱和度，$\mathbf{v}$ 表示空气速度， w表示其垂直分量， $\bar{\rho}_a$ 表示参考空气密度。我们用$\mathbf{v}$ 和 $\bar{\rho}_a$ 来区分输运变量与下文引入的云场振幅。系数 κ_χ的单位为面积/时间，是过饱和度平衡中的有效分子扩散率，综合了水汽和热输运的影响。项 $A_1 w$ 表示绝热冷却导致的过饱和度生成，而 $A_2\dot{q}_l$ 表示凝结导致的过饱和度消耗，其中 q_l 为液态水混合比， $\dot{q}_l$ 为其相变倾向。最后一项表示密度加权膨胀或稀释的贡献，并对坐标指标 i [7, 54]求和。在弹性近似解析流约束下， $\nabla\cdot(\bar{\rho}_a\mathbf{v}) = 0$，最后一项为零；但在粗粒化平衡中，仍必须对未解析的环境交换进行建模。对于 q_l的质量比定义， $[A_1] = \mathrm{L}^{-1}$和 A_2 均为无量纲量，因此每一项的单位都是时间倒数。

过饱和度平衡通过以下关系与扩散性液滴生长相耦合：

$$\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t} = 2D\,[s - f(r^2)], \quad (2)$$

其中 r 表示液滴半径， D 表示凝结增长系数，单位为面积/时间，而 f（r^2）表示无量纲的科勒平衡过饱和度，用于计及曲率和溶质效应 [55–57]。 的符号决定液滴生长还是蒸发。方程（1）和（2）因此将局部微物理响应与输运环境相耦合。其粗粒化约化见参考文献 [11]。

局部粒子群平均定义了宏观场

$$\phi(\mathbf{x},t) \equiv \langle r^2\rangle_{\mathbf{x},t}, \qquad \chi(\mathbf{x},t) = \langle s\rangle_{\mathbf{x},t}. \quad (3)$$

这里，方括号表示在时间 t、$\mathbf{x}$ 附近的粗粒化空间邻域内的液滴群平均； χ 是相应的液滴采样过饱和度。这些粒子群场解析了整个区域内霾和云区之间的空间变化。在局部浴近似下，忽略了未解析过饱和度的优先采样，因此 χ 也表示经过空间滤波的环境场。未解析标量输运产生涡扩散率，而环境交换的波动则提供乘性强迫。在沿解析流运动的坐标中，所得系统为 [11]:

$$\begin{aligned}\partial_t\phi &= -\mu\phi + 2D[\chi - f(\phi)],\\ \partial_t\chi &= D_\chi\Delta\chi + \gamma - \lambda_\chi\chi\\ &\quad - \alpha_N\sqrt{\phi}[\chi - f(\phi)] + \sigma\chi\circ\eta(\mathbf{x},t).\end{aligned} \quad (4)$$

此处 ϕ 为局部液滴半径均方值， χ 为方程（3）中定义的平均过饱和度。源项 γ 包含解析上升气流贡献 $A_1 w$，其中 w 为粗粒化垂直速度；预设的环境过饱和度还可增加一个交换源项。系数 $\lambda_\chi > 0$ 表示平均混合率或环境交换率：该项$-\lambda_\chi\chi$ 使过饱和度向 γ所代表的参考环境弛豫。总之， γ 和 λ_χ 决定了与凝结相竞争的环境供给和弛豫。方程（4）中的噪声项按斯特拉托诺维奇意义理解，以符号$\circ$表示。因子 $\sigma\eta$（$\mathbf{x}$ t）表示环境交换率的涨落，其中 η为中心高斯噪声，在时间上为白噪声且在空间上相关。转换为伊藤形式后，会在浴方程 [11]中加入与$\frac{1}{2}\sigma^2\chi$ 成正比的漂移项；下文采用的有效弛豫率Γ_0^* 已包含此修正。

投影的（热力学）平衡曲线为

$$f(\phi) = a_K\phi^{-1/2} - b_K\phi^{-3/2} \quad (5)$$

其曲率和溶质系数为 a_K， $b_K > 0$ [7, 55–57]。该投影使液滴谱平均在均方半径处闭合。修正项取决于尺寸分布的宽度和高阶矩，而这些因素决定了平均非线性响应。

如 [11], 所示，系数 D 描述液滴表面的凝结和蒸发，而 $D_\chi = \kappa_\chi + K_\chi$则结合了分子输运与有效湍流扩散率。我们用 λ_χ 表示环境混合，以区别于下文引入的云雨振幅增长率。凝结汇的强度为 α_N，其中纳入了给定的液滴数浓度 N 以及对未解析的尺寸—过饱和度相关性的闭合。有效损失 $-\mu\phi$ 描述了停留时间和气团交换的影响。

这些参数的物理含义也确定了它们的单位。设长度和时间的量纲分别为 L 和 T，则 $[\phi] = \mathrm{L}^2$、 $[D] = [D_\chi] = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1}$、$[\mu] = [\lambda_\chi] = [\gamma] = \mathrm{T}^{-1}$，以及 $[\alpha_N] = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}^{-1}$。此外，$[a_K] = \mathrm{L}$，且 $[b_K] = \mathrm{L}^3$。若 η 表示时间白噪声，其无量纲空间协方差在零间距处归一化，则 $[\eta] = \mathrm{T}^{-1/2}$ ，且 $[\sigma] = \mathrm{T}^{-1/2}$；若空间噪声采用不同的归一化方式， σ 的单位也会相应改变。

方程（4）是一个退化反应–扩散系统：过饱和度发生扩散，而 ϕ没有直接的扩散项。尽管如此，空间相互作用仍贯穿整个粒群场。一个云团的变化会影响与邻近云团共享的过饱和环境，而该环境又会反馈作用于它们的液滴生长。

B. 动态惯性的涌现

为了仅通过液滴场来表达这种相互作用， [11]的云形成理论利用了系统的快慢结构：过饱和度会指数式地弛豫至一个吸引的慢流形，沿着该流形，液滴生长主导后续演化。因此，消除快变量时必须保留液滴自身所改变的环境响应。不断生长的液滴群体会消耗周围的过饱和度，并引发热力学调整晕。这种晕会将变化传递给相邻群体，而其有限的弛豫时间则会延迟环境对进一步生长的响应。

这正是拖曳过饱和包络这一概念的物理内涵，相关讨论见 [11]。它与极化子理论的联系源于同类反馈：粒子使周围介质极化，而介质的调整又会改变粒子的有效动力学 [58, 59]。 [11] 的云形成理论通过Martin–Siggia–Rose响应场形式主义中的Gurari–Feynman变分约化，将这一机制推广到方程（4）的各个场 [11, 60]。液滴群体因其诱导的过饱和晕而被重新着装。消除该晕会产生受屏蔽的空间相互作用，而晕的延迟调整则会涌现出一种动态惯性，类似于极化子的有效质量。浴的湍流涨落还会在约化描述中留下时间相关强迫；参见 [11]。

空间和时间响应的起源可以直接在确定性层面上显现出来。将方程（4）中的浴项归组可得

$$\partial_t \chi = D_\chi \Delta \chi - \Gamma(\phi)\chi + J(\phi), \tag{6}$$

其中 $\Gamma(\phi) = \lambda_\chi + \alpha_N \sqrt{\phi}$，且 $J(\phi) = \gamma + \alpha_N^- \sqrt{\phi} f(\phi)$。湍流交换涨落会改变云形成理论中 [11]的有效浴响应。记 $\Gamma^*(\phi)$ 为经过Stratonovich到Itô漂移修正后的有效弛豫率，并记 $\Gamma_0^* > 0$ 为其在代表性背景下的取值。星号用于区分这一修正后的速率与方程（$\Gamma(\phi)$ 中的裸6；如果没有交换噪声修饰，二者相同。在保留不断演化的源项的同时冻结修正后的速率，即可得到有效浴的确定性响应

$$\widetilde{\chi}(\mathbf{k}, \nu) = \frac{\widetilde{J(\phi)}(\mathbf{k}, \nu)}{\Gamma_0^* + D_\chi |\mathbf{k}|^2 - i\nu}, \tag{7}$$

其中波浪号表示时空傅里叶变换，$\mathbf{k}$ 是波数，而 ν 是角频率。分母同时展现了空间屏蔽和时间调节：微扰通过一个重新分配过饱和度并在有限时间内弛豫的环境发挥作用。

为写出相应的液滴场方程，将浴弛豫时间、屏蔽系数和屏蔽长度定义为

$$\tau_0^* = (\Gamma_0^*)^{-1}, \qquad \epsilon = D_\chi \tau_0^*, \qquad L_{\mathrm{scrn}} = \sqrt{\epsilon}. \tag{8}$$

将浴响应代入液滴方程，可将双场系统方程（4）化简为以下冻结系数阶次下的确定性方程：

$$\begin{aligned} \left(I - \epsilon\Delta + \tau_0^* \partial_t\right)\left[\partial_t \phi + \mu\phi + 2Df(\phi)\right] \\ = 2D\tau_0^* J(\phi). \end{aligned} \tag{9}$$

对于已解析的频率 $|\nu|\tau_0^* \ll 1$，领先阶低频近似保留空间响应，得到

$$(I - \epsilon\Delta)[\partial_t \phi + \mu\phi + 2Df(\phi)] \simeq 2D\tau_0^* J(\phi). \tag{10}$$

尽管显式的高频浴修正项已被舍弃，慢导数 $\partial_t \phi$ 仍保留在该算子内。因此，约化方程包含

$$\partial_t \phi - \epsilon \Delta \partial_t \phi. \tag{11}$$

这就是云描述中动态惯性的涌现。空间耦合最初完全由过饱和度输运承担，如今则作用于液滴场演化的速率。该群体再也无法作为一组彼此孤立的局部变量进行调整：其演化必须适应延伸至邻近气团的热力学响应。

这一结果揭示了伪抛物型算子的物理意义。系数 ϵ 的量纲为长度平方，它衡量环境调整对慢动力学产生影响的空间范围。对于变化的群体场， [11] 的云形成理论采用 $\epsilon(\phi) = D_\chi/\Gamma^*(\phi)$，并讨论了一种守恒扩展 $I - \nabla\cdot[\epsilon(\phi)\nabla]$。这种扩展属于一种闭合选择：相对于精确的瞬时算子 $I - \epsilon(\phi)\Delta$，它增加了一个梯度项。这里我们保留一个常数有效 ϵ，此时两种形式一致。由此得到的算子具有 Barenblatt–Zheltov–Kochina拟抛物结构，这种结构在裂隙岩流动中广为人知 [15]。混合导数也出现在双温热传导 [16] 和伪抛物型输运理论 [12–14]中。其含义令人联想到对重组的黏弹性阻力：有效变化率反映了伴随介质的调整 [17–19]。在云中，这种阻力源于热力学过程。不断演化的液滴群体使其环境偏离平衡，而空间延展的过饱和响应则进入支配其后续演化的定律。

对于云建模而言，这一优势十分显著：消去快速演化环境时，空间响应与热力学反馈得以同时保留。液滴生长的局部变化会产生集体空间影响，其有效调整速率取决于空间尺度。混合导数以紧凑的方式表征这种影响，同时保留解析场的一阶演化。方程（9）指出，当与浴弛豫时间的间距不再足够时，所需的额外时间修正。下文推导的 PGLE 保留了主要的屏蔽响应，并以云场变率的最简模型表达这种动态惯性。

C. 屏蔽响应的格林函数

双场系统（方程（4））约化为单场闭合形式（方程（9））后，也可用非局域表示来描述。在低频下，浴响应为

$$\begin{aligned} \chi &\simeq (\Gamma_0^* - D_\chi \Delta)^{-1} J(\phi) \\ &= \tau_0^* (I - \epsilon\Delta)^{-1} J(\phi). \end{aligned} \tag{12}$$

逆算子将局部源的影响分布到周围的过饱和度包络中。在水平面上，其归一化格林函数为

$$\begin{aligned} (I - \epsilon\Delta) G_\epsilon = \delta, \qquad \int_{\mathbb{R}^2} G_\epsilon(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = 1, \\ G_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\epsilon} K_0\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{\epsilon}}\right), \end{aligned} \tag{13}$$

其中， K_0 是零阶第二类修正贝塞尔函数。该核的单位为 L^{-2}。它在源点处具有可积对数奇异性，并以 L_{scrn} 为尺度呈指数衰减的尾部。在周期域上，我们使用其周期化形式。在这两种表示中，其傅里叶乘子为

$$\widehat{G}_\epsilon(\mathbf{k}) = \frac{1}{1+\epsilon|\mathbf{k}|^2}. \tag{14}$$

因此，格林函数和混合导数以积分形式和微分形式描述了同一空间响应。该推导为下文所用核函数的形式提供了依据。将这一响应用于云水和雨水变化，是进一步的闭合处理，其有效屏蔽长度取决于所选分辨率。因此，上文从输运方程 Eq. (1) 所作的推导提供了描述云滴团演变的算子结构。云雨振幅定律和事件统计则在解析水路径尺度上补全了模型。

作用于变化率的椭圆算子也会出现在对流动量动力学中，但其成因不同 [61, 62]。从无弹性方程中消去扰动压力可得 $\Delta_3\partial_t m = \Delta_h\mathcal{F} + \mathcal{M}$，其中 m 为垂直质量通量， Δ_3 和 Δ_h 分别为三维拉普拉斯算子和水平拉普拉斯算子，$\mathcal{F}$将浮力与垂直动量通量辐合结合起来，而 $\mathcal{M}$ 汇集了水平动量贡献 [61, 62]。对于一个水平波数 $k_h \neq 0$，这可写为

$$(I - k_h^{-2}\partial_z^2)\partial_t m_{k_h} = \mathcal{F}_{k_h} - k_h^{-2}\mathcal{M}_{k_h},$$

垂直坐标中的亥姆霍兹算子。其长度$1/k_h$ 由扰动的水平尺度决定，压力调整则通过质量连续性瞬时施加。在此，算子沿水平方向作用，其长度源自过饱和度输运与弛豫，并起因于液滴生长。水平尺度依赖性也有所不同：对于固定的强迫振幅和垂直廓线，更窄的扰动会使压力响应加速得更为显著，而公式（14）中的乘子则会减缓更细的结构。尽管如此，两项结果都表明，当云元所处环境发生空间调整时，局地强迫未必等同于局地演化。

D. 云雨可观测量及其振荡反馈

而粒子群场 ϕ 和 χ在方程（4）中描述了扩散性液滴生长、活化以及云斑从霾中的出现，活化云层中的有组织对流则涉及云增厚、降雨生成和降水后恢复的循环过程。对浅对流场的观测和分档微物理大涡模拟记录了云质量与雨质量之间这些相位滞后的充放循环 [3, 4], , 而概念性的云雨延迟模型表明，延迟耗减与补充通过 Hopf分岔组织了振荡的开始 [23–25, 28]。为表示这一活化且可能

处于降水状态的系统，令 C（$\mathbf{x}$ t）和 P（$\mathbf{x}$ t）分别表示垂直积分的云水路径和雨水路径（单位为单位面积质量，$\mathrm{kg\,m^{-2}}$），并围绕正的参考背景（C_0， P_0）定义无量纲的带符号偏差：

$$\rho = \frac{C - C_0}{C_*}, \qquad q = \frac{P - P_0}{P_*}, \qquad u = \rho + iq, \tag{15}$$

其中 C_*、 $P_* > 0$ 的单位分别对应相应水路径的单位。在这种表示中， $u = 0$ 对应于被激活的背景状态（C_0、 P_0），而不是晴空；关于（ρ、 q）与液滴谱矩、标准形坐标及整层水收支之间关系的物理解释，将在第III C 节和第VA节中展开。

在超临界霍普夫起振附近，一对共轭复模态能够捕捉主导的云–雨循环，而对延迟云–雨模型进行正规形约化则为三次 Stuart–Landau 趋势提供了依据 [25, 26, 28]

$$F(u) = (\lambda + i\omega)u - \kappa|u|^2 u, \qquad \kappa = \alpha + i\beta, \quad \alpha > 0, \tag{16}$$

其中，线性增长率 λ、线性角频率 ω、非线性饱和系数 α 以及依赖振幅的频率偏移（扭转）系数 β 对于无量纲 u 均具有时间倒数的单位。筛选后的环境核 G_ϵ （式13）与振荡趋势项 F（u）（式16）共同提供空间响应和局地反馈，我们现将其嵌入随机气团事件描述中。

III. 气团事件、平均场闭合与云场解释

在模型的中尺度分辨率下，一个云元素会持续经历亚网格突发过程，包括凝结、卷入驱动的蒸发、碰撞–聚并和降水沉降。每个气团事件代表了这样一个过程在一段时间间隔内的累积结果：该时间间隔足够长，能够涵盖微物理突发过程及其快速热力学调节，但又比已解析的云–雨振荡周期短。在这一时间尺度间距下，将该过程凝缩为一个离散跃变（ΔC， ΔP），既保留水路径变化发生的时间和地点、其波动强度以及云水与雨水的协变关系，又保留了平滑确定性趋势中所遗漏的间歇性降水和湍流强迫 [28, 63, 64]。此外，在（ΔC， ΔP）中保留两个分量，不仅能够捕捉守恒质量的云水向雨水转化（$\Delta C + \Delta P = 0$ 通过自动转化和聚积），还能够捕捉与水汽的开放系统交换（$\Delta C \gtrless 0$）以及通过蒸发或地表沉降移除雨水（$\Delta P < 0$） [7, 65]。

由于每个事件也会扰动与相邻云元共享的过饱和度环境，因此我们使用共同的屏蔽核，将其影响横向分布 G_ϵ于第 II节的屏蔽长度 $L_{\mathrm{scrn}} = \sqrt{\epsilon}$范围内。采用这一共同核，能够闭合共享环境的热力学响应，而非暗示云水和雨滴具有相同的物理输运，其中 L_{scrn} 用于设定

局部云元事件周围环境调整的横向作用范围。事件发生统计、联合水路径增量以及屏蔽空间响应共同构成了一个直接接口，可用于纳入未解析云物理；在经过校准的模型中，这些因素可根据大涡模拟（LES）诊断得到的卷入、卷出、降水和水收支演变信息推断 [5, 6, 43]。我们将这一物理校准留待未来研究，并在下文指定一种易于处理的泊松事件律，以便进行精确的集合平均计算，同时分离确定性 PGLE 所忽略的波动。

A. 未解析云物理的空间跳跃过程

为将这些云滴事件与演化中的云场联系起来，令 $U_t(\mathbf{x})$ 表示方程（15）中无量纲云–雨异常场的一次随机实现，

$$U_t(\mathbf{x}) = \frac{C_t(\mathbf{x}) - C_0}{C_*} + i\frac{P_t(\mathbf{x}) - P_0}{P_*}, \tag{17}$$

或者，在保留从母模型进行坐标变换的情况下，表示其对应的复正规形模态。在相同的大尺度环境条件下，不同的混合、凝结和降水事件的时空序列会产生不同的实现历史 $U_t(\mathbf{x})$，其集合平均 $u(\mathbf{x}\ t) = \mathbb{E}[U_t(\mathbf{x})]$ 构成第IIIB节中确定性闭合的基础。

大部分未解析云物理通过支配事件发生及其结果的概率律进入模型，该概率律在下文由带标记计数测度 N 表示。该规律规定事件发生的频率、发生位置以及其水路径变化的分布；对于每个事件所指定的状态依赖增量和空间响应，则进一步完善了其物理解释。例如，可以利用大涡模拟（LES）估计经过物理校准的概率律。LES 中的云追踪已被用于确定卷入率和逸出率的分布 [43]，；而关于层积云的 LES 研究则量化了降水和卷入在水收支演变中的作用，以及降雨空间分布的影响 [5, 6]。在选定的云滴面积和平均时间间隔下，这些模拟可用于识别事件，在计及已解析输运后估计其发生率及联合（ΔC、ΔP）分布，并确定这些统计量和事件影响范围如何依赖于局地云状态和环境状态。这还将检验将独立事件计数作为充分近似是否合理。

我们将这一物理标定留待后续研究，正如第 IX 节所述；此处则规定一个简单而完备的事件定律，以便进行显式的平均值计算。我们的主要关注点是其平均场近似，即确定性 PGLE；借助这一近似，我们分析云–雨变率如何在这一层次的描述中得以维持和重组。

为以最简单的形式规定这一随机模型，同时确保能够精确计算均值，我们将云层$\mathbb{T}^2$（面积为 $|\mathbb{T}^2|$）理想化为包含离散的气团事件，例如卷入、蒸发、碰撞–聚并等过程的突发，或降雨沉降——每个事件都由一个参考水平气块面积 a_p（单位 L^2）和每个气块单元的平均发生频率 r_p（单位 T^{-1}）来表征。在这一阶近似下，我们假设单位面积事件率r_p/a_p在空间上均匀分布，并且互不相交的时空区域内的事件计数相互独立。这两项假设定义了一个关于事件到达时间和位置的时空泊松过程：任意水平子区域 $E \subset \mathbb{T}^2$ 的平均事件数为每单位时间 $(r_p|E|/a_p)$ 次；在无穷小时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内，单个事件发生在 E 内的概率为 $(r_p|E|/a_p)\,\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t)$。云雨状态 [66, 67]随时间演变所产生的影响并不体现在到达率上，而是体现在每个事件造成的水路径变化中。

即使两个事件在事件发生前都从完全相同的已解析云雨状态 $U_{t-}(\mathbf{y})$ 开始，它们通常也会产生不同的净水路径变化，这是因为卷入的环境湿度、事件持续时间或液滴粒径分布存在未解析的差异。为表示这种次网格散布，我们为每个事件附加一个无量纲复随机变量 $\zeta = \zeta_r + i\zeta_i$——在跳跃过程理论中称为 标记 [66],，在此则作为一对随机辅助变量，用于表征未解析的微物理和热力学波动，例如可变的水汽交换、卷入湿度或转化效率；这些因素会在事件期间增加或移除云水 (ΔC) 和雨水 (ΔP)。这些辅助变量取自一个联合概率分布 Π，使得 $\Pi(B_\zeta)$ 表示 ζ 落入复平面的某个子集 $B_\zeta\ \mathbb{C}$ 的概率。

允许 ζ 的实部与虚部相关，可以捕捉微物理耦合，例如雨滴形成增强并伴随云水损失的情况（$\zeta_r < 0$, $\zeta_i > 0$）。我们假设标记均值为零（$\mathbb{E}\zeta = 0$），不同事件之间相互独立，且独立于事件发生前的场；其三阶以内矩均有限，并具有一个总体无量纲振幅因子 b。中心化能清晰地区分未解析散布与系统性趋势，而液态水守恒等物理约束（例如仅发生转化的事件期间的约束）则适用于总增量（第VA节）。

与其分别按每个事件的到达时间、中心位置和随机结果为其编索引，不如用带标记计数测度 $N(\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}\mathbf{y},\ \mathrm{d}\zeta)$简洁地记录整个事件序列：在某个时间区间、水平区域以及一组结果上对 N积分，只需统计该区域内发生了多少个事件，以及这些事件对应的水路径变化量。在上述泊松假设和独立性假设下，无穷小的时空—结果元素中事件的期望数量由强度给出

$$\frac{r_p}{a_p}\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}\mathbf{y}\,\Pi(\mathrm{d}\zeta), \tag{18}$$

其将单位面积事件率乘以持续时间 $\mathrm{d}t$、斑块面积 $\mathrm{d}\mathbf{y}$ 以及结果概率 $\Pi(\mathrm{d}\zeta)$ [66, 68]。

每个事件还会带来一个系统性的、依赖状态的变化 $F_B(U_{t-}(\mathbf{y}))/r_p$，反映 Hopf 起始附近局部的云–雨反馈。这里 F_B 是一个平滑且有界的延拓

三次 Stuart–Landau 趋势 F，对应式（16），在正规形范围 F 内与 $|U| \le B$ 相吻合，同时避免罕见的大幅偏离造成非物理的爆炸（当超出 $|U| = B$ 的偏离对均值的贡献可忽略时，PGLE 闭合成立）。将 F_B 除以频率r_p，可确保对以速率 r_p 到达的事件进行平均后，得到系统性趋势 F_B，无论事件发生得多么间歇。将这一系统性增量与随机偏离 $b\zeta$ 结合，并通过周期化格林函数将由此产生的扰动横向分布至周围的过饱和度包络 G_ϵ，根据式（13）可知，以$\mathbf{y}$ 为中心的单个事件会使整个场发生如下偏移:

$$\delta U_t(\mathbf{x}) = a_p G_\epsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \left[\frac{F_B(U_{t-}(\mathbf{y}))}{r_p} + b\zeta \right]. \tag{19}$$

由于 $\int_{\mathbb{T}^2} G_\epsilon \, \mathrm{d}\mathbf{x} = 1$，无量纲空间权重$a_p G_\epsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ 会将局部于点$\mathbf{y}$ 的气团源扩散至屏蔽尺度 $L_{\mathrm{scrn}} = \sqrt{\epsilon}$，同时保持空间积分水路径变化$^-a_p[F_B(U_{t-}(\mathbf{y}))/r_p + b\zeta]$不变。

将 $\mathrm{d}t$ 期间到达的所有事件所产生的脉冲 $\delta U_t(\mathbf{x})$ 累积起来，跨越 $\mathbb{T}^2$，即可得到随机跳跃演化方程

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U_t(\mathbf{x}) = & \int_{\mathbb{T}^2\times\mathbb{C}} a_p G_\epsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ & \times \left[\frac{F_B(U_{t-}(\mathbf{y}))}{r_p} + b\zeta \right] N(\mathrm{d}t, \mathrm{d}\mathbf{y}, \mathrm{d}\zeta), \end{aligned} \tag{20}$$

其中，对 $N(\mathrm{d}t, \mathrm{d}\mathbf{y}, \mathrm{d}\zeta)$ 积分只是对离散事件跳跃求和的简写，见式（19），这些跳跃随时间和空间发生 [66, 67]。式（20）的一个关键物理特征是，将系统性增量按 $1/r_p$ 缩放后，当事件频率变化时，固定状态下的条件平均趋势保持不变；而气团参数 (r_p, a_p, b, Π)则决定了该趋势以多大的间歇性实现：发生频率更低、面积更大或变化性更强的事件会注入更强的波动，这些波动可能反馈至非线性平均场。因此，在取系综平均之前引入跳跃过程，既明确了平均场 PGLE 的物理起源，也揭示了确定性闭合所忽略的波动项。我们将在第 IIIB 节推导这些波动项，并在第 IX节再次讨论。

B. 精确均值方程与非线性闭合

为提取给定初始状态和大尺度环境下随机事件历史所共有的系统演化，我们通过在固定的 $(\mathbf{x}\ t)$ 下，对事件时间、位置和标记进行平均，定义系综平均场 $u(\mathbf{x}\ t) = \mathbb{E}[U_t(\mathbf{x})]$；这是一种跨实现的系综平均，不同于在式 (3) 中定义 ϕ和 χ 的群体内局地液滴平均。利用泊松积分的补偿子恒等式 [66, 67]对式 (20) 取期望，会将计数测度 $N(\mathrm{d}t, \mathrm{d}\mathbf{y}, \mathrm{d}\zeta)$ 替换为式 (18) 中的强度；随后，式 (18) 和式 (19) 中的因子 r_p/a_p 和 a_p/r_p 相互抵消，中心化标记 $(\mathbb{E}\zeta = 0)$ 对直接漂移的贡献为零，而空间积分化简为精确的一阶矩卷积

$$\partial_t u = G_\epsilon * \mathbb{E}[F_B(U)], \tag{21}$$

其在有限域上定义良好 $\mathbb{T}^2$ 对于有界 F_B且具有有限矩的初始数据。将三次 Stuart–Landau 定律 $F(U) = (\lambda + i\omega)U - \kappa|U|^2U$与式（16）中的高振幅截断通过余项分离开来

$$\mathcal{R}_B = \mathbb{E}[F_B(U) - F(U)], \tag{22}$$

即可将式（21）中的期望趋势展开为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F_B(U)] &= (\lambda + i\omega)\mathbb{E}[U] - \kappa\mathbb{E}[|U|^2U] + \mathcal{R}_B \\ &= (\lambda + i\omega)u - \kappa\mathbb{E}[|U|^2U] + \mathcal{R}_B. \end{aligned} \tag{23}$$

根据期望的线性性，增长项和振荡项从粒子增量原样传递到均值方程中，使闭合问题完全局限于三次矩。对式（21）应用逆亥姆霍兹算子 $I - \epsilon\Delta$，并利用式（$(I-\epsilon\Delta)G_\epsilon = \delta$（13），即可消去空间卷积，并得到精确的均值平衡

$$(I - \epsilon\Delta)\partial_t u = (\lambda + i\omega)u - \kappa\mathbb{E}[|U|^2U] + \mathcal{R}_B. \tag{24}$$

伪抛物算子 $(I - \epsilon\Delta)\partial_t$ 因此在系综平均后仍然严格成立，无需近似：只要事件趋势在整体上是线性的，$F_B(U) = F(U) = (\lambda + i\omega)U$，三次项和$\mathcal{R}_B$都会消失，一阶矩便精确闭合为线性 PGLE,

$$(I - \epsilon\Delta)\partial_t u = (\lambda + i\omega)u. \tag{25}$$

对于非线性振荡定律，三次响应的平均值与平均场的三次响应之差，由 $v = U - u$ $(\mathbb{E}[v] = 0)$ 的涨落矩给出。将$U = u + v$ 展开到三次项中可得

$$\mathbb{E}[|U|^2U] = |u|^2u + 2u\mathbb{E}[|v|^2] + \overline{u}\mathbb{E}[v^2] + \mathbb{E}[|v|^2v], \tag{26}$$

这表明，尽管中心化标记在线性漂移项中消失，斑块事件涨落仍会通过局部方差 $\mathbb{E}[|v|^2]$、相位敏感协方差 $\mathbb{E}[v^2]$ 和三阶偏度 $\mathbb{E}[|v|^2v]$ 反馈至均值演化。在这些涨落矩以及截断余项 $\mathcal{R}_B$ 相对于相干振幅$|u|^2$较小时，我们在首阶近似下通过以下方式闭合该层级结构

$$\mathbb{E}[|U|^2U] \simeq |u|^2u, \tag{27}$$

这将式（24）化为确定性伪抛物金兹堡–朗道方程（PGLE），

$$\partial_t u = (\lambda + i\omega)u - \kappa|u|^2u + \epsilon\Delta\partial_t u, \tag{28}$$

或者，在 $\mathbb{T}^2$上的等价非局部卷积形式为

$$\partial_t u = G_\epsilon * F(u). \tag{29}$$

这一推导赋予PGLE明确的微物理和统计解释：当间歇性事件中的

凝结、混合、转化和沉降由屏蔽的气团跳跃表示，且方程（26）中的涨落相关性仍从属于相干振荡时，它控制着领先阶系综平均云–雨异常场。至关重要的是，这种随机表述并非仅仅为方程（28）提供依据后便消失；它明确指出了确定性方程所遗漏的精确矩修正。关于气团事件率 r_p、元素面积 a_p和标记方差 $b^2\mathbb{E}|\zeta|^2$ 的定量条件——这些条件可使涨落方差 $\mathbb{E}[|v|^2]$保持较小；同时，通过有限包裹覆盖范围对短波长方差进行正则化——将在配套研究 [44]中推导。第（26）式对开放系统液态水收支以及未来经LES校准的随机闭合的影响，将在第VA 和IX节中进行考察。

将这一连续跳跃闭合与随机格点云模型并置 [34–36, 45] 凸显了 PGLE 为何特别适合解析云场形态。在参考文献 [45], 的格点框架中，离散网格点以由最近邻占据率和整体湿度决定的跃迁率，在晴空与多云状态之间切换；而取确定性平均场极限后，空间格点便化约为一个描述区域平均云覆盖率的常微分方程。虽然这一标量覆盖率方程能够刻画高、低覆盖率状态之间的双稳态和滞后跃迁，却会将空间结构平均掉，因此若不回到随机格点实现，就无法描述云图样本身的几何形态。相比之下，在本文框架中，跳跃作用于连续的复云雨振幅，并通过热力学屏蔽核在空间上实现非局域耦合G_{ϵ}。因此，取平均场极限仍能保留空间耦合，并得到一个偏微分方程；其动态惯性（第IV节）、全局诺特荷约束（第VC节）与边带不稳定性（第VI 和VII节）的相互作用，会内禀地生成并重组二维云形态——从连贯的波状云带状结构演变为富含缺陷的粗糙云式波网络（第VIIIA–VIIID节），将胞状干涉图样整合为平行的对流卷（第VIIIE节），并由无序的随机异常构建出类似开胞云的形态和放射状云结构（第VIIIF节）。

C. PGLE在物理上描述的内容

在气团事件假设和第 IIIB 节的三阶矩闭合下，PGLE控制系综平均云雨异常场 $u = \rho + iq$。在式（15）的直接水异常表示中，其实部和虚部满足耦合系统

$$\begin{aligned}(I-\epsilon\Delta)\partial_t\rho &= (\lambda-\alpha|u|^2)\rho-(\omega-\beta|u|^2)q,\\ (I-\epsilon\Delta)\partial_t q &= (\omega-\beta|u|^2)\rho+(\lambda-\alpha|u|^2)q,\end{aligned} \tag{30}$$

其中每一项的单位都是时间倒数（$[\epsilon]=\mathsf{L}^2$ 且 u无量纲）。对于空间均匀状态 $u=ae^{i\vartheta}$，方程（30）简化为 $\dot a=(\lambda-\alpha a^2)\,a$ 和 $\dot\vartheta=\omega-\beta a^2$；而对于非均匀场，傅里叶关系 $(1+\epsilon|\mathbf{k}|^2)\,\partial_t\widehat{u}_{\mathbf{k}}=F(u)_{\mathbf{k}}$通过减缓更细空间尺度的调整来体现动态惯性空间尺度。约化系数（λ、ω、α、β）概括了凝结、碰撞–聚并、蒸发和沉降在一个振荡周期内的净反馈，而非孤立的微物理速率常数。特别是，三次阻尼 $-\alpha|u|^2u$ 充当振幅依赖的恢复率 $\alpha|u|^2$，将 $C-C_0$ 和 $P-P_0$ 都拉回背景状态，因此会随异常的符号而改变；而非对角因子 $\omega-\beta|u|^2$ 则耦合两个水类别的变化时序。如果 u 表示由母体云–雨模型导出的正规形坐标，那么物理异常可通过相应的坐标映射在局部恢复为 $(\rho,\ q)^{\mathsf T}=\mathsf{P}(\mathrm{Re}\,u,\ \mathrm{Im}\,u)^{\mathsf T}+O(|u|^2)$，其中 P 是非奇异实矩阵；在方程（15）的直接表示中，该矩阵退化为单位矩阵。

这种水路径闭合通过从凝结激活转向降水振荡状态，补充了第 II 节的液滴种群理论。在式（4）中，预报变量 $\phi=\langle r^2\rangle_{\mathbf{x},\ t}$ 直接遵循式（2）中的扩散生长定律，并确定投影液滴表面积密度，

$$A_{\mathrm{drop}}(\mathbf{x},t)=\pi N\phi(\mathbf{x},t), \tag{31}$$

该密度控制光学消光和液滴数浓度 N [7]的光学厚度。然而，将 ϕ 转换为液态水质量浓度需要三阶半径矩，

$$\begin{aligned}\mathrm{LWC}(\mathbf{x},t)&=\frac{4\pi}{3}\rho_w N\langle r^3\rangle_{\mathbf{x},t}=\frac{4\pi}{3}\rho_w N r_e(\mathbf{x},t)\phi(\mathbf{x},t),\\ r_e(\mathbf{x},t)&=\frac{\langle r^3\rangle_{\mathbf{x},t}}{\langle r^2\rangle_{\mathbf{x},t}},\end{aligned} \tag{32}$$

其中 ρ_w 为液态水密度，r_e 为有效半径（对于单分散谱，$r_e=\sqrt{\phi}$才成立）。由于仅根据 ϕ 预测水质量和降水，需要对跨越碰撞–聚并阈值的演化液滴尺寸分布 r_e（$\mathbf{x}$ t）及垂直柱结构进行闭合，PGLE因此在水路径尺度上采用屏蔽环境算子 $(I-\epsilon\Delta)\,\partial_t$ 作为闭合，并将其直接与Stuart–Landau云–雨振荡定律耦合。

因此，模型变量 ρ 和 q 不得与非负云水和雨水路径（或液态水含量）总量本身混淆，但它们对于解释云场组织仍具有直接意义。它们并非绝对水量，而是相对于激活云背景 $(C_0,\ P_0)$ 的无量纲、有符号振荡偏离——其中，负值表示相对于 $(C_0,\ P_0)$ 在非负物理有效范围内的局地云变薄或降雨耗减$C=C_0+C_*\rho\ge 0$ 和 $P=P_0+P_*q\ge 0$（其柱质量收支在第 VA节中进行分析）。由于在液滴浓度固定时，光学厚度和云反射率随云水路径单调变化，$\rho=\mathrm{Re}\,u$ 的空间分布图能够捕捉较厚云峰（$\rho>0$）与较薄或消散槽（$\rho<0$）在带状结构、滚轴和胞状结构壁之间交替出现的可见形态，而 $q=\mathrm{Im}\,u$则跟踪维持该循环的相位滞后的降水异常。同时，模 $|u|=\sqrt{\rho^2+q^2}$

绘制强烈云—雨循环的空间包络图——区分活跃振荡的胞状结构或波列与平静的背景区域，以及缺陷核心，其中 $|u| \to 0$——而相位 $\arg u$ 则衡量相邻云元素之间的凝结–降水–恢复循环是多么同步或受到扰动。

IV. 色散与非线性效应

A. 色散关系、相速度和群速度

在分析非线性相互作用如何重组云场之前，我们先刻画屏蔽算子$(I-\epsilon\Delta)\partial_t$ 如何塑造基本波扰动的传播与增长。在 PGLE 的线性化形式中，方程（25），

$$(I-\epsilon\Delta)\partial_t u = (\lambda + i\omega)u, \tag{33}$$

具有波矢$\mathbf{k}$、波数 $k = |\mathbf{k}|$和复角频率 Ω 的平面波扰动 $u(\mathbf{x}\ t) = u_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\Omega t)}$ 满足 $-i\Omega(1+\epsilon k^2) = \lambda + i\omega$，从而得到复色散关系

$$\Omega(\mathbf{k}) = -\frac{\omega}{1+\epsilon k^2} + i\frac{\lambda}{1+\epsilon k^2}. \tag{34}$$

虚部 $\mathrm{Im}\Omega(\mathbf{k}) = \lambda/(1+\epsilon k^2)$ 决定模态增长或衰减，而实部

$$\mathrm{Re}\,\Omega(\mathbf{k}) = -\frac{\omega}{1+\epsilon k^2}, \tag{35}$$

决定线性波的振荡频率。沿波矢方向，各个波峰和波谷以相速度传播

$$v_p(k) = \frac{\mathrm{Re}\,\Omega}{k} = -\frac{\omega}{k(1+\epsilon k^2)}, \tag{36}$$

而以波数k 为中心的调制波包以群速度传播

$$v_g(k) = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{Re}\,\Omega)}{\mathrm{d}k} = \frac{2\omega\epsilon k}{(1+\epsilon k^2)^2}. \tag{37}$$

方程（34）–（37）明确揭示了动力惯性的运动学作用。在无屏蔽极限 $\epsilon \to 0$下，所有空间尺度都以相同的局部频率 ω振荡，群速度消失，波包不会发生色散。当环境屏蔽处于作用状态时（$\epsilon > 0$），因子 $Q_{\mathbf{k}} = 1+\epsilon k^2$ 会减缓较短波长下的时间增长率和振荡频率。因此，群速度在长波极限 $k \to 0$和短波极限 $k\sqrt{\epsilon} \gg 1$下都会消失，并在由屏蔽长度 $L_{\mathrm{scrn}} = \sqrt{\epsilon}$所确定的中间尺度$k\sqrt{\epsilon} = 1/\sqrt{3}$ 处达到最大值。大气波动扰动（例如对流惯性重力波）众所周知能够将积云场组织成连贯的带状结构和云街 [69–72]。在此，即使不存在外部重力波强迫，也会产生色散，因为共享过饱和晕会跨越 L_{scrn}这一尺度耦合相邻气块的相位时序。这种尺度依赖的时序如何与气块强迫相互作用，从而塑造空间振幅谱，将在第IVC节中考察；而其与非线性振幅饱和的耦合将在下文展开。

B. 非线性频移、扭转与相位滞后

当在式（28）中恢复三次云—雨反馈 $\kappa = \alpha + i\beta$（$\alpha > 0$）时，振荡频率便与偏移振幅耦合。为分离这一机制，我们寻求非线性 PGLE 的空间单色解，其形式为 $u(\mathbf{x}\ t) = A(t)\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\Omega_0(\mathbf{k})\ t)}$，其中 $A(t) = R(t)\, e^{i\phi(t)}$，而 $\Omega_0(\mathbf{k}) = \omega/(1+\epsilon|\mathbf{k}|^2)$ 表示式（35）中的线性基频大小（以下非线性分析采用的 $\Omega + i$ 相位约定）。将此试探解代入式（28），并分离实部和虚部，可得耦合的振幅—相位系统

$$\begin{aligned}(1+\epsilon|\mathbf{k}|^2)\dot{R} &= \lambda R - \alpha R^3,\\ (1+\epsilon|\mathbf{k}|^2)(\dot{\phi} + \Omega_0(\mathbf{k})) &= \omega - \beta R^2.\end{aligned} \tag{38}$$

由于 $(1+\epsilon|\mathbf{k}|^2)\ \Omega_0(\mathbf{k}) = \omega$，线性频率在相位方程中抵消，仅留下纯非线性相位漂移

$$\dot{\phi}(t) = -\frac{\beta R(t)^2}{1+\epsilon|\mathbf{k}|^2}. \tag{39}$$

对于 $\lambda > 0$，对 $R(t)$的伯努利方程进行积分，并将结果代入方程（39，即可得到精确的瞬态单色波

$$u(\mathbf{x},t) = R(t)\exp\left[i\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \frac{\omega}{1+\epsilon|\mathbf{k}|^2}t + \phi(t)\right)\right], \tag{40}$$

其演化的模和非线性相移分别为

$$\begin{aligned}R(t) &= \sqrt{\frac{\lambda/\alpha}{1+\left(\lambda/(\alpha R_0^2)-1\right)e^{-2\lambda t/(1+\epsilon|\mathbf{k}|^2)}}},\\ \phi(t) &= \phi_0 - \frac{\beta}{2\alpha}\ln\left|e^{2\lambda t/(1+\epsilon|\mathbf{k}|^2)} + \frac{\lambda}{\alpha R_0^2} - 1\right|,\end{aligned} \tag{41}$$

其中，$A(0) = R_0 e^{i\phi(0)}$ 给出了初始振幅与相位，常数 ϕ_0 与初始数据的关系为

$$\phi_0 = \phi(0) + \frac{\beta}{2\alpha}\ln\left|\frac{\lambda}{\alpha R_0^2}\right| = \phi(0) - \frac{\beta}{\alpha}\ln\left(\frac{R_0}{R_*}\right), \tag{42}$$

其中$R_* = \sqrt{\lambda/\alpha}$ 表示饱和极限环半径。

方程（42）可以从几何角度直接理解为云雨振子的扭转参数 $\eta = \beta/\alpha$ 以及附录C中构建的云雨振子的等时线结构。2 [27, 28, 30]对于均匀振荡（$\mathbf{k} = 0$），渐近相位恒定的曲线——等时线——是由不变相位坐标定义的对数螺线

$\Theta = \vartheta - (\beta/\alpha)\ln(R/R_*)$ 在方程（C2）中。方程（42）表明，同一条对数螺线支配着每个屏蔽空间模态 k：当波振幅从 R_0 向 R_* 弛豫，弛豫速率为屏蔽速率 $2\lambda/(1+\epsilon|\mathbf{k}|^2)$ 时，比值 β/α 会将径向偏移 R_0/R_* 转化为永久的渐近相位偏移 $\phi_0 - \phi(0) = -(\beta/\alpha)\ln(R_0/R_*)$。在长时间状态 $t \to \infty$下，将方程（41）中的 $\phi(t)$ 展开可得

$$\phi(t) \approx \phi_0 - \frac{\beta\lambda}{\alpha(1+\epsilon|\mathbf{k}|^2)}t - \frac{\beta}{2\alpha}\left(\frac{\lambda}{\alpha R_0^2} - 1\right)e^{-2\lambda t/(1+\epsilon|\mathbf{k}|^2)},$$

使得方程（40）收敛至饱和平面波解族

$$u(\mathbf{x},t) = R_* \exp\big(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \Omega_{\text{eff}}(\mathbf{k})t + \phi_0)\big), \tag{43}$$

其中 $R_* = \sqrt{\lambda/\operatorname{Re}\kappa}$, $\phi_0 \in [0, 2\pi)$ ，以及有效的非线性频率

$$\Omega_{\text{eff}}(\mathbf{k}) = \frac{\omega - \beta\lambda/\alpha}{1+\epsilon|\mathbf{k}|^2}. \tag{44}$$

方程（44）中的渐近频率结合了线性振荡趋势 ω 与扭转引起的偏移 $-\beta R_*^2 = -(\beta/\alpha)\lambda$，二者均受到屏蔽因子 $1+\epsilon|\mathbf{k}|^2$的衰减。

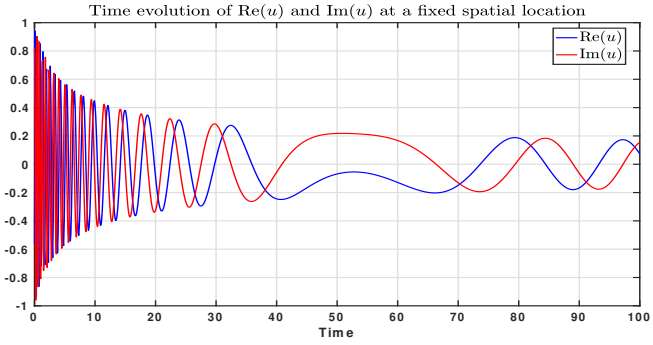

图 1：**固定空间位置处频率和相位的非线性偏移**。归一化云水异常的时间序列 $\rho = \operatorname{Re} u$（蓝色）和雨水异常 $q = \operatorname{Im} u$（红色），由方程（40）在固定位置处计算得到，其中 $\lambda = 10^{-2}$、$\omega = 5$、$\alpha = 1$、$\beta = 100$、$\epsilon = 10^{-2}$、$R_0 = 1$、$\phi_0 = 0$ = 13 −15 ，以及k （、）。随着振幅向饱和状态调整，扭转项 $-\beta R$（t）² 持续改变方程（45）中的瞬时频率，使振荡周期以及云水与雨水峰值之间的时间滞后发生扭曲。

在瞬态过程中，这种振幅–频率耦合直接调制云水和雨滴异常之间的时间关系。将式 (40) 的总相位写为Ψ(x t) = k · x + Ω₀(k)t + φ(t)，可观测量 ρ =Re u = R(t) cos Ψ 和 q =Im u = R(t) sin Ψ 仍保持相位正交（ΔΨ = π/2），但其瞬时角频率会随时间演化，满足

$$\partial_t\Psi(\mathbf{x},t) = \Omega_0(\mathbf{k}) + \dot{\phi}(t) = \frac{\omega - \beta R(t)^2}{1+\epsilon|\mathbf{k}|^2}. \tag{45}$$

在简化的云–雨滴描述中，方程（45）编码了由延迟微物理反馈所继承的状态依赖周期；云水和雨水的变化幅度越大就越会改变消耗和补充时间尺度 [25, 28]。在 $\partial_t\Psi$保持确定符号的任意时间区间内，ρ 和 q 的连续正交交叉之间若相隔时间滞后 δt，则满足 $\int_t^{t+\delta t}\partial_s\Psi(\mathbf{x}\ s)\,\mathrm{d}s = \pi/2$；当振幅缓慢变化时，可据此得到局部滞后估计 $\delta t \approx \pi/(2|\partial_t\Psi(\mathbf{x}\ t)|)$。如果 R(t)在径向调整过程中经过 $(\omega/\beta)^{1/2}$，瞬时相位速率 $\partial_t\Psi$ 便会变为零并反向，从而显著拉长振荡周期，并使 ρ 与 q之间的超前–滞后顺序暂时反转，如图 1 中 $t \approx 50$ 附近所示。

除单波瞬态之外，式 (42)–(45) 总结的扭转机制贯穿本研究余下部分，构成核心组织线索。对于单个行进载波，线性频率 ω、扭转偏移 $\lambda\beta/\alpha$与波数筛选因子 $1+\epsilon|\mathbf{k}|^2$ 之间的竞争控制边带不稳定性，并定义了第六节B中的零频率轨迹 $\Omega_{\text{eff}} = 0$ （式 (75)–(76) 和图 2），以及当 $\beta\Omega_* < 0$时空间均匀振荡的有限波数调制不稳定性（第六节D中的式 (83) 和附录 B）。对于相互作用的波列，扭转比 $|\beta/\alpha|$ 决定共轭边带耦合能否在第七节C中克服线性阻尼（式 (93)）。最后，在振幅 R(x t)随空间变化的二维场中，局部反应频率梯度 $\nabla(\omega - \beta R^2) = -2\beta R\nabla R$ （式 (97)）以及筛选等时线响应（附录C中的式 (C4)）会将空间振幅差异转化为差异相位绕转，从而推动例如从相干波状云带到充满缺陷的粗糙云状波纹模式的跃迁，该过程见第八节A至D。

C. 动态惯性与扩散松弛

为了理解伪抛物算子为何适用于云场组织，将 PGLE 与标准复 Ginzburg–Landau 方程（CGLE）[73, 74],进行对比是很有启发性的

$$\partial_t u = (\lambda + i\omega)u - \kappa|u|^2u + (D_r + iD_i)\Delta u, \qquad D_r > 0, \tag{46}$$

该方程通过具有振幅扩散率 $F(u) = (\lambda+i\omega)u - \kappa|u|^2u$ 和色散刚度 D_r的复拉普拉斯算子，在空间中耦合同一个局部 Stuart–Landau 趋势项 D_i（二者的单位均为 L²T⁻¹）。在 CGLE 中，空间耦合直接作用于状态 u，因此扩散会逐渐平滑空间梯度，同时使三次相互作用保持纯局部性。在 PGLE 中，式（28）的空间耦合则源自消除共享过饱和度浴（第 IIB节），这使亥姆霍兹算子 $I - \epsilon\Delta$ 作用于变化率 $\partial_t u$，并通过筛选格林函数对整个反应趋势项进行滤波，$\partial_t u = G_\epsilon * F(u)$ 。

在线性稳定区间（$\lambda = -\gamma$ 阻尼率为 $\gamma > 0$）中，这种物理差异显而易见。对于波矢为 k 、波数为 $k = |\mathbf{k}|$的傅里叶模态，令$Q_k \equiv 1 + \epsilon k^2 = \widehat{G}_\epsilon(\mathbf{k})^{-1}$ 表示筛选算子 $I - \epsilon\Delta$的傅里叶符号，即方程（14）中格林函数乘子的逆。在 CGLE 中，模态衰减率 $\gamma + D_r k^2$ 随波数增大，因此其振幅-

弛豫时间（$\gamma + D_r k^2$）$^{-1}$ 在 k^{-2} 时趋于零，精细尺度结构会迅速消失；相比之下，在 PGLE 中，模态衰减率受屏蔽影响而衰减至 γ/Q_k，因此弛豫时间 $Q_k/\gamma = (1+\epsilon k^2)/\gamma$ 在波长短于屏蔽长度$L_{\rm scrn} = \sqrt{\epsilon}$时增加，从而使精细尺度空间结构缓慢调整并得以持续存在，而不是被扩散平滑掉。

相应地，尽管全局 CGLE 振幅平衡通过扩散汇耗散梯度$-D_r \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x}$，PGLE 将梯度范数$\frac{\epsilon}{2} \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x}$ 嵌入守恒扇区能量的时间导数中$\mathcal{E}_\epsilon$（第56式，V B节）。这种缓慢的短波长调整正是云的动态惯性的物理本质：云元无法在不通过尺度 $L_{\rm scrn}$ [11]重新调整其周围的过饱和晕圈的情况下，突然改变其精细尺度边界，从而使锐利云边缘、局域相位缺陷和陡峭的梯度丝状结构得以持续存在，同时更大尺度的云–雨循环仍在演化。与此同时，由于（$I - \epsilon\Delta$）$^{-1}$ 同时作用于 F（u）的实部和虚部，屏蔽直接将非线性频率扭转 β 与空间相位梯度耦合起来，而无需单独的色散扩散率 D_i。

这种动态惯性与扩散平滑之间的对比，也决定了这两个模型如何滤除稳定参考态（$\lambda = -\gamma < 0$）附近未解析的波动。令$P_{\rm PGLE}$（k）和 $P_{\rm CGLE}$（k）表示波数 k 处的稳态模态方差 $\mathbb{E}|\widehat{U}_{\mathbf{k}}|^2$（对于无量纲振幅，其单位为面积 L^2），并令 $\mathcal{J}$（k）（单位为 $\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1}$）表示随机强迫每单位时间注入该模态的方差。由于模态方差以线性振幅弛豫率的两倍衰减——即 PGLE 中的 $2\gamma/Q_k$，以及 CGLE 中的 2($\gamma + D_r k^2$)——将注入与弛豫相平衡可得

$$P_{\rm PGLE}(k) = \frac{Q_k \, \mathcal{J}(k)}{2\gamma}, \quad P_{\rm CGLE}(k) = \frac{\mathcal{J}(k)}{2(\gamma + D_r k^2)}. \tag{47}$$

在第 III A 节的云团事件模型中，每个事件脉冲通过 G_ϵ 在空间上分布，其傅里叶振幅按 $\widehat{G}_\epsilon(\mathbf{k}) = Q_k^{-1}$ 加权，因此每单位时间注入模态 k 的方差受到双重屏蔽，J（k）= D$_*/Q_k^2$；其中，注入振幅 D$_*$（单位为 $\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1}$）由云团事件频率、元素面积和标记方差自洽地确定，具体推导见配套研究 [44]。将 J（k）= D$_*/Q_k^2$ 代入公式（47）可见，在 PGLE 中，屏蔽事件足迹（$\propto Q_k^{-2}$）与缓慢的惯性弛豫（$\propto Q_k$）之间有一个 Q_k 因子相互抵消，留下洛伦兹谱 $P_{\rm PGLE}$（k）= D$_*/[2\gamma(1+\epsilon k^2)]$，并具有$k^{-2}$ 高波数尾部；而 CGLE 中相同的屏蔽强迫则按 k^{-6} 衰减。线性稳定的 CGLE 若改由未屏蔽的时空白噪声驱动（J（k）= const），同样会产生 k^{-2} 尾部 [46]，，这表明相同的瞬时快照谱可能反映截然相反的物理机制：在由云团驱动的 PGLE 中，屏蔽长度 $L_{\rm scrn}$ 同时决定事件热力学足迹的空间作用范围，以及精细空间结构的延长寿命。

云型的线性随机扩散模型 [47]直接阐明了这种区别。该模型演化一个标量总水量变量 q，在 $\partial_t \mathrm{q} = D_\mathrm{q}\Delta\mathrm{q} - \tau^{-1}\mathrm{q} + F_0 + \sigma\dot{W}$ 条件下，具有涡扩散率 D_q、整体弛豫时间 τ、平均源项 F_0和时空白噪声 σW，并通过将 q 在饱和值处设定阈值来诊断云覆盖率。在理解网格截断Δx 的情况下，其平稳谱与 ($1 + D_\mathrm{q}\tau k^2$)$^{-1}$ 成正比；当 $\epsilon = D_\mathrm{q}\tau$ 时，该谱与 $P_{\rm PGLE}(k)$ 的静态洛伦兹型曲线相匹配，并且在二维网格 [44, 47] 上具有相同的 log($L/\Delta x$) 逐点方差增长。然而从动力学角度看，其波数 k 处的涨落会闪烁，并在快速扩散时间 $\tau/(1+\epsilon k^2)$ 内衰减，而不是持续于慢惯性时间 $(1+\epsilon k^2)/\gamma$，因此，在单时刻谱无法区分这两种描述的情况下，时间持续性提供了区分依据。此外，尽管线性扩散阈值模型能够捕捉整体云量分数统计，却无法解析单体几何结构 [47]，；PGLE 将动态惯性与非线性云雨振荡耦合起来：在超临界态 ($\lambda > 0$) 中，三次相互作用抑制尺度粗化，并在由随机初始异常 $|u|$ 产生的振荡振幅中形成持续的负空间相关波瓣（第七节 F），从而捕捉到这样一种现象：即使单个云元素不断形成和消散，有组织的中尺度单体形态仍能持续存在 [51]。

V. 液态水与振幅收支

本节汇集模型的精确收支：用于约束事件增量的积分液态水收支，以及确定性 PGLE 的振幅平衡及其相位对称性解释。此处的“能量”表示归一化云雨振荡振幅的二次量度，而非热力学能或水质量；其与相位对称性的关系将在第VC节阐述。

A. 液态水收支与未解析储库

由于 PGLE 求解悬浮云水 C 和降水雨水 P，同时将水汽设为隐式变量，因此其物理水量收支属于开放液态系统。在完整的暖云收支中，凝结和蒸发在水汽与液态水之间交换质量，而碰撞—聚并则在云滴和雨滴之间进行内部质量转移，因此不会影响总液态水趋势；水汽相变和降水沉降则构成净柱源汇 [75]。在式（15）的直接水路径表示中，采用固定背景水路径（C_0、P_0）和尺度（C_*、P_*）（式（15））时，局部液态水路径异常ℓ(x t)和域积分液态水质量 $M_l(t)$通过实值线性投影$\mathscr{L}(z)$ = C_* Re $z + P_*$ Im z与 $u = \rho + iq$ 相关：

$$\ell(\mathbf{x}, t) = \mathscr{L}(u) = C_*\rho + P_* q,$$
$$M_l(t) = \int_{\mathbb{T}^2} (C + P) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = |\mathbb{T}^2|(C_0 + P_0) + \int_{\mathbb{T}^2} \ell(\mathbf{x}, t) \, \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{48}$$

将 $\mathscr{L}$ 应用于确定性 PGLE，式（28），可得局部和域积分液态水收支

$$\begin{aligned}(I-\epsilon\Delta)\partial_t\ell &= S_l(u),\\ S_l(u) &= \mathscr{L}(F(u)) = (\lambda-\alpha|u|^2)(C_*\rho+P_*q)\\ &\quad+(\omega-\beta|u|^2)(P_*\rho-C_*q),\end{aligned}\tag{49}$$

并且，根据 $\mathbb{T}^2$的周期性，或者等价地，因为 $\partial_t\ell = G_\epsilon * S_l(u)$ 与 $\int_{\mathbb{T}^2} G_\epsilon\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 1$,

$$\frac{\mathrm{d}M_l}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathbb{T}^2} S_l(u)\,\mathrm{d}\mathbf{x}.\tag{50}$$

此处 $S_l(u)$的单位为单位时间内的水路径，表示结合了水汽凝结、蒸发和降雨沉降的净未屏蔽柱源项，而环境屏蔽 $G_\epsilon * S_l(u)$ 则在尺度 $L_{\mathrm{scrn}} = \sqrt{\epsilon}$上将这一液态水趋势横向重新分配，同时不改变其区域积分。

方程（49）和（50）揭示了空间斑块几何结构如何控制区域液态水储量。由于 $F(-u) = -F(u)$ 在半周期相位移 $u \mapsto -u$下为奇函数，源项 $S_l(u)$在任何周期性波动或胞状斑块中，只要其空间相位分布在云–雨循环的相反两个半周期之间对称，便会积分为零。特别地，对于第 IV B 节中 $\mathbf{k} \neq 0$ 的任意单色波解，模 $|u(\mathbf{x}\ t)| = R(t)$ 在空间上均匀，而 $\int_{\mathbb{T}^2} u(\mathbf{x}\ t)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$，因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^2} S_l(u)\,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \left(\lambda-\alpha R(t)^2\right)\left[C_*\int_{\mathbb{T}^2}\rho\,\mathrm{d}\mathbf{x} + P_*\int_{\mathbb{T}^2} q\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right]\\ &\quad+\left(\omega-\beta R(t)^2\right)\left[P_*\int_{\mathbb{T}^2}\rho\,\mathrm{d}\mathbf{x} - C_*\int_{\mathbb{T}^2} q\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right]\\ &= 0.\end{aligned}$$

且 $\mathrm{d}M_l/\mathrm{d}t = 0$ 在所有时刻都恒等成立。因此，增长中的云峰内发生的凝结，恰好由区域内衰减的雨谷中的蒸发和沉降所平衡，使液态水总储量维持在 $M_l = |\mathbb{T}^2|(C_0+P_0)$——这与大城LES一致：相位相反的子区域彼此抵消，使区域积分的水质量 [4,Fig. 8]。

当 $u(\mathbf{x}\ t)$ 是多波叠加时，$|u(\mathbf{x}\ t)|^2$随 $\mathbf{x}$ 变化，因此无法将 $(\lambda-\alpha|u|^2)$ 和 $(\omega-\beta|u|^2)$ 提出空间积分号。相反，对$S_l(u) = \mathscr{L}\left((\lambda+i\omega)u - \kappa|u|^2u\right)$ 积分可得

$$\frac{\mathrm{d}M_l}{\mathrm{d}t} = \mathscr{L}\left((\lambda+i\omega)\int_{\mathbb{T}^2} u\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \kappa\int_{\mathbb{T}^2}|u|^2u\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right).$$

如果该模式不包含共振三元组 $\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$（或具有半周期平移对称性 $u(\mathbf{x}+\boldsymbol{\delta},\ t) = -u(\mathbf{x}\ t)$），且初始空间平均为零，则 $\int_{\mathbb{T}^2}|u|^2u\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$，并且 $\mathrm{d}M_l/\mathrm{d}t = 0$。反之，如果该模式包含共振三元组 $\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$（例如图3B中的 $k_0 = 5$ 载波和$k_0+q = 10$ 边带，其中 $5+5 = 10$），则 $\int_{\mathbb{T}^2}|u|^2u\,\mathrm{d}\mathbf{x} \neq 0$，这会激发 $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ 空间平均模态，并使 $M_l(t)$ 随时间在 $|\mathbb{T}^2|(C_0+P_0)$ 附近振荡，同时保持有界，且长期平均漂移项为零。从物理上看，这类共振三元组对应于相位不对称空间模式，其中较大的振幅偏离 $|u|^2$ 与云–雨循环的某一相位优先相关，而不是在相反的两个半周期之间相互抵消，从而产生 $\int_{\mathbb{T}^2}|u|^2u\,\mathrm{d}\mathbf{x} \neq 0$，并驱动区域平均水质量趋势 $\mathrm{d}M_l/\mathrm{d}t \neq 0$。

在采用平均场闭合之前，对实现质量$\mathsf{M}_l[U_t] = \int_{\mathbb{T}^2}(C_t+P_t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ 取式（21）中精确跳跃平衡的期望，可得

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{E}[\mathsf{M}_l[U_t]]}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathbb{T}^2}\mathscr{L}\big(\mathbb{E}[F_B(U_t)]\big)\,\mathrm{d}\mathbf{x},\tag{51}$$

由方程（26可知，未解析的气块涨落也能驱动区域净水质量趋势，只要局部涨落协方差 $2u\mathbb{E}[|v|^2]+\bar{u}\mathbb{E}[v^2]$ 或三阶偏度 $\mathbb{E}[|v|^2v]$ 打破相位对称性。

在以$\mathbf{y}$为中心的单个气块过程中，总无量纲增量

$$\eta = \frac{F_B(U_{t-}(\mathbf{y}))}{r_p} + b\zeta\tag{52}$$

会使某一实现中的区域液态水质量改变

$$\delta\mathsf{M}_l = a_p\mathscr{L}(\eta) = a_p\big(C_*\,\mathrm{Re}\,\eta + P_*\,\mathrm{Im}\,\eta\big).\tag{53}$$

方程（53）将复增量平面（$\mathrm{Re}\,\eta$, $\mathrm{Im}\ \eta$）划分为不同的微物理机制区间。纯转化过程（自动转化和碰并增长）会沿着第四象限中的零和线 $\mathscr{L}(\eta) = 0$ 分布；这些过程将质量从悬浮的云滴转移到雨滴，不发生水汽交换或即时沉降，因此逐事件守恒 M_l 。偏离该线的部分则量化开放系统中的柱内交换：凝结和云蒸发沿实轴方向作用（$\delta\mathsf{M}_l = a_pC_*\,\mathrm{Re}\,\eta \gtrless 0$），而雨滴蒸发和地表降水沉降则沿负虚轴方向作用（$\delta\mathsf{M}_l = a_pP_*\,\mathrm{Im}\,\eta < 0$）。随着气块经历其 Stuart–Landau循环，系统性趋势 $F(u)$ 连续旋转经过这些象限——从净水汽凝结（$\dot{\rho} > 0$）到云滴向雨滴的转化（$\dot{\rho} < 0, \dot{q} > 0$），再到后续沉降（$\dot{q} < 0$）——而标记律 $\Pi(\mathrm{d}\zeta)$ 则描述过程涨落如何分配为沿 $\mathscr{L}(\zeta) = 0$分布的反相关转换散布，以及开放系统中的水汽或沉降方差。

对于云物理学而言，由此得到的核心结论有两点。就单点和每个事件而言，PGLE 并不守恒液态水质量——它也不应守恒，因为降水云层是一个开放液态系统，不断通过凝结从未解析水汽库中汲取水分，并通过蒸发和地表沉降将水分排出；只有内部的碰撞–聚并过程才会沿着 $C+P$ 这条线 $\mathscr{L}(\eta) = 0$守恒。G_ϵ 然而，在中尺度域尺度上，由于屏蔽响应 G_ϵ 是守恒质量的（$\int_{\mathbb{T}^2} G_\epsilon\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 1$），而振荡源$S_l(u)$ 在半周期相移下为奇函数，任何初始均值为零的单色波、平行滚轴或无三元组模式，都会维持严格恒定的域积分液态水

存量 $M_l(t) = |\mathbb{T}^2|(C_0 + P_0)$，这是通过云区不断增长与消退之间的动态平衡实现的；而具有活跃三元组的多模态胞状结构或调制场，则会以有界方式围绕 $|\mathbb{T}^2|(C_0 + P_0)$ 振荡，不产生长期漂移。因此，PGLE 在结构上调控的并非封闭的云团水存量，而是云–雨循环本身的空间强度与梯度结构：如下文第V B 节和VC节所示，方程的旋转扇区守恒一个精确的 $U(1)$ 诺特荷$\mathcal{E}_\epsilon = \mathcal{N}_\epsilon$，它将振荡方差 $|u|^2$ 与屏蔽加权空间梯度 $\epsilon|\nabla u|^2$结合起来；线性增长与三次饱和之间的平衡，则将全局振荡活动锁定在一个不变水平，即使水分仍在不断流经各个云体。

B. 振幅与谱平衡

令 $V = |\mathbb{T}^2|$ 并使用正交归一傅里叶系数

$$\widehat{u}_{\mathbf{k}} = V^{-1/2}\int_{\mathbb{T}^2} u(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad Q_{\mathbf{k}} = 1 + \epsilon|\mathbf{k}|^2.$$

因此 $\sum_{\mathbf{k}}|\widehat{u}_{\mathbf{k}}|^2 = \int_{\mathbb{T}^2}|u|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}$。为获得积分平衡，将方程（28）乘以 $\bar{u}$ 并在周期域上积分：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^2}\bar{u}\,(I-\epsilon\Delta)\partial_t u\,\mathrm{d}\mathbf{x} = (\lambda+i\omega)\int_{\mathbb{T}^2}|u|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\ -(\alpha+i\beta)\int_{\mathbb{T}^2}|u|^4\,\mathrm{d}\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{54}$$

周期性消除了分部积分中的边界项。因此，左侧两项的实部为

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\int_{\mathbb{T}^2}\bar{u}\,\partial_t u\,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{T}^2}|u|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x},\\ -\mathrm{Re}\int_{\mathbb{T}^2}\bar{u}\,\Delta\partial_t u\,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \mathrm{Re}\int_{\mathbb{T}^2}\nabla\bar{u}\cdot\nabla\partial_t u\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{T}^2}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{55}$$

在右侧，两个积分均为实数，因此乘以 $i\omega$ 和 $i\beta$ 的项的实部为零。因此，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\epsilon &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2}\left(|u|^2+\epsilon|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}\mathbf{x},\\ \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\epsilon}{\mathrm{d}t} &= \lambda\int_{\mathbb{T}^2}|u|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \alpha\int_{\mathbb{T}^2}|u|^4\,\mathrm{d}\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{56}$$

因此，混合导数对 $\mathcal{E}_\epsilon$贡献梯度项，而线性增长和三次饱和决定其变化率。该平衡描述振幅场，并不同于方程（50）中的液态水收支。

对于线性 PGLE，模态功率的演化为

$$|\widehat{u}_{\mathbf{k}}(t)|^2 = |\widehat{u}_{\mathbf{k}}(0)|^2\exp\left(\frac{2\lambda t}{Q_{\mathbf{k}}}\right). \tag{57}$$

在无外力的线性方程中，每个初始谱分量都以各自依赖尺度的速率演化。因此，要维持谱水平，就需要与外力或非线性传输达到平衡。非线性方程中的精确平衡关系为

$$\frac{\mathrm{d}|\widehat{u}_{\mathbf{k}}|^2}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{Q_{\mathbf{k}}}\left[\lambda|\widehat{u}_{\mathbf{k}}|^2 - \mathrm{Re}\{\kappa\widehat{u}_{\mathbf{k}}^*\widehat{|u|^2u}_{\mathbf{k}}\}\right]. \tag{58}$$

三次项耦合傅里叶模态，将重新分配与振幅饱和结合起来。在系综平均下，它涉及四阶统计量，因此非线性谱需要进一步闭合或直接计算。

C. 相位对称性、诺特荷与图样选择的动力学约束

二次泛函 $\mathcal{E}_\epsilon$ 在方程（56）中不仅是一个便捷的李雅普诺夫型诊断量：它还是 PGLE 保守扇区的守恒诺特荷，其产生—耗散平衡对第 VIII 节所分析的模式形成动力学施加了精确的全局约束。确定性 PGLE 在全局 $U(1)$ 相位旋转 $u \mapsto e^{i\theta}u$下具有等变性。在标准形坐标中，这一对称性表示云场中振荡时序的统一平移；而在方程（15）的直接水异常表示中，它旋转归一化异常对 (ρ, q)，因此通常会改变方程 $\ell = C_*\rho + P_*q$（48）中的线性液态水组合。因而，相位不变性支配的是振荡活动的组织方式，而非第 VA 节中的物理水储量。经典诺特理论将连续对称性与变分系统中的守恒定律联系起来 [76]，近期研究则为耗散梯度流提出了类似的对称性恒等式 [77]，；PGLE 则自然地分解为保守哈密顿流和耗散梯度流，二者均由同一个动态惯性度量算子 $A_\epsilon = I - \epsilon\Delta$控制。这种分解与标准 CGLE 分解为非线性薛定谔扇区和反应—扩散（Allen–Cahn）扇区相似 [73, 74, 78]，，其关键区别在于：这里所有空间耦合都位于作用于时间导数的算子 A_ϵ 中，而不是位于彼此分离的扩散拉普拉斯算子和色散拉普拉斯算子中。

为使式（28）中的保守扇区明确化，我们在周期域$\lambda = \alpha = 0$上令 $\mathbb{T}^2$（$\epsilon > 0$），同时保留线性频率 ω 和扭转参数 β。于是得到

$$A_\epsilon\partial_t u = i(\omega - \beta|u|^2)u. \tag{59}$$

通过 $u(\mathbf{x}\ t) = e^{i\omega t}\psi(\mathbf{x}\ t)$ 提出基准振荡，式（59）变为

$$i(I-\epsilon\Delta)\partial_t\psi + \epsilon\omega\Delta\psi - \beta|\psi|^2\psi = 0, \tag{60}$$

这是非线性薛定谔方程 [48, 78] 的一种伪抛物型 Benjamin–Bona–Mahony 型正则化。事实上，正如 Benjamin–Bona–Mahony 算子 $(I - \epsilon\partial_x^2)\,\partial_t$ 对长波水动力学中无界的短波色散进行正则化一样，[48] $A_\epsilon\partial_t$ 也会对短于$L_{\mathrm{scrn}} = \sqrt{\epsilon}$的波长处的薛定谔色散进行正则化。

赋予光滑周期场空间以实值 L^2-内积 $(v,\ w)_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}\int_{\mathbb{T}^2} \bar{v}w\,\mathrm{d}\mathbf{x}$，并将其变分梯度记为 grad，方程（59）采取非正则哈密顿形式 [79, 80]

$$H[u] = \int_{\mathbb{T}^2} \left(-\frac{\omega}{2}|u|^2 + \frac{\beta}{4}|u|^4\right) \mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad J_\epsilon = -iA_\epsilon^{-1}, \qquad \partial_t u = J_\epsilon \,\mathrm{grad}\, H[u]. \tag{61}$$

由于 A_ϵ 在 $L^2(\mathbb{T}^2)$ 上是正、自伴且可逆的，泊松（余辛）算子 $J_\epsilon = -i(I-\epsilon\Delta)^{-1}$ 是常数，并且相对于 $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}}$ 反自伴，因而自动满足雅可比恒等式 [81]。 $H[u]$和 A_ϵ在全局相位旋转下均保持不变，而二次泛函

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\epsilon[u] &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2} \bar{u}A_\epsilon u\ \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2} \left(|u|^2 + \epsilon|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathcal{E}_\epsilon[u], \\ \mathrm{grad}\,\mathcal{N}_\epsilon[u] = A_\epsilon u, &\qquad J_\epsilon\,\mathrm{grad}\,\mathcal{N}_\epsilon[u] = -iu, \end{aligned} \tag{62}$$

是 $u \mapsto e^{-i\theta}u$的无穷小哈密顿生成元。根据无限维哈密顿系统的诺特定理 [78, 79]， $U(1)$ 在 $H[u]$ 下的不变性意味着 $(\mathrm{grad}\,\mathsf{N}_\epsilon, J_\epsilon\,\mathrm{grad}\,H)_{\mathbb{R}} = 0$，因此 $\mathsf{N}_\epsilon[u]$ 和 $H[u]$ 都是方程 (59) 的精确不变量。与标准非线性薛定谔方程不同，在后者中， $U(1)$ 波作用量荷是 L^2 范数 $\frac{1}{2}\int|u|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}$，而 $\int|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ 则包含在哈密顿量 [78], 中；伪抛物算子 $A_\epsilon\partial_t$ 将屏蔽加权梯度范数 $\frac{\epsilon}{2}\int|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}$直接纳入守恒的诺特荷 N_ϵ [48]。

互补的增长–饱和部分（$\omega=\beta=0$，其中 $\lambda,\ \alpha>0$），即 $A_\epsilon\partial_t u = (\lambda - \alpha|u|^2)u$，是一个由兰道势驱动的伪抛物型 Allen–Cahn 方程

$$V[u] = \int_{\mathbb{T}^2}\left(-\frac{\lambda}{2}|u|^2 + \frac{\alpha}{4}|u|^4\right)\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{63}$$

与抛物型反应–扩散流不同，该部分是一个梯度系统 $\partial_t u = -A_\epsilon^{-1}\mathrm{grad}\,V[u]$，其最速下降是相对于索об列夫动态惯性内积 $\langle v,\ w\rangle_{H^1_\epsilon} = (v,\ A_\epsilon w)_{\mathbb{R}}$ 来度量的。将这两个部分结合起来，可将完整 PGLE 表示为索об列夫空间 $H^1_\epsilon(\mathbb{T}^2)$ 上的度量耦合的哈密顿流与梯度流，

$$\partial_t u = J_\epsilon\,\mathrm{grad}\,H[u] - A_\epsilon^{-1}\,\mathrm{grad}\,V[u], \tag{64}$$

其中 $H[u]$ 和 $V[u]$ 是完全局部的势积分，所有空间耦合均通过 A_ϵ^{-1}进入。取式（64）与 $\mathrm{grad}\mathcal{N}_\epsilon = A_\epsilon u$ 的（实）内积，会消去保守向量场 $J_\epsilon\,\mathrm{grad}\,H[u]$，并恢复式（56）中的精确全局平衡。

就实际意义而言，诺特荷 $\mathcal{N}_\epsilon = \mathcal{E}_\epsilon$ 充当一个全局预算，将保守性空间重塑与振幅增长与饱和区分开来。由于 ω 和 β 仅通过哈密顿向量场 $J_\epsilon\,\mathrm{grad}\,H[u]$进入，因此它们不会直接贡献于 $\mathrm{d}\mathcal{E}_\epsilon/\mathrm{d}t$ 在方程（56）中的变化率：旋转动力学本身不能创造或消灭总振荡活动，而是将 $\mathcal{N}_\epsilon$ 在体振荡振幅与精细尺度空间梯度之间重新分配——第 VIII A 节和第 VIIID 节利用这一点，分别阐明相位扭曲如何驱动波破碎和丝状结构形成。另一方面，$\mathcal{N}_\epsilon$ 的净产生与耗散完全由增长—饱和势 $V[u]$控制；该势将全局均方振幅限制在孤立波饱和水平，并将总体振幅平衡与持续的空间重组区分开来。第 VIII E 节和第 VIIIF 节的滚动巩固和随机涌现实验对此作了说明。

VI. 不稳定性与非线性跃迁

本节分析 PGLE 的一个单一精确周期态的稳定性——首先是在一维周期区域上的行平面波（$k_0 \neq 0$），遵循 CGLE 的边带框架 [82, 83], ，随后分析任意空间维度中的空间均匀振荡（$k_0 = 0$）。下文将表明，尽管 PGLE 缺少独立的扩散色散系数 D_i，动态惯性（$\epsilon > 0$）与相位扭曲（$\beta \neq 0$）的相互作用仍足以通过成对边带 $k_0 \pm q$（式（75））使行载波失稳，而非谐波调制（$q \neq nk_0$）则在零频率轨迹 $\Omega_0 = 0$ 的两侧形成宽广的不稳定性区域（图 2）。追踪一个失稳波直至饱和后，我们还表明，非线性演化会将该场重组为一个持久的调制态，其功率谱形成尖锐的组合音梳 $\omega_n = |\Omega_c + n\Omega_m|$（图 3–4），从而区分引发破裂的线性边带与饱和后选定的频率。进一步聚焦于 $k_0 = 0$极限可以发现，只要 $\beta\Omega_* < 0$（式（83）），空间均匀的云–雨循环就会在有限波数带 $0 < \epsilon|\mathbf{k}|^2 < -2\beta A^2/\Omega_*$ 内自发失去同步性，从而为振荡参考态上的图灵斑图起始提供一种动态惯性类比。

A. 我们的扰动方法

我们对与方程（43）中的渐近形式相关的精确行波进行扰动。它们的振幅为常数，$R(t) = A$，其相位以频率Ω_0均匀推进：

$$|A|^2 = \frac{\lambda}{\mathrm{Re}(\kappa)}, \quad \Omega_0 = (1+\epsilon|\mathbf{k}|^2)^{-1}\left(\omega - \frac{\lambda\mathrm{Im}(\kappa)}{\mathrm{Re}(\kappa)}\right). \tag{65}$$

我们从一个未受扰动的行进波解开始

$$u_0(x,t) = A\exp(i(k_0 x + \Omega_0 t)),\ x \in (0, 2\pi),$$

其中 A和Ω_0 由方程（65）给出。这里，我们隐含地假设 $\phi(0)$的选取满足 $\phi_0 = 0$（方程（42））。

首先，我们围绕平面波解对 PGLE 进行线性化，u_0。令完整解为 $u = u_0 + \delta u$，其中 δu 是一个小扰动。将其代入 PGLE（方程（28）），我们

只保留关于 δu 的线性项。非线性项为 $-\kappa|u|^2u$。我们可以写成 $|u|^2 = u\bar{u} = (u_0+\delta u)(\bar{u}_0+\bar{\delta u})$。将扰动展开至一阶，我们得到：

$$|u|^2 \approx |u_0|^2 + u_0\bar{\delta u} + \bar{u}_0\delta u.$$

完整的非线性项变为：

$$-\kappa|u|^2u \approx -\kappa(|u_0|^2 + u_0\bar{\delta u} + \bar{u}_0\delta u)(u_0+\delta u).$$

仅保留一阶项：

$$\begin{aligned}-\kappa|u|^2u =& -\kappa(|u_0|^2u_0 + |u_0|^2\delta u + u_0^2\bar{\delta u} + |u_0|^2\delta u)\\ =& -\kappa(|u_0|^2u_0 + 2|u_0|^2\delta u + u_0^2\bar{\delta u}).\end{aligned}$$

零阶项 $-\kappa|u_0|^2u_0$ 与 PGLE 左侧的相应项相抵消，因此 u_0 是一个解。这使我们得到关于扰动 δu 的线性化 PGLE：

$$\partial_t\delta u = (\lambda+i\omega)\delta u - \kappa(2|u_0|^2\delta u + u_0^2\bar{\delta u}) + \epsilon\Delta\partial_t\delta u. \quad (66)$$

B. 不稳定区域

写作 $u = (1+V)u_0$，使得 $\delta u = Vu_0$，并将调制展开为

$$V(x,t) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} V_q(t)e^{iqx}. \quad (67)$$

在 2π-周期域上，载波波数 k_0 和调制波数 q 均为整数；该展开允许所有整数调制。每个 $q \neq 0$将边带k_0+q和 k_0-q耦合起来。定义

$$Q_\pm = 1+\epsilon(k_0\pm q)^2, \qquad Q_0 = 1+\epsilon k_0^2. \quad (68)$$

代入 $\delta u = Vu_0$ 到公式（66）中，得到精确的配对线性系统

$$\partial_t\begin{pmatrix}V_q\\ \overline{V}_{-q}\end{pmatrix} = M_q\begin{pmatrix}V_q\\ \overline{V}_{-q}\end{pmatrix}, \qquad M_q = \begin{pmatrix}(\lambda+i\omega-2\kappa A^2)/Q_+ - i\Omega_0 & -\kappa A^2/Q_+\\ -\bar{\kappa}A^2/Q_- & (\lambda-i\omega-2\bar{\kappa}A^2)/Q_- + i\Omega_0\end{pmatrix}. \quad (69)$$

旋转框架项 $\mp i\Omega_0$ 位于屏蔽分母之外：在平移空间框架中，对 Vu_0 求导会产生 $[I-\epsilon(\partial_x+ik_0)^2](\partial_tV+i\Omega_0V)$。等价地，每个分子中的频率为 $\omega-\Omega_0Q_\pm$。特征向量的两个分量都以相同的因子 $e^{\sigma t}$演化；因此，V_{-q} 本身也带有共轭指数。

给定 $\kappa = \alpha+i\beta$ 和 $A^2 = \lambda/\alpha$，定义 $Y = \omega - 2\beta A^2$。将 M_q 的对角元写作 $-d_+ + ib_+$ 和 $-d_- + ib_-$，其中 $d_\pm = \lambda/Q_\pm > 0$、$b_+ = Y/Q_+ - \Omega_0$, 以及 $b_- = -Y/Q_- + \Omega_0$。正的非对角元乘积为 $g_q^2 = |\kappa|^2A^4/(Q_+Q_-)$。特征方程可写成因式分解形式

$$(\sigma+d_+-ib_+)(\sigma+d_--ib_-) = g_q^2. \quad (70)$$

在稳定性边界处，扰动既不增长也不衰减，因此其指数为纯虚数，$\sigma = i\delta_q$。式（70）的虚部给出

$$d_+(\delta_q-b_-) + d_-(\delta_q-b_+) = 0, \quad (71)$$

因此

$$\delta_q = \frac{d_+b_- + d_-b_+}{d_+ + d_-} = \Omega_0\frac{Q_- - Q_+}{Q_+ + Q_-}. \quad (72)$$

因此，载波坐标系中的中性调制频率是两个对角频率的阻尼加权平衡。代入实部可得

$$g_q^2 = d_+d_-\left[1 + \frac{(b_+-b_-)^2}{(d_++d_-)^2}\right]. \quad (73)$$

频率失配提高了克服阻尼所需的耦合强度。附录 A.3 中的精确特征值计算确定了该边界哪一侧会增长：当且仅当

$$|\kappa|^2A^4 > \lambda^2 + \left[Y - \frac{2\Omega_0Q_+Q_-}{Q_++Q_-}\right]^2. \quad (74)$$

该判据由围绕单个精确行波进行线性化推导而来。

作图时，令 $\eta = \beta/\alpha$ 和

$$h_q = \frac{2Q_+Q_-}{Q_0(Q_++Q_-)}.$$

由于$\Omega_0 = (\omega-\lambda\eta)/Q_0$，式（74）中的精确不稳定性判据可写成紧凑的无量纲形式

$$\boxed{[(1-h_q)\omega + (h_q-2)\lambda\eta]^2 < \lambda^2\eta^2,} \quad (75)$$

其中，等式定义了给定非零调制波数 q 时的中性曲线。如果至少有一对可行组合满足严格不等式，则行波在谱意义下不稳定（$q=0$ 模态因相位不变性而具有指数 0，另一个为 $-2\lambda/Q_0$，因此不计入）。值得注意的是，当 $\beta = 0(\eta = 0)$ 时，严格不等式不可能成立：在没有依赖振幅的时序偏移时，无论屏蔽如何，每个行平面波在线性意义下都稳定。动态惯性与非线性

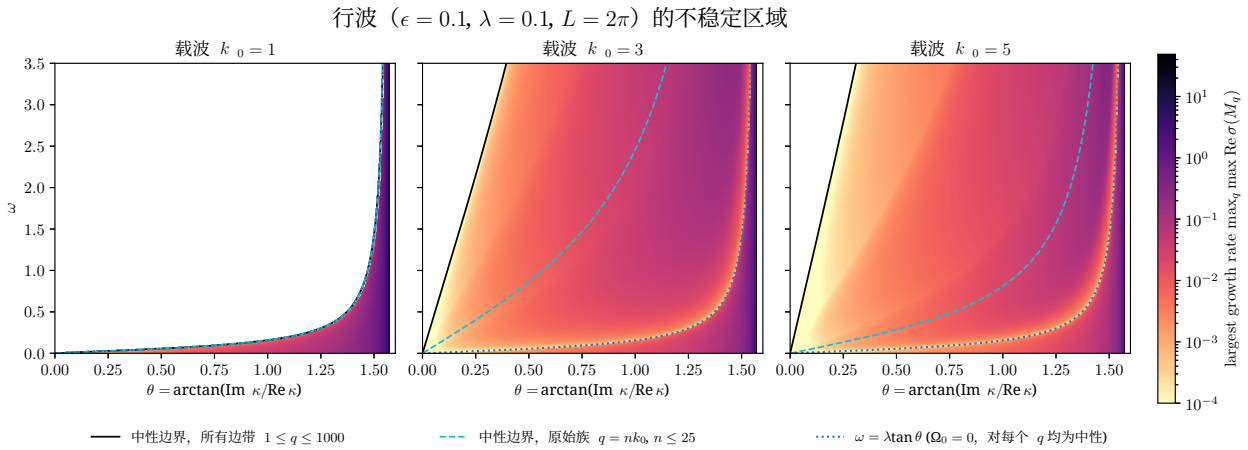

图 2：行波的尺度选择性边带不稳定性。在（θ,ω）平面上，根据公式（69）得到的最大正增长率，其中 $\theta = \arctan(\beta/\alpha)$ 为扭转角；载波为 $k_0 = 1$、3、5，参数为 $\lambda = 0.1, \epsilon = 0.1$，区域长度为 $L = 2\pi$。蓝色点虚线 $\omega = \lambda \tan\theta$ 标示公式（65）中的载波频率 $\Omega_0 = (\omega - \lambda\beta/\alpha)/Q_0$ 为零的位置。随着载波波数增大，动态惯性会使不稳定性的几何形态发生反转：在 $k_0 = 1$ 处，增长边带仅限于 $\omega = \lambda \tan\theta\,(h_q > 1$ 以下（对所有 $q \ge 1$ 均如此）；而在 $k_0 = 3$ 和 5 处，长波调制（公式（76）中的 $h_q < 1$）会形成宽阔的不稳定区域，该区域延伸至 $\omega = \lambda \tan\theta$ 上方，直至黑色实线中性边界（对所有整数边带 $1 \le q \le 1000$ 计算所得）。青色虚线标示受限谐波族 $q = nk_0\,(1 \le n \le 25)$ 的上中性边界，因此只有青色虚线以下的区域对谐波扰动不稳定；青色虚线与黑色实线之间的大块阴影楔形区域表明，非谐波调制（$q \ne nk_0$）主导了较短波的失稳。白色区域为线性稳定区域；正增长率以对数刻度显示，并截断于 10^{-4}。

扭转因此必须共同作用，才能使相干波列失稳。

在(θ,ω)图2的平面中，其中 $\theta = \arctan\,\eta$表示 $\eta > 0$的扭转角，方程（75）根据 $h_q - 1$的符号分解为两个明确的频率窗口：

$$\boxed{\begin{aligned} h_q < 1: &\quad \lambda\eta < \omega < \frac{3 - h_q}{1 - h_q}\lambda\eta, \\ h_q > 1: &\quad \frac{3 - h_q}{1 - h_q}\lambda\eta < \omega < \lambda\eta, \end{aligned}} \tag{76}$$

端点为中性，且在 $h_q = 1$处每一对均为中性，而方程（75）对 η的任一符号仍然成立。图2 绘出了整数边带 $1 \le q \le 1000$上这些区间的并集，揭示了动态惯性对云波稳定性的三个显著影响。首先， $h_q - 1$ 的符号完全由屏蔽几何决定，

$$h_q - 1 = \frac{\epsilon q^2(1 + \epsilon q^2 - 3\epsilon k_0^2)}{(1 + \epsilon k_0^2)[1 + \epsilon(k_0^2 + q^2)]}, \tag{77}$$

其在阈值 $q^2 = 3k_0^2 - \epsilon^{-1}$处发生翻转。对于$\epsilon = 0.1$和 $k_0 = 1$，每个非零整数 q 都满足 $h_q > 1$，使不稳定性严格局限于该线以下 $\omega = \lambda\eta$ （图2，左）。然而，对于较短的载波，长波长调制满足 $h_q < 1$ （$q = 1$、……、4 当 $k_0 = 3$； $q = 1$、……、8 当 $k_0 = 5$），并在$\omega = \lambda\eta$之上形成宽广的上方不稳定叶瓣，而较短的调制（$q \ge 5$ 和 $q \ge 9$，分别）仍在其下方保持不稳定（图2，中、右）。尽管所有载波具有相同的饱和振幅$A = \sqrt{\lambda/\alpha}$，相同的局部云–雨反馈因此既能在一个空间尺度上维持相干波，又能在另一个空间尺度上使其失稳。

其次，蓝色点状轨迹 $\omega = \lambda\tan\,\theta$标示了 $\Omega_0 = 0$——即线性频率 ω 与扭转偏移 $-\lambda\eta$ 相互抵消、使载波变为静止的位置，而非稳定性边界：对于 $k_0 = 3$ 和 5，增长的边带分布在该直线两侧。在偏离该直线的位置，色彩图测量最快放大率；随着 $\theta \to \pi/2$ ，发散的扭转 $\beta/\alpha = \tan\theta$会将小振幅扰动转化为巨大的渐近相位偏移（方程（C2））。第三，将完整稳定性边界（黑色实线）与受限谐波族 $q = nk_0$ （青色虚线）进行比较，揭示了一个决定性的物理现象：将扰动限制为载波波数的整数倍，会遗漏 $k_0 = 3$ 和 5对应不稳定区域中的绝大部分。因此，带状云图案主要通过非谐空间调制失去相干性；这些调制破坏了与载波的平移周期性。虽然图2 描绘了此类偏离从何处开始以及增长速度，但哪些模态能够在饱和后存留是一个非线性问题，我们将在下文追踪这一问题。

C. 边带与向准周期状态的跃迁

虽然图2 中的线性稳定性边界确定了行进云–雨波首次失去相干性的位置，但它无法确定非线性饱和后出现的空间尺度或时间谱。为追踪这一跃迁，我们通过边带展开扰动 $k_0 = 5$ 平面波（$A = \sqrt{22}$、$\Omega_0 = 1.4667$）在 $\lambda = 2.2$, $\epsilon = 0.1$, $\omega = 22/3$, 以及 $\kappa = 0.1 + 0.1i$ 在 2π-周期域上

$$u = u_0 + \sum_{q \in \mathbb{Z}} A V_q(t) e^{i[(k_0+q)x + \Omega_0 t]}. \tag{78}$$

对于种子调制 $q = 5$，方程（69）中的边带矩阵 M_5给出不稳定特征值 $\sigma_5 = 0.16811 -$

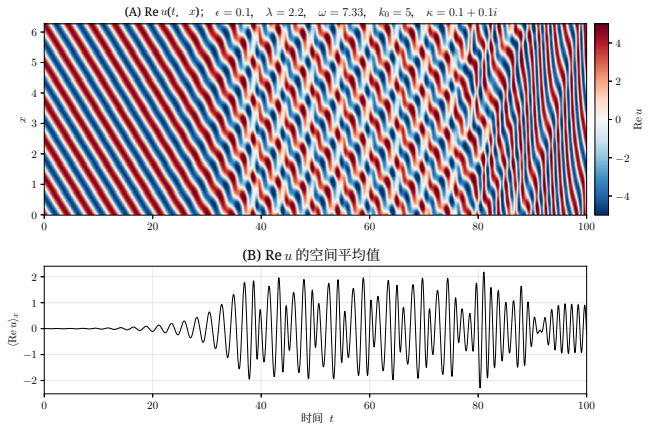

图 3：从失稳行波到调制态的非线性转变。（A）Re u 的时空演化，以及（B）其空间平均值 Re u_x（k $=0$ 傅里叶模态），展示了线性边带增长如何引发波破碎，以及非线性模态耦合如何将该场重组为持续调制态（其晚期频谱将在图 4 中分析）。参数为 $\lambda = 2.2$、$\epsilon = 0.1$、$\omega = 22/3$、$\kappa = 0.1 + 0.1i$、$k_0 = 5$ 和 $L = 2\pi$，初始状态取自 $u = Ae^{ik_0x}[1 + ae^{i5x} + be^{-i5x}]$，其中（$a$，$b$）是公式（69）中 M_5 的增长特征向量，并归一化为 $\sqrt{|a|^2 + |b|^2} = 10^{-3}$。使用 256 个网格点和前向欧拉法（$\Delta t = 0.01$，不进行去混叠）积分；各面板展示了一次运行至 $t = 2000$ 的 $0 \le t \le 100$。

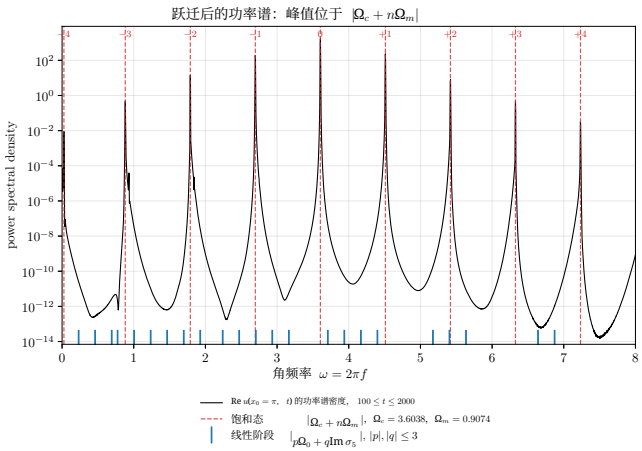

图 4：饱和调制态中的非线性频率重组。图 3 的轨迹中 Re $u(\pi, t)$ 的功率谱密度（$100 \le t \le 2000$，均值去除并进行汉宁窗处理后，每隔 0.05 采样；角频率单位）。红色虚线表示双频组合梳 $|\Omega_c + n\Omega_m|$（$n = -4, \ldots, 4$），其中 $\Omega_c = 3.6038$ 和 $\Omega_m = 0.9074$ 仅根据三个最强峰（$n = -1, 0, 1$）拟合；这一对频率可预测其余七个检测到的峰（包括绘图范围之外的 $n = 5$），误差均在 0.02 个频率箱以内。相比之下，线性载波和种子边带频率的低阶组合 $|p\Omega_0 + q\,\mathrm{Im}\,\sigma_5|$ ($|p|$, $|q| \le 3$，蓝色刻度) 仅有一个峰在两个频率箱的容差（0.0066）范围内吻合，这表明非线性饱和会选出新的载波–调制对，而非保留初始频率。

1.23588i，因此扰动在相对于载波发生相位漂移的同时呈指数增长。将增长特征向量的初始范数设为 10^{-3}，可在早期隔离这一线性机制，并揭示图 3所示的两阶段转变。在早期阶段，随着时间步长逐渐细化，测得的增长率收敛于Re σ_5，且载波外振幅在10% 附近达到载波振幅 $t = 27.3$ （空间分辨率减半或加倍时结果依然稳健），这证实线性边带不稳定性定量地支配着波破碎的起始过程。此外，由于载波 $k_0 = 5$ 和上边带 $k_0 + q = 10$ 满足共振三元组 $5 + 5 = 10$，三次耦合会立即激发**k** $= 0$ 空间平均模态 $\langle \mathrm{Re}\, u \rangle_x$ （图 3B），这说明边带失稳如何产生第 VA 节讨论的区域平均液态水振荡。

瞬态破裂（$t \gtrsim 30$）之后，非线性饱和会将功率向下传递至更长波长，此时相互竞争的持续态共存：根据瞬态扰动和数值时间步长的不同，前向欧拉法和四阶龙格–库塔法积分最终都会趋于近单色的 $k = 1$ 行波，或图 $k = 2$中所示的由3主导的调制态。值得注意的是，方程（69）的线性边带理论直接解释了这一二分现象：在这些参数下，$k = 1$ 平面波在线性上稳定，而 $k = 2$ 平面波对其 $q = 1$ 边带呈弱不稳定（增长率为0。015），从而在饱和的$k = 2$ 载波周围维持持续的时间调制。晚期的功率谱Re $u(\pi, t)$在 $100 \le t \le 2000$（图4）中提供了非线性频率重组的决定性证据。低阶分量

由线性载波和初始边带频率构成的组合 $|p\Omega_0 + q\,\mathrm{Im}\ \sigma_5|$ ($|p|, |q| \le 3$)，在两个频点的容差范围内仅与检测到的十个谱峰中的一个匹配

相比之下，仅将三个最强的峰（$n = -1,0,1$）拟合到双频组合定律

$$\omega_n = |\Omega_c + n\Omega_m| \tag{79}$$

由 $\Omega_c = 3.6038$ 和 $\Omega_m = 0.9074$ 预测的结果包含其余七个峰值，误差均在 0.02 个频率箱以内，其中包括折叠低频差音 $|\Omega_c - 4\Omega_m| \simeq 0.0258$ 和高频边带 $\Omega_c + 5\Omega_m \simeq 8.1408$。同一组合音梳在分割时间窗 $100 \le t \le 1050$和 $1050 \le t \le 2000$ 中始终保持不变（得到 $\Omega_m = 0.9070$ 和 0.9074，残差均小于 0.12 个频率箱）。这里，饱和载波 $\Omega_c = 3.6038$ 接近精确的$k = 2$ 平面波频率 $(\omega - \beta A^2)/(1 + 4\epsilon) = 3.667$（有限振幅调制以及前向欧拉法的 $O(\Delta t)$ 相位误差使其略有偏移），而无理数比值 $\Omega_c/\Omega_m \simeq 3.972$ 排除了在当前分辨精度下简单的 4:1 频率锁定，并表明这是一个双频准周期态；若要将其形式化延拓为不变环面，则需要进行此处未涉及的分岔追踪 [26]。总之，图3和图4清晰地区分了起始与饱和：线性边带不稳定性解释了规则云雨波为何破碎，而非线性波耦合则选出新的、波数更低的载波和调制频率，使长期变率呈现为多时间尺度振荡，让人联想到大涡模拟（LES）中解析出的共存快速波驱动周期与缓慢降水驱动周期 [4]。

两组频率之间的对比将起始阶段与饱和阶段区分开来。线性边带增长解释了

为何原始载波会失稳，而非线性演化则建立了一个不同的频率对，用于组织后期信号。载波 Ω_c 接近频率($\omega - \beta A^2)/(1+4\epsilon) = 3.667$，对应于一个 $k=2$ 平面波的 $k=2$主导状态（见图 3）。其偏离该值的程度可能同时反映有限调制和 $O(\Delta t)$前向欧拉积分器的相位误差；二者的单独贡献尚未被区分。比值$\Omega_c/\Omega_m \simeq 3.972$ 在已解析精度下排除了简单的 4:1 锁定，并且与双频拟周期解释一致。已解析的证据是由非线性重组产生的持续组合音结构。要建立不变双频环面及其分岔类型，还需要进行延拓并确定相关的分岔条件 [26]。在云—雨解释中，PGLE 通过振荡的空间相互作用，提供了一条从规则周期通向更丰富时间变异性的途径。

D. 均匀振荡的调制不稳定性

前面的分析描述了边带如何使一个本身具有空间相位梯度的行波失稳。将其载波波数 k_0 设为零，便提出了一个互补的问题：对于振幅和时序最初都均匀的云–雨循环，能否形成空间结构？这是同一稳定性问题的一个特例，其中 $Q_+ = Q_-$在式（69）中，但它能特别清晰地展现振幅与相位之间的反馈。下文将在任意空间维度下讨论这一极限，并区分其振荡不稳定性与经典的图灵斑图形成 [73, 84]。

对于 $\lambda > 0$ 和 $\alpha > 0$，PGLE 存在

$$u_*(t) = Ae^{i\Omega_* t}, \qquad A^2 = \lambda/\alpha, \qquad \Omega_* = \omega - \beta A^2. \tag{80}$$

我们假设 $\Omega_* \neq 0$。受到均匀扰动后，振幅会趋于恢复到 A，而均匀相位移只会改变同一循环的时序。空间调制所要探究的是，相邻区域能否维持共同的时序和振幅。

写作 $u = e^{i\Omega_* t}(A+v)$，并将 v 的实部和虚部分解为空间傅里叶模态。对于每个模态，将这些系数分别记为 $a_{\mathbf{k}}$ 和 $b_{\mathbf{k}}$。在一阶近似下，$a_{\mathbf{k}}$ 是振幅位移的傅里叶系数，而 $b_{\mathbf{k}}/A$ 是相对于均匀循环的相位位移的傅里叶系数。令 $r_{\mathbf{k}} = \epsilon|\mathbf{k}|^2$ 且 $Q_{\mathbf{k}} = 1 + r_{\mathbf{k}}$，线性化得到

$$\partial_t \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}} \\ b_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \frac{1}{Q_{\mathbf{k}}} \begin{pmatrix} -2\lambda & \Omega_* r_{\mathbf{k}} \\ -2\beta A^2 - \Omega_* r_{\mathbf{k}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}} \\ b_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}. \tag{81}$$

$-2\beta A^2$ 项将振幅扰动转化为时序扰动。屏蔽提供反向耦合，其强度与 $\Omega_* r_{\mathbf{k}}$ 成正比：空间相位调制随后可以反馈至振幅。均匀模态不存在这种反馈，其指数为 -2λ 和 0。

对于非零波数，该矩阵具有负迹。因此，当且仅当存在指数增长模态时，其行列式为负：

$$\Omega_* r_{\mathbf{k}} \left(2\beta A^2 + \Omega_* r_{\mathbf{k}}\right) < 0. \tag{82}$$

等价地，当以下条件成立时，存在一段不稳定模态：

$$\beta\Omega_* < 0, \qquad 0 < \epsilon|\mathbf{k}|^2 < -\frac{2\beta A^2}{\Omega_*}, \tag{83}$$

前提是周期域中包含该区间内的一个波数。附录 B给出了指数及其极限行为。连续带两端的增长率均趋于零，因此最快的调制具有非零波数。此处的波长选择涉及偏离均匀周期轨道的情形；最终形成的图样则需要非线性饱和。

这种空间对称性破缺具有图灵型特征，但其参考态和反馈机制不同于经典的、由扩散驱动的静止平衡态失稳 [73, 84]。这里的参考态是持续振荡，动态惯性则将其振幅依赖的计时反馈至空间振幅变化。因此，即使均匀振幅扰动会衰减，相邻区域仍可能失去同步。方程（83）确定了这种反馈会增长的空间尺度。至此，通过考察其空间均匀极限，完成了第 VI B 节和第 VI C 节的单载波分析。第 VIIB 节接下来将考察由两个不同载波引起的放大，而第 VIIIF节将研究零振幅状态的增长；在该状态下，实模态增长率 $\lambda/Q_{\mathbf{k}}$ 在所有波数下符号相同。这三种初始状态分别对应同步性丧失、已有波之间的相互作用，以及从初始微弱异常中涌现。

VII. 非线性波相互作用

第六节研究的是单个精确行波或均匀波的扰动，而现实中的云雨场通常会叠加多个具有不同波数和取向的波列。由于两个或更多精确 PGLE 波的和不再是精确解，多波场会引入单载波稳定性中不存在的集体相互作用。下文将展示，重叠的载波会通过三次叠加残差 R（方程（84）和（A2））立即在组合波矢 $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3$处激发新的空间和时间谐波，即使所有模态在线性上都稳定，也会重塑波峰并使峰值受到阻尼。我们还将展示，交叉载波乘积 $2u_1u_2$ 会开启一个混合双边带放大通道，使具有 $\mathbf{k}_p + \mathbf{k}_q = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$，的扰动发生耦合，该通道受精确的增益–失谐阈值（方程（89））支配。在孤立波振幅 $A^2 = \lambda/\alpha$下，只有当扭转比超过临界阈值$|\beta/\alpha| > \sqrt{5}/2$（方程（93））时，这一交叉载波通道才能克服阻尼；而动态惯性则决定哪些边带对满足方程（91）中的共振带宽。综合而言，这些结果解释了为什么弱扭转波叠加（$\beta/\alpha < \sqrt{5}/2$）要么保持有序的波状云带，要么合并成平行滚轴，而强扭转波叠加（$\beta/\alpha > \sqrt{5}/2$）则会触发离轴放大，并在第八节中破碎成富含缺陷的类粗糙云图案。

A. 模态耦合与相位匹配

采用第 VB 节的正交归一傅里叶约定，PGLE 给出

$$Q_{\mathbf{k}}\,\partial_t \widehat{u}_{\mathbf{k}} = (\lambda + i\omega)\widehat{u}_{\mathbf{k}} - \frac{\kappa}{V}\sum_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3=\mathbf{k}} \widehat{u}_{\mathbf{k}_1}\widehat{u}_{\mathbf{k}_2}\overline{\widehat{u}_{\mathbf{k}_3}}, \qquad Q_{\mathbf{k}} = 1+\epsilon|\mathbf{k}|^2, \qquad V = |\mathbb{T}^2|. \tag{84}$$

因此，三个输入分量会在以下位置产生一个输出：$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3$。若它们的相位按 $e^{i\Omega_j t}$演化，则强迫的频率为$\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3$。这些是由乘积 $|u|^2u$所决定的傅里叶匹配关系。它们确定三次乘积会生成哪些空间和时间谐波。它们的振幅按照式（56）中的增长项和非线性饱和项演化。共振是指所生成的强迫频率接近其激发的响应频率；失谐强迫也会存在。

对于两个不同的载波，写作

$$u_0 = u_1 + u_2, \qquad u_j = A e^{i(\mathbf{k}_j\cdot\mathbf{x}+\Omega_j t)}, \qquad A>0. \tag{85}$$

当 $A^2 = \lambda/\alpha$ 和$\Omega j = (\omega - \beta A^2)/Q_j$，且 $Q_j = 1+\epsilon|\mathbf{k}_j|^2$ 和 $\lambda > 0$时，每个波都能单独满足 PGLE。它们的和通常则不能。其残差包含载波振幅的变化，以及出现在$2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$和$2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$（附录A）处的新分量。因此，残差直接生成额外波长，为下文分析放大提供了驱动项。

B. 双边带放大机制

第VI B 节和VIC 节以单个精确行波为基准进行线性化。它的两个边带通过该载波的平方发生耦合，其增长引发了图3–4所示的跃迁。现在我们探讨两个不同的波共存时，放大如何变化。三次律包含一个混合乘积 $2u_1u_2$，它将波矢之和为$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$,的扰动与驱动频率$\Omega_1 + \Omega_2$耦合起来。这由一对载波构成了一个相互作用通道。由于它们的叠加也会生成新的谐波，我们在所关注的区间内指定载波振幅和频率，以单独考察这一通道。由此得到的增益—失谐判据说明，何时与该背景的耦合会克服所保留扰动对的阻尼。

为单独考察一个耦合通道，取边带$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_1 + \mathbf{s}$和$\mathbf{k}_q = \mathbf{k}_2 - \mathbf{s}$，其中$\mathbf{s}$ 是一个允许的调制波矢。它们的波矢之和等于载波的波矢之和。在线性化方程中保留 $2|u_0|^2$ 的空间均匀部分以及混合载波贡献 $2u_1u_2$。此近似忽略载波干涉图样引起的散射，以及通过 u_1^2 和 u_2^2的耦合。当在所考察的区间内，这些其他通道较弱或充分失谐时，此近似很有用；完整的耦合系统见附录A。

当边带载波频率 ν_p、ν_q 满足 $\nu_p + \nu_q = \Omega_1 + \Omega_2$, 时，振幅（$a_p$、$a_q$）满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} a_p \\ \overline{a}_q \end{pmatrix} = M_{pq}\begin{pmatrix} a_p \\ \overline{a}_q \end{pmatrix}, \qquad M_{pq} = \begin{pmatrix} \Lambda/Q_p - i\nu_p & -2\kappa A^2/Q_p \\ -2\overline{\kappa}A^2/Q_q & \overline{\Lambda}/Q_q + i\nu_q \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \lambda + i\omega - 4\kappa A^2 = X_0 + iY_0. \tag{86}$$

这里有 $X_0 = \lambda - 4\alpha A^2$ 和 $Y_0 = \omega - 4\beta A^2$。两个对角元的非线性修正至关重要：载波会改变扰动的阻尼和频率，并使其发生耦合。状态向量的两个分量共享同一个特征值 σ；共轭特征值问题描述

互补块。

对于 $X_0 < 0$，未耦合边带会衰减。附录 A.2 中的解析计算证明，保留的这一对具有正实部特征值，当且仅当

$$\boxed{4|\kappa|^2A^4 > X_0^2 + \left[Y_0 - \frac{Q_pQ_q}{Q_p+Q_q}(\Omega_1+\Omega_2)\right]^2.} \tag{87}$$

等号成立时，系统处于中性稳定性。左侧衡量的是

共轭边带耦合的强度；右侧

侧将阻尼与频率失谐结合起来。屏蔽通过 Q_p 和 Q_q影响失谐和增长率。无论固定的载波频率之和如何分配给 ν_p 和 ν_q，判据都保持不变；当 $Q_p = Q_q$时也无需修改即可适用：其推导不需要除以二者之差。方程（87）是保留矩阵（86）的精确不稳定性条件。作为对解析结果的独立数值检验，该条件在 10,000 组参数检验中均与矩阵直接求得的特征值一致，并另行检验了屏蔽相等的情况。近似之处在于将完整的耦合系统约化为这一对；该判据本身则可由约化后的系统解析推得。

对于 $X_0 > 0$，矩阵迹的实部为 $X_0(Q_p^{-1} + Q_q^{-1}) > 0$，因此对于任意耦合强度或失谐，至少有一个边带特征模会增长。对于 $X_0 = 0$，稳定性直接由特征方程（A4）得出；附录 A.2将这些情形与阻尼边带区间区分开来。

对于处于孤立波振幅 $A^2 = \lambda/\alpha$ 的载波，阻尼为 $X_0 = -3\lambda$。非零虚三次系数既能增强耦合，也能改变其失谐；放大需要完整不等式，而不仅仅是相位匹配。特别地，$|\beta/\alpha| > \sqrt{5}/2$ 是该保留对增长的必要条件，但并非充分条件。参数依赖性与非奇异特征值公式推导于附录 A。

C. 不稳定性条件：失谐与共振增益

式（87）中的阈值可以表示为边带相互放大、衰减和频率失配之间的竞争。对于 $X_0 < 0$，定义未耦合衰减率d_p、 d_q、耦合强度 g_{pq}和失谐 Δ_{pq} 如下：

$$d_p = -\frac{X_0}{Q_p} > 0, \qquad d_q = -\frac{X_0}{Q_q} > 0, \qquad g_{pq} = \frac{2|\kappa|A^2}{\sqrt{Q_p Q_q}}, \\ \Delta_{pq} = Y_0\left(\frac{1}{Q_p} + \frac{1}{Q_q}\right) - (\Omega_1 + \Omega_2). \tag{88}$$

这四个量的单位均为时间倒数。耦合强度的平方 g_{pq}^2 是式（86）中非对角耦合项模的乘积； g_{pq} 本身并非指数增长率。失谐将未耦合边带频率之和（经载波背景平移后）与载波频率之和进行比较。不稳定性条件为

$$\boxed{g_{pq}^2 > d_p d_q\left[1 + \left(\frac{\Delta_{pq}}{d_p + d_q}\right)^2\right].} \tag{89}$$

因此，频率失配会提高克服衰减所需的耦合强度。在精确共振时， $\Delta_{pq} = 0$，阈值最低： $g_{pq}^2 > d_p d_q$。共振时最大的特征值实部为

$$\mathrm{Re}\,\sigma_+ = -\frac{d_p + d_q}{2} + \sqrt{\frac{(d_p - d_q)^2}{4} + g_{pq}^2}. \tag{90}$$

当衰减率相等时， $d_p = d_q = d$，可简化为 $g_{pq} - d$，清楚地体现了放大与衰减之间的平衡。

当 $g_{pq}^2 > d_p d_q$时，式（89）还定义了一个有限的共振带宽：

$$|\Delta_{pq}| < (d_p + d_q)\sqrt{\frac{g_{pq}^2}{d_p d_q} - 1}. \tag{91}$$

无需精确匹配频率，但失配必须保持在此区间内。通过 Q_p， Q_q 和载波频率，屏蔽使该条件对波数具有选择性。使失谐最小化可降低阈值；要识别增长最快的一对，还需要特征值，因为其衰减率和耦合速率也取决于波长。

对于阻尼边带区间内的任意载波振幅（$X_0 = \lambda - 4\alpha A^2 < 0$，式（86））， 将式（ d_p、 d_q和 g_{pq} 中的量代入式（88）中的比值 $g_{pq}^2/(d_p d_q)$ 可得

$$\frac{g_{pq}^2}{d_p d_q} = \frac{4|\kappa|^2 A^4}{X_0^2} = \frac{4(\alpha A^2)^2}{(\lambda - 4\alpha A^2)^2}\left[1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right], \tag{92}$$

因为因子 $(Q_p Q_q)^{-1}$ 同时出现在 g_{pq}^2 和 $d_p d_q$中，因此会相互抵消。

在载波振幅固定时，环境屏蔽因此改变的是频率相容性和放大时间尺度，而非相对于衰减增强耦合。对于孤立波振幅 $A^2 = \lambda/\alpha$ （此时$X_0 = -3\lambda$），式（92）可简化为

$$\frac{g_{pq}^2}{d_p d_q} = \frac{4}{9}\left[1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right]. \tag{93}$$

由于式（89）中 d_p、 $d_q > 0$ 和 $\left(\Delta_{pq}/(d_p + d_q)\right)^2 \geq 0$，不稳定性要求 $g_{pq}^2/(d_p d_q) > 1$ 作为必要条件，该条件在精确共振 $\Delta_{pq} = 0$时达到。代入式（93）可得$\frac{4}{9}[1 + (\beta/\alpha)^2] > 1$，从而恢复第七节B中的阈值 $|\beta/\alpha| > \sqrt{5}/2$。由于 β 同时增强耦合并使失谐 Δ_{pq}发生偏移，将 $|\beta/\alpha|$ 增大到 $\sqrt{5}/2$ 以上未必会使增长单调增强；失谐决定了可用的耦合是否确实会导致不稳定性。

在云—雨解释中，这种机制使耦合振荡能够放大空间调制，前提是它们的

非线性相互作用尽管衰减，仍能维持足够相容的相位。它描述了保留的双边带近似中的共振放大；完整的演化还涉及载波残差以及附录中指出的其他耦合通道A。

D. 云雨组织的解读

转换为第 IIIC 节的云雨可观测量后，每个空间傅里叶模态$\mathbf{k}$ 代表一个云水增厚的传播波（$\rho = \mathrm{Re}\, u$）以及雨滴变化的滞后相位（$q = \mathrm{Im}\, u$），其相速度决定凝结–降水–恢复循环以多快的速度扫过云层。第 VIIA–VII C 节的分析表明，当多个此类波列共存时，三次反馈 $F(u)$ 与屏蔽算子 $(I - \epsilon\Delta)\partial_t$ 共同构成选择性的时空滤波器，决定云场是保持有序，还是破碎为复杂的二维结构。

具体而言，式（89）中的增益–失谐阈值对两个共存的云雨模式（$\mathbf{k}_1$,Ω_1）和（$\mathbf{k}_2, \Omega_2$）放大一个离轴调制对（$\mathbf{k}_p$，$\mathbf{k}_q$）提出了双重条件——一个是能量条件，另一个是时间条件，其中 $\mathbf{k}_p + \mathbf{k}_q = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$。首先，在孤立波振幅 $A^2 = \lambda/\alpha$ 下，式（93）要求扭转比超过 $|\beta/\alpha| > \sqrt{5}/2$：如果没有足够强的振幅依赖的频率偏移，即使在精确共振下，保守哈密顿耦合（第 V.C 节）也无法克服线性振幅阻尼。其次，即使$|\beta/\alpha| > \sqrt{5}/2$，式（88）中的屏蔽频率失配 Δ_{pq} 也必须保持在式（91）的有限共振带宽内。从物理上看，如果经背景移位后的边带振荡频率相对于 $\Omega_1 + \Omega_2$, 漂移过快，交叉载波相位滑移就会在净放大发生之前出现。动态惯性通过屏蔽因子 $Q_{\mathbf{k}} = 1 + \epsilon|\mathbf{k}|^2$参与这一时间选择过程，但作用方式是间接的。尽管 Q_p 和 Q_q 已被约去，以形成式（93）中的双载波增益阻尼比，但它们会改变 Δ_{pq} 中的模态频率（式（88））以及式（90）中的增长时间尺度，从而调节哪些空间波长和方向落入放大带。

综合来看，这些结果揭示了在第 VIII 节数值探索的参数范围内，云场重组的两条互补路径。当 $|\beta/\alpha| < \sqrt{5}/2$时，保留的双边带放大通道处于关闭状态；重组纯粹通过确定性的叠加残差$\mathcal{R}$（式（A2））以及完整傅里叶模态耦合（式（84））进行，从而重塑波峰、使峰值偏移达到饱和，并且既可能保持连贯的 粗糙云 带状结构（$\beta/\alpha = 0.25$ 见第 VIIIA节），也可能将胞状干涉图样整合为平行对流卷（$\beta/\alpha = 1$ 见第 VIIIE节）。然而，一旦$|\beta/\alpha| > \sqrt{5}/2$，共振双边带放大便会与残余谐波驱动一同开启，使相容的离轴调制呈指数增长，并推动有序带状结构向富含缺陷的粗糙云状波网络跃迁（$\beta/\alpha = 2$见第 VIII B–VIIID节）。当存在多于两个载波时，成对通道会共享模态，并与载波耗尽和高次谐波同时相互作用；式（84）（以及附录 A）中的完整傅里叶系统支配这一联合的非线性演化，而式（87）则确定了启动该过程的共振不稳定通道。

VIII. 建模结果

现在，我们检验第IV–VII节所确立的解析机制——动态惯性、诺特荷的哈密顿量–梯度分解、相位扭转敏感性以及共振边带耦合——如何在超越线性区域的情况下组织二维云雨场。模拟在周期性方形区域 $\mathbb{T}^2 = [0, L)^2$ 上积分确定性 PGLE，即公式 $L = 20$ （参数、坐标和时间均以无量纲模型单位报告，云层照片仅用于形态比较，而非量纲标定）。在整个实验过程中，$\rho = \mathrm{Re}\, u$ 表示带符号的云水路径异常，而 $|u|$表示联合云雨振荡幅度（第 IIIC节）。我们考察云场组织的三种基本途径：由扭转驱动的相干波状云样带状结构向富含缺陷的粗糙云样波网络转变（第VIII A–VIIID节），胞状干涉图样自发整合为平行对流卷（第VIII E节），以及从无结构的随机异常中形成胞状和分支状放射状云样结构（第VIIIF节）。

A. 波状带状解

在云形态中，波状云 指横跨云层的准规则波状条带，而粗糙云则指底部强烈卷曲、局部粗糙的云 [49, 85, 86]。尽管粗糙云的大气表现可能源于水热力学不稳定性，例如剪切层中的液滴沉降和蒸发 [50], ，PGLE 揭示了一种内禀振荡机制：随着振幅–频率扭转 $\beta = \mathrm{Im}\, \kappa$ 增大，该机制将规则条带与卷曲波状结构联系起来。为探究这一跃迁，我们用 n 非线性平面波的叠加来初始化场，

$$
\begin{aligned}
S(\mathbf{x}, t) &= \sum_{j=1}^{n} A e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + \Omega_j t)}, \qquad A^2 = \frac{\lambda}{\alpha}, \\
\Omega_j &= \frac{\omega - \beta A^2}{1 + \epsilon|\mathbf{k}_j|^2}, \qquad u(\mathbf{x}, 0) = S(\mathbf{x}, 0).
\end{aligned}
\tag{94}
$$

每个求和项都是 PGLE 的精确单色解，具有饱和振幅 A 和经扭转偏移的频率Ωj（式（43）），因此线性叠加 S（$\mathbf{x}$ t）可作为解析参考，用于追踪独立的载波传播，同时忽略非线性模态耦合。我们在固定增长率、基频、屏蔽和饱和参数（$\lambda = 5$、 $\omega = 3$、 $\epsilon = 0.1$、 $\alpha = 10$）下，使用表 I中列出的波矢初始化四个载波，并改变扭转参数 β。

表 I：式（$n=4$）中四波（94）初始条件的波矢。此处 $a=2\pi/L$ 为基波数，$L=20$。

波矢分量	
$\mathbf{k}_1$	$a(10,\ -18)$
$\mathbf{k}_2$	$a(12,\ -18)$
$\mathbf{k}_3$	$a(14,\ -14)$
$\mathbf{k}_4$	$a(16,\ -12)$

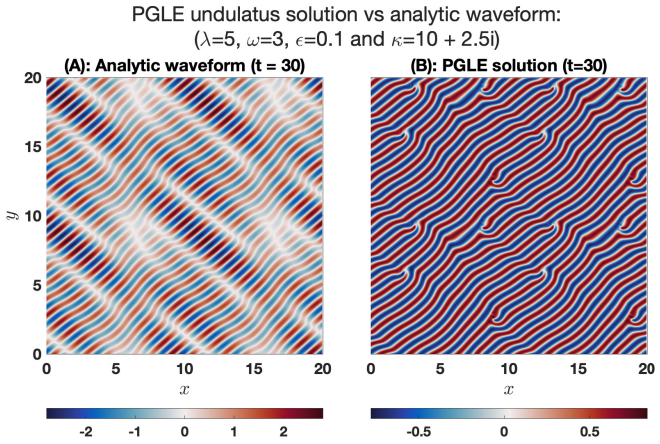

图5：**非线性演化下条带状组织的持续性**。（A）独立演化的波叠加 S（$\mathbf{x}\ t$）以及（B）在 $t=30$处、由 S（$\mathbf{x}$，0）初始化得到的 PGLE 解的实部。四个波矢列于表I中；$\lambda=5$、$\omega=3$、$\epsilon=0.1$、$\kappa=10+2.5i$以及 $L=20$。不同的色标显示了非线性饱和所伴随的振幅减小。

在弱扭转（$\beta=2.5$）下，PGLE 解保留了解析参考的对角取向和大尺度包络 S（$\mathbf{x}\ t$），同时使各个波峰变得更加尖锐，并降低其峰值振幅（图5 和图 6C、D）。在强扭转（$\beta=20$）下，相同的初始波叠加解体为由弯曲波峰、波线终止点和相交波脊组成的迷宫状网络，让人联想到粗糙云（图 6A、B）。

第 V.C 节（式（64））确立的哈密顿–梯度结构解释了为何这一比较能够清晰地隔离相位扭曲的作用：由于 ω 和 β 完全存在于守恒哈密顿量 $H[u]$（式（61））中，它们不会出现在式（56）中诺特荷 $\mathrm{N}_\epsilon=\mathrm{E}_\epsilon$ 的整体产生–耗散定律里。保持（λ、α、ϵ）不变，将 β从 2.5 变为 20，不会改变朗道势 $V[u]$ –(式（63）) 以及孤立波的饱和振幅 $A=\sqrt{\lambda/\alpha}=1/\sqrt{2}$。因此，图6B-C中的形态转变是由守恒哈密顿相位剪切$J_\epsilon\,\mathrm{grad}\,H[u]$ 驱动的，它将诺特荷 $\mathrm{N}_\epsilon=\mathrm{E}_\epsilon$从体振荡振幅 $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2}|u|^2\,\mathrm{dx}$重新分配到精细尺度空间梯度 $\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{T}^2}|\nabla u|^2\,\mathrm{dx}$。

表 II通过 $\mathrm{Re}\ u(\mathbf{x}\ t)$ 与 $\mathrm{Re}\ S(\mathbf{x}\ t)$之间空间相关性的变化，量化了中间扭转值下相干性的逐渐丧失。由于 $S(\mathbf{x}\ t)$ 已经包含了单载波频移$\Omega j(\beta)$，因此相关性的任何衰减都反映了交叉载波相互作用（见方程 84）的累积效应。对于 $\beta=2.5$，非线性场仍与参考值紧密锁定（0.76在$t=50$），而随着 β 的增加，去相关速度加快；当达到 $\beta=20$ 时，独立波图样的记忆已在 $t=20$之前丧失。

B. 从平面波到复杂图样

第七节的波相互作用理论区分了导致表 II 中演化过程的两种动力学机制。第一种机制是方程 (A2) 中由叠加残差 R 产生的直接谐波强迫，它在 β的所有取值下均发挥作用：四个载波发生重叠时，三次乘积 $|u|^2u$ 激发组合波矢 $\mathbf{k}=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3$（方程 (84)），并将四波叠加的峰值偏移阻尼至饱和水平 R_*，从而解释了图 5 中 $\beta=2.5$ 所示的振幅减小和波峰变尖。随着 β 增大到诸如 β =10—此时方程 (93) 中的双载波增益阻尼比仍处于亚临界状态，$g_{pq}^2/(d_pd_q)=8/9<1$—这种残差强迫与更强的振幅诱导的相移共同作用，使载波逐渐失相，并在 $t=50$ 前将表 II 中的相关性驱动至零。

第二种机制是共振双边带放大（第 VIIC节），当扭转比超过$|\beta/\alpha|>-\sqrt{5}/2\approx1.12$时便会开启。虽然 $\kappa=10+2.5i$产生 $g_{pq}^2/(d_pd_q)=17/36<1$，并阻止所保留的边带对发生指数增长，$\kappa=10+20i$ 产生 $g_{pq}^2/(d_pd_q)=20/9>1$，从而使任何屏蔽频率失配 Δ_{pq}落在公式（91）的共振带宽内的边带对，都能够克服线性阻尼（公式（89））而发生指数放大。从物理意义上说，强振幅–频率耦合使相互重叠的云–雨波列能够彼此增强离轴调制，只要动态惯性使它们的频率处于近共振状态，便可形成一条集体不稳定性路径；这与云解析研究中降水周期和重力波调制之间的相互作用相似 [3, 4]。

C. 拓扑缺陷

有序的波状状态（$\beta=2.5$，图6C、D）和受扰的粗糙云状态（$\beta=20$，图6A、B）都具有一个显著的结构特征，即存在局部带状结构终止和Y形位错。将 $u=Re^{i\vartheta}$写作振幅 $R=|u|$ 与周期相位 $\vartheta=\arg u$，我们通过计算沿正向闭合曲线$\mathcal{C}$ 绕行的相位绕数（该曲线避开 u [74, 87]的零点），从而区分真正的拓扑位错与普通的云水槽：

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}}\nabla\vartheta\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\in\mathbb{Z}. \tag{95}$$

非零整数荷 $\nu=\pm1$ 意味着云–雨循环沿$\mathcal{C}$周向前进或后退一个完整周期；根据连续性，这要求振荡振幅在$\mathcal{C}$内部的某个缺陷核心处归零（$R=0$,

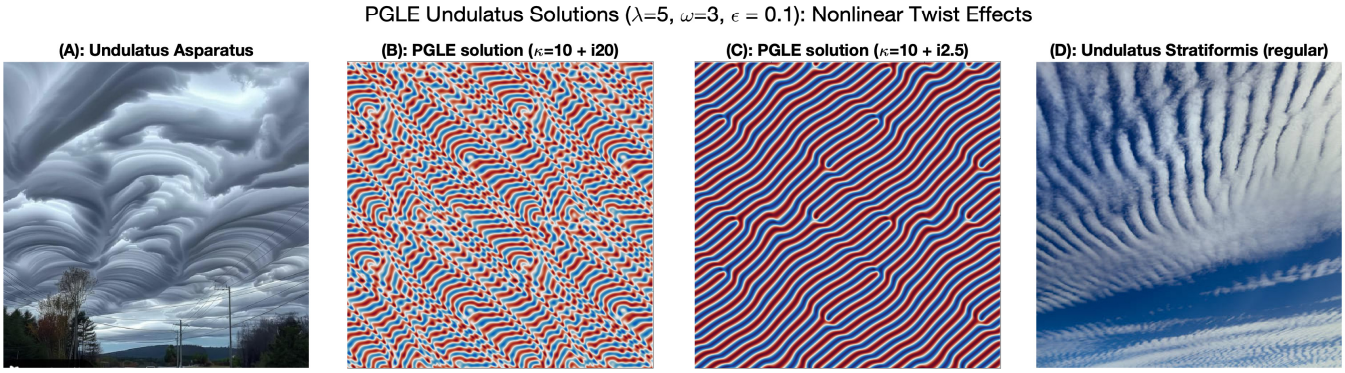

图6：**规则与不规则波组织**。云层照片展示了（A）2024年6月新罕布什尔州戈勒姆上空的粗糙云，以及（D）规则的波状云带。图（B、C）分别显示了由同一四波初始图样演化而来的 $\kappa = 10 + 20i$ 和 $10 + 2.5i$ 的 PGLE 场实部。两次模拟均采用 $\lambda = 5$、$\omega = 3$、$\epsilon = 0.1$ 和 $L = 20$。比较结果突显了有序波状云中的带中断（C、D），以及不规则状态中精细复杂的波浪几何形态（A、B）。在模型中，相位缺陷标示出带状结构终止，而更强的依赖振幅的时序偏移会扰乱有序图样。图（B、C）显示了水汽路径异常，为照片所呈现的形态提供了动力学解释。

表 II：$\mathrm{Re}\, S(\mathbf{x}\ t)$ 与 $\mathrm{Re}\ u(\mathbf{x}\ t)$ 在匹配时间下的空间相关性。解析参考由式（94）定义，每次模拟均从 $u(\mathbf{x},0) = S(\mathbf{x},0)$开始。参数为 $\epsilon = 0.1$、$\omega = 3$、$\lambda = 5$和 $L = 20$。每个系数比较同一时刻的两个空间场，衡量它们偏离载波独立演化的程度。

κ	$t = 5$	$t = 10$	$t = 20$	$t = 30$	$t = 40$	$t = 50$
$10 + 2.5i$	0.88	0.88	0.86	0.84	0.80	0.76
$10 + 7.5i$	0.72	0.71	0.68	0.65	0.60	0.56
$10 + 10i$	0.58	0.53	0.42	0.35	0.18	-0.059
$10 + 12.5i$	0.42	0.34	0.27	-0.028	-0.041	-0.026
$10 + 15i$	0.26	0.29	0.022	0.0022	-0.0038	-0.0063
$10 + 20i$	0.21	0.07	-0.014	0.0062	0.0099	0.00073

因此两个水汽路径异常都回到其参考值$\rho = q = 0$）。在周期环面$\mathbb{T}^2$上，净拓扑荷为零，所以缺陷会以带相反电荷（± 1）的成对形式产生和湮灭。

对于 $\kappa = 10 + 2.5i$，图7 显示，在其他部分有序的波状云图案中，孤立带状结构的断裂恰好对应于 $\nu = \pm 1$ 相位奇点，并伴有尖锐的点状极小值 $|u|$。一旦形成，这类缺陷核心的运动便受到动态惯性的约束：对于以速度 c运动的理想化一维凹陷，将 $u(x,\ t) = e^{i\Omega t}U(x - ct)$ 代入方程（28，可得三阶剖面方程

$$(i\Omega - c\partial_z)(I - \epsilon\partial_z^2)U = (\lambda + i\omega)U - \kappa|U|^2U, \qquad (96)$$

其推导见附录 C.3，这要求任何平移运动的缺陷核心都必须与其周围的屏蔽波包络协同调整。相比之下，在 $\kappa = 10 + 20i$处，图8 显示，这些孤立的点状核心转变为由云异常梯度的强烈丝状结构 $|\nabla\, \mathrm{Re}\, u|$（图8A）勾勒出的深振幅谷密集网络（图8B）。

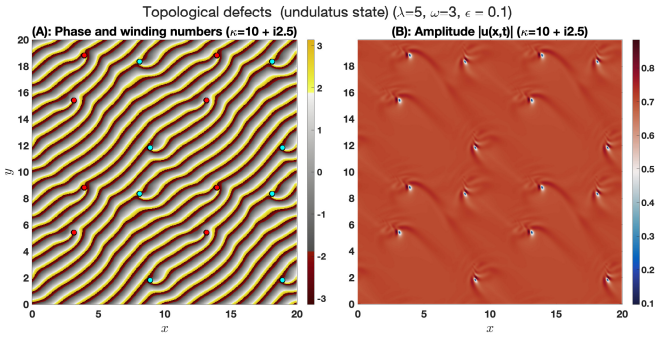

图 7：**有序带状状态中的相位缺陷**。（A）带有电荷为 $+1$（红色）和 -1（青色）缺陷的相位场，依据式（95）中的绕数识别。（B）对应的振幅 $|u|$，在相位奇点附近有局部极小值。参数为 $\lambda = 5$，$\omega = 3$，$\epsilon = 0.1$，$\kappa = 10 + 2.5i$ $L = 20$ ，以及 。在这次 $\beta = 2.5$ 运行中，缺陷打断了各条带状结构，但整体取向得以保留；图 8 和 9 分别描述了在 $\beta = 20$处的演化。

D. 缺陷核心附近的振幅与相位

附录中推导出的屏蔽极坐标方程 C（方程（C1））解释了为何增加 β 会将平滑波干涉转变为图 8中的尖锐梯度丝状结构和缺陷核心。在方程（C1）中，局部反应趋势以 $\omega - \beta R^2$的速率推进相位，其空间梯度为

$$\nabla(\omega - \beta R^2) = -2\beta R\nabla R. \qquad (97)$$

每当载波干涉在相邻云团元素之间形成空间振幅对比（$R_1 \neq R_2$），方程（97）

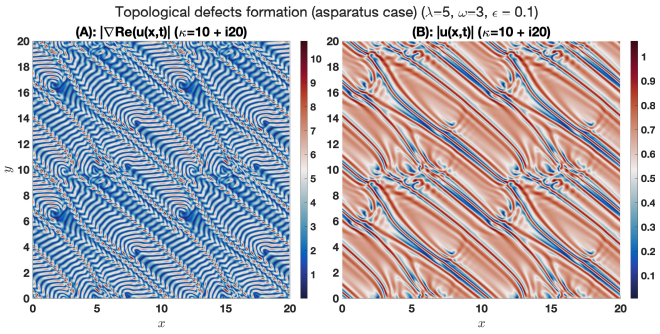

图 8：**不规则波状态中的精细结构**。(A) 云异常梯度的大小，$|\nabla \mathrm{Re}\, u|$，以及 (B) 联合振荡振幅 $|u|$ 在 $t = 9$ 下对应 $\kappa = 10 + 20i$。其余参数为 $\lambda = 5$，$\omega = 3$，$\epsilon = 0.1$ $L = 20$ 7, $\beta = 2.5$ ，以及，与图 中相同，其运行所用参数为 。在 $\beta = 20$处，破碎条带伴随着尖锐对比和大量振幅凹陷。(B) 面板与图 9B 中的振幅快照相同；该图通过更早的快照以及由式 (95) 定义的相位缺陷计数，追踪了演变至此状态的过程。

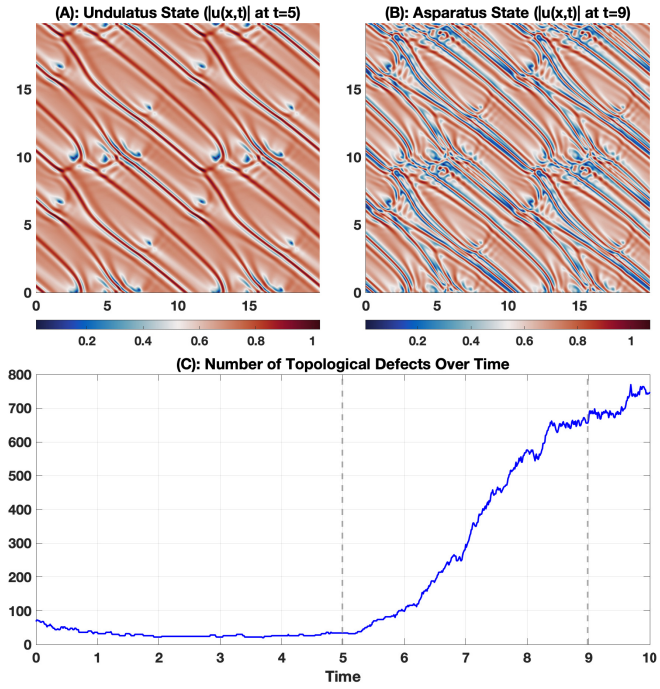

图 9：**向图 8 所示不规则状态演变的过程**。。振幅 $|u|$在 (A) $t = 5$ 和 (B) $t = 9$ 中，均来自固定 $\kappa = 10 + 20i$条件下的同一次运行；(B) 面板重现了图 8B。面板 (C) 给出了这一演变过程中的相位缺陷计数，垂直虚线标示各快照。初期下降后，在 $t \simeq 5$之后持续上升，同时状态从大范围对齐带转变为密集断裂的状态。两幅快照均采用 $\lambda = 5$，$\omega = 3$，$\epsilon = 0.1$，以及 $L = 20$。振幅依赖的计时（式 (97)）以及增益与失谐之间的平衡（式 (89)）为正文所阐述的动力学解释提供依据，而相位绕转（式 (95)）则揭示了拓扑变化。

就会产生差分相位漂移项 $-\beta(R_2^2 - R_1^2)$，使相位曲面发生绕转并变得更陡 $|\nabla u|$。从附录 C.2 中等时线几何的角度来看（方程 (C2) 和 (C4)），在 $\alpha = 10$ 固定时，将 β 从 2.5 提高到 20，会使等时线扭转参数 β/α 增大八倍，从 0.25 增至 2：因此，给定的分数振幅扰动 R_2/R_1 会诱导出大八倍的渐近相移 $-(\beta/\alpha)\log(R_2/R_1)$，从而增强同一种剪切诱导的相位敏感性；这种敏感性驱动了非空间 KTF 延迟模型 [27, 28, 30] 中的不规则开放胞元振荡。在空间场中，随着这种差异相位绕转使 $\nabla\vartheta$ 变得更陡，方程 (C1) 中的非局部屏蔽响应 $\mathrm{H} = e^{-i\vartheta}(\mathrm{Q}^{-1} - I)F(u)$ 会降低相反相位交汇处的局部模 R，使 R 降至零，从而产生 ± 1 缺陷对。从第 V.C 节的诺特荷平衡角度看，这种由扭转驱动的相位剪切，正是保守的哈密顿流将 $\mathrm{N}_\epsilon = \mathrm{E}_\epsilon$ 从体振幅积分 $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2} |u|^2\, \mathrm{dx}$ 中转移出去的确切机制，由此形成图 8B 中的暗振幅波谷网络，并将其集中到梯度积分 $\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{T}^2} |\nabla u|^2\, \mathrm{dx}$ 中——产生图 8A 中 $|\nabla \mathrm{Re}\, u|$ 的明亮丝状脊——由于动态惯性，这些脊不会被快速扩散抹除。

测量非线性相干性与失稳。追踪沿 $\kappa = 10 + 20i$ 轨迹的相位缺陷总数，表明在环境参数固定时，这种从波状云带到粗糙状湍流的跃迁会随时间动态发生（图9）。在 $t = 5$之前，振幅场仍保留大体排列整齐的对角带状结构，其间仅散布着几十个孤立缺陷（图 9A），缺陷总数则从约 70逐渐降至约 25（图 9C）。然而，在 $t \simeq 5$ 附近，一旦不断增长的边带和扭转诱发的相位梯度达到有限振幅，图样便会经历快速的拓扑跃迁：缺陷对在整个区域内成核，使缺陷数在 700 之前 $t = 9$ 超过 700，并将带状结构撕裂成图 9B 中的复杂网状结构（与图 8 B 相同）。结合表 II，图 9 表明，强烈的振幅–相位扭转与屏蔽波耦合足以触发从有序云状带自发跃迁至缺陷主导的波态，而无需外部随机强迫。

E. 胞元到卷的整合

PGLE 也可以反向运行，自发地将二维胞元图样巩固为规则的平行滚动结构（图10）。用三个方向对称、相位为零的载波——$\mathrm{k}_1 = a(10, 0)$、$\mathrm{k}_2 = a(-5, 8)$ 和 $\mathrm{k}_3 = a(-5, -9)$ ($a = 2\pi/L$, $L = 20$) at$\lambda = 2, \omega = 3$, $\epsilon = 0.1$, and $\kappa = 2 + 2i$——初始化方程 (94)，会在 $\mathrm{Re}\, u$ at $t = 0$ 中产生六边形胞元干涉图样（图10A）。在漫长的准稳态平台期（$15 \lesssim t \lesssim 85$），胞元阵列逐渐变形成对齐的对角线段，空间平均振幅 $|u|$徘徊在 0.94 附近；随后在 $t \approx 90$附近突然重组为无缺陷平行卷带，其平均振幅锁定在孤立波饱和值$R_* = \sqrt{\lambda/\alpha} = 1$ （图10B–G）。

细胞阶段受抑的振幅平台（$\langle|u|\rangle \approx 0.94$）以及其在卷形成时上升至 $R_* = 1$，都直接源于第 VC 节（方程（56）和（64））中的诺特荷平衡。应用柯西–施瓦茨不等式

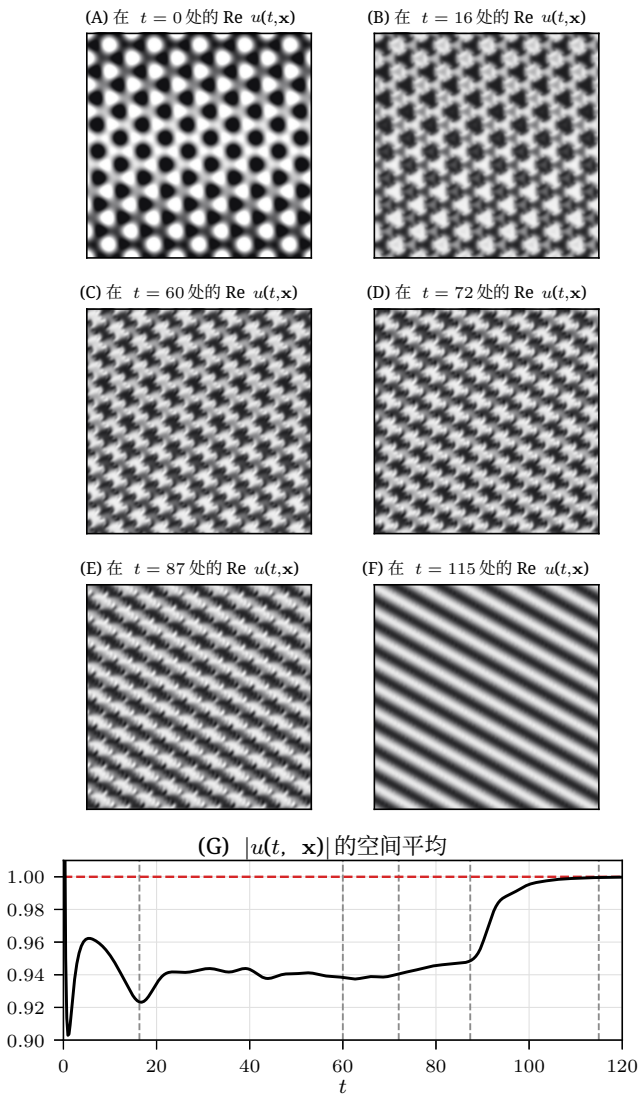

图10： **自发组织成规则条带**。（A–F）所示时间点的实部快照，初始状态为文中指定的三波叠加。（G）的空间平均；红色虚线表示孤立波振幅 $\sqrt{\lambda/\alpha}=1$，竖线标记后续快照。胞状干涉图样向带状结构的跃迁伴随着系统趋近于该振幅。参数为 $\lambda=2$、$\omega=3$、$\epsilon=0.1$ $\kappa=2+2i$ $L=20$ 、以及 。胞状到条带的转变将孤立波饱和均衡（方程（85））与积分振幅均衡（方程（56））联系起来；空间调制的减弱以及日益平行的带状结构记录了所示时间间隔内的巩固过程。

性 $\int_{\mathbb{T}^2}|u|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\ \le V^{1/2}\,(\int_{\mathbb{T}^2}|u|^4\,\mathrm{d}\mathbf{x})^{1/2}$（其中 $V=|\mathbb{T}^2|$）到方程（56）可得

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\epsilon}{\mathrm{d}t}\le\lambda\int_{\mathbb{T}^2}|u|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\left(1-\frac{\alpha}{\lambda V}\int_{\mathbb{T}^2}|u|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right),\tag{98}$$

这保证了只要空间均方振幅 $\mathcal{E}_\epsilon$ 严格大于$R_*^2=\lambda/\alpha$，$\langle|u|^2\rangle=V^{-1}\int_{\mathbb{T}^2}|u|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ 就会严格减小。

此外，在全局电荷产生与三次耗散相平衡的任何准稳态或渐近状态下 $(\mathrm{d}\mathcal{E}_\epsilon/\mathrm{d}t\simeq 0)$，方程 (56强制满足 $\langle|u|^4\rangle=R_*^2\langle|u|^2\rangle$。将 $|u|^2$ 的空间方差表示为 方差$_x(|u|^2)=\langle|u|^4\rangle-\langle|u|^2\rangle^2\ge 0$，可得精确的振幅亏损恒等式

$$\langle|u|^2\rangle=R_*^2-\frac{\mathrm{Var}_x(|u|^2)}{\langle|u|^2\rangle}\le R_*^2,\tag{99}$$

当且仅当振荡模 $|u(\mathbf{x}\ t)|\equiv R_*$ 空间均匀时，等式 $|u|=R_*$ 成立。在图 10A–E 所示的三波胞状阶段，干涉节点和波腹保持有限的空间方差 Var$_x(|u|^2)>0$；根据式 (99)，这会使 $|u|$低于 $R_*=1$。由于此处的 $\beta/\alpha=1$ 低于式 (93) 中的双载波边带不稳定性阈值 $|\beta/\alpha|>\sqrt{5}/2$（$g_{pq}^2/(d_pd_q)=8/9<1$），共振边带放大不会发生；相反，式 (58) 中的三次模态竞争会逐步抑制三种载波方向中的两种，消除 Var$_x(|u|^2)$，并使云场演变为单一的恒模条纹波，其$|u|\equiv R_*=1$。

F. 纯粹随机性中涌现的相干图案

前述实验以有限振幅的波叠加初始化 PGLE，而图 11–13表明，细胞状和螺旋状的放射形云状图案，会从微小、空间上互不相关的高斯异常中自发涌现（$u_0\sim 10^{-4}$），无需预设载波或扭转。这里，我们以$\lambda=0.3$、$\omega=3$、$\epsilon=0.01$以及真实的 $\kappa=10$ 在 $[0,20)^2$为例说明这一特征；数值计算与诊断细节见附录 D 。将非线性 PGLE 轨迹与由相同初始种子得到的精确线性演化（式（D2））进行比较，可以剥离出三次饱和在形成中尺度结构中的确切作用。

将式（56）（第 VC节）中的全局诺特荷平衡改写为无量纲增长–饱和比 $R_E(t)$ 的形式，该比值绘于图 11h，

$$R_E(t)=\frac{\alpha\langle|u|^4\rangle}{\lambda\langle|u|^2\rangle},\qquad\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\epsilon}{\mathrm{d}t}=\lambda V\langle|u|^2\rangle\big[1-R_E(t)\big],\tag{100}$$

将涌现过程划分为两个截然不同的动力学阶段。对于 $t\lesssim 30$，振幅很小（$R_E\ll 1$），因此，式（64）中的势梯度流 $-A_\epsilon^{-1}$ grad $V[u]$ 由线性屏蔽放大 exp$[2\lambda t/(1+\epsilon|\mathbf{k}|^2)]$（式（57））主导，它优先放大低波数，并使非线性场与其线性对照以相同方式粗化。在 $t=30$ 和 $t=45$ 之间，范数比降至 0.9 以下（在 $t=30$），归一化谱全变差距离超过 0.05（约在 $t=36$），且 $R_E(t)$ 上升并越过 0.5（约在$t=33$），到 $t\approx 45$ 时趋近于 1（图 11h）。在 $R_E(t)\simeq 1$，诺特荷 $\mathrm{N}_\epsilon=\mathrm{E}_\epsilon$ 的净全局产生停止 $\dot{(}\mathrm{E}_\epsilon\simeq 0)$，使场锁定在其全局饱和流形上。然而，至关重要的是，全球荷增长停止并不意味着空间图样冻结：在 $t\in[40,60]$ 期间，式（58）中的非线性模态耦合在 E_ϵ 近乎恒定的情况下重新分配不同波数上的功率，使功率加权特征长度 $\ell_u(t)$（式（D3））稳定在约 2.84 的平台，而未受抑制的线性对照则继续粗化，从 3.17 增至

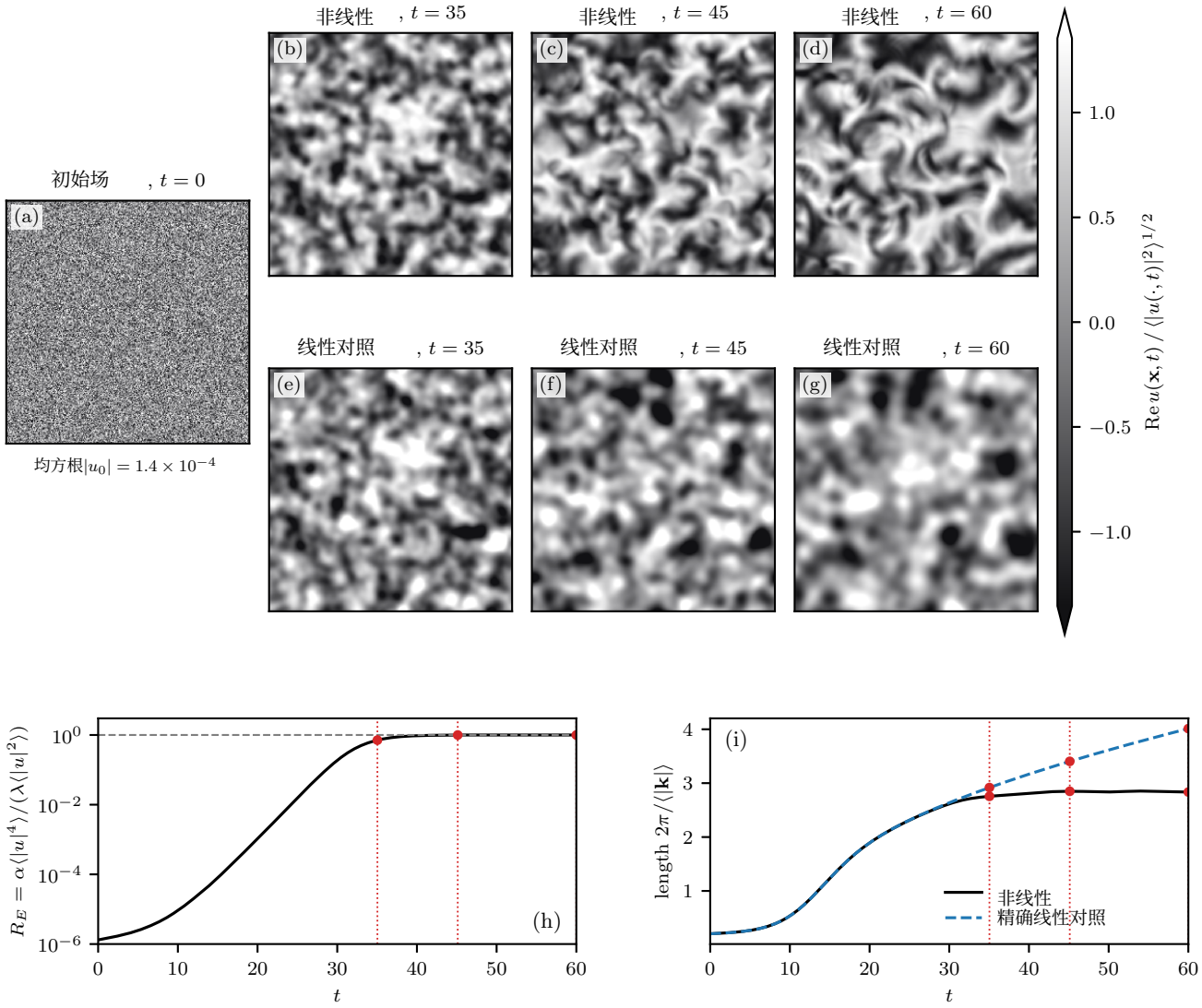

图 11：随机异常中胞状结构和螺旋状云水图案的涌现。(a) 对 $10^{-4}(\xi + i\zeta)$ 进行傅里叶投影后初始场的实部，网格点处取相互独立的标准正态值。(b–d) $t = 35$、45 和 60 时刻的非线性 PGLE 云水异常 $\mathrm{Re}\, u$，逐渐形成尖锐的交错胞元和弯曲的螺旋丝状结构；与之对比的是 (e–g) 从同一投影初始场出发的精确线性演化，其粗化为弥散斑块。快照时刻经过四舍五入（$t = 35.04$、45.12、60）；每幅图均显示 $\mathrm{Re}\, u$，并以 u 的空间均方根振幅进行归一化，采用统一的灰度标尺 ± 1.355（即 $t = 60$ 时归一化场的第 99 百分位数，超出此范围的值均截断；最多涉及 6.5% 的像素）。(h) 方程 (100) 中的增长–饱和比 R_E；虚线表示全局诺特荷平衡。(i) 功率加权特征长度，见方程 (D3)，显示出相较于线性对照，非线性演化中的粗化受阻（红色标记表示快照时刻）。参数：$\lambda = 0.3$、$\omega = 3$、$\epsilon = 0.01$、$\kappa = 10$ $L = 20$，单位为模型单位。

4.01 (图 11i)且其云水异常逐渐扩展为弥散的斑块，而非非线性场中清晰、相互交织的弯曲丝状结构（图11b–g）。

饱和后谱重新分布在云雨场上留下了两个稳健的几何特征。首先，去趋势振荡振幅的径向自相关 $\rho_{|u|}(r) = C(r)/C(0)$锁定在近乎静止的剖面上，并在 $r \approx 0.6$–0.7 模型单位的间距处保留一个明显的负波瓣；在此期间，它从 -0.09 在 $t \in [30, 40]$ 增至 -0.12 在 $t \in [40, 60]$，而线性对照则单调展宽，且没有出现反相关（图 12d,e）。从物理角度看，三次饱和会产生特征排斥尺度，在此尺度上，剧烈振荡的云雨胞元（$\mathrm{Re}\, u$ 见图 12a–c）两侧有规律地分布着较平缓的振幅低谷，从而为云雨振荡所偏好的中尺度相干窗口以及胞状统计特征的持续性提供了一种确定性机制，即使单个云在生长和消散过程中循环变化， [4, 51]。

其次，饱和的云水场会在拓扑缺陷周围形成显著的螺旋臂几何（图 13）。由于不相关的复初始场中散布着相位奇点，在这些位置 $\vartheta = \arg u$ 会绕转 $\pm 2\pi$

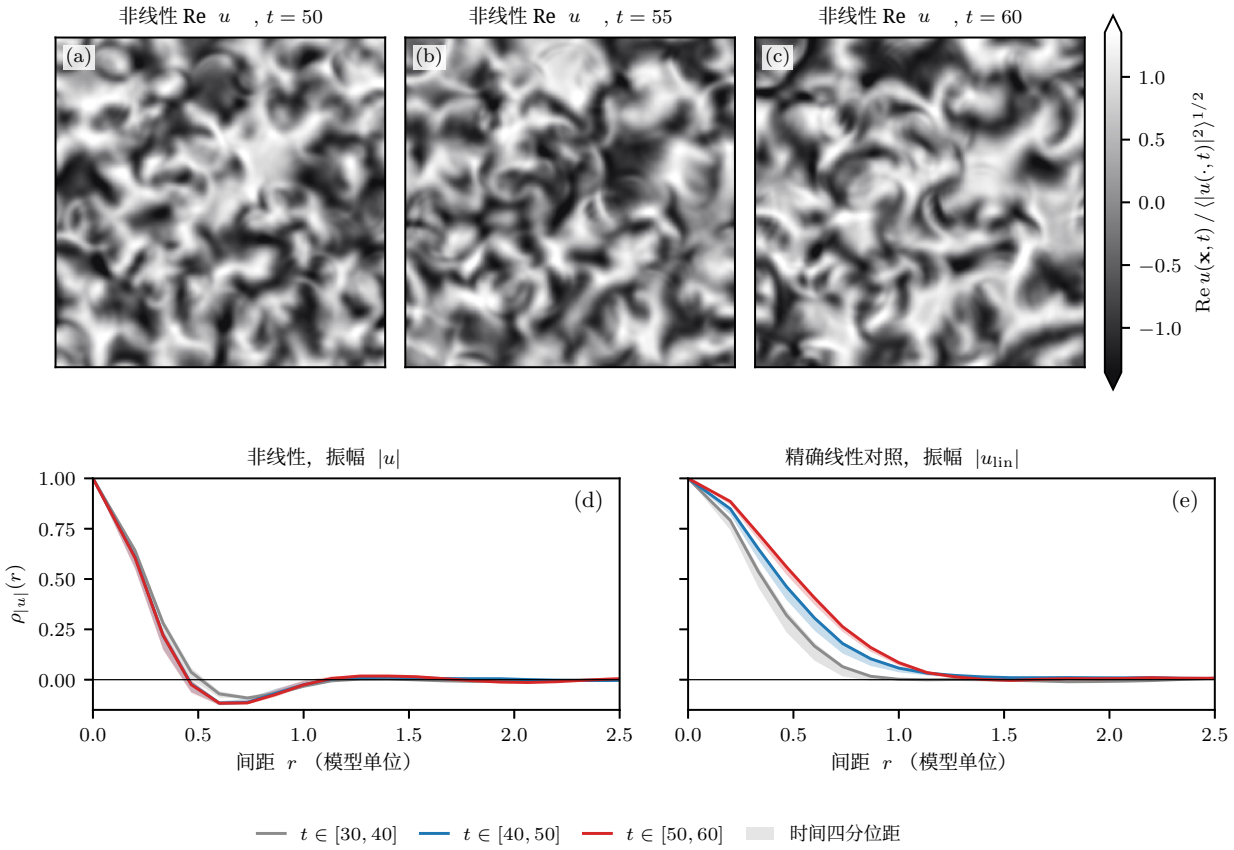

图 12：饱和云雨场中的持续性胞状排斥尺度。(a–c) 在 $t = 50$、55 和 60 时的非线性云水异常 $\mathrm{Re}\, u$（保存于 $t = 49.92$、54.96 和 60），以 u 的空间均方根振幅归一化，并采用图 11 的灰度标尺 ± 1.355（最多有 1.1% 的像素被截断）。(d,e) 非线性演化 (d) 及其精确线性对照 (e) 的去趋势振荡振幅径向空间自相关 $\rho_{|u|}(r)$，显示指定时间窗口内的逐帧中位数（实线）和时间四分位距（阴影）（附录 D）。尽管单个云水结构在 (a–c) 中持续演变，(d) 中的非线性振幅相关性却收敛到一条稳定曲线上，并在 $r \approx 0.6$–0.7 模型单位附近呈现明显的负排斥瓣；逐渐展宽的线性对照 (e) 中则没有这一特征。

（式（95））， 三次饱和会将 $|u|$ 推向 $R_* = \sqrt{\lambda/\alpha}$，使其在这些零点以外的各处增大，同时保持 $\nu = \pm 1$缺陷核心完好无损。在每个核心周围，云水等值线 $\mathrm{Re}\, u = |u| \cos\vartheta$ 必须完整绕行一周，而由式（C1）所控制的屏蔽相位耦合会使这些等值线弯曲成向外辐射的螺旋臂，且手性各异——其特征可由式（螺旋指数 c）中的螺旋指数 D4表示，该指数在图 $S = +0.52$ 和 -0.48 中放大的显著核心周围分别取值；图 13b、c 中的形态令人联想到海洋放射状云系统的辐射状云臂 [52]。

值得注意的是，这种自组织发生在 $\beta = 0$，此时均匀周期的调制不稳定性（式（82））和双载波边带放大（式（93）， $g_{pq}^2/(d_p d_q) = 4/9 < 1$）均未被激活，并且线性增长率 $\lambda/(1 + \epsilon|\mathbf{k}|^2)$ 在$\mathbf{k} = 0$ 处达到最大值，而不存在任何偏好的有限波数。不同于文献 [53], 中的随机 Swift–Hohenberg 云模型，该模型通过假设一个带有内禀特征波数的四阶空间算子$s_0 - (k_c^2 - |\mathbf{k}|^2)^2$ 生成细胞状和卷状图样k_c，PGLE 纯粹通过非线性饱和以及屏蔽云雨振荡的空间重新分布，选择出有限相关尺度和螺旋臂几何，这些振荡从参考态 $u = 0$ 中增长而来。

IX. 讨论

本研究通过将液滴尺度热力学耦合与云–雨振荡的随机场论联系起来，建立了一条解析研究暖云组织化的路径。从扩散性液滴生长中消去快速调整的过饱和度库，可得到屏蔽亥姆霍兹算子$(I - \epsilon\Delta)\partial_t$ 及其相关的动态惯性（第 II 节）；而对延迟云–雨反馈进行 Hopf 约化，则得到局部 Stuart–Landau 趋势项 $F(u)$（第 II D 节）。将这两个要素嵌入一个用于表示凝结、混合、转化和沉降等未解析过程的带标记泊松跳跃过程中，并对方程（26）中的三阶涨落矩进行闭合，便得到确定性 PGLE，作为归一化云水和雨水异常 $u = \rho + iq$（第 III 节）的主导系综平均演化定律。不同于晶格云模型的确定性均值

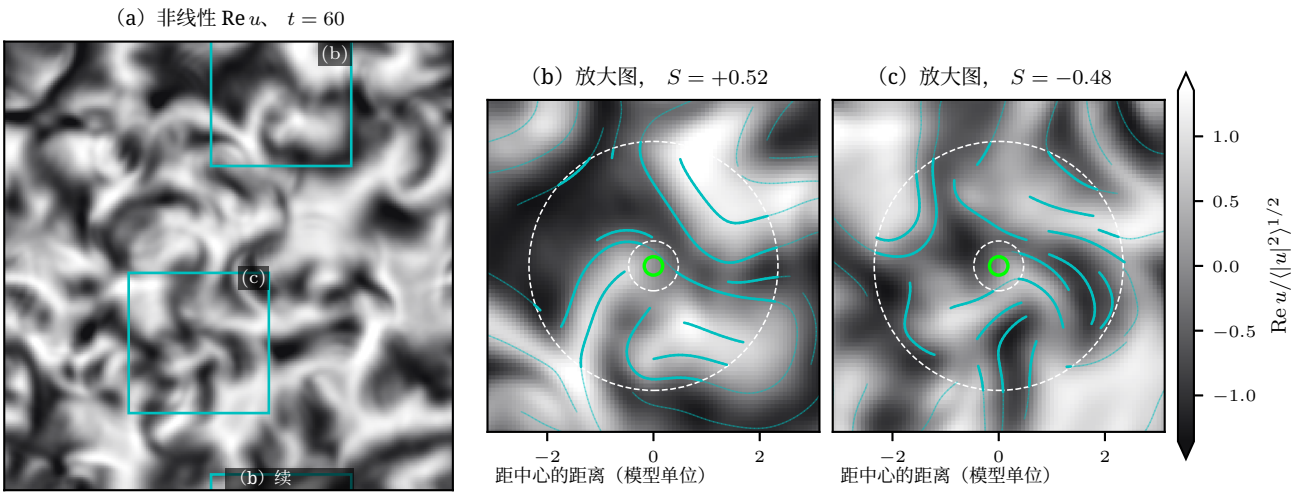

图 13： **从随机性中产生的相位缺陷周围的放射状云样螺旋臂。** (a) 非线性云水异常 $\mathrm{Re}\,u$，在 $t = 60$处由振幅为 10^{-4}的空间不相关异常演化而来，并以 u的空间均方根振幅在灰度标尺 ± 1.355 上进行归一化，该灰度标尺见图 11。散布的 $u\,(\arg u$绕转数为 $\pm 2\pi)$ 相位缺陷将周围的云水等值线组织成螺旋臂。青色方框标记了在 (b、c) 中放大的周期区域——其中方框 (b) 跨越域边界相连——这些区域以缺陷核心（绿色圆圈）为中心，并在公式 (S D4)的指标 S 下呈现最强的螺旋绕转数。(b、c) 展示了具有相反手性的螺旋臂放大图， $S = +0.52$ 和 -0.48从核心向外辐射，令人联想到海洋放射状云 [52]；青色曲线描绘了 $\mathrm{Re}\,u$ 的局部等值线方向（虚线评分环带内较亮，外部较暗）。

场极限将空间结构压缩为总体面积分数方程， [34, 36, 45]，这种连续介质闭合保留了非局部空间耦合，并能直接解析云形态，同时仍然是一种开放系统闭合，其物理水量 $M_l(t)$（第 VA 节）及坐标映射必须根据母体云解析动力学进行校准。

将 PGLE 与经典图案形成方程进行对比，有助于阐明为何动态惯性特别适用于云场（第 IVC节）。标准 CGLE 或线性随机扩散云模型中的扩散耦合 [46, 47] 会以与 k^2成正比的速率抹去精细结构，而动态惯性会削弱短于屏蔽长度的波长处的模态弛豫 $L_{\mathrm{scrn}} = \sqrt{\epsilon}$，从而使清晰的云边界、梯度丝状结构和相位缺陷得以持续存在，同时更宽尺度的振荡继续演化。即使线性扩散阈值模型能够匹配由云滴驱动的 PGLE 的静态 k^{-2} 洛伦兹谱，这两种描述仍会在时间持续性和非线性空间组织方面呈现动态差异 [44, 47]。从数学上看，PGLE 分解为 Benjamin–Bona–Mahony正则化非线性薛定谔哈密顿流和由同一度量算子控制的伪抛物型 Allen–Cahn 梯度流$A_\epsilon = I - \epsilon\Delta$ （第 VC节）。由于色散 ω 和扭转β 仅存在于哈密顿扇区中，它们守恒屏蔽加权的诺特荷 $\mathcal{N}_\epsilon = \mathcal{E}_\epsilon$，并且不会直接促成净荷产生；而线性增长和三次饱和则调节全局振幅平衡。

这种哈密顿–梯度结构统一了第 VI–VIII 节所展示的各种与云相关的跃迁。在一维情况下，动态惯性和相位扭曲共同通过非谐边带使行波载波失稳（图 2），并推动系统从波破碎跃迁到双频调制态，其饱和谱进行组织-织成一种不同于初始线性频率的尖锐组合音梳（图3–4），而共振三元组则激发区域平均的液态水振荡。在二维情况下，跨载波增益–失谐判据（式（89））确定了扭转阈值$|\beta/\alpha| > \sqrt{5}/2$，该阈值将有序的波状云带状结构（$\beta/\alpha = 0.25$，其中点缀着孤立的 $\nu = \pm 1$ 位错）和胞元到卷的整合（$\beta/\alpha = 1$，其中模态竞争消除空间振幅方差，使其达到上限 R_*）与富含缺陷的波状网格云网络（$\beta/\alpha = 2$）区分开来；后者由守恒的哈密顿相位剪切驱动，形成精细尺度梯度（图5–10）。值得注意的是，即使在 $\beta = 0$ 来自无结构的随机异常时，停止全局诺特荷的产生（$\mathrm{E}_\epsilon \simeq 0$）也会触发非线性谱重分布，从而阻止粗化，建立稳定的负自相关瓣，表明持续的胞状交替 [4, 51]，并使云水等值线围绕相位奇点缠绕成螺旋臂，呈现出类似海洋放射状云的形态 [52]（图11–13）——这一切都无需像Swift–Hohenberg描述 [53]那样预先规定内置的优选波数。综上，这些结果促成了联合观测与数值检验，用于比较云场形态 [1, 2, 49, 50], 的周期时序和分辨率足够高的水收支。

最后，底层的跳跃表述为超越确定性平均场、恢复未解析云变率提供了切实可行的路线图。与其将随机性视为临时拼凑的加性噪声 [39–41], 方程（20）和（26）揭示了有限云团事件率、单元面积和标记相关性如何产生涨落方差，并反馈至平均振荡。配套分析 [44] 阐明了有限云团足迹如何调节短波长方差，并给出了平均场闭合有效性的明确间歇性条件。展望未来，针对大涡模拟 $N(\mathrm{d}t、\mathrm{d}y、\mathrm{d}\zeta)$ 诊断结果

对卷入、脱卷、降水和整层水收支的诊断结果 [5, 6, 43]——同时执行逐事件的液态水守恒 $\mathscr{L}(\eta) = 0$，针对仅发生转化的事件（第 VA节）——将使随机PGLE和跳跃扩散响应工具 [88] 能够量化间歇性气团物理过程如何塑造真实云场的持续性与跃迁。

除了LES标定之外，如何厘清非线性模态相互作用与跳跃噪声如何共同驱动云区态跃迁，是一个引人关注的数学挑战。经典的中心流形和随机不变流形约化 [89–91]依赖于扇形算子，且要求具有显著的谱间隙，以将慢活跃模态与快速阻尼的细尺度分离开来。相比之下，动态惯性使伪抛物型算子$(I-\epsilon\Delta)^{-1}$ 有界，因此当 $|\mathbf{k}| \to \infty$ 增大时，模态速率会在零点处累积，高波数结构调整缓慢，从而削弱时间尺度分离。此外，由于每个傅里叶模态在 $u = 0$ 增大时都会增长， $\lambda > 0$有意义的后向–前向（BF）辅助系统无法锚定在平凡态上；相反，边带不稳定性图（图2）以及第VI 和VII节的共振增益–失谐判据变得不可或缺，它们为振荡态的共旋转坐标系提供谱结构蓝图，用于将边带块 M_q （或 M_{pq}）拆分为不稳定后向扇区 $H_{\mathfrak{c}}$ 和真正阻尼的前向扇区$H_{\mathfrak{f}}$。在这一拆分基础上，最优参数化流形和非马尔可夫约化模型的变分框架 [92, 93]——在与 [90, 94, 95]关于弱时间尺度分离和跳跃驱动系统的研究保持连续性的基础上发展而来——为在此类挑战性情形下推导振幅闭合提供了自然路径。事实上，在 $H_{\mathfrak{c}} \oplus H_{\mathfrak{f}}$ 上对有限时域BF系统进行积分，可以在高波数处对弱伪抛物型谱隙进行正则化，同时通过路径依赖系数编码跳跃噪声和三元组相互作用。将这一形式体系调整至此处所确定的边带和共振三元组子空间，有望构建低维非马尔可夫振幅闭合模型，从而预测跳跃诱导的带状、胞状和不规则云场状态之间的跃迁。这一方向将在其他地方继续研究。

致谢。 本研究得到欧盟“地平线2020”研究与创新计划下欧洲研究委员会（ERC）的资助（资助协议编号810370），并得到魏茨曼科学研究所克内尔家族人工智能研究所以及魏茨曼科学研究所环境可持续性研究所（IES）的支持。本研究还部分得到海军研究办公室（ONR）多学科大学研究计划（MURI）资助项目N00014-20-1-2023，以及美国国家科学基金会资助项目DMS-2407483和DMS-2407484的支持。

数据可用性。 生成本研究图表的代码可应合理请求向作者索取。

附录 A：傅里叶耦合与双边带判据

附录 A.1. 残差与完整线性化耦合

设 $\mathcal{Q} = I - \epsilon\Delta$ 与 $F(u) = (\lambda + i\omega)u - \kappa|u|^2 u$。对于给定场 u_0，定义 $\mathcal{R} = \mathcal{Q}\partial_t u_0 - F(u_0)$。记 $u = u_0 + v$，则关于 v 的一阶项为，

$$\mathcal{Q}\partial_t v = (\lambda + i\omega)v - \kappa(2|u_0|^2 v + u_0^2 \overline{v}) - \mathcal{R} + O(|v|^2). \tag{A1}$$

在此定义下，残差带有负号。如果方程（85）中的每个载波都是孤立的精确解，直接展开可得

$$\mathcal{R} = \kappa\left(2|u_2|^2 u_1 + 2|u_1|^2 u_2 + u_1^2 \overline{u}_2 + u_2^2 \overline{u}_1\right). \tag{A2}$$

前两项改变原始载波，后两项则强迫产生混合谐波。将残差置于一旁可以固定载波背景，并孤立出扰动放大过程。要演化原始叠加，则必须保留残差强迫。

要纳入任意有限个 J 个给定载波，写作 $u_0 = \sum_{j=1}^{J} A_j\ t\ e^{i\mathbf{k}_j}$ $A_j\ t$ $(\,)\cdot\mathbf{x}$，其中 $(\,)$ 表示物理傅里叶振幅，并为扰动保留正交归一系数 $\widehat{v}_{\mathbf{k}}$。双载波背景对应于 $J = 2$。当两个指标 j, l均从 1 取到 J 时，完整的线性化傅里叶系统为

$$Q_{\mathbf{k}}\,\partial_t \widehat{v}_{\mathbf{k}} = (\lambda + i\omega)\widehat{v}_{\mathbf{k}} - \kappa \sum_{j,l}\left[2A_j \overline{A}_l\,\widehat{v}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_j+\mathbf{k}_l} + A_j A_l\,\overline{\widehat{v}_{\mathbf{k}_j+\mathbf{k}_l-\mathbf{k}}}\right] - \widehat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}}. \tag{A3}$$

$2|u_0|^2 v$ 中带有 $j \neq l$ 的项会在相差 $\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_l$ 的波矢之间散射扰动。对于双载波背景，这些波矢恰好为 $2(u_1 u_2 + u_2 u_1)v$，从而产生位移 $\pm(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$。来自 $u_0^2 v$ 的项 $u_j^2 v$ 会将处于 $\mathbf{k}$ 的扰动与位于 $2\mathbf{k}_j - \mathbf{k}$ 的共轭模耦合起来。方程（86）中的约化系统令 $J = 2$，保留均匀贡献 $2(|u_1|^2 + |u_2|^2)v$ 和混合乘积 $2u_1 u_2 \overline{v}$，并省略了上述散射通道和未混合平方通道。其一般的不同边带经过选取，使得被省略的通道不会与保留的模态重合。

载波坐标系与特征值。对于保留的这一对，写作 $v = a_p(t)e^{i(\mathbf{k}_p\cdot\mathbf{x}+\nu_p t)} + a_q(t)e^{i(\mathbf{k}_q\cdot\mathbf{x}+\nu_q t)}$。条件 $\nu_p + \nu_q = \Omega_1 + \Omega_2$ 消除了混合载波耦合的显式相位。这得到方程 (86)。对于一个特征模，$(a_p, a_q) = (a, b)e^{\sigma t}$，因此 $a_q = be^{\sigma t}$。因此，这两个分量 (a_p, a_q) 共享特征值 σ，而取共轭可得到 a_q 的演化。这种配对源于对复云雨振幅进行线性化。

令$\mathcal{C} = 4|\kappa|^2 A^4$，并将 M_{pq} 的对角元记为m_{11}，m_{22}。特征方程及其两个根为

$$\begin{gathered}[(\sigma + i\nu_p)Q_p - \Lambda]\left[(\sigma - i\nu_q)Q_q - \overline{\Lambda}\right] - \mathcal{C} = 0, \\ \sigma_\pm = \frac{m_{11} + m_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_{11} - m_{22}}{2}\right)^2 + \frac{\mathcal{C}}{Q_p Q_q}}.\end{gathered} \tag{A4}$$

这些公式无需除以 $Q_p - Q_q$。 M_{pq}和 σ 的所有条目单位均为时间倒数；$\mathcal{C}$、 X_0^2和失谐平方的单位均为时间平方倒数。

附录 A.2。中性穿越与不稳定性

对于 $X_0 < 0$，将 $\sigma = i\delta$ 代入公式（A4）。取其虚部可得

$$\delta = \frac{Q_q\nu_q - Q_p\nu_p}{Q_p + Q_q}. \tag{A5}$$

在此值处，特征乘积中的两个虚因子互为相反数。因此，其实部给出

$$\mathcal{C}_{\rm crit} = X_0^2 + \left[Y_0 - \frac{Q_pQ_q}{Q_p+Q_q}(\nu_p+\nu_q)\right]^2. \tag{A6}$$

中性状态下的物理边带频率为 $\nu_p+\delta$ 和 $\nu_q-\delta$，其总和仍为载波频率之和。该偏移通过特征值确定一次；若再将其代入预先规定的载波频率，就会将其计算两次。

为说明该中性边界将衰减与增长分隔开来，令$d_p = -X_0/Q_p > 0$、$d_q = -X_0/Q_q > 0$、$b_p = Y_0/Q_p - \nu_p$以及
$b_q = -Y_0/Q_q + \nu_q$ $\sigma + d_p -$。于是，
$ib_p \ \sigma + d_q - ib_q \ = \ / \ Q_pQ_q$
特征方程为()()$\mathcal{C}$()。在零耦合时，两个特征值均衰减。在式（A4）中，增大非负耦合会增加平方根自变量的实部，同时保持其虚部不变；较大的特征值实部不减。唯一的中性穿越为

$$\frac{\mathcal{C}_{\rm crit}}{Q_pQ_q} = d_pd_q\left[1 + \frac{(b_p-b_q)^2}{(d_p+d_q)^2}\right], \tag{A7}$$

这就证明了式（87）。在等号成立时，另一个特征值的实部为负，因为 Retr $M_{pq} = X_0\,(Q_p^{-1} + Q_q^{-1}) \ < 0$。对于 $X_0 > 0$，该迹为正，因此无论耦合如何，至少有一个特征值会增长。退化情形 $X_0 = 0$ 可直接由式（A4）判定；上述基于阻尼的判据仅针对 $X_0 < 0$。

对于孤立波振幅，引入 $\eta_\kappa = \beta/\alpha$ 和$\mathcal{H}_{pq} = \frac{Q_pQ_q}{Q_p+Q_q}$（~~$Q_1^{-1}$~~ $+ Q_2^{-1}$）。由于 $A^2 = \lambda/\alpha$，$X_0 = -3\lambda$，以及 $\Omega_j =$（$\omega - \lambda\eta_\kappa$）$/Q_j$，式（87）变为

$$\boxed{4\lambda^2(1+\eta_\kappa^2) > 9\lambda^2 + \left[(1-\mathcal{H}_{pq})\omega + (\mathcal{H}_{pq}-4)\lambda\eta_\kappa\right]^2.} \tag{A8}$$

特别地，$\eta_\kappa = 0$ $|\eta_\kappa| >$ $\sqrt{5}/2$ 无法使这一保留对失稳，并且是必要的。在无屏蔽极限下，所有 $\epsilon = 0$ $Q_j = 1$ 和$\mathcal{H}_{pq} = 1$；该不等式化简为 $4\lambda^2(1+\eta_\kappa^2) > 9\lambda^2(1+\eta_\kappa^2)$，因而不可能成立。因此，在这一极限下，保留对是稳定的，而残差仍会在完整的非线性演化中生成混合分量。

通过将保留对演化与式（A3）或完整 PGLE 进行比较，可以评估遗漏通道误差，其中包括残差强迫以及载波变化。代数不稳定性判据适用于约化矩阵，而此类比较可以确定其对特定场的准确性。

附录 A.3。单个行波载波的精确稳定性

式（69）中的配对系统可通过在求解调制之前移除载波得到。令
$\delta u = u_0V$ $L = \lambda + i\omega -$且，式（）变为
$2\kappa A^2$ 66

$$[1 - \epsilon(\partial_x + ik_0)^2](\partial_t + i\Omega_0)V = LV - \kappa A^2\overline{V}. \tag{A9}$$

对于 $V = a(t)e^{iqx} + c(t)e^{-iqx}$，令两个傅里叶系数相等，可得

$$\begin{aligned} Q_+(\dot a + i\Omega_0 a) &= La - \kappa A^2\bar c, \\ Q_-(\dot c + i\Omega_0 c) &= Lc - \kappa A^2\bar a. \end{aligned} \tag{A10}$$

对第二个方程的整体取共轭，可以闭合关于（a<style id="2">，c）的系统，并得到 M_q。具体而言，取共轭会改变其旋转参考系频率的符号，但保留其屏蔽分母 Q_-。特征多项式为

$$\sigma^2 - \mathrm{tr}(M_q)\sigma + \det(M_q) = 0. \tag{A11}$$

写作 $B_\pm = Y - \Omega_0Q_\pm$，其系数满足

$$\mathrm{Re\,tr}(M_q) = -\lambda(Q_+^{-1} + Q_-^{-1}) < 0, \tag{A12}$$

$$\det(M_q) = \frac{\lambda^2 + B_+B_- - |\kappa|^2A^4 + i\lambda(B_- - B_+)}{Q_+Q_-}. \tag{A13}$$

为确定最大增长率的符号，令 $p = Q_+^{-1}$、$m = Q_-^{-1}$，并引入

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\lambda}{2}(p+m), \qquad \nu = \frac{Y}{2}(p-m), \\ d &= -\frac{\lambda}{2}(p-m), \qquad H = \frac{Y}{2}(p+m) - \Omega_0, \\ C &= |\kappa|^2A^4pm. \end{aligned} \tag{A14}$$

这里，H 衡量频率失配，有别于无量纲屏蔽比 h_q。对角元为 $-\gamma + i\nu \pm (d + iH)$，因此

$$\sigma_\pm = -\gamma + i\nu \pm \sqrt{C + (d+iH)^2}. \tag{A15}$$

在 $X = C + d^2 - H^2$ 的情况下，最大的实部为

$$s_q = -\gamma + \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + 4d^2H^2} + X}{2}}. \tag{A16}$$

该公式同样适用于平方根自变量为纯实数的情况。为避免对不等式进行平方时产生歧义，建立不稳定性判据时，令 t 为式（A16中非负平方根项的平方。它是下式的较大非负根：

$$P(z) = z^2 - Xz - d^2H^2. \tag{A17}$$

另一个根为非正数。由于 $\gamma > 0$、$s_q > 0$ 等价于 $t > \gamma^2$，进而等价于 $P\,(\gamma^2) \ < 0$。利用 $\gamma^2 - d^2 = \lambda^2pm$ 和 $C =$ $(\lambda^2 + \beta^2A^4)\ pm$ 可得

$$P(\gamma^2) = pm(\lambda^2H^2 - \beta^2A^4\gamma^2). \tag{A18}$$

因此，

$$\begin{aligned} s_q > 0 &\iff |H| < \tfrac{1}{2}|\beta|A^2(p+m), \\ s_q = 0 &\iff |H| = \tfrac{1}{2}|\beta|A^2(p+m), \\ s_q < 0 &\iff |H| > \tfrac{1}{2}|\beta|A^2(p+m). \end{aligned} \tag{A19}$$

将严格不等式除以 $(p+m)\ /2$ 得到式（74）；代入 $A^2 = \lambda/\alpha$ 和 $\Omega_0 =$ $(\omega - \lambda\eta)\ /Q_0$ 得到式（75）。对于 $\eta > 0$，取其平方根并利用

$$(1-h_q)\omega + (h_q-2)\lambda\eta = (1-h_q)(\omega - \lambda\eta) - \lambda\eta$$

给出了公式（76）中的区间。最后，$Q_+ + Q_- = 2\,(Q_0 + \epsilon q^2)$ 和 $Q_+Q_- = \ (Q_0 + \epsilon q^2)\ ^2 - 4\epsilon^2k_0^2q^2$ 给出了公式（77）。这些步骤将精确特征值与频率边界及其对载波和调制尺度的依赖关系联系起来。

附录 B：旋转坐标系与特征指数

设$\mathcal{Q} = I - \epsilon\Delta$。将 $u = e^{i\Omega_* t}(A + v)$ 代入公式，保留 (28) 一阶项可得。

$$\mathcal{Q}\partial_t v = (\lambda + i\omega - 2\kappa A^2)v - \kappa A^2 \overline{v} - i\Omega_* \mathcal{Q} v. \tag{B1}$$

旋转坐标系项包含 $\mathcal{Q}$，因为该算子作用于时间导数。将 v 分解为其实部场和虚部场，可得到方程（81）。这些实场的傅里叶系数可以是复数；相反波数处的系数满足通常的共轭关系。特征多项式和特征指数为

$$\begin{aligned} &\sigma^2 + \frac{2\lambda}{Q_{\mathbf{k}}}\sigma + \frac{\Omega_* r_{\mathbf{k}}(2\beta A^2 + \Omega_* r_{\mathbf{k}})}{Q_{\mathbf{k}}^2} = 0, \\ &\sigma_\pm(\mathbf{k}) = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \Omega_* r_{\mathbf{k}}(2\beta A^2 + \Omega_* r_{\mathbf{k}})}}{Q_{\mathbf{k}}}. \end{aligned} \tag{B2}$$

负迹排除了通过一对共轭复数穿越虚轴而产生增长的可能性。增长则要求负行列式，从而得到方程（82）。这里的特征值是均匀周期旋转坐标系中的 Floquet 特征指数；中性 $k = 0$ 特征指数反映了时间平移对称性。

带边与屏蔽的作用。 当 $\beta\Omega_* < 0$时，增长特征指数从 $r_{\mathbf{k}} = 0$ 处的零值开始，并在 $r_{\mathbf{k}} = -2\beta A^2/\Omega_*$处回到零值。在这两个端点之间，它为正，因此具有一个正的内部最大值。在小波数下，

$$\sigma_+(\mathbf{k}) = -\frac{\beta\Omega_*}{\alpha}\epsilon|\mathbf{k}|^2 + O(\epsilon^2|\mathbf{k}|^4). \tag{B3}$$

对于 $\beta = 0$，主导的相位衰减则为 $-\Omega_*^2\epsilon^2|\mathbf{k}|^4/(2\lambda)$。在大波数下，特征指数趋近于 $\pm i|\Omega_*|$，其实部为$-\lambda/Q_{\mathbf{k}}$，因此细尺度调制变为弱阻尼，而不是快速扩散。这是动态惯性的另一种表现。连续谱带指出了可能发生增长的区域，但有限周期域只会采样其中离散的波数。不稳定模态为空间调制周期提供种子，而其饱和后的几何形状和时间演化则由非线性耦合决定。

附录C：振幅依赖的计时、等时线与缺陷

附录 C.1. 反应频率与屏蔽相位响应

定义 $F(u) = (\lambda + i\omega)u - (\alpha + i\beta)|u|^2 u$和 $\mathcal{Q} = I - \epsilon\Delta$。其中 $R = |u| > 0$，记作 $u = Re^{i\vartheta}$。将 $\partial_t u = \mathcal{Q}^{-1}F(u)$ 乘以 $e^{-i\vartheta}$，即可得到算子形式的精确振幅与相位方程：

$$\begin{aligned} \partial_t R &= \lambda R - \alpha R^3 + \mathrm{Re}\left[e^{-i\vartheta}(\mathcal{Q}^{-1} - I)F(u)\right], \\ \partial_t \vartheta &= \omega - \beta R^2 + \frac{1}{R}\,\mathrm{Im}\left[e^{-i\vartheta}(\mathcal{Q}^{-1} - I)F(u)\right]. \end{aligned} \tag{C1}$$

每个方程中的前两项给出了局部反应趋势。每个方程中的最后一项描述了非均匀场的屏蔽响应。对反应频率取空间梯度可得到式（97）。因此，当 $\beta \neq 0$时，较大和较小的振荡具有不同的内禀计时。随着时间推移，这些差异会使等相位带发生弯曲，而非局部项则会改变这些差异的传播方式。要追踪这一过程穿过振幅极小值的情形，需要使用上述耦合的振幅与相位方程。对于孤立的平面波，$F(u)$具有相同的空间波数 u，因此$\mathcal{Q}^{-1}$将其乘以$Q^{-1}{}_{\mathbf{k}}$并得到式（45）。对于叠加态，三次响应会产生额外的傅里叶分量，每个分量都受到各自屏蔽因子的作用。要理解振幅偏离后保留的计时，还必须考虑向局部周期的松弛过程。附录 C.2通过其渐近相位完成这一点，并将其直接与式（C1）中的两个屏蔽反应趋势联系起来。

附录 C.2. 扭转与等时线

在空间均匀场中，$u(t) = R(t)e^{i\vartheta(t)}$，屏蔽修正消失，方程（C1）简化为 $\dot{R} = \lambda R - \alpha R^3$ 和 $\dot{\vartheta} = \omega - \beta R^2$。对于 $\lambda \geq 0$ 和 $\alpha > 0$，吸引半径为 $A = \sqrt{\lambda/\alpha}$。在该圆上，角速度为 $\Omega_* = \omega - \beta A^2 = \omega - \beta\lambda/\alpha$，因此 $u_*(t) = Ae^{i(\Omega_* t + \vartheta_0)}$。因此，$\Omega_*$ 是由反应系数决定的频率，而不是极坐标表示中的额外参数。当 $\Omega_* \neq 0$时，该解是一个周期轨道。其渐近相位为

$$\Theta = \vartheta - \frac{\beta}{\alpha}\log\frac{R}{A}, \qquad \dot{\Theta} = \Omega_*. \tag{C2}$$

求导得到 $\dot{\Theta} = (\omega - \beta R^2) - (\beta/\alpha)(\lambda - \alpha R^2) = \Omega_*$，因此即使在径向弛豫期间，相位坐标仍以周期频率推进。具有相同 Θ 的状态会趋近于周期轨道上的同一相位：它们位于同一条等时线上。对于 $\beta = 0$，这些曲线是径向射线；对于 $\beta \neq 0$ [27, 30]，则是对数螺线。在瞬时角度固定时，振幅从 R_1 位移至 R_2，会使渐近相位改变 $-(\beta/\alpha)\log(R_2/R_1)$。因此，比值 β/α 可衡量振幅扰动转化为持久时序偏移的程度。

这种相位几何解释了为什么扰动的方向很重要。沿等时线的位移会在弛豫过程中消失，而不会造成渐近时序偏移；相反，跨越等时线的位移则会改变恢复后的相位。反复受到扰动，继而发生差异化的角运动和弛豫，便可能产生拉伸与折叠；在适当的强迫条件下，这是剪切诱导混沌的基础 [28, 96–99]。在 KTF 云模型中，即便是弱扭曲，也可通过精心设计的扰动加以利用：由此产生的随机动力学再现了模拟开胞振荡的重要时间特征 [28]。这一结果促使我们追踪同样的振幅–相位敏感性，因为空间耦合会扰动 PGLE 的振荡。

与附录 C.1 的联系可以精确建立。定义

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = e^{-i\vartheta}(\mathcal{Q}^{-1} - I)F(u). \tag{C3}$$

在非均匀场中使用相同的局部相位坐标 $\Theta = \vartheta - (\beta/\alpha)\log(R/A)$ 并对其应用式（C1）求导，可得，在 $R > 0$处，

$$\partial_t \Theta = \Omega_* + \frac{\mathrm{Im}\,\mathcal{H} - (\beta/\alpha)\,\mathrm{Re}\,\mathcal{H}}{R}. \tag{C4}$$

局部反应项相互抵消，留下来自屏蔽响应的直接相位贡献，以及其对振幅影响所产生的贡献。后者由扭转加权。式（97）描述反应频率的瞬时差异；式（C4）描述环境耦合如何改变已计入局部振幅弛豫的相位坐标。二者共同将空间振幅差异与云雨振荡相对时序的持续变化联系起来。

这里 Θ 有一个继承自均匀振荡器的逐点相位坐标。方程（C4）决定空间耦合如何改变

它，从而决定局部等时线几何如何进入非均匀场。在确定性 PGLE 模拟中，这种耦合提供了不断演化的振幅和时序扰动。恢复斑块事件涨落会在同一响应中加入间歇性扰动，从而将空间理论与 KTF 模型中考察的随机机制联系起来 [28]。

附录 C.3. 核心与移动的振幅凹陷

方程（95）中的非零绕转数无法在没有振幅为零的情况下，在整个所包围区域内延续为单值相位。在该零点处，极坐标失效，而复场仍可保持光滑。因此，核心演化直接在 u 中计算；随着周围的相位绕转重新组织，该方法会追踪两个相对于其参考值的水汽路径异常。

检验行进核心近似的一种有效方法，是考察一维相对剖面 $u(x,t) = e^{i\Omega t}U(z)$，$z = x - ct$，其中 c 和 Ω 为实数。直接代入可得

$$(i\Omega - c\partial_z)(I - \epsilon\partial_z^2)U = \epsilon c U''' - i\epsilon\Omega U'' - cU' + i\Omega U = (\lambda + i\omega)U - \kappa|U|^2 U. \tag{C5}$$

当 $c \neq 0$ 时，混合导数会产生三阶空间导数。因此，二阶行进剖面方程会舍弃部分动态惯性。方程（C5）约束带状场中的移动振幅凹陷或相位滑移；允许的速度取决于完整剖面及其远场条件。构造这样的剖面需要针对所选远场波求解这一边值问题。对于二维缺陷，相应的演化还必须保留其相位绕转。在这两种情况下，带中断的移动都涉及周围振荡与核心的共同调整。

附录 D：随机场实验的数值演化与诊断

图 11–13 中的计算采用方环面 $[0, L)^2$，，其中 $L = 20$，并在 256^2 网格上采样。初始值 10^{-4}（$\xi_{jk} + i\zeta_{jk}$）由独立的标准正态样本构成，这些样本使用 MATLAB 默认随机种子生成；初始值被投影到方形傅里叶频带 $|n_x|,\ |n_y| \leq 127$；这会去除约 0.78% 的初始功率，之后不再引入任何随机性。

对于 $\mathbf{k} = (2\pi/L)(n_x,\ n_y)$ 和 $Q_{\mathbf{k}} = 1 + \epsilon|\mathbf{k}|^2$，保留的系数满足

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{u}_{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda + i\omega}{Q_{\mathbf{k}}}\widehat{u}_{\mathbf{k}} - \frac{\kappa}{Q_{\mathbf{k}}}P_K\widehat{(|u|^2 u)}_{\mathbf{k}}, \tag{D1}$$

其中，P_K 是方形频带投影。拉普拉斯算子通过其波数平方符号作用，保留状态中排除了奈奎斯特行列；三次项则在 512^2 零填充网格上构造后再进行投影，因此混叠频率不会进入保留频带。时间积分采用四阶指数时间差分龙格–库塔格式（ETDRK4）[100, 101]，步长为 $\Delta t = 0.004$，直至 $T = 60$：对角线性部分精确积分，非线性阶段系数通过全圆轮廓求积计算，并保留其复数值，因为（$\lambda + i\omega$）/$Q_{\mathbf{k}}$ 是复数。这些系数与独立计算的泰勒级数结果在机器精度范围内吻合；对于 $\kappa = 10$ 和 $\kappa = 10 + 10i$，空间均匀解均以四阶精度收敛至其对应的精确解；在饱和附近的有限时间区间内，将步长缩小至原来的八分之一，场的变化也小于 10^{-11}。所有分析均使用实际积分时间，快照标签则按图注所述进行取整。

图中的线性对照是精确解

$$\widehat{u}_{\mathrm{lin},\mathbf{k}}(t) = \widehat{u}_{0,\mathbf{k}}\exp\left[\frac{(\lambda + i\omega)t}{Q_{\mathbf{k}}}\right], \tag{D2}$$

图 11 中的特征长度为

$$\ell_u(t) = \frac{2\pi}{\langle|\mathbf{k}|\rangle_P}, \qquad \langle|\mathbf{k}|\rangle_P = \frac{\sum_{\mathbf{k}\neq 0}|\mathbf{k}|\,|\widehat{u}_{\mathbf{k}}|^2}{\sum_{\mathbf{k}\neq 0}|\widehat{u}_{\mathbf{k}}|^2}. \tag{D3}$$

谱形比较将径向分箱功率归一化为总和为 1，并取非线性与线性分箱占比之间绝对差之和的一半，因此它衡量的是功率的重新分配，而与整体放大无关。

对于相关性诊断，在每个时间点减去 $|u|$ 的空间平均，并在每个网格点去除线性时间趋势。周期协方差 $C_t(\boldsymbol{r}) = \langle a_t(x)a_t(x+\boldsymbol{r})\rangle_x$ 由所得异常 a_t 的功率谱计算得到，并且 $C_t(\boldsymbol{r})/C_t(0)$ 在宽度为 2/15 模型单位的径向分箱上取平均。图 12显示了每个窗口内各帧的中位数和四分位距；这些带状结构描述了相关邻近帧之间的时间变异性，中位数与合并方差加权估计高度一致。

图 13 的螺旋几何形态是在 $\mathrm{Re}\,u$ 除以 u的空间均方根振幅后诊断得出的。该场经过 1.5 像素的高斯平滑后，再构造其梯度结构张量；张量的各项经过四像素平滑。将主梯度方向旋转 $\pi/2$ 即可定义局部等值线方向 θ，其取值模 π确定。相位缺陷由网格面元识别：沿其绕行时，$\arg u$ 的变化量为 $\pm 2\pi$。在缺陷核心 c周围，螺旋指数定义为

$$S(c) = \frac{\sum_{x\in\mathcal{A}_c} w(x)\sin\big[2\big(\theta(x) - \varphi_c(x)\big)\big]}{\sum_{x\in\mathcal{A}_c} w(x)}, \tag{D4}$$

其中 φ_c 是以 c为中心的极角，$\mathcal{A}_c$ 是半径介于6 和 30 像素之间的周期环带，权重 w 是结构张量两个特征值之差，用于突出强且方向一致的轮廓。将角度差 $\theta - \varphi_c$ 加倍，使该指标对无符号轮廓方向的 π歧义保持不变：$S(c)$对于纯径向（$\theta = \varphi_c$）或纯环向（$\theta = \varphi_c \pm \pi/2$）轮廓为零；对于以 ± 1 角穿过射线的对数螺线，其值达到 $\pm 45°$，符号则表示螺旋旋向。仅为便于展示，图 13 中的青色曲线沿同一方向场双向追踪，并在方向相干性变弱处终止。

[1] B. Stevens、S. Bony、H. Brogniez、L. Hentgen、C. Hohenegger、C. Kiemle、T. S. L’Ecuyer、A. K. Naumann、H. Schulz、P. A. Siebesma、J. Vial、D. M. Winker 和 P. Zuidema，“糖块状、砾石状云型、鱼鳞状云型和花状云型：信风中的中尺度云型”，《皇家气象学会季刊》，第146卷，第726期，第141–152页，2020年。[2] S. Bony、H. Schulz、J. Vial 和 B. Stevens，“糖块状、砾石状云型、鱼鳞状云型和花状云型：信风云中尺度型对环境条件的依赖”，《地球物理研究通讯》，第47卷，第7期，文章编号 e2019GL085988，2020年。[3] G. Feingold、I. Koren、H. Wang、H. Xue 和 W. A. Brewer，“开放蜂窝状云场中降水产生的振荡”，《自然》，第466卷，第7308期，第849–852页，2010年。[4] G. Dagan、I. Koren、A. Kostinski 和 O. Altaratz，“模拟浅对流云中的组织与振荡”，《地球系统建模进展》，第10卷，第2287–2299页，第9期，2018年。[5] T. Yamaguchi 和 G. Feingold，“开放蜂窝状对流云型与降水空间分布之间的关系”，《大气化学与物理》，第15卷，第1237–1251页，2015年。[6] F. Hoffmann、F. Glassmeier、T. Yamaguchi 和 G. Feingold，“降水和卷入在层积云中尺度状态转变中的作用”，《大气科学杂志》，第80卷，第12期，第2791–2803页，2023年。[7] A. P. Khain 和 M. Pinsky，《云中的物理过程与云建模》。剑桥大学出版社，2018年。[8] I. Koren、L. A. Remer、Y. J. Kaufman、Y. Rudich 和 J. V. Martins，“云与气溶胶之间的暮光区”，《地球物理研究通讯》，第34卷，第8期，2007年。[9] E. Hirsch、I. Koren、Z. Levin、O. Altaratz 和 E. Agassi，“关于跃迁区水云”，《大气化学与物理》，第14卷，第17期，第9001–9012页，2014年。[10] E. Eytan、I. Koren、O. Altaratz、A. Kostinsky 和 A. Ronen，“云暮光区的长波辐射效应”，《自然·地球科学》，第13卷，第669–673页，2020年。[11] M. D. Chekroun 和 I. Koren，“暮光云的非线性物理学与统计场论：悬浮动力学及动态惯性的涌现。”arXiv:2611.04924，2026年。[12] R. E. Showalter 和 T. W. Ting，“伪抛物型偏微分方程”，《SIAM数学分析杂志》，第1卷，第1期，第1–26页，1970年。[13] R. W. Carroll 和 R. E. Showalter，《奇异退化柯西问题》，第127卷。学术出版社，1977年。[14] R. E. Showalter，《偏微分方程的希尔伯特空间方法》。德克萨斯州圣马科斯：微分方程电子专著，1994年。[15] G. I. Barenblatt、I. P. Zheltov 和 I. N. Kochina，“裂隙岩石中均质液体渗流理论的基本概念”，《应用数学与力学杂志》，第24卷，第1286–1303页，1960年。[16] P. J. Chen 和 M. E. Gurtin，“关于涉及双温度的热传导理论”，《应用数学与物理杂志》（ZAMP），第19卷，第614–627页，1968年。[17] B. D. Coleman 和 W. Noll，“泛函逼近定理及其在连续介质力学中的应用”，载于《力学与热力学基础：论文选集》，第97–112页，施普林格，1974年。[18] R. R. Huilgol，“一种微分型二阶流体”，《国际非线性力学杂志》，第3卷，第471–482页，第4期，1968年。[19] T. W. Ting，“二阶流体的某些非定常流动”，《理性力学与分析档案》，第14卷，第1–26页，1963年。[20] D. D. Joseph、M. Renardy 和 J.-C. Saut，“黏弹性流体流动中的双曲性与类型变化”，《理性力学与分析档案》，第87卷，第3期，第213–251页，1985年。[21] E. A. Milne，“受限辐射在气体中的扩散”，《伦敦数学学会杂志》，第1卷，第40–51页，第1期，1926年。

[22] V. V. Sobolev，《辐射传输论》。普林斯顿：D. Van Nostrand Company，1963年。[23] I. Koren 和 G. Feingold，“气溶胶–云–降水系统作为捕食者–猎物问题”，《美国国家科学院院刊》，第108卷，第30期，第12227–12232页，2011年。[24] G. Feingold 和 I. Koren，“应用于气溶胶–云–降水系统的耦合振子模型”，《地球物理学中的非线性过程》，第20卷，第6期，第1011–1021页，2013年。[25] M. D. Chekroun、I. Koren 和 H. Liu，“用于诊断延迟微分系统中Hopf分岔的高效约化：云–雨模型的应用”，《混沌》，第30卷，第5期，第053130页，2020年。[26] J. Guckenheimer 和 P. Holmes，《非线性振荡、动力系统与向量场分岔》。施普林格科学与商业媒体，2013年。[27] A. Tantet、M. D. Chekroun、H. A. Dijkstra 和 J. D. Neelin，“约化状态空间中的随机系统Ruelle–Pollicott共振。第二部分：随机Hopf分岔”，《统计物理学杂志》，第179卷，第1403–1448页，2020年。doi:10.1007/s10955-020-02526-y。[28] M. D. Chekroun、I. Koren、H. Liu 和 H. Liu，“随机时滞系统中噪声驱动混沌的普适生成：弥合与高端模拟之间的差距”，《科学进展》，第8卷，第46期，第eabq7137页，2022年。doi:10.1126/sciadv.abq7137。[29] I. Koren、E. Tziperman 和 G. Feingold，“探索非线性云雨方程”，《混沌》，第27卷，第1期，第013107页，2017年。[30] J. Guckenheimer，“等时线与无相集”，《数学生物学杂志》，第1卷，第3期，第259–273页，1975年。[31] P. Ashwin、S. Coombes 和 R. Nicks，“神经科学中振荡网络动力学的数学框架”，《数学神经科学杂志》，第6卷，第2页，2016年。[32] E. M. Izhikevich，《神经科学中的动力系统：兴奋性与爆发的几何学》。剑桥：麻省理工学院出版社，2007年。[33] A. T. Winfree，《生物时间的几何学》，第2卷。施普林格，1980年。[34] B. Khouider、J. Biello 和 A. J. Majda，“热带对流的随机多云模型”，《数学科学通讯》，第8卷，第1期，第187–216页，2010年。[35] Y. Frenkel、A. J. Majda 和 B. Khouider，“使用随机多云模型改进热带对流参数化：一个范例”，《大气科学杂志》，第69卷，第3期，第1080–1105页，2012年。[36] Y. Frenkel、A. J. Majda 和 B. Khouider，“热带对流的随机与确定性多云参数化”，《气候动力学》，第41卷，第5–6期，第1527–1551页，2013年。[37] J. Dorrestijn、D. T. Crommelin、J. A. Biello 和 S. J. Böing，“用于深对流随机参数化的数据驱动多云模型”，《皇家学会哲学汇刊A辑》，第371卷，第1991期，第20120374页，2013年。[38] J. Dorrestijn、D. T. Crommelin、A. P. Siebesma、H. J. J. Jonker 和 C. Jakob，“利用观测数据推断的多云模型对对流面积分数进行随机参数化”，《大气科学杂志》，第72卷，第2期，第854–869页，2015年。[39] J. W.-B. Lin 和 J. D. Neelin，“随机湿对流参数化对热带气候变率的影响”，《地球物理研究通讯》，第27卷，第22期，第3691–3694页，2000年。[40] J. W.-B. Lin 和 J. D. Neelin，“迈向大气环流模式中的随机深对流参数化”，《地球物理研究通讯》，第30卷，第4期，第1162页，2003。[41] S. N. Stechmann 和 J. D. Neelin，“向强对流跃迁的随机模型”，《大气科学杂志》，第68卷，第2970页，2011年，第12期，第2955–号。[42] A. J. Majda 和 S. N. Stechmann，“对流动量输送的随机模型”，《美国国家科学院院刊》，第105卷，第46期，第17614–17619页，2008年。[43] J. T. Dawe 和 P. H. Austin，“大涡模拟中单个浅积云的直接卷入与脱卷率分布”，《大气化学与物理》，第13卷，第7811页，2013年，第15期，第7795–号。

[44] M. D. Chekroun、I. Koren 和 H. Liu，“气团事件与有限气团覆盖范围所提供的方差”。准备中，2026年。[45] B. Khouider 和 A. Bihlo，“边界层云与层积云相变状态的新随机模型：开放胞状结构、封闭胞状结构与对流卷”，《地球物理研究杂志：大气》，第124卷，第367–386页，2019年。[46] K. Staliunas，“具有有序–无序相变的空间扩展系统的时空噪声谱”，《国际分岔与混沌杂志》，第11卷，第11期，第2845–2852页，2001年。doi:10.1142/S0218127401003966。[47] S. N. Stechmann 和 S. Hottovy，“云型作为相变”，《地球物理研究通讯》，第43卷，第6579–6587页，2016年。[48] T. B. Benjamin、J. L. Bona 和 J. J. Mahony，“非线性色散系统中长波的模型方程”，《伦敦皇家学会哲学汇刊》。A辑，数学与物理科学，第272卷，第1220期，第47–78页，1972年。[49] R. G. Harrison、G. Pretor-Pinney、G. J. Marlton、G. D. Anderson、D. J. Kirshbaum 和 R. J. Hogan，“Asperitas——一种新识别的云附属特征”，《天气》，第72卷，第5期，第132–141页，2017年。[50] S. Ravichandran 和 R. Govindarajan，“剪切流中由沉降与蒸发驱动的不稳定性：Asperitas云的模型”，《物理评论：流体》，第7卷，第1期，第010501页，2022年。[51] I. Koren 和 G. Feingold，“海洋胞状云的适应性行为”，《科学报告》，第3卷，第1期，第2507页，2013年。[52] M. J. Garay、R. Davies、C. Averill 和 J. A. Westphal，“放射状云：中尺度云自组织中被忽视的实例”，《美国气象学会公报》，第85卷，第10期，第1585–1594页，2004年。[53] D. L. Monroy 和 G. G. Naumis，“使用含时Ginzburg–Landau与Swift–Hohenberg随机方程描述浅对流云场中的中尺度图案形成”，《物理评论E》，第103卷，第3期，第032312页，2021年。[54] T. L. Clark，“暖积云对流动力学与微物理的数值建模”，《大气科学杂志》，第30卷，第5期，第857–878页，1973年。[55] H. Köhler，“吸湿性液滴中的成核体及其增长”，《法拉第学会汇刊》，第32卷，第1152–1161页，1936年。[56] M. Santos Gutiérrez、M. D. Chekroun 和 I. Koren，“共存霾与云滴的吉布斯态和布朗模型”，《科学进展》，第10卷，第46期，第eadq7518页，2024年。doi:10.1126/sciadv.adq7518。[57] M. Santos Gutiérrez、M. D. Chekroun 和 I. Koren，“湍流涨落导致的多分散气溶胶（去）活化布朗模型”，《大气科学杂志》，第83卷，第4期，第633–652页，2026年。doi:10.1175/JAS-D-25-0205.1。[58] M. Gurari，“第三十六篇：极性材料中慢电子的自能”，《伦敦、爱丁堡和都柏林哲学杂志及科学杂志》，第44卷，第350期，第329–336页，1953年。[59] R. P. Feynman，“极性晶体中的慢电子”，《物理评论》，第97卷，第3期，第660页，1955年。[60] P. C. Martin、E. D. Siggia 和 H. A. Rose，“经典系统的统计动力学”，《物理评论A》，第8卷，第423–437页，1973年7月。[61] Y.-H. Kuo 和 J. D. Neelin，“对流深层流入的条件”，《地球物理研究通讯》，第49卷，第e2022GL100552页，2022年。[62] Y.-H. Kuo 和 J. D. Neelin，“无弹性对流实体。第一部分：公式与对夜间对流的影响”，《大气科学杂志》，第82卷，第3期，第599–623页，2025。[63] T. N. Palmer，“模型误差的非线性动力学视角：天气和气候预报模型中非局地随机动力参数化的提案”，《英国皇家气象学会季刊》，第127卷，第572期，第279–304页，2001年。[64] J. Berner、U. Achatz、L. Batté、L. Bengtsson、A. de la Cámara、H. M. Christensen、M. Colangeli、D. R. B. Coleman、D. Crommelin、S. I. Dolaptchiev、C. L. E. Franzke、P. Friederichs、P. Imkeller、H. Järvinen、S. Juricke、V. Kitsios、F. Lott、V. Lucarini、S. Mahajan、T. N. Palmer、C. Penland、M. Sakradzija、J.-S. von Storch、A. Weisheimer、M. Weniger、P. D. Williams 和 J.-I. Yano，“随机参数化：迈向天气和气候模型的新视角”，《美国气象学会公报》，第98卷，第588页，2017年，第3期，第565–号。[65] E. Kessler，《大气环流中水物质的分布与连续性》，《气象专著》第10卷第32号。波士顿：美国气象学会，1969年。[66] D. Applebaum，《Lévy过程与随机微积分》。剑桥高等数学研究丛书，剑桥大学出版社，第2版，2009年。[67] S. Peszat和J. Zabczyk，《带Lévy噪声的随机偏微分方程：演化方程方法》，第113卷。剑桥大学出版社，2007年。[68] D. Applebaum，《线性算子半群：及其在分析、概率论和物理学中的应用》。伦敦数学学会学生教材，剑桥大学出版社，2019年。doi:10.1017/9781108672641。[69] V. G. Plank，“有图案形式和无图案形式积云对流情形下的风况”，《Tellus》，第18卷第1期，第1–12页，1966年。[70] V. G. Plank，“佛罗里达州代表性积云群体中的积云尺寸分布”，《应用气象学与气候学杂志》，第8卷第1期，第46–67页，1969年。[71] R. R. Da Silva、A. W. Gandu、L. D. A. Sá和M. A. S. Dias，“亚马孙地区的云街与陆地—水体相互作用”，《生物地球化学》，第105卷第1期，第201–211页，2011年。[72] T. Dror、I. Koren、O. Altaratz和R. H. Heiblum，“大陆性、有组织的浅层（绿色）云的丰度及共同性质”，《IEEE地球科学与遥感汇刊》，第59卷第2期，第882–891页，2020年。[73] M. C. Cross和P. C. Hohenberg，“平衡态之外的图案形成”，《现代物理评论》，第65卷，第1112页，1993年，第851–3页。[74] I. S. Aranson和L. Kramer，“复Ginzburg–Landau方程的世界”，《现代物理评论》，第74卷第1期，第99–143页，2002。[75] D. M. W. Frierson、A. J. Majda和O. M. Pauluis，“热带大气中降水锋的大尺度动力学：一种新颖的弛豫极限”，《数学科学通讯》，第2卷第4期，第591–626页，2004年。[76] E. Noether，“不变变分问题”，《哥廷根科学学会会刊》，数学—物理学类，第235–257页，1918年。M. A. Tavel的英文译文，《输运理论与统计物理》1，第186–207页（1971年）。[77] N. C. White，“超越拉格朗日量：梯度流偏微分方程中的诺特定理”，《物理评论E》，第112卷第6期，第064214页，2025。[78] C. Sulem和P.-L. Sulem，《非线性薛定谔方程：自聚焦与波坍缩》，《应用数学科学》第139卷。纽约：施普林格，1999年。[79] P. J. Olver，《李群在微分方程中的应用》，《数学研究生教材》第107卷。纽约：施普林格，第2版，1993年。[80] P. J. Morrison，“理想流体的哈密顿描述”，《现代物理评论》，第70卷第2期，第467–521页，1998年。[81] A. Zafferi、D. Peschka和M. Thomas，“反应性流体流动的GENERIC框架”，《ZAMM——应用数学与力学杂志》，第103卷第7期，第e202100254页，2023。[82] C. A. Holmes，“平面泊肃叶流的非线性抛物型振幅方程的有界解”，《英国皇家学会会刊A辑》，第402卷第1823期，第299–322页，1985年。[83] A. Doelman，“复Ginzburg–Landau方程中的行波”，《非线性科学杂志》，第3卷第1期，第225–266页，1993年。[84] A. M. Turing，“形态发生的化学基础”，《英国皇家学会伦敦会刊B辑：生物科学》，第237卷第641期，第37–72页，1952年。[85] 世界气象组织，“波状云”。《国际云图》，2017年。[86] 世界气象组织，“粗糙云”。《国际云图》，2017年。[87] B. I. Shraiman、A. Pumir、W. van Saarloos、P. C. Hohenberg、H. Chaté和M. Holen，“一维复Ginzburg–Landau方程中的时空混沌”，《物理学D辑》，第57卷，第248页，1992年，第241–3、4页。[88] M. Chekroun、N. Zagli和V. Lucarini，“跳跃扩散模型的Kolmogorov模态与线性响应”，《物理学进展报告》，

第88卷第12期，第127601页，2025。
doi:10.1088/1361-6633/ae2206。 [89] J. Duan、K. Lu和B. Schmalfuss，“随机偏微分方程的不变流形”，《概率年刊》，第31卷，第2135页，2003年，第2109页。– 。[90] M. D. Chekroun、H. Liu和S. Wang，随机不变流形的近似：非线性随机偏微分方程的随机流形 *I*。纽约：施普林格数学简明丛书，施普林格，2015年。[91] J. Duan，随机动力学导论。剑桥大学出版社，2015年。 [92] M. D. Chekroun、H. Liu和J. C. McWilliams，“用于预示临界转变点和高阶临界转变的最优参数化流形”，《混沌：非线性科学跨学科期刊》，第33卷第9期，第093118页，2023。 [93] M. D. Chekroun、H. Liu和J. C. McWilliams，“揭示非平衡系统中跃迁的非马尔可夫约化模型”，《物理学杂志*A*：数学与理论》，第58卷第4期，第045204页，2025。 doi:10.1088/1751-8121/ada7ad。[94] M. D. Chekroun、H. Liu和S. Wang，随机参数化流形与非马尔可夫约化方程：非线性随机偏微分方程的随机流形 *II*。纽约：施普林格数学简明丛书，施普林格，2015年。

[95] M. D. Chekroun、H. Liu、J. C. McWilliams 和 S. Wang，《随机非平衡系统中的转变：高效约化与分析》，《微分方程杂志》，第 346 卷，第 145–204 页，2023。 doi:10.1016/j.jde.2022.11.025。[96] Q. Wang 和 L.-S. Young，《具有一个不稳定方向的奇异吸引子》，《数学物理通讯》，第 218 卷，第 1 期，第 1–97 页，2001。 [97] Q. Wang 和 L.-S. Young，《周期脉冲极限环中的奇异吸引子与 Hopf 分岔》，《数学物理通讯》，第 240 卷，第 3 期，第 509–529 页，2003。 [98] K. K. Lin 和 L.-S. Young，《剪切诱导混沌》，《非线性》，第 21 卷，第 5 期，第 899–922 页，2008。 [99] L.-S. Young，《将 SRB 测度推广到非自治、随机和无限维系统》，《统计物理学杂志》，第 166 卷，第 494–515 页，2017年。 [100] S. M. Cox 和 P. C. Matthews，《刚性系统的指数时间差分》，《计算物理学杂志》，第 176 卷，第 2 期，第 430–455 页，2002。[101] A.-K. Kassam 和 L. N. Trefethen，《刚性偏微分方程的四阶时间步进》，《工业与应用数学学会科学计算杂志》，第 26 卷，第 4 期，第 1214–1233 页，2005。