arXiv:2611.32597v1 [math.AG] 24 Nov 2026

整曲线射入复射影簇的一致代数退化

Xianjing Dong* 和 Yanda Lv

摘要。本文研究在 $\mathbb{C}$, 上的光滑射影簇中，与简单正规交叉除子相交的整曲线的代数退化问题，属于对数 Green-Griffiths-Lang 纲领的范畴。对于负扭曲全局对数喷射微分，我们沿每个正维闭边界分层引入内在的加权余法丛滤子，其权由沿边界分支的接触阶规定。利用对数余切丛的最大 Harder-Narasimhan 斜率以及各分层的法丛次数，我们定义了一个整数消失阈值，从而改进由基于斜率的上取整所得到的极点界。在对数 Semple 塔满足稳定基 locus 假设的条件下，我们进一步建立了改进的第二主定理，其计数系数取决于边界层、实际接触阶数以及源权重与扭曲指数之比。这些系数与用于实现稳定基底轨迹的幂次无关。我们还推导出一个一致代数退化判据，允许修正后的极点系数为正；该判据通过有限个按层给出的不等式系统以及剩余除子类的充足性来表述。这得到了一类有条件的轨形 Green-Griffiths-Lang 型结论。我们还建立了由余法丛分解以及曲面边界交叉处的精确局部极点估计所产生的改进结果。我们的例子表明，与朴素的基于斜率的界相比，这些结果有严格改进；同时说明在边界交叉处满权极点可以持续存在，并给出了满足稳定基 locus 假设的具体实例。

1. 引言

1.1. 动机

负扭曲喷射微分是研究整曲线的代数退化和对数双曲性的基本工具，整曲线 $f:\mathbb{C}\to X$ 与一个简单正规交叉除子相交 D，其中 X 是定义在 $\mathbb{C}$. 上的光滑射影簇。对于 L 上的充足线丛 X，对数消失定理 [6, 9, 11] 指出，每个整体截面

$$Q\in H^0\big(X,E^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega^1_X(\log D)\otimes L^{-1}\big),\qquad k,m\geq 1$$

满足 $Q(j_kf)=0$ 对于每条非常值整曲线 f 省略 D. 。当一条曲线 f 与D 相交且 $Q(j_kf)\not\equiv 0$时，比较该取值的零点和极点可得到第二主
定理。计数系数由所取微分的实际极点控制，而通常的估计以其源权重作为极点界。我们研究边界的几何结构所迫使的这一极点界的降低。

当 $L=H^a$ 对充足线丛 H 在 X 上有 $a\geq 1$ 时，非零取值给出相对于特征函数 $T_f(r,H)$ 的计数系数 m/a。Huynh-Vu-Xie [17, 定理 3.1] 以及 Brotbek-Deng [3,引理 4.7 和推论 4.8]分别利用有效喷射微分和对数 Semple 塔上的稳定基底轨迹来阐述这一原理。解析论证在应用源权界之前保留了实际的极点除子。我们的问题是，负扭曲能在所有整体截面上统一地将该除子减少多少。

对计数系数进行统一改进，需要消失阶随扭曲指数线性增长。我们通过在

2020年 数学主题分类。 32H30；32Q45；14F06。关键词和短语。 Nevanlinna 理论；GGL猜想；整曲线；对数喷流微分；代数退化。*通讯作者。

边界分层上的加权余法丛滤子获得这种增长。权记录接触阶，而分次因子涉及某一层的对数余切丛及其法线丛。它们的斜率为任意射流阶数和目标维数给出了整数阈值以及更简洁的闭式界。在交点处，来自各个分支的界与来自它们公共交集的界构成互补约束。

这些估计适用于由满足稳定基底轨迹假设的构造所提供的每个截面。已有满足该假设的具体族：Xie 的充足余切丛构造给出了一级情形 [25, 定理 1。1]，而 Brotbek–Deng 则直接建立了对数高阶条件 [3, 推论 4。5]。Brotbek–Deng 的几乎充足的对数余切丛还提供了更多一级例子 [2, 定理 A 和定义 2。1]。Deng 的高阶构造 [10, 定理 C 和推论 D] 通过将普通不变喷微分自然包含到对数不变喷微分中，产生了更多例子；该包含在边界之外保持取值不变。所得的系数改进在取幂以及对同一组权重到扭曲比进行优化后仍然成立。所有接触系数的消失排除了具有给定分歧的整曲线；参见推论 3.4。更一般地，定理 1.3 将正极点系数吸收到边界接触中，并将所有此类曲线限制在一个固定真代数子集中。推论 3.3陈述了由此得到的条件性轨形 Green-Griffiths-Lang 结论，并明确了剩余的喷几何假设。

论证中所采用的一般重数原理和解析原理已经确立。对数喷丛和 Semple 塔在 [11] 中得到发展，而对数留数轨迹出现在 [2, 第 2 节3]。对数微分商的正规滤子和切向滤子见 Campana-Păun [7, 对命题 4.7] 的证明以及 Cadorel [5, 第6]节。Petrakiev [20, 引理 2.1 和推论 2.2] 通过截面的首个非零正规项，表述了一般的余法向重数原理。我们的构造规定了对数喷丛上的接触加权滤链及其有限源权分量，这些对数喷丛位于 SNC（简单正规交叉）分层上。轨形喷代数 [6, 定义 2.5] 通过给定分歧指标施加极点条件；在此处，相应界限源于任意整体截面的负扭曲。斜率不等式采用 Ramanan–Ramanathan [21,定理3.18 和第 4], 节中的结果，而从实际极点过渡到计数函数则是 [3, 17, 23]中已确立的论证。

我们与 [3, 推论 4。8] 的比较同时固定了稳定基底轨迹假设以及权到扭曲的数据。结论是对该系数的统一几何改进。专门的平面曲线估计 [8, 14–16] 还依赖于显式的截面构造，并且对于特定的数对可能给出更强的数值界。其中一些构造使用了受限喷轨迹；处理这些构造所需的额外几何将在第3节中讨论。

1.2. 主要结果

在全文中， X 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的维数为$n \geq 2$的光滑不可约射影簇，而 $D = \sum_{i=1}^{t} D_i$ 是 X. 上的一个约化简单正规交叉除子，其分支光滑不可约。考虑整曲线 $f\colon \mathbb{C} \to X$. 令 $\pi\colon \mathcal{J}_k = J_k(X, \log D) \to X$表示仿射对数喷气空间，其源权为 m 的多项式函数构成$E^{\mathrm{GG}}_{k\,m,}\ \Omega^1_X(\log D)$，其中 h阶导数具有源权 $h.$。我们将不变子层记为$E_{k,\ m}\Omega^1_X(\log D)$。其截面满足

$$Q(j_k(\gamma \circ \varphi)) = \varphi'(0)^m Q(j_k\gamma)$$

对于每个保持原点不变的可逆源参数变换 φ。特别地，以下关于 Green-Griffiths 微分的所有估计都适用于不变微分。在理想成员关系陈述中， Q 表示 $\pi^* L^{-1}$ 在 $\mathcal{J}_k$, 上相应的纤维上的多项式截面，其源权重为 $m.$。我们记 $x_+ = \max\{x,\ 0\}$，并约定在每个源点 $a.$ 处 $\mathrm{ord}_a(0) = +\infty$。亚纯线丛截面的阶数在全纯标架中计算，因此与标架的选取无关。对于这样的截面 s，令 $\mathrm{pole}_a\, s = (-\mathrm{ord}_a\, s)+$

当 $s \neq 0$, 且 $\mathrm{pole}_a(0) = 0$. 时，记号 $\mathscr{O}_T$ 表示簇 T 的结构层；当 $F \simeq \mathbb{P}^1$, 记号 $\mathscr{O}_F(b)$ 表示次数为 b. 的线丛

固定一个非空指标集 J 和$D_J = \bigcap_{i\in J} D_i$. 的一个连通分支 Y。记

$$Y^\circ = Y \setminus \bigcup_{i\notin J} D_i, \qquad B_Y = \sum_{i\notin J} D_i\Big|_Y, \qquad N_i = \mathscr{O}_X(D_i)|_Y \quad (i \in J).$$

当 $\dim Y > 0$时，除子 B_Y在 Y. 上是既约的简单正规交叉。对于维数为 $d_Y > 0$ 的 Y上的一个充足极化 A_Y以及一个非零无挠凝聚层 $\mathscr{E}$，令

$$\deg_{A_Y} \mathscr{E} = c_1(\mathscr{E})A_Y^{d_Y-1}, \qquad \mu_{A_Y}(\mathscr{E}) = \frac{\deg_{A_Y}\mathscr{E}}{\operatorname{rank}\mathscr{E}}.$$

极大Harder–Narasimhan斜率记为$\mu_{\max,\ A_Y}(\mathscr{E})$。对于零层，令$\mu_{\max,\ A_Y}(0) = -\infty.$ 。对于 X上的一个线丛 L ，我们使用数值数据

$$\ell_Y = \deg_{A_Y}(L|_Y), \qquad \rho_Y = \mu_{\max,A_Y}\big(\Omega^1_Y(\log B_Y)\big), \qquad \nu_{Y,i} = \deg_{A_Y} N_i.$$

对于由正整数组成的接触向量$\mathbf{p} = (p_i)_{i\in J}$ ，令

$$\mu_Y(\mathbf{p}) = \max\{0, \rho_Y, -\nu_{Y,i}/p_i : i \in J\}. \tag{1.1}$$

每个闭层上的极化都是固定的，不依赖于任何整曲线或接触阶。

在一个正维闭分层 Y上，令 Z_{Yk} 为纯法向射流轨迹：它仅保留相对于由 J. 索引的分支而言的对数射流变量。它是典范的$Y \times \mathbb{A}^{|J|k}$；记 I_Y 为其理想，并记 ξ 为其法向射流参数。令 w_i 表示 D_i. 的一个局部定义函数。对于接触向量 $\mathbf{p}$，记 $\mathrm{F}^r_{Y\mathbf{p}}$ 为局部单项式滤过：为 D_i的一个定义函数赋予次数 p_i ，为每个切向射流变量赋予次数 1，并为每个保留的法向射流变量赋予次数 0。其内蕴构造及坐标不变性已在第 2 节中确立。对于 $\mathbf{p} = \mathbf{1} = (1)_{i\in J}$，这就是通常幂 I^r_Y.

For 一个正维闭分层 Y 且 $\ell_Y > 0$， 定义整数阈值

$$\sigma_Y(L,\mathbf{p}) = \min\left\{ j + \sum_{i\in J} p_i b_i : \ j \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^J_{\geq 0},\ \ j\rho_Y - \sum_{i\in J} b_i\nu_{Y,i} \geq \ell_Y \right\}. \tag{1.2}$$

如果该集合为空，则将此最小值记为 $+\infty$。这是分次项携带截面的必要数值阈值；达到该阈值并不意味着存在性断言。

通篇中，记号“$\|$”表示奈望林纳不等式对所有$r > 1$ 均成立，除去一个勒贝格测度有限的集合。隐含常数和例外集可以依赖于固定的几何数据、截面和曲线，但它们沿该曲线一经选定便保持不变，不会在各个边界接触处分别调整。

第 一个结果控制每个负扭曲全局射流微分的实际极点 .

定理 1.1（加权边界重数）。 设 Y 为一个正维闭层，其中 $\ell_Y > 0$ 如上所述，并设 $\mathbf{p}$ 具有正整数项。当阈值有限时，每个整体截面

$$Q \in H^0\big(X, E^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega^1_X(\log D)\otimes L^{-1}\big), \qquad k, m \geq 1$$

属于 $F^{\ \sigma_Y\ (L,\ \mathbf{p})\ Y,\ \mathbf{p}} \otimes \pi^* L^{-1}$。若阈值为无穷大，则 $Q = 0$. 对于每个以 Y。为中心、不包含于 D中的全纯弧 γ，且满足 $\mathrm{ord}_0\ (w_i \circ \gamma)\ \geq p_i$ （其中 $i \in J$），均有

$$\mathrm{ord}_0\, Q(j_k\gamma) \geq \sigma_Y(L,\mathbf{p}) - m. \tag{1.3}$$

特别地，如果 $\mu_Y(\mathbf{p}) > 0$，那么

$$\sigma_Y(L,\mathbf{p}) \geq \left\lceil \frac{\ell_Y}{\mu_Y(\mathbf{p})} \right\rceil,$$

且极点阶至多为

$$\left(m - \left\lceil \frac{\ell_Y}{\mu_Y(\mathbf{p})} \right\rceil \right)_+.$$

若 $\mu_Y(\mathbf{p}) = 0$，则所有此类整体截面均为零。

整数阈值记录了一种离散优化，其值可能严格大于较简单的斜率上取整。对于固定的源权重，可以保留附加约束

$$\sigma_Y^{[m]}(L,\mathbf{p}) = \min\left\{ j + \sum_i p_i b_i : 0 \le j \le m,\ j \in \mathbb{Z},\ \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^J_{\ge 0},\ j\rho_Y - \sum_i b_i \nu_{Y,i} \ge \ell_Y \right\},$$

并再次将空可行集的取值设为 $+\infty$。有 $\sigma_Y^{[m]}(L,\ \mathbf{p}) \ge \sigma_Y(L,\ \mathbf{p})$，并且定理 σ_Y 中的每一处1.1都可以替换为这个更强的有限权阈值。特别地，若约束可行集为空，则相应权m的整体截面空间消失。任一可行集非空仅是必要的数值条件，并不意味着截面的存在，也不意味着能够达到其预测的消失阶。例3.6 在一个具有非零负扭曲截面的对数曲面上，展示了整数阈值与斜率上取整之间的严格差异。定理1.1 的证明推迟至第3节。

取曲面 X 上的充足线丛 H，并赋予其具有正曲率$\omega_H = c_1(H,\ h_H)$的光滑 *Hermite* 度量。我们使用$(\ )$，使得对于度量线丛 $L.$ 的局部全纯框架 e，有 $dd^c = \frac{\sqrt{-1}}{\pi}\partial\bar{\partial}$和 $c_1(L,\ h_L) = -dd^c\log\ \|e\|_{h_L}$。对于 $r \ge 1$，定义

$$T_f(r,H) = \int_1^r \frac{dt}{t} \int_{|z|<t} f^*\omega_H.$$

对于带有固定光滑度量 h_L，T_f 的任意线丛 L（位于 X 上），r，L）由与 $c_1(L,\ h_L)$ 相同的公式定义。我们对线丛类和有理除子类采用加法记号，并通过有理线性将特征函数扩展到有理除子。光滑度量的改变只会使特征函数相差 $O(1)$。对于 $\mathbb{C}$ 上的有效实除子 $A = \sum_z \lambda_z[z]$，令

$$n_A(t) = \sum_{|z|<t} \lambda_z, \qquad N(r,A) = \int_1^r \frac{n_A(t)}{t}\,dt.$$

这一约定包含原点处的重数，与其他标准下限约定的差异仅在于一个有界项。对于 $x > 0$，我们使用 $\log^+ x = \max\{\log\ x,\ 0\}$，并令 $\log^+ 0 = 0.$ 对于非常值整曲线 $f\colon\ \mathbb{C} \to X$ 若不包含于 D，则记

$$S_f(r) = O\big(\log^+ T_f(r,H) + \log r\big), \qquad \overline{N}_f(r,D) = N\big(r,(f^*D)_{\mathrm{red}}\big).$$

令 $\pi_{0,\ k}\colon\ X_k(D) \to X$ 表示对数 Demailly–Semple 塔，$X_k(D)^{\mathrm{sing}}$ 表示其非正则射流轨迹。对于任意射影簇上的线丛 M，令 $\mathbf{B}(M) = \bigcap_{q\ge 1} \mathrm{Bs}\ |M^q|$.对于每个正维闭分层，选取如上所述的一个极化，并令

$$h_Y = \deg_{A_Y}(H|_Y) > 0, \qquad \theta_Y(\mathbf{p}) = \frac{h_Y}{\mu_Y(\mathbf{p})} \quad (\mu_Y(\mathbf{p}) > 0).$$

这些比值所需的正性源于定理 1.2 的假设。对于一个分支 D_i，将此函数简写为 $\theta_i(p_i)$。上的数据 D_i 使用其完整的剩余边界$(D - D_i)|_{D_i}$.

当这些比值有定义时，对于 $c > 0$，一个连通精确层 $Y_\circ \subset D_J$，以及一个接触向量$\mathbf{p}$，令

$$b_Y(\mathbf{p}) = \left(\min\left\{ c,\ |J|c - \sum_{i\in J}\theta_i(p_i),\ c - \theta_Y(\mathbf{p}) \right\} \right)_+, \qquad \dim Y > 0,$$

$$b_Y(\mathbf{p}) = \left(\min\left\{ c,\ |J|c - \sum_{i\in J}\theta_i(p_i) \right\} \right)_+, \qquad \dim Y = 0. \tag{1.4}$$

在点 $z \in f^{-1}(D)$，令 $Y(z)^\circ$为包含 $f(z)$ 的精确分层，并令 $\mathbf{p}(z)$ 为接触阶向量。定义有效实除子

$$\mathcal{B}_f = \sum_{z\in f^{-1}D} b_{Y(z)}(\mathbf{p}(z))[z].$$

系数介于零和 c，之间，因此其计数函数是良定义的。

第二项在通常的稳定基底轨迹假设下，将这一一致代数估计转化为第二主定理。

定理 1.2（一致第二主定理）。设 H 是充足的，并且存在正整数 k、m、a，使得

$$\mathbf{B}(\mathscr{O}_{X_k(D)}(m)\otimes\pi_{0,k}^{*}H^{-a})\subset X_k(D)^{\mathrm{sing}}\cup\pi_{0,k}^{-1}(D). \tag{1.5}$$

于是，量 $\mu_Y(\mathbf{p})$ 对于所有正维分层和有限接触向量均为正。令 $c=m/a$，并取系数（1.4），则每条非常值整曲线 $f\colon\ \mathbb{C}\to X$不包含于 D 都满足

$$T_f(r,H)\le N(r,\mathcal{B}_f)+S_f(r)\quad\|. \tag{1.6}$$

这些系数不要求所选截面的余数满足任何条件，并且与用于实现稳定基底轨迹的幂次无关。

（1.4）中的每个系数都不超过 c 在 [3,推论 4.8]中的系数。在正维精确分层上，该系数严格小于 c. 在零维交叉点处，等号可能成立。量 $\theta_i(p_i)$ 和 $\theta_Y(\mathbf{p})$ 由 H、极化边界分层和接触阶决定，而修正系数 $b_Y(\mathbf{p})$ 还取决于 $c=m/a$. 该估计不对（1.5）所提供的截面施加其他条件。

对于光滑不可约边界，记 $h=\deg_A(H|_D)$ $\rho=\mu_{\max,\ A}(\Omega^1_D)$ $\nu=\deg_A N_{D/X}$，以及 $\mu(p)=\max\{\rho,-\nu/p,\ 0\}$。定理 1.2 特别给出：

$$T_f(r,H)\le\left(\frac{m}{a}-\frac{h}{\mu(1)}\right)_{+}\overline{N}_f(r,D)+S_f(r)\quad\|.$$

正的减项在用于实现稳定基底轨迹的每个幂次中都保留下来。推论 3.1利用实际接触阶数给出了更精细的估计，而推论 3.4 确定了所得的极点消去何时排除非常值整曲线。

固定整数 $r_i\ge 1$. 如果每次与 D_i 的交点阶数至少为 $r_i.$，则称曲线具有最小接触$\mathbf{r}$。省略一个分支仍满足此条件。对于由 J，索引的精确分层，我们记为 $\mathbf{r}_J=(r_i)_{i\in J}$.

第三种情形允许存在一个固定的代数例外集，并给出了统一代数退化的有限接触判据。

定理 1.3 (统一代数退化**)**。设 $Z\subsetneq X$ 为一个闭代数子集，可以为空。假设

$$\mathbf{B}(\mathscr{O}_{X_k(D)}(m)\otimes\pi_{0,k}^{*}H^{-a})\subset X_k(D)^{\mathrm{sing}}\cup\pi_{0,k}^{-1}(D\cup Z). \tag{1.7}$$

对于正整数 k，m，a. 若 $c=m/a$，则(1.4) 中的比值是良定义的，并且(1.6) 对每条不包含于 $D\cup Z$. 的非常值整曲线均成立。设存在有理数 $\lambda_i\ge 0$ 使得

$$b_Y(\mathbf{r}_J)\le\sum_{i\in J}\lambda_i r_i,\qquad H-\sum_{i=1}^{t}\lambda_i D_i\ \textit{is ample} \tag{1.8}$$

对于由 $J.$ 索引的每个非空精确分层 Y°，那么，每条不包含于 D 且具有最小接触$\mathbf{r}$ 的非常值整曲线，其像都包含于 $Z.$。特别地，例外集与曲线无关；若 Z 为空，则不存在这样的曲线。

（1.8）中的分层不等式只有有限多个。定理允许 $b_Y(\mathbf{r}_J)>0$，因此超越了推论3.4中的零极点检验。从极点吸收到退化的过渡，利用了已确立的负扭曲不变射流消失机制；额外的数值信息是修正系数 b_Y 及其对精确分层和接触的依赖。为在固定 k、m、a时进行比较，满权极点估计要求更强的不等式 $c\le\sum_{i\in J}\lambda_i r_i$. 这两种比较都不能替代基底轨迹条件本身。

1.3. 进一步细化

加权滤子将斜率限制在其正规因子和切向因子的最大斜率之内。非分裂余法丛可以给出更强的非加权估计。以下改进将余法向重数原理应用于整个扩张丛。

定理 1.4（余法纤维与分支划分）。设 Y 为正维的，且有$\ell_Y > 0$，并令

$$E_\xi = (\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2)\Big|_{Y\times\{\xi\}}, \qquad \eta_\xi = \max\{0, \mu_{\max,A_Y}(E_\xi)\}.$$

对于任意选定的法向喷气参数 ξ_0 满足 $\eta_{\xi_0} > 0$，定理 *1.1* 中的每个截面都属于

$$\mathcal{I}_Y^{\lceil \ell_Y/\eta_{\xi_0}\rceil} \otimes \pi^* L^{-1}.$$

若 $\eta_{\xi_0} = 0$，则每个这样的截面均为零。特别地，令 $\boldsymbol{P}$ =（G_1、…、G_k）为一个划分$J = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_k$，允许存在空群。令 X_G 为包含 Y 的 $D_{J\setminus G}$ 的分支，并在 $G = J$ 时令 $X_G = X$，再令

$$R_G = \sum_{i\notin J} D_i\Big|_{X_G}, \qquad F_G = \Omega^1_{X_G}(\log R_G)\Big|_Y.$$

对于 $G = \varnothing$，令 $F_G = \Omega^1_Y$（$\log B_Y$）。存在参数 ξ_0 满足 $E_{\xi_0} \simeq \bigoplus_{h=1}^k F_{G_h}$，因此前述结论对以下情形仍成立：

$$\eta_{\xi_0} = \eta_{\mathcal{P}} = \max\left\{0, \mu_{\max,A_Y}(F_{G_h}) : 1 \le h \le k\right\} \le \mu_Y(\mathbf{1}).$$

对于一个分支 D_i，将 $\mathcal{I}_{D_i}$ 简写为 $\mathcal{I}_i$. 在曲面上，来自两个边界分支的同时约束给出以下局部估计。

定理 1.5（来自两个分支理想的精确界）。设 k、$m \ge 1$、s_i、$s_j \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，并假设曲面上的一个权为 m 的对数 k-喷微分局部属于 $I_i^{s_i} \cap I_j^{s_j}$ 于 $D_i \cap D_j$. 此处，要求其在目标交叉点的一个适配邻域上的纤维方向多项式喷代数中满足理想归属性。设 γ 为一条经过该交叉点、但不包含于 D 中的弧，并具有有限接触 p_i、$p_j \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$. 令

$$b_0 = (s_i - m)_+, \qquad d_0 = (s_j - m)_+, \qquad \delta = (s_i + s_j - m)_+,$$

and

$$C = p_i b_0 + p_j d_0 + \min(p_i, p_j)(\delta - b_0 - d_0).$$

那么，$\delta \ge b_0 + d_0$，且取值的极点阶至多为 $(m - C)_+$. 这是仅依据这两个单项式理想幂条件和源权重所能得到的最佳局部界。

1.4. 文章结构

第 1 节中的陈述在第 3节中得到证明。第 2 节给出斜率不等式、对数喷滤子、已确立的实际极点估计以及极点吸收引理。第 3 节还包含一致代数退化和有条件的轨形 Green-Griffiths-Lang 推论、明确的曲面与超曲面计算，以及检验整数阈值和交叉界的例子。

2. 预备知识

2.1. 斜率与消失

为涵盖边界分层的应用，本小节中令 X 表示一个维数为 $d \ge 1$、定义在 $\mathbb{C}$，并配备充足线丛 A. 的光滑不可约射影簇。斜率是相对于 A，计算的；当极化明确时，省略下标 A。若对于每个非零元素 $\mathscr{O}_{X,\,y}$ 在 $\mathscr{E}_y$ 上的乘法对每个 $y \in X$. 都是单射，则称相干层 $\mathscr{E}$ 为无挠层。其秩是其一般纤维在函数

域 X. 上的维数。对于秩为正的无挠层 $\mathscr{E}$ r，定义其行列式、次数和斜率如下：

$$\det \mathscr{E} = \left(\bigwedge^r \mathscr{E}\right)^{**}, \quad \deg_A \mathscr{E} = c_1(\det \mathscr{E}) c_1(A)^{d-1}, \quad \mu_A(\mathscr{E}) = \frac{\deg_A \mathscr{E}}{r},$$

其中，双对偶是相对于 $\mathscr{O}_X$. 取的。这里， c_1 是第一陈类，乘积在 X. 上取。光滑性保证 $\det \mathscr{E}$是一个线丛；在曲线上，$\deg_A \mathscr{E}$是其通常的次数。

若子层 $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ 满足 $\mathscr{E}/\mathscr{F}$ 无挠，则称其为饱和的。其饱和化是 $\mathscr{E}$中挠子层 $\mathscr{E}/\mathscr{F}$. 的逆像。记 $\mathscr{F}_{\mathrm{sat}}$ 为非零子层 $\mathscr{F}$.的饱和化。 $\mathscr{F}^{\mathrm{sat}}/\mathscr{F}$ 的余维一长度定义了一个有效除子 Δ，并且

$$\deg_A \mathscr{F}^{\mathrm{sat}} - \deg_A \mathscr{F} = c_1(\mathscr{O}_X(\Delta)) c_1(A)^{d-1} \geq 0.$$

因此，饱和化保持秩且不会降低次数，所以可以在饱和子层上检验斜率的上界。非零无挠层 $\mathscr{E}$ 称为斜率半稳定的，如果

$$\mu_A(\mathscr{F}) \leq \mu_A(\mathscr{E})$$

对于每个满足 $\mathscr{F}$ 且具有 $0 <$ 秩 $\mathscr{F} <$ 秩 $\mathscr{E}$. 的子层。对于每个非零无挠层 $\mathscr{E}$，Harder-Narasimhan滤过是由饱和子层构成的唯一滤过

$$0 = \mathscr{E}_0 \subsetneq \mathscr{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathscr{E}_s = \mathscr{E}$$

使得商 $\mathscr{G}_i = \mathscr{E}_i/\mathscr{E}_{i-1}$ 是无挠且斜率半稳定的，并且

$$\mu_A(\mathscr{G}_1) > \mu_A(\mathscr{G}_2) > \cdots > \mu_A(\mathscr{G}_s).$$

最大斜率为

$$\mu_{\max,A}(\mathscr{E}) = \mu_A(\mathscr{G}_1) = \sup_{0 \neq \mathscr{F} \subset \mathscr{E}} \mu_A(\mathscr{F}),$$

其中，上确界取遍所有非零相干子层，包括秩为满秩的子层。与引言中一样，$\mu_{\max,\ A}(0) = -\infty$；斜率本身仅用于正秩层。特别地，半稳定等价于 $\mu_{\max,\ A}(\mathscr{E}) = \mu_A(\mathscr{E})$。

无挠层在余维至少为二的闭子集之外局部自由。若两个无挠层在这样的开集上相同，则它们具有相同的秩和第一陈类，并且任一层的每个饱和子层都可延拓为另一个层的饱和子层，且秩和次数相同。因此，它们的最大斜率相同，且半稳定性得以保持。我们将利用这一观察，在滤子的各因子局部自由的公共开集上计算其斜率。

对于正秩无挠层的正合列 $0 \to \mathscr{A} \to \mathscr{B} \to \mathscr{C} \to 0$，取行列式可得

$$\det \mathscr{B} \simeq \det \mathscr{A} \otimes \det \mathscr{C}, \quad \deg_A \mathscr{B} = \deg_A \mathscr{A} + \deg_A \mathscr{C}.$$

行列式同构先在三个层均局部自由的开集上得到，并延拓到其余维至少为二的补集上。类似地，设 $\mathscr{A}$， $\mathscr{B}$具有正秩 a， b，并设 $\mathscr{T}$是 $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ 除去其挠子层后的商。向量丛张量积的行列式公式可从这样的开集延拓得到 $\det \mathscr{T} \simeq (\det \mathscr{A})^{\otimes b} \otimes (\det \mathscr{B})^{\otimes a}$. 因此，我们得到

$$\deg_A \mathscr{T} = b \deg_A \mathscr{A} + a \deg_A \mathscr{B}, \quad \mu_A(\mathscr{T}) = \mu_A(\mathscr{A}) + \mu_A(\mathscr{B}).$$

引理 2.1 (斜率不等式)。设 E、F 是 X 上的非零向量丛， P 是 X. 上的线丛。对于 $j \geq 1$，有

$$\begin{aligned}
\mu_{\max}(E \otimes F) &\leq \mu_{\max}(E) + \mu_{\max}(F), \\
\mu_{\max}(\mathrm{Sym}^j E) &\leq j \mu_{\max}(E), \\
\mu_{\max}(E \otimes P) &= \mu_{\max}(E) + \deg_A P, \\
\mu_{\max}(E \oplus F) &= \max\{\mu_{\max}(E), \mu_{\max}(F)\}.
\end{aligned}$$

对于无挠凝聚层 $0 \to \mathscr{E}' \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}'' \to 0$ 的正合列，有

$$\mu_{\max}(\mathscr{E}) \le \max\{\mu_{\max}(\mathscr{E}'),\ \mu_{\max}(\mathscr{E}'')\}.$$

最大斜率为负的无挠层没有非零整体截面。我们采用约定 对称幂$^0 E = \mathscr{O}_X$.

证明。 我们先证明无挠层正合列的断言。若 $\mathscr{E} = 0$，扩张不等式显然成立，因此假设 $\mathscr{E} \neq 0$. 对于非零子层 $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$，令$\mathscr{F}\prime = \mathscr{F} \cap \mathscr{E}\prime$，并令 $\mathscr{F}''$ 为其在 $\mathscr{E}''$ 中的像。这些层均无挠，且

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

是正合的。当两项均非零，且秩分别为 r'， r'' 时，由秩和次数的可加性可得

$$\mu_A(\mathscr{F}) = \frac{r'}{r'+r''}\mu_A(\mathscr{F}') + \frac{r''}{r'+r''}\mu_A(\mathscr{F}'').$$

若其中一项为零，则 $\mathscr{F}$ 的斜率等于另一项的斜率。这两个斜率各自都不超过其所在层的最大斜率。对 $\mathscr{F}$取上确界，即得扩张不等式。在特征零情形下，两个斜率半稳定无挠层的张量积模去挠子后仍为斜率半稳定；参见 [21, 定理3.18及第 4]节中的高维推广。记 E_i， F_q 为两个 Harder–Narasimhan 滤子的各项，并以 $\mathcal{G}_i = E_i/E_{i-1}$、$\mathcal{H}_q = F_q/F_{q-1}$ 表示其因子。选取一个开集 $U \subset X$，使其补集的余维至少为二，且所有这些项和因子在该开集上均为局部自由。先用 $(E \otimes F)|_U$对 $W_i = (E_i \otimes F)|_U$. 进行滤化。商映射

$$p_i : W_i \longrightarrow (\mathcal{G}_i \otimes F)|_U$$

其核为 W_{i-1}. 若 $0 = F_0 \subset \cdots \subset F_t = F$，则我们将此步骤细化为

$$W_{i,q} = p_i^{-1}((\mathcal{G}_i \otimes F_q)|_U), \quad 0 \le q \le t.$$

Then

$$W_{i,0} = W_{i-1}, \quad W_{i,t} = W_i, \quad W_{i,q}/W_{i,q-1} \simeq (\mathcal{G}_i \otimes \mathcal{H}_q)|_U.$$

将这些细化连接起来，得到 $(E \otimes F)|_U$ 按子丛构成的一个滤子。令 η 为 X. 的一般点。对于每一项，定义

$$\widetilde{W}_{i,q} = (E \otimes F) \cap (W_{i,q})_\eta \subset (E \otimes F)_\eta,$$

其中交集取在 $E \otimes F$. 的有理截面层中。通过对定义 $(W_{i,\ q})\eta\cdot$ 的线性方程局部地清除分母，可以看出此交集是相干的。$\widetilde{\ }$商 $(E \otimes F)/W_{i,\ q}$嵌入到其纤维为 $(E \otimes F)_\eta/(W_{i,\ q})\eta$，的有理截面层中，因此$\widetilde{\ }$它是无挠的。因此，$W_{i,\ q}$ 是饱和的，并且在 U 上限制为 $W_{i,\ q}$ 因为 $W_{i,\ q}$ 在那里是一个子丛。这些扩张仍然是嵌套的，并且它们的连续商

$$\mathcal{Q}_{i,q} = \widetilde{W}_{i,q}/\widetilde{W}_{i,q-1}, \quad 1 \le q \le t,$$

$\widetilde{\ }$是无挠的，因为它们是 $(E \otimes F)/W_{i,\ q-1}$. 的子层。它们满足

$$\mathcal{Q}_{i,q}|_U \simeq (\mathcal{G}_i \otimes \mathcal{H}_q)|_U.$$

令$\mathcal{T}_{i,\ q}$ 表示$\mathcal{G}_i \otimes \mathcal{H}q$ 模去其挠子层所得的商。根据所引用的特征零张量积定理，$\mathcal{T}_{i,\ q}$ 是斜率半稳定的，而张量积斜率公式给出

$$\mu_A(\mathcal{T}_{i,q}) = \mu_A(\mathcal{G}_i) + \mu_A(\mathcal{H}_q).$$

由于 $\mathcal{Q}_{i,\ q}$ 与$\mathcal{T}_{i,\ q}$ 在 U，上一致，对余维至少为二处变化的不变性给出 s

$$\mu_{\max}(\mathcal{Q}_{i,q}) = \mu_{\max}(\mathcal{T}_{i,q}) = \mu_A(\mathcal{G}_i) + \mu_A(\mathcal{H}_q) \le \mu_{\max}(E) + \mu_{\max}(F).$$

连续应用扩张不等式即可证明张量积界。平均算子

$$\frac{1}{j!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_j} \sigma,$$

其中，对称群 $\mathfrak{S}_j$ 置换张量因子，表明 $\operatorname{Sym}^j E$ 是 $E^{\otimes j}$. 的一个直和因子。对称幂界由这一包含关系和迭代张量积界推出。与 P作张量积，在 E的子层与 $E\otimes P$. 的子层之间给出一个双射。它保持秩不变，并将 $\deg_A P$加到每个斜率上，从而证明扭曲公式。扩张不等式给出 $E\oplus F$，的上界，而其两个直和因子的包含关系给出反向界。最后，无挠层 $\mathscr{E}$ 的一个非零截面在一般点处非零，因而给出一个注入 $\mathscr{O}_X$，$\to \mathscr{E}$. 由于 $\mu_A(\mathscr{O}_X)=0$，这迫使 $\mu_{\max}(\mathscr{E})\geq 0$，并证明了消失断言。□

仅有负平均斜率并不意味着消失： $E=\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-3)$ 具有 $\mu(E)=-1$和 $\mu_{\max}(E)=1$，其中 $H^0(\mathbb{P}^1,E)\neq 0$. 对于有限滤过 $0=\mathsf{K}_0\subset\cdots\subset\mathsf{K}_N=\mathsf{K}$，其非零无挠商层为 $\mathsf{Q}_v=\mathsf{K}_v/\mathsf{K}_{v-1}$，反复应用引理 2.1 可得

$$\mu_{\max}(\mathcal{K})\leq\max_{1\leq v\leq N}\mu_{\max}(\mathcal{Q}_v).$$

如果所有这些最大斜率都为负，那么由于滤过是有限的，最大值也为负，并且 $H^0(X,\mathcal{K})=0$. 等价地，左正合列

$$0\longrightarrow H^0(X,\mathcal{K}_{v-1})\longrightarrow H^0(X,\mathcal{K}_v)\longrightarrow H^0(X,\mathcal{Q}_v)$$

通过归纳法给出相同的消失结论。

我们将这些事实应用于一个正维分层 Y，其极化为 A_Y，数值数据为 ρ_Y，$\nu_{Y,\,i}$，ℓ_Y，如引言中所述。对于非负整数 b_i，α_h，令

$$\mathcal{G}_{\mathbf{b},\boldsymbol{\alpha}}=\left(\bigotimes_{i\in J}N_i^{-b_i}\right)\otimes\left(\bigotimes_{h=1}^{k}\operatorname{Sym}^{\alpha_h}\Omega^1_Y(\log B_Y)\right)\otimes L^{-1}|_Y.$$

张量积、对称幂和扭曲公式给出

$$\mu_{\max,A_Y}(\mathcal{G}_{\mathbf{b},\boldsymbol{\alpha}})\leq\left(\sum_{h=1}^{k}\alpha_h\right)\rho_Y-\sum_{i\in J}b_i\nu_{Y,i}-\ell_Y.$$

这里，$N_i^{-b_i}=(N_i^*)^{\otimes b_i}$，因此其次数为 $-b_i\nu_{Y,\,i}$，而扭曲 $L^{-1}|_Y$贡献 $-\ell_Y$.。因此，右侧严格为负迫使 $H^0(Y,\,\mathcal{G}_{\mathbf{b},\,\boldsymbol{\alpha}})=0$. 整数 $j=\sum_h\alpha_h$ 计数的是来自 $\Omega^1_Y(\log B_Y)$，的因子数，而它们的源权重总和为 $\sum_h h\alpha_h$.。对于一个来自权为 m 的喷射微分的因子，这给出 $j\leq\sum_h h\alpha_h\leq m$.。该估计是（1.2）及其在固定源权重下的精细化的基础。因此，$\mathcal{G}_{\mathbf{b},\,\boldsymbol{\alpha}}$ 的非零截面要求

$$\left(\sum_h\alpha_h\right)\rho_Y-\sum_i b_i\nu_{Y,i}\geq\ell_Y;$$

仅有这个必要条件并不能保证截面的存在。

2.2. 对数射流坐标与滤子

设 Y 表示一个由 J 标记的正维闭层，其剩余边界为B_Y.。对数余切丛 $\Omega^1_Y(\log B_Y)$ 的局部标架由边界方向上的 dz_a/z_a 以及其余方向上的普通微分组成。对于 $i\in J$，D_i 在 Y 上的法线丛为 $N_i=\mathscr{O}_X(D_i)|_Y$，其对偶丛为 $N_i^*=\mathscr{O}_X(-D_i)|_Y$.在 Y 的一点附近选取适配坐标（w_i，z_a），其中 $w_i=0$ 定义 $i\in J$ 的 D_i，并且$1\leq a\leq d_Y$.。将 z_a 重新排序，剩余边界分支为 $z_1=0$、……、$z_q=0$，其中 $0\leq q\leq d_Y$.。对于由 J 标记的分支，使用对数喷射坐标

$$\xi_{i,h}=(\log w_i)^{(h)},\qquad i\in J,\qquad 1\leq h\leq k.$$

这些在边界之外与所指的导数一致，并在 $w_i=0$. 上延拓为独立的纤维坐标。记 $\xi_i=(\xi_{i,\,1},\,\ldots\ldots,\,\xi_{i,\,k})$，并将其余喷射变量记为

$\eta_{a,\,h}$，其中 $1 \le a \le d_Y$ 且 $1 \le h \le k.$。具体而言，

$$\eta_{a,h} = \begin{cases} (\log z_a)^{(h)}, & 1 \le a \le q, \\ z_a^{(h)}, & q < a \le d_Y. \end{cases}$$

因此，基坐标连同 $\xi_{i,\,h}$、$\eta_{a,\,h}$ 给出了仿射对数喷气空间的一个局部平凡化，其中 nk 为彼此独立的纤维坐标。置

$$\mathcal{I}_Y = (w_i, \eta_{a,h} : i \in J,\ 1 \le a \le d_Y,\ 1 \le h \le k).$$

局部地，其零点集 $Z_{Y,\,k}$ 位于 Y，其中 $\eta_{a,\,h} = 0$ 为任意坐标 $\xi_{i,\,h}$. 这些理想是在对数喷气空间中该轨迹的邻域上考虑的。对于正整数接触权重 $\mathbf{p} = (p_i)_{i\in J}$，在每个适配图表中定义

$$\mathcal{F}^r_{Y,\mathbf{p}} = \left(w^{\mathbf{b}}\eta^{\boldsymbol{\alpha}} : \sum_{i\in J} p_i b_i + |\boldsymbol{\alpha}| \ge r \right), \qquad r \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, \tag{2.1}$$

其中 $w^{\mathbf{b}} = \prod_{i\in J} w_i^{b_i}$、$\eta^{\boldsymbol{\alpha}} = \prod_{a,\,h} \eta_{a,\,h}^{\alpha_{a,\,h}}$、$|\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{a,\,h} \alpha_{a,\,h}$以及所有指数均为非负整数。$w_i$、$\xi_{i,\,h}$、$\eta_{a,\,h}$的滤过次数分别为 p_i、0、1。在源缩放 $t \mapsto \lambda t$下，基坐标保持不变，而$\xi_{i,\,h}$、$\eta_{a,\,h}$ 均乘以 λ^h；因此，w_i、$\xi_{i,\,h}$、$\eta_{a,\,h}$的源权重分别为 0、h、$h.$。滤子是递减的且具有乘法性：

$$\mathcal{F}^0_{Y,\mathbf{p}} = \mathscr{O}_{\mathcal{J}_k}, \qquad \mathcal{F}^1_{Y,\mathbf{p}} = \mathcal{I}_Y, \qquad \mathcal{F}^{r+1}_{Y,\mathbf{p}} \subset \mathcal{F}^r_{Y,\mathbf{p}}, \qquad \mathcal{F}^r_{Y,\mathbf{p}}\mathcal{F}^s_{Y,\mathbf{p}} \subset \mathcal{F}^{r+s}_{Y,\mathbf{p}}.$$

等价地，取 $\mathfrak{a}_i = (w_i)$，则有

$$\mathcal{F}^r_{Y,\mathbf{p}} = \sum_{\sum_i p_i b_i + j \ge r} \left(\prod_{i\in J} \mathfrak{a}_i^{b_i} \right) \mathcal{I}_Y^j.$$

事实上，$\mathcal{I}_Y^j$ 中的每个单项式的滤过次数至少为 j，而每个生成元 $w^{\mathbf{b}}\eta^{\boldsymbol{\alpha}}$ 在（2.1）中的出现项，在所示求和中均带有 $j = |\boldsymbol{\alpha}|$. 记 $p_{\max} =$最大值$_{i\in J}\, p_i$，还可得

$$\mathcal{I}_Y^r \subset \mathcal{F}^r_{Y,\mathbf{p}} \subset \mathcal{I}_Y^{\lceil r/p_{\max} \rceil}.$$

第一个包含关系用到了 $p_i \ge 1$，第二个包含关系则是因为单项式的滤过次数至多为 $p_{\max}$ 乘以它关于理想 $\mathcal{I}_Y$. 的生成元的总次数。对每个 $\eta_{a,\,h}$ 赋予滤过次数 1 与任意正接触权重相容。事实上，若 $p_i = 1$且 $h \ge 2$，则下方过渡变换中的项 $w_i B_h(\xi_i)$ 的滤过次数为 1，因此给 η_a赋予次数 h，$_h$ 一般不会得到坐标无关滤子。

引理 2.2。理想 I_Y 定义了一个正则闭嵌入

$$Z_{Y,k} \simeq Y \times \mathbb{A}^{|J|k} \hookrightarrow \mathcal{J}_k,$$

其中理想是在该闭子集的一个邻域上理解的。若 $\pi_Y\colon Z_{Y,\,k} \to Y$ 是投影，则存在一个正合列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i\in J} \pi_Y^* N_i^* \longrightarrow \mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2 \longrightarrow \bigoplus_{h=1}^{k} \pi_Y^* \Omega^1_Y(\log B_Y)[h] \longrightarrow 0. \tag{2.2}$$

符号 $[h]$ 将这份 Ω^1_Y（对数 B_Y）置于源权重 h中，而 的类具有零源权重。滤子 （2.1）与适配坐标无关。对于固定的r，$m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，齐次分量

$$\left(\pi_{Y*}(\mathcal{F}^r_{Y,\mathbf{p}}/\mathcal{F}^{r+1}_{Y,\mathbf{p}}) \right)_m$$

具有有限滤过，其商是以下对象的有限直和

$$\left(\bigotimes_{i\in J} N_i^{-b_i} \right) \otimes \left(\bigotimes_{h=1}^{k} \operatorname{Sym}^{\alpha_h} \Omega^1_Y(\log B_Y) \right).$$

指标 b_i、 α_h 是满足以下条件的非负整数

$$\sum_i p_i b_i + \sum_h \alpha_h = r, \qquad \sum_h h\alpha_h \le m.$$

重数是变量 $\xi_{i,h}$. 中源权重为 $m - \sum_h h\alpha_h$ 的多项式空间的维数。对于$\mathbf{p} = \mathbf{1}$，有 $F^r_{Y,\mathbf{1}} = I^r_Y$.

证明。在适配坐标的变换下，我们有 $w_i' = u_i w_i$ ，其中 u_i 是一个单位。令 B_h 表示由下式确定的完全贝尔多项式

$$w_i^{(h)} = w_i B_h(\xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,h}).$$

例如

$$B_1 = \xi_{i,1}, \qquad B_2 = \xi_{i,1}^2 + \xi_{i,2}, \qquad B_3 = \xi_{i,1}^3 + 3\xi_{i,1}\xi_{i,2} + \xi_{i,3}.$$

每个 B_h 都是源权重为 h. 的齐次式。令 D_t 表示对于 $0 \le h < k$ 从射流阶数 h 到阶数 $h+1$ 的全导数；以下所有表达式的所得射流阶数至多为 k. 。这些恒等式

$$D_t w_i = w_i \xi_{i,1}, \qquad D_t \xi_{i,h} = \xi_{i,h+1}, \qquad D_t \eta_{a,h} = \eta_{a,h+1} \quad (h < k)$$

表明，在连续阶数下，属于由 w_i,$\eta_{a,h}$ 生成的相应理想以及它们的平方这一归属性在微分下保持不变。对于关于平方的断言，莱布尼茨法则给出

$$D_t(g_1 g_2) = (D_t g_1) g_2 + g_1 D_t g_2,$$

并且，当 g_1, g_2 属于前一射流阶数的理想时，这两个加项都属于下一射流阶数理想的平方。此外，每个基坐标函数的全导数都属于该理想，因为 $D_t z_a = z_a \eta_{a,1}$ 当 $a \le q$ ，而 $D_t z_a = \eta_{a,1}$ 在其他情况下。因此，

$$\xi_{i,h}' = \xi_{i,h} + D_t^h \log u_i \equiv \xi_{i,h} \pmod{\mathcal{I}_Y}.$$

$\log u_i$ 的导数是单位 u_i 及其导数的正则表达式，无需选取对数。记 $\vartheta_a = dz_a/z_a$ 为 $a \le q$ ，在其他情况下记为 $\vartheta_a = dz_a$ 。在适配坐标发生变化时，这些形式满足

$$\vartheta_a' = \sum_b \widetilde{A}_{ab}(w,z)\vartheta_b + \sum_{i\in J} \widetilde{C}_{ai}(w,z)\, dw_i,$$

其系数为正则函数。对于剩余边界分支，在对各分支进行可能的置换后，这由 $z_a' = v_a z_a$ 和 $d\log z_a' = d\log z_a + d\log v_a$, 得出。限制到 Y 后，得到 $\Omega^1_Y(\log B_Y)$. 的过渡矩阵 $A = \widetilde{A}|_Y$。在 1-射流上取值得到

$$\eta_{a,1}' = \sum_b \widetilde{A}_{ab}\eta_{b,1} + \sum_{i\in J} \widetilde{C}_{ai} w_i \xi_{i,1}.$$

对该恒等式求导时，其系数的导数属于 $\mathcal{I}_Y$，并且与 $\mathcal{I}_Y$. 中的另一个元素相乘。这些乘积模 $\mathcal{I}_Y^2$. 消失。利用 $D_t(w_i B_h(\xi_i)) = w_i B_{h+1}(\xi_i)$, 对 h 进行归纳，因而得到

$$\begin{aligned} w_i' &\equiv u_i|_Y\, w_i, \\ \eta_{a,h}' &\equiv \sum_b A_{ab}\eta_{b,h} + \sum_{i\in J} C_{ai} w_i B_h(\xi_i) \pmod{\mathcal{I}_Y^2}, \end{aligned}$$

~其中 $C_{ai} = C_{ai}|_Y$. 特别地，$\mathcal{I}_Y$ 的所有变换后的生成元都属于$\mathcal{I}_Y$，而逆坐标变换则给出反向包含。因此，局部理想在交叠处相同，坐标 $\xi_{i,\,h}$ 在 $Z_{Y,\,k}$. 上具有恒等过渡映射。生成元 w_i, $\eta_{a,\,h}$构成局部坐标系的一部分，因此构成一个正则序列。由此得到的正则嵌入的余维为 $|J| + kd_Y$.因此， w_i的类张成余法丛子丛$\bigoplus_i \pi_Y^* N_i^*$，而商由每个源权重 h. 对应的切向生成元给出。这

在不假设存在分解的情况下证明了（2.2）。对于 $\mathbf{p}=\mathbf{1}$，单项式定义给出 $\mathcal{F}^{r}_{Y,\,\mathbf{1}}=\mathcal{I}_Y^{r}$对每个 $r\geq 0.$ 均成立。对于 $\mathbf{p}=\mathbf{1}$，嵌入的正则性还给出了典范同构

$$\bigoplus_{r\geq 0}\mathcal{I}_Y^{r}/\mathcal{I}_Y^{r+1}\simeq \mathrm{Sym}^{\bullet}_{\mathscr{O}_{Z_{Y,k}}}(\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^{2}).$$

正合列（2.2）在这些对称幂上诱导出滤子；无需余法丛的整体分解。为验证整个滤子定义良好，应先应用链式法则，再模去 $\mathcal{I}_Y^{2}.$ 变换后的切向喷射中的每一项都至少含有一个切向喷射因子，或者至少含有一个 w_i，因为该喷射在 $Z_{Y,k}\cdot$ 上消失。因此，其滤过次数至少为一。函数 $w_i'=u_iw_i$ 的滤过次数至少为 p_i，而每个变换后的坐标$\xi'_{i,h}$ 的滤过次数至少为零。因此，代入会将（2.1）的每个生成元映入同一滤子层级。坐标变换的逆变换也具有相同性质，因此所得滤子与适配坐标的选取无关。在每一点 $\zeta\in Z_{Y,\,k}$，包含关系 $\mathcal{F}^{r}_{Y,\,\mathbf{p}}\subset\mathcal{I}_Y^{\lceil r/p_{\max}\rceil}$ 以及克鲁尔交定理给出

$$\bigcap_{r\geq 0}(\mathcal{F}^{r}_{Y,\mathbf{p}})_{\zeta}=0.$$

事实上，$\mathcal{I}_{Y,\zeta}$ 包含于诺特局部环 $\mathscr{O}_{\mathcal{J}_k,\zeta}\cdot$ 的极大理想中。张量积上线丛后，同样的断言仍然成立，因此在 ζ 处的非零芽具有有限的最大滤过阶数，并且在相应的伴随分次商中有一个非零像。由 $\mathcal{I}_Y\mathcal{F}^{r}_{Y,\mathbf{p}}\subset\mathcal{F}^{r+1}_{Y,\mathbf{p}}$,每个伴随分次商自然地是 $Z_{Y,k}\cdot$ 上的层。下文始终使用关于喷射变量呈多项式形式的函数代数。在这一论证中，喷射空间和理想层均在代数范畴中考察。 X上的齐次喷射丛，以及在 Y 上同时固定滤过次数和源权的分次丛，都是相干的；在这些射影基底上，GAGA 将它们的代数整体截面与全纯整体截面 [22]对应起来。因此，下文的仿射直像论证应用于拟凝聚代数层。记

$$\mathcal{A}=\bigoplus_{r\geq 0}\mathcal{F}^{r}_{Y,\mathbf{p}}/\mathcal{F}^{r+1}_{Y,\mathbf{p}}.$$

在一个适配仿射开集 $U\subset Y,$ 上，其截面代数为

$$\mathcal{A}(\pi_Y^{-1}(U))\simeq\mathscr{O}_Y(U)[\xi_{i,h}][W_i,V_{a,h}],$$

其中 W_i 和$V_{a,\,h}$ 分别是 w_i 和$\eta_{a,\,h}$，的初始类，其滤过次数分别为 p_i 和一，源权重分别为零和 h，。这些初始类之间不存在关系，因为 w_i，$\eta_{a,\,h}$ 是坐标生成元。由于平坦基变换保持单项式理想及其伴随分次商，因此也可以在适配的étale 坐标中进行这一计算。前述过渡变换公式意味着

$$W_i'=u_i|_Y\,W_i,\qquad V'_{a,h}=\sum_b A_{ab}V_{b,h}+\sum_{i\in J:\ p_i=1}C_{ai}W_iB_h(\xi_i).$$

第一个公式使用精确等式 $w_i'=u_iw_i$，而不仅仅是其模 I_Y^{2} 的约化，并且 u_i 的零次初始类为 $u_i|_Y.$ 。因此，它对任意 p_i 仍然成立，包括 $p_i>1.$ 。对于第二个公式，模 I_Y^{2} 舍去的项的滤过次数至少为二，因为 $\mathrm{I}_Y^{2}\subset\mathrm{F}^{2}_{Y,\mathbf{p}}\cdot$ 。只有带有 $p_i=1$ 的项出现在第二个公式中，因为 $V_{a,h}$ 的滤过次数为一。设 $\mathrm{K}\subset\mathrm{A}$ 为由 W_i 局部生成的齐次理想，对 $i\in J.$ 。 W_i 的过渡变换公式表明，该理想与适配坐标无关。K 及其各次幂对于滤过次数和源权重都是齐次的。对固定的 r，次数为 r 的部分 $(\mathrm{K}^{s})_r$ 定义了 A_r 的一个有限递降滤过，其中对 $s>r.$ 有 $(\mathrm{K}^{s})_r=0$ 。在这第二个滤子的伴随分次代数中，含有 $W_iB_h(\xi_i)$ 的项从 $V_{a,h}\cdot$ 的变换中消失。因此， W_i 像 $\pi_Y^{*}N_i^{*}$ 的标架那样变换，而对每个固定的 h，变量 $V_{a,h}$ 像 $\pi_Y^{*}\Omega^{1}_Y(\log\ B_Y)$ 的标架那样变换。后一类变换不会混合 $h.$ 的不同取值。对一个局部单项式，令 $\alpha_h=\sum_a\alpha_{a,h}$；这是导数阶数为 $h.$ 的切向因子的个数。坐标变换

在该阶内给出 $\mathrm{Sym}^{\alpha_h}\,\Omega^1_Y(\log B_Y)$。 由此可知，$(\mathcal{K}^s)_r/(\mathcal{K}^{s+1})_r$ 是这些丛的直和

$$\pi_Y^*\left[\left(\bigotimes_{i\in J} N_i^{-b_i}\right)\otimes\left(\bigotimes_{h=1}^{k}\mathrm{Sym}^{\alpha_h}\,\Omega^1_Y(\log B_Y)\right)\right]$$

以.....为指标

$$\sum_i b_i = s,\qquad \sum_j p_i b_i + \sum_h \alpha_h = r.$$

此类直和项中的张量生成元具有源权重 $\sum_h h\alpha_h$. 由于坐标$\xi_{i,h}$ 在 $Z_{Y,k,}$ 上的过渡映射为恒等映射，其权-m 直接像就是底丛在 Y 上的张量积

$$\mathbb{C}[\xi_{i,h}]_{\,m-\sum_h h\alpha_h},$$

其中下标表示关于源权重 $\mathrm{wt}(\xi_{i,h})$ 的齐次部分 $=h$. 这是 $Z_{Y,k}\simeq Y\times\mathbb{A}^{|J|k}$的仿射因子上的齐次多项式空间；负权时该空间为零，而每个非负权对应的空间均为有限维。此外，固定的 r 界定了所有 $b_i,\alpha_h,$，因此只有有限多个直和项。这些单项式在 $\mathscr{O}_Y,$ 上构成局部基，所以每个固定的 (r,m) 齐次分量都是有限秩向量丛。投影 π_Y 是仿射的，因此它在这些拟凝聚层上的直接像是正合的。所有映射都保持源权重，而取固定源权重的齐次分量也是正合的。这就证明了直接像之后的有限滤过断言。 □

在 $Z_{Y,k,}$ 上， π^*L^{-1} 的限制为 $\pi_Y^*(L^{-1}|_Y)$。 这个线丛的源权重为零，而投影公式给出

$$\begin{aligned}&\left(\pi_{Y*}\left[(\mathcal{F}^r_{Y,\mathbf{p}}/\mathcal{F}^{r+1}_{Y,\mathbf{p}})\otimes\pi_Y^*(L^{-1}|_Y)\right]\right)_m\\ \simeq\ &\left(\pi_{Y*}(\mathcal{F}^r_{Y,\mathbf{p}}/\mathcal{F}^{r+1}_{Y,\mathbf{p}})\right)_m\otimes L^{-1}|_Y.\end{aligned}$$

其滤子的因子是上一小节中的丛 $\mathsf{G}_{\mathbf{b},\boldsymbol{\alpha}}$ ，其重数由引理 2.2 给出。若所有这些因子的最大斜率均为负，则由引理 2.1 可知，该齐次分量的整体截面消失。对于沿 $Z_{Y,k}$、属于 $\mathrm{F}^r_{Y,\mathbf{p}}\otimes\pi^*L^{-1}$ 的整体权 $-m$ 微分 Q ，其分次像是整个闭层 $Y.$上的一个整体截面。若前述消失结论适用，则该像为零；由整体截面的左正合性可得 $Q\in\mathrm{F}^{r+1}_{Y,\mathbf{p}}\otimes\pi^*L^{-1}$沿 $Z_{Y,k}\cdot$。从 $\mathrm{F}^0_{Y,\mathbf{p}}=\mathscr{O}_{\mathcal{J}_k}$ 出发，迭代可得$Q\in\mathrm{F}^N_{Y,\mathbf{p}}\otimes\pi^*L^{-1}$，只要次数 $0,\dots,N-1$ 中扭曲后的权-m 分次分量均无整体截面。若这一消失结论在每个次数上都成立，则局部分离性迫使 Q 在 $Z_{Y,k}$ 每一点处的芽均为零。喷射空间是不可约的，因为它局部是不可约簇 X 上的仿射空间丛，所以由恒等定理可得 $Q=0.$

2.3. 沿整曲线取对数喷流微分的值

在本小节中， $f\colon\ \mathbb{C}\to X$ 是一条非常值整曲线，且 $f(\mathbb{C})\not\subset D.$ 我们使用第 1 节中定义的特征函数、计数函数和误差项。我们用固定的全局坐标 z对 $\mathbb{C}$上的喷流取值，因此 $j_kf(z)$ 是芽 $t\mapsto f(z+t)$在 $t=0$处的喷流。Green-Griffiths丛的过渡律使得取值与目标坐标无关。除 $f^{-1}(D)$外，它是全纯的，并通过对数导数的局部表达式在这个离散集合上亚纯延拓。引理 2.4 中将利用重参数化不变性，把该取值与 $\mathbb{P}^1.$ 上的源微分结合起来。当 $s=Q(j_kf)\not\equiv0$ 时，它的极点除子和零点除子为

$$P_Q=\sum_{a\in\mathbb{C}}(-\operatorname{ord}_a s)_+[a],\qquad R_Q=\sum_{a\in\mathbb{C}}(\operatorname{ord}_a s)_+[a].$$

这些阶数是在 f^*L^{-1} 的局部全纯框架中计算的，且不依赖于这些框架。两个和都是局部有限的，并且 P_Q 的支集包含于 $f^{-1}(D)$。 下面的估计保留了这些除子的实际重数。

引理 2.3。对于

$$Q \in H^0(X, E^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega^1_X(\log D) \otimes L^{-1}), \qquad Q(j_k f) \not\equiv 0,$$

有

$$T_f(r, L) + N(r, R_Q) \leq N(r, P_Q) + S_f(r) \quad \|. \tag{2.3}$$

证明。使用定义 $T_f(r,\ L)$ 的固定光滑 *Hermite* 度量 。在 L 的局部全纯框架 e 中，写作 $s = q(f^*e)^{-1}$，从而

$$\log \|s\| = \log |q| - \log \|f^*e\|_{h_L}.$$

按照引言中确定的正规化，庞加莱–勒隆公式给出

$$dd^c \log \|s\| = [R_Q] - [P_Q] + f^*c_1(L, h_L).$$

零点和极点处的对数奇点局部可积，即使圆上存在零点或极点，其圆均值仍然有限。令

$$M_s(r) = \int_0^{2\pi} \log \|s(re^{i\vartheta})\| \frac{d\vartheta}{2\pi}.$$

对圆盘上的电流恒等式进行积分，再对半径从 1 到 r 进行积分，便得到如下形式的詹森公式

$$T_f(r, L) + N(r, R_Q) - N(r, P_Q) = M_s(r) - M_s(1).$$

该恒等式可以先对避开零点和极点的圆成立，然后利用圆均值的连续性将其延拓到所有半径。项 $M_s(1)$是一个有限常数；原点处的零点和极点已经包含在计数函数中。选取有限个适配坐标邻域 V_α 以及覆盖 X的相对紧开子集 $U_\alpha \Subset V_\alpha$，其坐标函数均为有理函数的限制。这类坐标图可以通过将边界分支的局部代数方程补充为正则参数系，进行解析缩小，再利用紧致性选取有限覆盖而得到。在每个 V_α上平凡化 L ； Q的系数、度量因子以及通常的坐标函数在 U_α.上均有界。舍弃所有满足 $U_\alpha \cap f(\mathbb{C}) = \varnothing$.的指标 α。对于每个剩余的坐标函数 g，选取 $x \in U_\alpha \cap f(\mathbb{C})$。由于 g 在 x上是正则的，它可以表示为 $g = P_g/S_g$ ，其中所用的是 H^{b_g} 的截面，并且 $S_g(x) \neq 0$.事实上， g 的极点除子 F_g 不包含 x，且当b_g 充分大时， $H^{b_g}(-F_g)$ 是整体生成的。选取该线丛的一个在 x处非零的截面 u ，并令σ_{F_g} 为 $\mathscr{O}_X(F_g)$的典范截面。于是， $S_g = u\sigma_{F_g}$ 和 $P_g = gS_g$ 是 H^{b_g} 的截面，并具有所需性质。这里， gS_g 没有除子极点，并且可全纯地延拓到 X上，因为 X 是光滑的，因而是正规的。因此， $f^*S_g \not\equiv 0$，而$g_f = g$ 。 f 在 $\mathbb{C}$. 上定义了一个亚纯函数。设 C_g 为有效除子，其理想层在局部由 f^*P_g和 f^*S_g在共同全纯标架下的系数生成。若 $f^*P_g \equiv 0$，则 C_g是 f^*S_g.的零点除子。使用由 $f^*h_H^{b_g}$诱导的度量来定义

$$\psi_g = \frac{1}{2} \log \left(\|f^*P_g\|^2 + \|f^*S_g\|^2 \right).$$

消去这些公共零点后，该对定义了 g_f： $\mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$. 若 ω_{FS} 表示 $c_1(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$，的福贝尼乌斯–斯图迪形式，则由庞加莱–勒隆公式可得

$$dd^c\psi_g = g_f^*\omega_{\mathrm{FS}} + [C_g] - b_g f^*\omega_H.$$

这里， T_{g_f} 是相对于 ω_{FS}计算的；它与通常的亚纯特征相差至多 $O(1)$。对该恒等式应用詹森公式可得

$$T_{g_f}(r) + N(r, C_g) - b_g T_f(r, H) = \int_0^{2\pi} \left(\psi_g(re^{i\vartheta}) - \psi_g(e^{i\vartheta})\right) \frac{d\vartheta}{2\pi}.$$

函数 项 ψ_g 由 X的紧致性知有上界，其半径为一时的圆周平均值为有限，so

$$T_{g_f}(r) + N(r, C_g) \leq b_g T_f(r, H) + O(1).$$

特别地，$T_{g_f}(r) \le b_g T_f(r,\ H) + O(1)$，这正是对数导数估计所需的。对于边界定义函数，$g_f \not\equiv 0$ 由 $f(\mathbb{C}) \not\subset D$ 及恒等定理得出。每个取值后的对数喷射坐标都是商 $g_f^{(q)}/g_f$. 的多项式。当 $g_f \not\equiv 0$，普通导数写作 $g_f^{(h)} = (g_f^{(h)}/g_f) g_f$. 如果某个普通坐标满足 $g_f \equiv 0$，则其所有导数均为零，因此省略。对于每个非零的 g_f 和 $1 \le q \le k$，对数导数引理给出

$$\int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{g_f^{(q)}}{g_f}(re^{i\vartheta}) \right| \frac{d\vartheta}{2\pi} \le C_{g,q}\big(\log^+ T_{g_f}(r) + \log r\big) \quad \|.$$

对于非零常数 g_f，所有这些导数之商都为零，因此同一估计显然成立。Q 的多项式表达式以及每个相对紧图表上的界，推出逐点估计

$$\log^+ \|s(z)\| \le C + C \sum_g \sum_{q=1}^{k} \log^+ \left| \frac{g_f^{(q)}(z)}{g_f(z)} \right|,$$

在商未定义的离散集之外。求和遍历覆盖中有限多个坐标函数，这些函数与 f 的复合并非恒等于零。普通导数带来的额外因子 g_f 在 $f^{-1}(U_\alpha)$上有界，因此它们只会影响该估计中的常数。取圆均值并使用有理函数估计，便得到

$$\int_0^{2\pi} \log^+ \|s(re^{i\vartheta})\| \frac{d\vartheta}{2\pi} = S_f(r) \quad \|,$$

与 [17, 定理 3.1] 的证明及 [3, 引理 4.7]相比较。涉及的函数和导数阶数都只有有限多个，因此它们的例外集之并具有有限测度。隐含常数可能依赖于 Q 和 f，但对 r 以及这条固定曲线上边界接触点的选取是一致的。将此估计与詹森公式及 $\log \|s\| \le \log^+ \|s\|$ 结合，即得 (2.3)。在边界接触处，阶数为 h的每个对数导数的极点阶至多为 h. 事实上，令 $a \in f^{-1}(D)$，设 $t = z - a$，并对经过 $f(a)$的每个边界分支写出

$$w_i(f(a+t)) = t^{p_i} u_i(t), \qquad p_i \ge 1, \qquad u_i(0) \ne 0.$$

Then

$$\frac{d^h}{dt^h} \log(w_i(f(a+t))) = (-1)^{h-1}(h-1)!\, p_i t^{-h} + \frac{d^h}{dt^h} \log u_i(t),$$

且第二项在 $t = 0$. 附近是全纯的。普通喷射坐标在那里是全纯的，并且在交点处，任一单项式中所有边界分支的贡献均由其导数权之和界定。由于 Q 的每个单项式都具有源权重 m，这也给出 $P_Q \le m(f^*D)_{\mathrm{red}}$，从而得到一个关于约化边界计数函数的不等式。□

当 $T_f(r,\ H) = O(\log\ r)$，时，也必须使用前面的不等式；在这种情况下，其误差项不必是 $o(T_f(r,\ H))$。下一个引理包含了这种情形。

引理 2.4。设 $Q \in H^0(X, E_{k,\ M}\Omega^1_X(\log D) \otimes L^{-1})$ 具有正权重 M，并设 R 是一个支集包含于 D 上且 $L - R$ 为充足的有效有理除子。则不存在不包含于 D 中的非常值整曲线 f，使得

$$Q(j_k f) \not\equiv 0, \qquad P_Q \le f^* R.$$

证明。设 f 是一条满足所述条件的非常值整曲线。引理 2.3和 $P_Q \le f^*R$ 给出

$$T_f(r, L) \le N(r, f^*R) + S_f(r) \quad \|.$$

选择整数 $q>0$ 使得 qR 为整数。将 $\mathscr{O}_X(qR)$ 上的一个光滑度量进行缩放，使其典范截面（其零点除子为 qR）在紧致簇X. 上范数至多为一。将第一主定理应用于该截面并除以 q ，得到

$$N(r,f^*R)\le T_f(r,R)+O(1),$$

由于 f 不包含在 R. 的支集内，与固定度量的比较仅产生一个有界项。令 $B=L-R$. 通过将某个正整数倍的曲率形式除以该倍数，选取这个丰沛有理类的一个正曲率代表元 ω_B 。由紧致性可知，对某个 $\varepsilon>0$, 有 $\omega_B\ge\varepsilon\omega_H$ ，因此

$$\varepsilon T_f(r,H)\le T_f(r,B)+O(1)=T_f(r,L)-T_f(r,R)+O(1).$$

因此，存在某个常数 $C>0$, 使得

$$T_f(r,H)\le C(\log^+ T_f(r,H)+\log r)\quad \|.$$

不等式 $C\log^+ x\le x/2+C'$ 与 $x\ge 0$ 一起推出，对于所有不在有限勒贝格测度集合 E 中的 $r>1$，有 $T_f(r,H)=O(\log r)$。当 r, 充分大时， $E\cap[r,\infty)$ 的测度小于一，因此 $[r,r+1]$ 在 E. 之外包含一个半径。 $T_f(r,H)$ 的单调性随后将该估计推广到所有充分大的半径。更明确地，对于 $r'\in[r,r+1]\setminus E$ 以及所有充分大的 r,，有

$$T_f(r,H)\le T_f(r',H)\le C_0\log r'\le C_0\log(r+1)=O(\log r).$$

选取一个正整数 a ，使得 H^a 定义一个嵌入 $\iota:\ X$, $\to\mathbb{P}^N$. $\iota\circ f$的特征函数为 $aT_f(r,H)+O(1)=O(\log r)$。选取一个在像上不恒为零的齐次坐标。将该坐标记为 Z_0 ，并对 $1\le j\le N$. 令$g_j=(Z_j/Z_0)\circ\iota\circ f$。引理 2.3 的证明中所用的成对截面比较给出

$$T_{g_j}(r)\le T_{\iota\circ f}(r)+O(1)=O(\log r),$$

在定义比值时消去公共零点。其余齐次坐标与该坐标之比是 $\mathbb{C}$ 上特征函数为 $O(\log r)$, 的亚纯函数，因而由有理性判据可知它们是有理的；见 [19]。消去分母得到从 $\mathbb{P}^1$ 到 $\mathbb{P}^N$, 的有理映射，并在局部坐标中去掉公因子后可将该映射延拓到每一点。其像位于闭子簇 $\iota(X)$, 中，因此它定义了一个延拓 f. 的非常值态射$\bar f:\ \mathbb{P}^1\to X$ 。在 L^{-1}, 的一个固定局部标架中，令 q_z,q_τ 表示源坐标 z,τ. 中的取值系数。在 $z=\varphi(\tau)$, 下，重参数化不变性给出

$$q_\tau(\tau)=\varphi'(\tau)^M q_z(\varphi(\tau)),\qquad q_\tau(\tau)(d\tau)^M=q_z(z)(dz)^M.$$

因此，表达式 $Q(j_k\bar f)(d\tau)^M$定义了一个非零亚纯截面

$$K_{\mathbb{P}^1}^{\otimes M}\otimes\bar f^*L^{-1}.$$

在仿射图 $\mathbb{C}\subset\mathbb{P}^1$, 上，源标架 $(dz)^M$ 没有消失或极点，因此其有限极点阶恰好等于原取值的阶数。由于 f 不包含于 D, 中，拉回 f^*R是一个有效有理除子，且有限极点的总阶数至多为 $\deg f^*R$. 令τ 为一个在无穷远处消失的局部参数。对于穿过 $f(\infty)$, 的一个边界分支的局部方程 w_i ，记

$$w_i\circ\bar f=\tau^{p_i}u_i(\tau),\qquad p_i\ge 1,\qquad u_i(0)\ne 0.$$

Then

$$\frac{d^h}{d\tau^h}\log(w_i\circ\bar f)=(-1)^{h-1}(h-1)!\,p_i\tau^{-h}+\frac{d^h}{d\tau^h}\log u_i(\tau).$$

第二项是全纯的，因此这个对数喷射坐标的极点阶至多为h.普通喷射坐标，以及对于不经过 $f(\infty)$的 分支而言的对数坐标，在该处都是全纯的。 Q 的每个单项式的总源权重为 M, 其系数在 L^{-1}. 的局部标架下是全纯的。因此，在选定框架中，$\operatorname{ord}_{\tau=0}q_\tau\ge -M$ ，即使 $\bar f(\infty)$位于多个边界分支上也是如此。由于$(d\tau)^M$是在无穷远附近 $K_{\mathbb{P}^1}^{\otimes M}$ 的一个全纯且处处不为零的局部标架，这也给出了.....的极点阶上界

该全局亚纯截面在无穷远处。如果 P 是这个全局亚纯截面在 $\mathbb{P}^1$上的极点除子， 这两个界给出

$$\deg P \le \deg \bar{f}^{*}R + M.$$

取值在经过 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(P)$ 扭曲后成为非零全纯截面。 由于 $\deg\ K_{\mathbb{P}^1} = -2$，其线丛的次数为

$$\begin{aligned}\deg\left(K_{\mathbb{P}^1}^{\otimes M} \otimes \bar{f}^{*}L^{-1} \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(P)\right) &= -2M - \deg \bar{f}^{*}L + \deg P \\ &\le -M - \deg \bar{f}^{*}(L-R) < 0.\end{aligned}$$

严格不等式源于 $L-R$ 的丰性以及 $f.$ 的非恒定性。这与存在一个负次数线丛的非零全纯截面相矛盾。□

3. 主要结果及推论的证明

3.1. 定理 1.1、1.2 和1.3的证明及推论

定理 *1.1*的证明。

引理 2.2 中对分次商取张量 $L^{-1}|_Y$. 记 $j = \sum_h \alpha_h$，引理 2.1 将其最大斜率上界估计为

$$j\rho_Y - \sum_i b_i \nu_{Y,i} - \ell_Y.$$

对于滤过次数 $r < \sigma_Y(L, \mathrm{p})$，由 (1.2) 可知，对所有可能的商，该数均为负。因此，引理 2.2 中有限滤过的每个商都没有非零整体截面，其连续正合列也给出了权-m 分次部分同样的消失。从 $\mathrm{F}^{0}_{Y,\mathbf{p}} = \mathscr{O}_{\mathcal{J}_k}$开始， Q在每个连续分次部分中的像因而对 $r < \sigma_Y(L, \mathrm{p})$ 均为零。更确切地说，一旦 Q 沿着 $Z_{Y,k}$属于 $\mathrm{F}^{r}_{Y,\mathbf{p}} \otimes \pi^{*}L^{-1}$，其分次像就是前文已证明消失的扭曲权-$m$ 分支的整体截面，因此由正合性可知它在那里属于 $\mathrm{F}^{r+1}_{Y,\mathbf{p}} \otimes \pi^{*}L^{-1}$。归纳可得，所需归属性沿整个闭子集 $Z_{Y,k}$. 成立。引理 2.2 中的指标满足 $j = \sum_h \alpha_h \le \sum_h h\alpha_h \le m$。因此，将可行集限制为 $j \le m$ 后，即可进行相同的归纳，其中以 $\sigma_Y^{[m]}$ 替代 σ_Y.

对于较简单的斜率阈值，定义（1.1）给出

$$j\rho_Y - \sum_i b_i \nu_{Y,i} \le \left(j + \sum_i p_i b_i\right)\mu_Y(\mathbf{p}).$$

若 $\mu_Y(\mathbf{p}) > 0$， （1.2）中的每个可行元组因此的次数至少为 $\lceil \ell_Y/\mu_Y(\mathbf{p})\rceil$. 若任一可行集为空，则相应的归纳给出每个 $\mathcal{F}^{r}_{Y}$的归属性，$\mathbf{p}$. 取$p_{\max} = \max_i p_i$，局部单项式描述给出

$$\mathcal{I}^{r}_{Y} \subset \mathcal{F}^{r}_{Y,\mathbf{p}} \subset \mathcal{I}^{\lceil r/p_{\max}\rceil}_{Y}.$$

Krull 交在沿 Z_Y的每个局部环中给出零，k. 因此，该截面在不可约喷射空间 $\mathcal{J}_k$的一个非空开集上消失，从而恒同为零。情形 $\mu_Y(\mathbf{p}) = 0$具有空可行集，因为 $\ell_Y > 0$.

若 $Q = 0$，则剩余的阶数和极点界由已陈述的约定立即得出，因此我们假设 $Q \neq 0$. 在以 Y°为中心的弧上，所有切向射流变量都是全纯的，而

$$\xi_{i,h}(j_k\gamma) = (-1)^{h-1}(h-1)!p_i' t^{-h} + O(1), \qquad p_i' = \mathrm{ord}_0(w_i \circ \gamma) \ge p_i.$$

令 $s<+\infty$ 为上述已证明归属性的任一阈值。在弧中心附近选取 L^{-1} 的一个固定局部全纯标架，记

$$Q=\sum_{\alpha,\beta} q_{\alpha\beta}(w,z)\eta^{\alpha}\xi^{\beta},$$

其中该和是有限和，且系数仅取决于基坐标。这里，$\alpha=(\alpha_{a,\,h})$ 和 $\beta=(\beta_{i,\,h})$ 是非负多重指标，$|\alpha|=\sum_{a,\,h}\alpha_{a,\,h}$，而源齐性给出

$$\sum_{a,h} h\alpha_{a,h}+\sum_{i,h} h\beta_{i,h}=m$$

对于每一项。沿整个轨迹 $Z_{Y,\,k}$ 的归属性蕴含系数条件

$$q_{\alpha\beta}\in\left(w^{\mathbf{b}}:\sum_i p_i b_i+|\alpha|\geq s\right).$$

为此，取 Q 模 $\mathcal{F}^{s}_{Y,\,\mathbf{p}}$ 的类，并将其基系数在 w 模所指示的单项式理想展开。在纤维方向多项式代数中，保留下来的单项式$w^{\mathbf{b}}\eta^{\alpha}$，满足 $\sum_i p_i b_i+|\alpha|<s$，的单项式构成了全纯函数环上 z 与 $\mathbb{C}[\xi]$. 张量积的有限局部基。截断类沿 $Z_{Y,\,k}$，的每个茎处均为零，因此比较其在 ξ 中的多项式系数，便迫使所有这些保留下来的系数都为零。所得的基单项式理想是有限生成的，因此系数 $q_{\alpha\beta}$ 可以利用有限个生成元进行分解，而不改变射流指数。于是，Q 是若干项的有限和

$$\left(\prod_i w_i^{b_i}\right)A(w,z)\eta^{\alpha}\xi^{\beta},\qquad \sum_i p_i b_i+|\alpha|\geq s,$$

每一项仍具有源权 m，其中 A 是全纯的，且仅取决于基坐标。这些系数沿弧仍保持全纯且有界，因此即使法向对数喷气坐标具有极点，该有限表达式仍然可以取值。每一项的消失阶至少为

$$\begin{aligned}\sum_i p_i' b_i-\sum_{i,h} h\beta_{i,h} &= \sum_i p_i' b_i+\sum_{a,h} h\alpha_{a,h}-m\\ &\geq \sum_i p_i b_i+|\alpha|-m.\end{aligned}$$

条件 $\sum_i p_i b_i+|\alpha|\geq s$ 将最后一个表达式从下方界定为 $s-m$. 抵消只会增加该阶数，从而证明了（1.3）。这包括恒等为零的取值，按照约定其阶数为 $+\infty$。对 $m-s$ 取非负部分，并利用上取整界，即得所述的极点估计。中心位于 Y° 这一条件至关重要：余下的对数导数在更深层处未必是全纯的。□

定理 *1.2*的证明。

Put $M=\mathscr{O}_{X_k}(D)\,(m)\otimes\pi_{0,\,k}^{*}H^{-a}$. 诺特性给出正整数 e_1，……，e_v 使得

$$\bigcap_{\ell=1}^{v}\operatorname{Bs}|M^{e_\ell}|=\mathbf{B}(M).$$

取它们指数的公倍数 q，得到

$$\operatorname{Bs}|M^{q}|=\mathbf{B}(M)$$

作为闭集。事实上，将 M^{e_ℓ} 的一个截面提升至 q/e_ℓ 次方，便得到 $\operatorname{Bs}|M^{q}|\subset\operatorname{Bs}|M^{e_\ell}|$，而由 $\mathbf{B}(M)$ 的定义可得反向包含。这个指数仅取决于 M，而与曲线及其接触无关。直接像识别 [3, (1.13)], 结合投影公式，将 M^{q} 的截面识别为权为 qm、扭曲为 H^{-qa}. 的不变对数喷射微分。基 locus 假设保证存在一个非零的此类微分Q_0：只需在 $X\setminus D$ 上选取一个正则喷，并取一个在其塔点处不消失的截面即可。对于

每个正维分层 Y，取 $L = H^{qa}$，使得 $\ell_Y = qah_Y > 0.$。若 $\mu_Y(1) = 0$，则定理 1.1 将推出 $Q_0 = 0$，这与假设矛盾。因此， $\mu_Y(1) > 0.$。根据定义，这意味着 $\rho_Y > 0$ 或 $-\nu_Y$，$_i > 0$ 对某个 i 成立，因此对每个有限正接触向量，都有 $\mu_Y(\mathrm{p}) > 0$ ，且陈述中的所有比值均有定义。现在固定一条非常值整曲线 f ，它不包含于 $D.$。选取 $z_0 \in \mathbb{C}$ ，使得 $f(z_0)$ $\notin D$ 且 $f'(z_0) \neq 0$；这是可能的，因为边界原像和临界集都是离散的。由$j_k f(z_0)$ 表示的 $X_k(D)$ 中的点是正则的，且位于 (1.5) 右侧之外，因而也位于 Bs $|M^q|.$ 之外。选取一个在此点处不消失的 M^q 的截面，由同一直接像识别可得一个不变喷射微分

$$Q \in H^0\big(X, E_{k,qm}\Omega^1_X(\log D) \otimes H^{-qa}\big), \qquad Q(j_k f) \not\equiv 0.$$

事实上，这一选择确保 $Q(j_k f(z_0)) \neq 0.$

固定 $z_* \in f^{-1}(D)$，令 $Y_\circ$为包含 $f(z_*)$，的精确层，并将其分支集记为 J，将 $p_i = \mathrm{ord}_{z_*}(w_i \circ f)$ 记为 $i \in J.$。记 $M_0 = qm$ 并定义

$$s_i = \lceil qa\theta_i(p_i)\rceil, \qquad s_Y = \lceil qa\theta_Y(\mathbf{p})\rceil \qquad (\dim Y > 0).$$

由于 $\sigma_{D_i}(H^{qa},\ p_i) \geq s_i$ 且滤子是递减的，定理 1.1 给出了在整个 $Z_{D_i,\ k}$，上的$\mathcal{F}^{s_i}_{D_i,\ p_i}$ 归属性，包括交点上方的点。为同时施加这些条件，使用一个公共的适配坐标图和H^{-qa} 的局部全纯标架，写出源权重为 M_0的有限展开

$$Q = \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}(w,z)\eta^\alpha \xi^\beta,$$

其系数仅依赖于基坐标。对于分支 D_i，变量$\xi_{j,\ h}$ （其中 $j \neq i$ ）以及所有变量 $\eta_{a,\ h}$ 都是切向射流变量，滤过次数为一；而变量 $\xi_{i,\ h}$ 的滤过次数为零。对于一个固定的完整射流单项式，记

$$j_i = \sum_{a,h} \alpha_{a,h} + \sum_{\substack{j\in J\\ j\neq i}} \sum_h \beta_{j,h}, \qquad d_i = \left\lceil \frac{(s_i - j_i)_+}{p_i} \right\rceil.$$

定理1.1的证明中的系数计算应用于沿整个 $Z_{D_i,k}$ 的分支滤子后表明， $w_i^{d_i}$整除 $A_{\alpha\beta}.$。函数 w_i 是正则局部坐标环中的互异素参数，因此这些同时整除关系意味着$\prod_{i\in J} w_i^{d_i}$整除同一系数 $A_{\alpha\beta}.$。因此， Q 具有共同的有限展开式，其各项为

$$\left(\prod_{i\in J} w_i^{b_i}\right) A(w,z)\eta^\alpha \xi^\beta, \qquad p_i b_i + j_i \geq s_i \quad (i \in J),$$

其中 $b_i = d_i$，全纯基系数为 A，且每一项的源权重均为 M_0。对于这样的一项，令

$$M_i = \sum_h h\beta_{i,h}$$

表示属于分支 $i.$ 的对数导数的源权重。由于其他每个喷射因子的源权重至少为一， $j_i \leq M_0 - M_i$，因此

$$M_i - p_i b_i \leq M_0 - s_i.$$

沿曲线， Y° 的切向射流变量是全纯的，而阶数为 h 的法向对数射流变量的极点阶至多为 $h.$。因此，该项的带符号极点阶至多为

$$\sum_{i\in J}(M_i - p_i b_i) \leq |J|M_0 - \sum_{i\in J} s_i,$$

源齐性也将其界定为 $M_0.$ 抵消只会增加消失阶，因此这两个带符号界对整个取值也同样成立 $Q(j_k f)$。如果 维数 $Y > 0$，定理 1.1 给出了该取值在精确分层处的附加带符号界 $M_0 - s_Y$。在下面的最小值中，当 维数$Y = 0.$ 此处，

带符号极点阶为 $-\operatorname{ord}_{z_*} Q(j_k f)$，而实际极点阶是其非负部分。在取最小值后取非负部分，并利用 $M_0 = qac$ 和上取整不等式，可得

$$\operatorname{pole}_{z_*} Q(j_k f) \le \left(\min\left\{ M_0,\ |J| M_0 - \sum_{i\in J} s_i,\ M_0 - s_Y \right\} \right)_+ \le qa\, b_Y(\mathbf{p}).$$

由于 $Q(j_k f)$ 在 $f^{-1}(D)$ 之外是全纯的，这些逐点估计证明了

$$P_Q \le qa\, \mathcal{B}_f.$$

应用引理 2.3，取 $L = H^{qa}$ 及其诱导度量，并舍去非负项$N(r,\ R_Q)$，得到

$$qa\, T_f(r,H) \le N(r,P_Q) + S_f(r) \le qa\, N(r,\mathcal{B}_f) + S_f(r) \quad \|.$$

两边除以 qa 即可证明（1.6）。对于每条曲线，所选截面在所有接触点处均固定，因此接触阶的变化不会引入新的误差常数或例外集。归一化系数涉及 $M_0/(qa) = m/a$ 以及（1.4）中的比值，因此与所选幂次无关 q. □

定理 *1.3* 的证明。

令 $M = \mathscr{O}_{X_k(D)}(m) \otimes \pi_{0,\ k}^{*} H^{-a}$ 并选取指数 q，使其固定满足

$$\operatorname{Bs}|M^q| = \mathbf{B}(M),$$

如定理 1.2 的证明所示。开集 $U = X \setminus (D \cup Z)$ 非空，这是因为 X 不可约，且 D、Z 是真闭子集。在 U 上选择一个正则喷，并选择 M^q 的一个在其塔点处不消失的截面，则根据直接像识别，可得到一个非零的权为 qm、扭曲为 H^{-qa}. 的全局不变射流微分 Q_0。对于每个正维分层 Y，包括包含于 Z中的那些分层，都有 $\ell_Y = qah_Y > 0$（$L = H^{qa}$.）。如果 $\mu_Y(1) = 0$，定理 1.1 将推出 $Q_0 = 0$，矛盾。正如定理 1.2 的证明所示，可得对于每个有限正接触向量，$\mu_Y(\mathbf{p}) > 0$，因此所有所需的比值都有定义。现在令 f为一条不包含于 $D \cup Z$ 中的非常值整曲线，并选择 $z_0 \in f^{-1}(U)$，使得$f'(z_0) \neq 0$.。集合 $f^{-1}(U)$ 非空且为开集，而 f 的临界集是离散的，因此这样的点确实存在。相应的正则塔点位于 Bs $|M^q|$ 之外，因此该同一幂次的一个截面给出一个不变微分

$$Q \in H^0(X, E_{k,qm}\Omega^1_X(\log D) \otimes H^{-qa}), \quad Q(j_k f(z_0)) \neq 0.$$

这一选择 Q 沿整条曲线保持不变。定理 1.2的证明中的局部计算给出

$$P_Q \le qa\mathcal{B}_f.$$

映射到 $D \cap Z$中的源点也适用相同的局部界，这是因为所选的全局微分 Q在每个边界接触处都满足这些界。应用引理 2.3 并除以qa即可证明所述的第二主定理。

对于正维分层，定义（1.1）可写为

$$\mu_Y(\mathbf{p}) = \max\left\{ 0, \rho_Y, \frac{(-\nu_{Y,i})_+}{p_i} : i \in J \right\}.$$

每个依赖于接触变量的项关于该变量均为非增，因此 μ_Y 非增，而正比值 $\theta_Y(\mathbf{p}) = h_Y/\mu_Y(\mathbf{p})$为非减。对分支比值 θ_i也可作同样的论证；由(1.4)可知，b_Y 关于每个接触变量均为非增，即使在 $\dim Y = 0$ 且缺少 θ_Y 项时也是如此。现在令 f 为一条不包含于 D 中的非常值整曲线，其最小接触为r，并假设 $f(\mathbb{C}) \not\subset Z$. 那么，$f^{-1}(D)$和 $f^{-1}(Z)$是 $\mathbb{C}$的真解析子集，因而是离散的，它们的并集不可能覆盖 $\mathbb{C}$。因此，$f(\mathbb{C}) \not\subset D \cup Z$，由第一部分可得一个权为 qm、扭曲为H^{-qa}的微分 Q，满足 $Q(j_k f) \not\equiv 0$且$P_Q \le qa\mathbf{B}f\cdot$。在点 $z_* \in f^{-1}(D)$处，令 $Y\circ$为精确分层

包含于 $f(z_*)$ ，其分支集为 J，并令为实际接触阶数向量。最小接触条件给出 $p_i \geq r_i$ 对于 $i \in J$，因此由单调性及(1.8)可得

$$b_Y(\mathbf{p}) \leq b_Y(\mathbf{r}_J) \leq \sum_{i \in J} \lambda_i r_i \leq \sum_{i \in J} \lambda_i p_i.$$

最后一个和是 $f^*(\sum_i \lambda_i D_i)$ 在 z_*处的系数，因此，所有边界接触处的这些不等式给出

$$P_Q \leq qa\mathcal{B}_f \leq f^* \left(qa \sum_i \lambda_i D_i \right).$$

令 $L = H^{qa}$ 且 $R = qa \sum_i \lambda_i D_i$. 。于是 R 是一个支集位于 D上的有效有理除子，所选的 Q 是权重为正权重 qm的不变量，且其取值不恒为零。剩余类为

$$L - R = qa \left(H - \sum_i \lambda_i D_i \right),$$

由（1.8）可知它是充足的。因此，引理2.4 的所有假设均已满足，而该引理将导出矛盾。因此，每条这样的曲线的像都包含在固定集合 $Z.$ 中。该集合与曲线无关；当 $Z = \varnothing$ 时，不存在这样的非常值整曲线。□

推论 3.1（任意维数下的光滑边界）。设 D 光滑且不可约，并且（1.5）成立。采用该假设中的固定三元组 k、 m、 a ，并记 $c = m/a$.在 A 上选取一个充足极化 D ，并令

$$h = \deg_A(H|_D), \qquad \rho = \mu_{\max,A}(\Omega^1_D), \qquad \nu = \deg_A N_{D/X}, \qquad \mu(p) = \max\{\rho, -\nu/p, 0\}.$$

那么，对于每个整数 $p \geq 1.$ ， $h > 0$ 和 $\mu(p) > 0$ 。对于不包含于 D中的每条非常值整曲线f： $\mathbb{C} \to X$ ，以下不等式成立

$$T_f(r, H) \leq N \left(r, \sum_{z \in f^{-1}D} \left(c - \frac{h}{\mu(p_z)} \right)_+ [z] \right) + S_f(r) \quad \|, \tag{3.1}$$

其中 $p_z = \operatorname{ord}_z f^* D.$ 特别地，有

$$T_f(r, H) \leq \left(c - \frac{h}{\mu(1)} \right)_+ \overline{N}_f(r, D) + S_f(r) \quad \|.$$

如果所有接触的阶至少为整数 $p_0 \geq 1$，则可以将最后一个公式中的 μ（1）替换为 μ（p_0）。

证明。由于 $n \geq 2$，唯一的闭边界分层是 $Y = D$，且其具有正维。其剩余边界为空，因此 $\Omega^1_D(\log B_D) = \Omega^1_D$，其法丛为 $N_{D/X} = \mathscr{O}_X(D)|_D$. 因此，该层的数值数据恰好是上文所定义的 h、 ρ、 ν、 $\mu(p)$。 H 的丰性给出 $h > 0$，而定理 1.2 给出 $\mu(p) > 0$ 对于每个整数 $p \geq 1$.只有一个分支，因此（1.4）中的分支贡献与分层贡献相同，并且

$$b_D(p) = \left(\min \left\{ c, c - \frac{h}{\mu(p)}, c - \frac{h}{\mu(p)} \right\} \right)_+ = \left(c - \frac{h}{\mu(p)} \right)_+.$$

定理 1.2因此给出（3.1）。恒等式 $\mu(p) = \max\{\rho, 0, (-\nu)_+/p\}$ 表明 $\mu(p)$ 是非增的。因此，对于整数 $p \geq p_0 \geq 1$，我们有 $0 < \mu(p) \leq \mu(p_0)$ 并且

$$\left(c - \frac{h}{\mu(p)} \right)_+ \leq \left(c - \frac{h}{\mu(p_0)} \right)_+.$$

最后，$(f^*D)_{\mathrm{red}} = \sum_{z \in f^{-1}D} [z]$. 因此，对于所有接触阶数均至少为 p_0的曲线，在每个接触点应用这一系数不等式，并利用 $N(r、\cdot)$的单调性，即可得到所断言的界，其中 $\mu(p_0)$，特别地，还可得到 $\mu(1)$.　　□对应的界

公式 (3.1) 使用实际接触，而一个共同的下界 p_0 给出了上文所述的一致系数。如果 $\nu \geq 0$，函数 $\mu(p)$ 为常数。如果 $\nu < 0$，则 $\mu(p)$ =max{max(ρ, 0), ($-\nu$)/p}。当 $\rho > 0$ 时，该函数递减，直到达到 ρ；当 $\rho \leq 0$ 时，它递减至零，但不会在有限的 p. 处达到零。系数在 $\mu(p)$ 递减时也随之递减，同时系数保持为正。

推论 *3.2*（正系数退化阈值）。设对于一个固定的闭代数子集 $Z \subsetneq X$（可以为空），*(1.7)* 成立，且 D 光滑且不可约。这里，$c = m/a$ 使用 *(1.7)* 中的三元组，h、ρ、ν、μ 的定义与推论 *3.1* 中相同。在此假设下，对于每个整数 $p \geq 1.$，$h > 0$ 和 $\mu\ (p)\ > 0$。设 $d > 0$ 为有理数，并假设 $dH - D$ 为数值有效。对于整数 $p_0 \geq 1$，令 $\beta\ (p_0)\ =\ (c - h/\mu\ (p_0)\ )\ +\cdot$。若

$$d\beta(p_0) < p_0,$$

那么，每条不包含于 D 且接触阶至少为 p_0 的非常值整曲线，其像都包含于 Z.

证明。由于 $n \geq 2$，唯一的边界层是 $Y = D$，且它具有正维并且剩余边界为空。H 的充足性给出 $h > 0$，而定理 1.3 的第一个断言给出 $\mu(p)\ > 0$，对每个整数 $p \geq 1$，在（1.7）条件下。(1.4) 的单分支形式为

$$b_D(p_0) = \left(c - \frac{h}{\mu(p_0)}\right)_+ = \beta(p_0).$$

严格数值假设给出 $\beta(p_0)/p_0 < 1/d$，因此我们可以选取一个有理数 λ，使得

$$0 \leq \frac{\beta(p_0)}{p_0} \leq \lambda < \frac{1}{d}.$$

因此，$b_D(p_0)\ \leq \lambda p_0$，这是（1.8）中针对最小接触阶 p_0.所需的唯一层不等式。此外，

$$H - \lambda D = (1 - \lambda d)H + \lambda(dH - D).$$

这里，$1 - \lambda d > 0$ 和 $\lambda \geq 0$，因此第一项是充足有理类，第二项是数值有效有理类。它们的和因而是充足的，而定理1.3 给出了所断言的结论。□

数值等价关系 $D \equiv dH$ 是此处所用数值有效支配的一个特例。与该特例不同，数值有效支配假设也允许法向次数为负，因此 $\mu(p_0)$ 对接触阶的依赖可能影响判据。当 $\nu \geq 0$，对于相同的基 locus 数据，阈值为$p_0 > d(c - h/\rho)+$，而非全权重阈值 $p_0 > dc$。此比较并不声称其相较于喷射微分的其他构造具有最优性。

推论 3.3（条件轨形 Green-Griffiths-Lang 判据）。固定整数 $r_i \geq 1$并设

$$\Delta_{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{t} \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) D_i,$$

采用轨形整曲线 *[6, 定义 1.3]* 的最小接触约定。假设 $K_X + \Delta_{\mathbf{r}}$ 是大集，并且对于一个固定的闭代数子集 $Z \subsetneq X$（可以为空）满足 *(1.7)*。假设对于该接触向量 r 以及由同一组三元组 k、m、a. 确定的系数，*(1.8)* 成立。那么，*($X, \Delta_{\mathbf{r}}$)* 的每条非恒定轨形整曲线的像都包含于固定真代数子集 $D \cup Z$. 中。更确切地说，任何不包含于 D 中的此类曲线，其像都包含于 *(1.7)* 中的 Z 。

证明。设 $f:\ \mathbb{C} \to X$ 是 (X, $\Delta_{\mathbf{r}}$)上的 非恒定轨形整曲线。根据定义，$f(\mathbb{C})\ \not\subset$Supp $\Delta_{\mathbf{r}}$.若 $f(\mathbb{C})\ \subset D$，则其像已经包含于 $D \cup Z$.中。现在设 $f(\mathbb{C})\ \not\subset D$，于是对每个 $i.$，f^*D_i 都是定义良好的有效除子。对于 $r_i > 1$，轨形条件给出：在每个 $z \in f^{-1}(D_i)$处，ord$_z\, f^*D_i \geq r_i$。对于 $r_i = 1$，分支 D_i 不出现在 Supp $\Delta_{\mathbf{r}}$中，但同样的不等式自动成立，因为每个实际交点处的阶是一个

正整数。因此， f 沿着整个除子 D具有最小接触 $\mathbf{r}$ ，且定理 1.3给出 $f(\mathbb{C}) \subset Z$. 最后， D 和 Z 是不可约簇 X的固定真闭代数子集，因此 $D \cup Z \subsetneq X$ 是真闭代数子集，且独立于 f. □

本推论中的一般型条件将结论置于轨形 Green-Griffiths-Lang 猜想的框架下 [6, 猜想 1。5]；它并未用于推导射流或数值假设。特别是，结论是一致代数退化，这强于断言每条曲线各自都有一个真 Zariski 闭包。对于对数补集，省略 D 已经足以使每个取值都全纯，而（1.7）给出了射流消失所导出且已确立的一致退化结论 [3, 9]。这里新增的内容是：为具有正修正极系数的有限最小接触提供一个充分的数值检验。对于固定的有效边界类 $R = \sum_i \lambda_i D_i$ ，若其 $H - R$ 充足，则（1.8）中的不等式规定了允许的有限轨形重数。这并未证明仅凭大性就能推出该猜想，也未在未单独验证基底轨迹条件的情况下确立一个新的无条件族。

推论 3.4（数值分歧障碍）。 设 $f\colon \mathbb{C} \to X$ 是一条不包含于 D. 假设 （1.5）成立。在此假设中使用固定三元组 k、m、a 并置 $c = m/a$. 则有 $\mathcal{B}_f \neq 0$. 特别地，设 D 是光滑且不可约的，并采用推论 *3.1*中的记号。若 $\nu < 0$ 以及整数 $p_0 \geq 1$ 满足

$$c\rho \leq h, \qquad p_0 h \geq c(-\nu),$$

那么不存在这样的曲线，使其与 D 的所有接触阶数都至少为 p_0.

证明。 若 $\mathcal{B}_f = 0$，定理 1.2 的证明中的构造给出一个正整数 q以及一个权为 Q 、扭曲为 $M = qm$ 的全局不变微分 H^{-qa} ，使得

$$Q(j_k f) \not\equiv 0, \qquad P_Q \leq qa\,\mathcal{B}_f = 0.$$

由于 P_Q是有效的，因此可得 $P_Q = 0$.结合 $L = H^{qa}$和 $R = 0$，剩余类 $L - R$是充足的，因此引理 2.4 给出矛盾。这证明了 $\mathcal{B}_f \neq 0$. 对于光滑边界断言，假设所有接触阶数都至少为 p_0. 对于每个整数 $p \geq p_0$，两个数值条件给出

$$\rho \leq \frac{h}{c}, \qquad 0 < \frac{-\nu}{p} \leq \frac{-\nu}{p_0} \leq \frac{h}{c}.$$

因此，

$$0 < \mu(p) = \max\left\{\rho, \frac{-\nu}{p}, 0\right\} \leq \frac{h}{c}.$$

根据（1.4）的单分支形式，在任意实际接触点处，阶数 $p \geq p_0$ 的系数为

$$b_D(p) = \left(c - \frac{h}{\mu(p)}\right)_+ = 0.$$

因此，我们 有 $\mathcal{B}_f = 0$；即使接触集为空时也成立，这与第一部分矛盾。 □

在上述数值假设下，对于光滑不可约边界，该推论排除了像不包含于 D中的$(X,\ (1-1/p_0)D)$的非恒定轨形整曲线，其中接触按最小重数解释。对于 $p_0 \geq 2$，对像的限制属于轨形定义的一部分；对于 $p_0 = 1$，则必须明确保留该限制。避开 D 的曲线给出了稳定基底轨迹假设的既定推论；该数值检验还处理了与 D.相交的曲线

当 D 光滑且不可约，并且法向次数非负时，还有一个有用的一致性条件。对于 X 上的线丛 L ，令 $\ell = \deg_A(L|_D)$。若 $\nu \geq 0$，则有限源权重将引理 2.2 中的切向指数 j 限制为 m. 因此，对于每个满足 $\ell > m\max\{\rho, 0\}$ 的截面 $Q \in H^0(X, E^{\mathrm{GG}}_{k,m}, \Omega^1_X(\log D) \otimes L^{-1})$，它都为零：所有分次因子在每个滤过次数处的最大斜率均为负。等价地，定义 $\sigma_D^{[m]}$ 的约束可行集为空。因此，在这种情况下，(1.5) 强制 $\rho > 0$ 和 $c\rho \geq h$ 。对于

超曲面边界，这给出了关于可容许权重到扭曲比的必要数值条件；但它并不提供所需的截面。

为与对同一构造进行的优化相比较，令$\mathcal{A}$ 为满足（1.5）的三元组的非空集合，其中固定的一对具有光滑不可约边界和固定的 H. 置$c_{\mathcal{A}} =$ 下确界$_{\mathcal{A}}\, m/a$ ，并且 $\theta = h/\mu$（1）。 对于每个 $\varepsilon > 0$，选择一个充分接近该下确界的单个三元组即可得到

$$T_f(r,H) \le (c_{\mathcal{A}} - \theta + \varepsilon)_+ \overline{N}_f(r,D) + S_f(r) \quad \|.$$

因此，当对同一组权重到扭曲比进行优化时，这一减法仍然存在。对于每个 ε ，证明仅使用一组数值数据和一个例外集。比值 h_Y/μ_Y（$\mathbf{p}$）同样可以在极化随丰类变化时，对极化进行优化。重新缩放极化会将 h_Y、 ρ_Y 以及每个 $\nu_{Y,\,i}$ 都乘以同一个因子，因此对于这些比值而言，重要的只是其射线。在曲线上或皮卡德数为一的层上，该比值与极化无关。

3.2. 定理1.4 和1.5的证明及例子

定理 *1.4*的证明。

我们使用引理 2.2中的代数射空间和理想层。正则嵌入给出

$$\mathcal{I}_Y^r/\mathcal{I}_Y^{r+1} \simeq \mathrm{Sym}^r(\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2).$$

对于满足 $r \ge 0$ 的整数 $r\eta_{\xi_0} < \ell_Y$，引理 2.1 给出

$$\mu_{\max,A_Y}\left(\mathrm{Sym}^r E_{\xi_0} \otimes L^{-1}|_Y\right) \le r\eta_{\xi_0} - \ell_Y < 0,$$

其中 $r = 0$ 使用 $\mathrm{Sym}^0 E_{\xi_0} = \mathscr{O}_Y$. 因此

$$H^0(Y, \mathrm{Sym}^r E_{\xi_0} \otimes L^{-1}|_Y) = 0.$$

乘积投影 $Z_{Y,\,k} = Y \times \mathbb{A}^{|J|k} \to \mathbb{A}^{|J|k}$ 是射影的、有限表示且平坦的，并且向量丛

$$\mathrm{Sym}^r(\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2) \otimes \pi_Y^*(L^{-1}|_Y)$$

在参数空间上是平坦的。因此，上半连续性 [24, Tag 0BDN] 给出了一个开邻域 U_r ，其中 ξ_0

$$H^0(Y, \mathrm{Sym}^r E_\xi \otimes L^{-1}|_Y) = 0 \quad (\xi \in U_r).$$

开集 U_r 可能取决于 r. 归纳地假设 $Q \in \mathcal{I}_Y^r \otimes \pi^* L^{-1}$ 沿着 $Z_{Y,\,k}$，从 $r = 0$. 开始。其分次像是上述向量丛的一个整体截面，并且它在 U_r 上方的每个纤维上的限制都为零。因此，它在整体不可约簇 $Z_{Y,\,k}$， 的稠密开子集 $Y \times U_r$ 上消失，而局部自由性迫使其处处消失。连续理想幂的正合列于是给出 $Q \in \mathcal{I}_Y^{r+1} \otimes \pi^* L^{-1}$ 沿着 $Z_{Y,\,k}$. 若 $\eta_{\xi_0} > 0$，则迭代得到

$$0 \le r < \left\lceil \frac{\ell_Y}{\eta_{\xi_0}} \right\rceil$$

证明了所断言的理想幂归属性。若 $\eta_{\xi_0} = 0$， ，则同样的论证适用于每个$r \ge 0$. 。对于每个 $\zeta \in Z_{Y,\,k}$， ，Krull 交给出

$$\bigcap_{r \ge 0} \left(\mathcal{I}_Y^r \otimes \pi^* L^{-1}\right)_\zeta = 0,$$

因为$\mathcal{I}_{Y,\,\zeta}$ 包含于诺特局部环 $\mathscr{O}_{\mathcal{J}_k,\,\zeta}$. 的极大理想中。因此， Q在不可约喷射空间$\mathcal{J}_k$ 的一个非空开子集上消失，从而 $Q = 0$.

对于该划分，对每个分支 $i \in J$， 考虑多项式映射

$$(\xi_{i,1}, \ldots, \xi_{i,k}) \longmapsto (B_1(\xi_i), \ldots, B_k(\xi_i)).$$

这是一个对角系数为一的三角多项式自同构，因为 $B_h(\xi_i)-\xi_{i,\,h}$只依赖于 $\xi_{i,\,1}$，……，$\xi_{i,\,h-1}$. 因此我们可以选取 ξ_0 使得

$$B_h(\xi_i)|_{\xi=\xi_0}=\begin{cases}1, & i\in G_h,\\ 0, & i\notin G_h.\end{cases}$$

记 $[w_i]$ 和 $[\eta_{a,h}]$ 为 E_{ξ_0}. 引理 2.2证明记号下该纤维的局部标架元素所诱导的过渡律为

$$\begin{aligned}[w_i'] &= u_i|_Y\,[w_i],\\ [\eta_{a,h}'] &= \sum_b A_{ab}[\eta_{b,h}]+\sum_{i\in G_h} C_{ai}[w_i].\end{aligned}$$

因此，过渡矩阵分解为由 h 索引的各个分块，其中第 个分块由 和 生成，且 在 上， $\Omega^1_{X_{G_h}}(\log\ R_{G_h})$ 的一个局部标架由 dw_i （ $i\in G_h$）以及该引理中使用的形式 ϑ_a 构成。将此丛限制到 Y 后，其过渡矩阵在 $[w_i]\leftrightarrow dw_i$ 和 $[\eta_{a,h}]\leftrightarrow\vartheta_a$. 下恰好是上面的第 h 个分块。这也涵盖空群，并证明

$$E_{\xi_0}\simeq\bigoplus_{h=1}^{k}F_{G_h}.$$

简单正规交叉假设给出对数余法丛正合列

$$0\longrightarrow\bigoplus_{i\in G}N_i^*\longrightarrow F_G\longrightarrow\Omega^1_Y(\log B_Y)\longrightarrow 0,$$

其中 $F_\varnothing=\Omega^1_Y(\log\ B_Y)$ 当 $G=\varnothing$. 由于 $\deg_{A_Y}N_i^*=-\nu_{Y,\,i}$，引理 2.1 给出

$$\mu_{\max,A_Y}(F_G)\le\max(\{\rho_Y\}\cup\{-\nu_{Y,i}:i\in G\})\le\mu_Y(\mathbf{1}).$$

对直和项取最大值并与零比较，得到

$$\eta_{\xi_0}=\max\{0,\mu_{\max,A_Y}(F_{G_h}):1\le h\le k\}=\eta_{\mathcal{P}}\le\mu_Y(\mathbf{1}).$$

□

对于以 Y° 为中心且接触阶至少为 $\mathbf{p}$ 的弧，两个独立的重数估计给出

$$\operatorname{ord}_0 Q(j_k\gamma)\ge\max\left\{\sigma_Y(L,\mathbf{p}),\left\lceil\frac{\ell_Y}{\eta_{\mathcal{P}}}\right\rceil\right\}-m,\qquad\eta_{\mathcal{P}}>0.$$

因此，取最大值即可合并这些阈值。在（1.4）中，这将 θ_Y（$\mathbf{p}$）替换为

$$\max\left\{\theta_Y(\mathbf{p}),\frac{h_Y}{\eta_{\mathcal{P}}}\right\}.$$

来自完整余法丛的估计保持无权；接触阶的依赖性来自定理 1.1。对于一个光滑不可约边界和 $k\ge2$，取 B_1（ξ） $=1$ 以及B_h（ξ） $=0$，则 $h\ge2$. 所得的余法纤维为 $\Omega^1_X|_D\oplus$ （Ω^1_D）$^{\oplus(k-1)}$. 。使用推论 3.1的记号，余法丛正合列为

$$0\longrightarrow N^*_{D/X}\longrightarrow\Omega^1_X|_D\longrightarrow\Omega^1_D\longrightarrow 0$$

和引理 2.1给出

$$-\nu\le\mu_{\max,A}(\Omega^1_X|_D)\le\max\{-\nu,\rho\}.$$

由于 $k\ge2$，上述直和包含 Ω_D 作为一个直和项，因此

$$\eta_\xi=\max\{0,\mu_{\max,A}(\Omega^1_X|_D),\rho\}=\max\{0,-\nu,\rho\}=\mu_D(1).$$

因此，该纤维不会带来额外的无权改进。在一阶情形下，取 $B_1(\xi)=1$使余法纤维 $\Omega^1_X|_D$，从而恢复一般余法原理 [20] 的直接应用。在 $\xi=0$，余法纤维为 $N^*_{D/X}\oplus\Omega^1_D$.

定理 *1.5*的证明。

选择适配坐标 x, y 其中 $D_i = (x = 0)$ 和 $D_j = (y = 0)$，并写成 $\xi_{i,\ h} = (\log\ x)^{(h)}$ 和 $\xi_{j,\ h} = (\log y)^{(h)}$. 于是

$$\mathcal{I}_i = (x, \xi_{j,1}, \ldots, \xi_{j,k}), \quad \mathcal{I}_j = (y, \xi_{i,1}, \ldots, \xi_{i,k}).$$

写成

$$Q = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}(x, y) \prod_{h=1}^{k} \xi_{i,h}^{\alpha_h} \xi_{j,h}^{\beta_h}.$$

该和式是有限的，其系数是全纯的，并且每一项都满足

$$\sum_{h=1}^{k} h(\alpha_h + \beta_h) = m.$$

对于一个固定的 项，令 $A = \sum_h \alpha_h$ 和 $B = \sum_h \beta_h$，于是 $A + B \le m$. 这两个理想幂条件 给出

$$x^{(s_i - B)_+} \mid a_{\alpha\beta}, \quad y^{(s_j - A)_+} \mid a_{\alpha\beta}.$$

由于 x, y 是彼此不同的素参数，这些幂的乘积整除同一个系数。提出这个乘积后，可将 Q 表示为有限和的各项 $x^b y^d a(x,\ y) \prod_h \xi_{i\ ,\ h}^{\alpha_h} \xi_{j\ ,\ h}^{\beta_h}$ 其中 a是全纯的， b， $d \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，并且

$$A + B \le m, \quad b + B \ge s_i, \quad d + A \ge s_j.$$

对于固定的 b， d，这些不等式存在非负整数 A， B 当且仅当

$$(s_i - b)_+ + (s_j - d)_+ \le m.$$

利用恒等式

$$u_+ + v_+ = \max\{0, u, v, u + v\},$$

这等价于

$$b \ge b_0, \quad d \ge d_0, \quad b + d \ge \delta.$$

这些定义还给出

$$\delta - b_0 - d_0 = \min\left\{s_i, s_j, m, (s_i + s_j - m)_+\right\} \ge 0.$$

对于每一对这样的 b， d， 我们有

$$\begin{aligned} p_i b + p_j d &= p_i b_0 + p_j d_0 + p_i(b - b_0) + p_j(d - d_0) \\ &\ge p_i b_0 + p_j d_0 + \min(p_i, p_j)(b + d - b_0 - d_0) \\ &\ge C. \end{aligned}$$

在可行的整数对处达到等号

$$(b_*, d_*) = \begin{cases} (\delta - d_0, d_0), & p_i \le p_j, \\ (b_0, \delta - b_0), & p_i > p_j. \end{cases}$$

沿着 γ，阶数为 h 的每个对数喷流变量的极点阶至多为 h， 而 $x^b y^d$ 的消失阶为 $p_i b + p_j d$，其余系数为全纯的。因此，$Q(j_k\gamma)$ 的每一项的消失阶至少为 $p_i b + p_j d - m \ge C - m.$。对于它们的有限和，包括恒等为零的取值，同样的界仍然成立，因此其极点阶至多为 $(m - C)_+ \cdot$。为证明对于所述局部信息而言该界是最优的，取上面的最小化对 $(b_*,\ d_*)$ 并令

$$B = (s_i - b_*)_+, \quad A = m - B.$$

可行性条件给出 $0 \le B \le m$ 和 $A \ge (s_j - d_*)_+ \cdot$ 因此，局部微分

$$Q_* = x^{b_*} y^{d_*} \xi_{i,1}^{A} \xi_{j,1}^{B}$$

属于 $\mathcal{I}_i^{s_i}\cap\mathcal{I}_j^{s_j}$，并且对于每个 $k\ge 1.$，其源权重恰好为 m。对于这些坐标中的弧 $\gamma_*(t)=(t^{p_i},t^{p_j})$，我们有

$$Q_*(j_k\gamma_*)=p_i^A p_j^B t^{C-m}.$$

首项系数非零，因此其极点阶恰为 $(m-C)_+$，即使当 $C\ge m$ 且此阶为零时也是如此。这就证明了所述的局部最优性。□

On a 曲面上，斜率数据变为交数。对于 D_i 一个边界分支

$$\rho_i=(K_X+D)\cdot D_i,\qquad \nu_i=D_i^2,\qquad h_i=H\cdot D_i,\qquad \mu_i(p)=\max\{\rho_i,-\nu_i/p,0\}.$$

在光滑边界点，稳定系数为 $(c-h_i/\mu_i(p))_+$。在二重点处，（1.4）的分支部分为

$$\left(\min\left\{c,2c-\frac{h_i}{\mu_i(p_i)}-\frac{h_j}{\mu_j(p_j)}\right\}\right)_+.$$

对于单位接触和有限截面阈值 s_i，s_j，带符号的计算给出 $(\min\{m,\ 2m-s_i-s_j\})_+$。这在取正部之前保留了符号，因此可能比 $\min\{m,\ (m-s_i)_+ + (m-s_j)_+\}$。

定理1.5 提供了下文所用的额外接触改进。
若 $s_i,\ s_j\le m$，定理1.5 可化为

$$\operatorname{pole}_0 Q(j_k\gamma)\le\left(m-\min(p_i,p_j)(s_i+s_j-m)_+\right)_+.$$

在稳定基底轨迹情形中，取未加权的 $\theta_i=h_i/\mu_i(1)$，并定义

$$b_0'=(\theta_i-c)_+,\qquad d_0'=(\theta_j-c)_+,\qquad \delta'=(\theta_i+\theta_j-c)_+,$$
$$C'=p_ib_0'+p_jd_0'+\min(p_i,p_j)(\delta'-b_0'-d_0').$$

二重点系数还可以替换为它与 $(c-C')_+$ 的最小值。令源权重为 qm，未加权整数阈值为 $s_\ell=\lceil qa\theta_\ell\rceil$（对应 $\ell\in\{i,j\}$），应用定理 1.5。除以 qa 后，连续松弛保留阈值 $s_i/(qa)$ 和 $s_j/(qa)$。将这些阈值降低至 θ_i 和 θ_j 会扩大可行集，并得到最小值 $C'.$。因此，定理 1.5 中的整数最小值至少为 $qaC'.$

例 3.5 (二重点处的严格接触增益)。取 $k\ge 1,\ \ m=5,\ \ s_i=s_j=3$，并取接触$(p_i,\ p_j)=(2,\ 3)$。定理1.5 给出 $b_0=d_0=0,\ \ \delta=1$，以及 $C=2$，因此极点界为3。若只使用下界 $p_i,\ p_j\ge 1$，相同的两个理想条件给出更大的极点界

$$\left(m-(s_i+s_j-m)_+\right)_+=4.$$

在局部坐标 $D_i=(x=0)$ 和 $D_j=(y=0)$，中，这两个理想为

$$\mathcal{I}_i=(x,\xi_{j,1},\dots,\xi_{j,k}),\qquad \mathcal{I}_j=(y,\xi_{i,1},\dots,\xi_{i,k}).$$

考虑单项式

$$Q=x\,\xi_{i,1}^3\xi_{j,1}^2.$$

由于 $x\xi_{j,\ 1}^2\in\mathcal{I}_i^3$以及 $\xi_{i,\ 1}^3\in\mathcal{I}_j^3$，我们有 $Q\in\mathcal{I}_i^3\cap\mathcal{I}_j^3.$ 因子 x 的源权重为零，因此 Q的源权重为 $3+2=5.$ 沿着弧 $\gamma(t)=(t^2,\ t^3)$，有

$$\xi_{i,1}(j_k\gamma)=\frac{2}{t},\qquad \xi_{j,1}(j_k\gamma)=\frac{3}{t},$$

因此

$$Q(j_k\gamma)=t^2\left(\frac{2}{t}\right)^3\left(\frac{3}{t}\right)^2=72t^{-3}.$$

因此，其极点阶恰为 3，所以达到了依赖接触的界。该例证明了在所述理想约束下的局部尖锐性；将该单项式扩展为整体截面则是一个独立的问题。

对于曲面上的光滑不可约边界曲线 D ，设 L 是一个线丛，且满足$\ell = L \cdot D > 0$，并令 $\kappa = 2g(D) - 2$ 以及 $\nu = D^2$. 整数阈值（1.2）为

$$\sigma_p = \min\{j + pb : \ j, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ j\kappa - b\nu \geq \ell\}.$$

当 $\nu < 0$ 和 $\kappa > 0$，它有有限表达式

$$\sigma_p = \min_{0 \leq j \leq \lceil \ell/\kappa \rceil} \left[j + p \left\lceil \frac{(\ell - j\kappa)_+}{-\nu} \right\rceil \right].$$

当 $\nu < 0$ 和 $\kappa \leq 0$，它是

$$\sigma_p = p \left\lceil \frac{\ell}{-\nu} \right\rceil.$$

这可以改进较简单的上取整 $\lceil p\ell/(-\nu) \rceil$. 当 $\kappa \leq 0$ 和 $\nu < 0$，这已经是标准对数喷射滤过 [6, 命题 2.4(c)]和限制留数正合列 [12, 事实 11.4]的直接推论。事实上，这些给出 $\mu_{\max}(E^{\mathrm{GG}}_{k\,m,}$ $\Omega^1_X(\log\ D)|_D) \leq 0$. 对于每个整数 $b < \ell/(-\nu)$，限制因此给出

$$H^0(D, E^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega^1_X(\log D)|_D \otimes L^{-1}|_D \otimes N^{-b}_{D/X}) = 0.$$

由 $s = \lceil \ell/(-\nu) \rceil$，连续的除子限制正合列给出

$$Q \in H^0(X, E^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega^1_X(\log D) \otimes L^{-1} \otimes \mathscr{O}_X(-sD)).$$

拉回这个固定的边界因子即可得到所示的接触节省。

例 3.6 （非零截面的负法向次数）。 设 C 为亏格为二的光滑射影曲线，设 M 为 C. 上次数为七的线丛。将 M 的全空间紧化为一个亏格曲面 π： $X \to C$， 并设 D_0 为其无穷远截面。于是， $N_{D_0/X} \simeq M^{-1}$和 $D_0^2 = -7$. 取 M的三个一般截面， 其图像为 S_1、 S_2、 S_3， 并令

$$D = D_0 + S_1 + S_2 + S_3.$$

线丛 M 分离 1-射流，这是因为 $\deg M = 7 > 2g(C)$， 因此可以选择具有横截两两交点且没有三重交点的图像。每个图像满足$\mathscr{O}_X(S_i) \simeq \mathscr{O}_X(D_0) \otimes \pi^*M$.它们与 D_0不相交， 且其两两交数为七。因此， D 是简单正规交叉，其在 D_0 上的剩余边界为空。

取 B 上次数为十七的线丛，并令

$$H = \mathscr{O}_X(D_0) \otimes \pi^*B.$$

有

$$H^2 = 27, \quad H \cdot D_0 = 10,$$

且 H 在每个纤维上的次数均为一。对于其他任意水平不可约曲线 T, ，均有

$$H \cdot T = D_0 \cdot T + 17\deg(\pi|_T) > 0,$$

由于 $D_0 \cdot T \geq 0$. 因此，根据中井–莫伊谢宗判别准则 [13, 第五章，定理 1.10]， H 是充足的。沿着 D_0,其数据为

$$\rho = 2, \quad \nu = -7, \quad h = H \cdot D_0 = 10, \quad \mu(p) = \max\{2, 7/p\}.$$

对于扭曲 H^{-1} 以及一个整数 $p \geq 1$, 整数阈值为

$$\sigma_p = \min\{j + pb : \ j, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ 2j + 7b \geq 10\} = \min\{5, 2p, p + 2\}.$$

对于 $b = 0$，1，2，最小可能的 j 分别为 5，2，0，而 $b \geq 3$ 给出的成本至少为 $3p > 2p$.对于源权重 $m \geq 5$，三个最小化方案均可采用，且 $\sigma^{[m]}_{D_0}(H,\ p) = \sigma_p$.阈值比较如下。

接触阶 p	1	2	3	$p \geq 4$
整数阈值 σ_p	2	4	5	5
斜率上界 $\lceil 10/\mu(p) \rceil$	2	3	5	5

在二重接触情况下，整数阈值因此比斜率上界额外带来一个单位的极点节省。 $p \geq 3$ 的饱和化反映了切向替代情形 $j = 5$，其成本与接触阶无关。

接下来验证该对具有非零的负扭曲截面。记 F 为一个纤维，并记 $E = \Omega^1_X(\text{对数 } D)$。在此， $D_0 \cdot F = 1$， $F^2 = 0$ 且边界具有数值类 $D \equiv 4D_0 + 21F.$。标准的纤维化曲面公式和对数陈公式给出

$$K_X \equiv -2D_0 - 5F, \qquad K_X + D \equiv 2D_0 + 16F, \qquad c_1(E)^2 = 36, \qquad c_2(E) = 25.$$

这里， e 表示拓扑欧拉示性数。对于最后一个等式，我们有 $e(X) = -4$，每个边界分支的欧拉数为 -2，并且在二十一个横截二重点处应用容斥原理可得

$$c_2(E) = e(X \setminus D) = -4 - 4(-2) + 21 = 25.$$

黎曼–罗赫定理 [13, 附录 A，第 4] 节因此给出

$$\chi(X, \operatorname{Sym}^m E \otimes H^{-1}) = \frac{c_1(E)^2 - c_2(E)}{6} m^3 + O(m^2) = \frac{11}{6} m^3 + O(m^2).$$

设 $U \subset C$ 为二十一个交点的投影的补集。对于位于 U上方的每个纤维F，四个边界点彼此不同，因此相对对数余切序列限制为

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_F \longrightarrow E|_F \longrightarrow \mathcal{O}_F(2) \longrightarrow 0.$$

商为 $\Omega^1_F(\text{对数}(D|_F)) \simeq \mathcal{O}_F(2)$，因为 $F \simeq \mathbb{P}^1$ 和 $D|_F$由四个约化点组成。对该序列取对偶并张量化 $\mathcal{O}_F(-1)$，得到一个由$\mathcal{O}_F(-3)$扩张 $\mathcal{O}_F(-1)$的扩张，因此

$$H^0\big(F, (E|_F)^* \otimes \mathcal{O}_F(-1)\big) = 0.$$

$F \simeq \mathbb{P}^1$ 上的分裂定理随后表明， $E|_F$ 的每个直和项都具有非负次数。由于（$H \otimes K_X$）$|_F \simeq \mathcal{O}_F$（-1）， $(\operatorname{Sym}^m E^* \otimes H \otimes K_X)|_F$的每个直和项都具有负次数，因此该丛在 $F.$ 上没有非零截面。于是，任何整体截面都在稠密开子集 π^{-1}（U）上消失，因而恒为零。因此，塞尔对偶给出

$$H^2\big(X, \operatorname{Sym}^m E \otimes H^{-1}\big) = H^0\big(X, \operatorname{Sym}^m E^* \otimes H \otimes K_X\big)^* = 0.$$

因此

$$h^0\big(X, \operatorname{Sym}^m E \otimes H^{-1}\big) \geq \chi\big(X, \operatorname{Sym}^m E \otimes H^{-1}\big) > 0$$

对所有充分大的 $m.$ 典范包含

$$\operatorname{Sym}^m E \otimes H^{-1} \hookrightarrow E^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega^1_X(\log D) \otimes H^{-1} \qquad (k \geq 1)$$

由仅涉及一阶喷射变量的齐次多项式得到。因此，整数和接触估计适用于该对上的非零整体截面，而与稳定基底轨迹条件无关。该例比较了非零截面空间上的两个普适消失界。某个整体截面是否达到任一界，是另一个独立问题。事实上，该对在一阶时不满足 (1.5)。记 $s_i \in H^0(C, M)$ 为图为 S_i 的截面，并令 $\varphi = (s_3 - s_1)/(s_2 - s_1)$。不存在三重交点给出 $\deg \varphi = 7$，而两两横截性使 $\varphi\colon\ C \to \mathbb{P}^1$ 在 0、1、 $\infty.$ 上无分歧。由黎曼–赫尔维茨公式， φ 的分歧除子次数为十六，因此存在临界点 $b \in C$ ，使得 $\varphi(b) \notin \{0, 1, \infty\}$。在 b 附近，纤维坐标 $v = (u - s_1)/(s_2 - s_1)$，其中 u 是局部平凡化中的原始纤维坐标，使四个边界截面位于 0、1、 φ、 $\infty.$。沿纤维 F_b，在固定 v 的情况下对基底坐标 t 求导，得到一个处处不消失的对数切向量。事实上，在移动截面附近，也可以改为固定 $v - \varphi(t)$，这两个水平向量在 F_b 上一致，因为 $\varphi'(b) = 0.$。在该向量上取 $\operatorname{Sym}^m E \otimes H^{-a}$ 的任意截面，得到 $H^{-a}|_{F_b}$ 的整体截面；由于 $\deg(H^{-a}|_{F_b}) = -a < 0.$，该截面消失。因此，在 $F_b \setminus D$ 上的相应切向方向属于 (1.5) 中每个正幂在 $k = 1.$ 处的基 locus。

对于次数为 $d \geq 4$ 且 $H = \mathscr{O}(1)$，的光滑平面曲线，伴随公式给出

$$\kappa = d(d-3), \quad \nu = d^2, \quad h = d.$$

因此，每个权为 m 且扭曲为 $\mathscr{O}(-a)$ 的截面的极点阶至多为

$$\left(m - \left\lceil \frac{a}{d-3} \right\rceil\right)_+,$$

以及推论 3.1给出系数 $(c-1/(d-3))_+$（在条件 (1.5) 下）。对于总次数为 $d \geq 4$ 的简单正规交叉平面边界，设 $\theta = 1/(d-3)$；于是每个分支都有 $\theta_i = \theta.$。非负的法丛次数意味着，在上述源权障碍下，条件 (1.5) 下的 ~~c~~ $\geq \theta$。令 Σ 为有限交叉集，并定义 $N_f(r, \Sigma) = N(r, \sum_{f(z)\in\Sigma}[z])$。一般分层界变为

$$T_f(r, \mathscr{O}(1)) \leq (c-\theta)\overline{N}_f(r, D) + \min\{\theta, c-\theta\}\overline{N}_f(r, \Sigma) + S_f(r) \quad \|.$$

事实上，在光滑边界点处系数为 $c - \theta$，而在二重点处为 $\min\{c, \ 2c - 2\theta\}$。因此，对于 $c \geq 2\theta$，交叉修正项为 θ；对于 $\theta \leq c \leq 2\theta.$，则为 $c - \theta$。这里，$N_f(r, \ D)$ 对每个交点计数一次，这与各分支的约化计数函数之和不同。

推论 3.7 (平面 SNC 边界与不等轨形重数)。 设 $D = \sum_i D_i \subset \mathbb{P}^2$ 是一个简单正规交叉除子，其光滑分支的次数为 d_i，总次数为$d \geq 4$. 假设 (1.7) 满足 $H = \mathscr{O}(1)$，且有一个固定闭代数子集 $Z \subsetneq \mathbb{P}^2$，它可以为空，并令

$$\theta = \frac{1}{d-3}, \quad \beta = c - \theta.$$

这里， $c = m/a$ 采用 (1.7) 中的固定三元组。于是 $\beta \geq 0$，且每条不包含于 $D \cup Z$ 中的非常值整曲线都满足

$$T_f(r, \mathscr{O}(1)) \leq \beta \sum_i \overline{N}_f(r, D_i) + S_f(r) \quad \|.$$

若整数 $r_i \geq 1$ 满足

$$\beta \sum_i \frac{d_i}{r_i} < 1, \tag{3.2}$$

所有具有这些最小接触且不包含于 D 中的非常值整曲线，其像都包含在同一个集合 $Z.$ 中。令

$$\Delta_{\mathbf{r}} = \sum_i \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) D_i.$$

若还有 $\sum_i d_i/r_i < d-3$，则 $(\mathbb{P}^2, \Delta_{\mathbf{r}})$ 为一般型，并且每条非常值轨形整曲线（按最小接触的意义理解）的像都包含于固定真代数子集 $D \cup Z.$中

证明。 对每个分支 D_i，有 $h_i = d_i$和 $\nu_i = d_i^2.$剩余边界 $(D - D_i)\,|_{D_i}$的次数为 $d_i\,(d - d_i)$，因此由伴随公式可得

$$\rho_i = d_i(d_i - 3) + d_i(d - d_i) = d_i(d-3) > 0.$$

因此， $\mu_i(p_i) = \rho_i$ 且 $\theta_i(p_i) = \theta$ 对每个整数 $p_i \geq 1.$ 如定理1.3的证明中所示，假设（1.7）给出一个正整数 q 和一个非零全局不变微分 Q_0，其源权重为 qm，扭曲为 $H^{-qa}.$ 若 $c < \theta,$ 则对每个分支 D_i 及任意整数$0 \leq j \leq qm$ 和 $b \geq 0$，均有

$$j\rho_i - b\nu_i \leq qm\, d_i(d-3) < qa\, d_i = \deg(H^{qa}|_{D_i}).$$

因此，定理 1.1 的有限源权细化中的约束可行集为空，这迫使 $Q_0 = 0$，从而产生矛盾。因此， $c \geq \theta$ 以及 $\beta \geq 0.$ 在 D_i的光滑点处，(1.4) 中的系数为 β，而在二重点处为 $\min\{c, \ 2\beta\} \leq 2\beta$，与接触阶无关

接触阶。平面SNC除子没有三重点，因此对于第一个断言中的每条曲线，我们得到有效除子不等式

$$\mathcal{B}_f \le \beta \sum_i (f^* D_i)_{\mathrm{red}}.$$

源点映射到交点时，右侧的求和项系数为 2β，因为该点针对两个分支各计数一次。应用定理 1.3 中的第二主不等式，并取计数函数，即可证明所述估计。为得到一致性结论，令 $\lambda_i = \beta/r_i$. 这些都是非负有理数，而单分支和双重点的层条件分别为

$$\beta = \lambda_i r_i, \qquad \min\{c, 2\beta\} \le 2\beta = \lambda_i r_i + \lambda_j r_j.$$

它们涵盖了（1.8）中的每个层不等式，而

$$H - \sum_i \lambda_i D_i \equiv \left(1 - \beta \sum_i \frac{d_i}{r_i}\right) H$$

由（3.2）可知其为充足的。因此，定理1.3给出了所述结论，且使用同一个固定集合Z. 最后，

$$K_{\mathbb{P}^2} + \Delta_{\mathbf{r}} \equiv \left(d - 3 - \sum_i \frac{d_i}{r_i}\right) H.$$

在附加不等式成立时，该类是充足的，因而是大类，而推论3.3 给出了所述轨形结论。□

对于公共最小接触阶 p，条件（3.2）为

$$p > d\left(c - \frac{1}{d-3}\right),$$

与 $p > dc$ 使用相同数据的全权重估计相比。对于丰沛剩余类，严格不等式至关重要；不对等号情形作出任何结论。推论3.7允许重数不相等，并处理交点，而无需假设曲线避开交点集。

例3.8（超曲面斜率与高阶喷流的必要性）。设 $X = \mathbb{P}^n$ 满足 $n \ge 2$，令 D 为次数为 $d \ge n+2$ 的光滑超曲面，并取 $H = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$。使用 $A = \mathscr{O}_D(1)$作为极化。典范丛 $K_D = \mathscr{O}_D(d-n-1)$ 是充足的。负 Kähler–Einstein 度量 [26] 的 Kähler类与 $c_1(K_D)$成正比，并使余切丛成为 Hermitian–Einstein 丛，因而根据 [18, 定理5.8。3]是多稳定的。由于 $c_1(K_D) = (d-n-1)c_1(A)$，这种多稳定性是相对于所选极化 A. 成立的。对于 $n = 2$，相同的斜率计算就是一个线丛的次数。特别地，$\mu_{\max,\,A}(\Omega^1_D) = \mu_A(\Omega^1_D)$。利用$A^{n-1} = d$ 和 $N_{D/\mathbb{P}^n} \simeq \mathscr{O}_D(d)$，我们得到

$$h = d, \qquad \nu = d^2, \qquad \rho = \frac{d(d-n-1)}{n-1}, \qquad \theta = \frac{n-1}{d-n-1}.$$

由于 ρ，$\nu > 0$，我们有 $\mu(p) = \rho$ 以及 $h/\mu(p) = \theta$ 对每个正整数 p. 令

$$Q \in H^0\big(\mathbb{P}^n, E^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(\log D) \otimes \mathscr{O}(-a)\big), \qquad k, m, a \ge 1.$$

对于每一条以 γ 中的一点为中心、D 且不包含于 D中的全纯弧，定理 1.1给出

$$\operatorname{pole}_0 Q(j_k\gamma) \le \left(m - \left\lceil \frac{a(n-1)}{d-n-1} \right\rceil\right)_+.$$

当（1.5）成立时，取 $c = m/a$ 为其固定三元组，所得的计数系数为

$$\left(c - \frac{n-1}{d-n-1}\right)_+.$$

因此，一旦给定截面构造的数值数据 k、m、a，修正项便是明确的。更一般地，在条件（1.7）下，使用其固定三元组中的 $c = m/a$。由于 $dH - D \equiv 0$

是数值有效的，推论 3.2 将每条不包含于 D 且所有接触阶数均至少为固定整数 $p \geq 1$ 的非常值整曲线限制在 Z，只要

$$p > d\left(c - \frac{n-1}{d-n-1}\right)_+.$$

相应的轨形典范类为

$$K_{\mathbb{P}^n} + (1-1/p)D \equiv \left(d-n-1-\frac{d}{p}\right)H,$$

因此，附加不等式 $p > d/(d-n-1)$ 使这一结论处于推论 3.3 的一般型情形中。

在这种情形下，还存在一个经典的一阶障碍。对于 $k=1$，取 ξ 满足$B_1(\xi) = 1$，如定理 1.4 所述，从而 $E_\xi \simeq \Omega^1_{\mathbb{P}^n}|_D$. 受限的欧拉序列为

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^n}|_D \longrightarrow \mathscr{O}_D(-1)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow \mathscr{O}_D \longrightarrow 0.$$

因此，$\mu_{\max,\ A}(E_\xi) \leq -d < 0$ 且 $\eta_\xi = 0$. 对于 $L = \mathscr{O}(a)$，有 $\ell_D = ad > 0$，而定理1.4 于是给出

$$H^0\big(\mathbb{P}^n, \operatorname{Sym}^m \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(\log D) \otimes \mathscr{O}(-a)\big) = 0, \qquad m, a \geq 1.$$

因此，具有此扭曲的非零截面要求 $k \geq 2$. 对于 $k \geq 2$，取一个正规参数，使得 $B_1(\xi) = 1$ 且 $B_h(\xi) = 0$ 对于 $h \geq 2$. 定理 1.4 于是给出完整分解

$$E_\xi \simeq \Omega^1_{\mathbb{P}^n}|_D \oplus (\Omega^1_D)^{\oplus(k-1)}.$$

其最大斜率为 $\rho > 0$，因此 $\eta_\xi = \rho$. 更高的射流阶数由此消除了该余法纤维所造成的障碍，尽管截面的存在性仍是一个整体性问题；参见 [3, 14]中的构造。

接下来的三个例子验证了具体对数曲面对的稳定基点集条件（1.5）。它们给出了定理 1.2中的几何假设的实例，从而也给出了定理 1.3中带有 $Z = \varnothing$ 的（1.7）的实例。在每种情况下，相关线丛的某个固定正幂在边界补集上都没有基点。

例 3.9（一个具有十条边界曲线的德尔佩佐曲面）。令 X 为 $\mathbb{P}^2$ 在四个点 p_1，……，p_4 处的爆破，其中任意三点不共线，并令 D 为四条例外曲线与连接这些点中任意两点的六条直线的严格变换之和。则 X 是一个五次德尔佩佐曲面，$H = -K_X$ 是非常丰的，并且 $D \sim 2H$，$H^2 = 5$. 除子D 由十条具有简单正规交叉的光滑有理曲线组成。我们证明（1.5），其中（k，m，a）=（1，6，1）。

记 τ：$X \to \mathbb{P}^2$ 为吹下，$\Lambda = \tau^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$，并记 $E = \sum_{i=1}^4 E_i$ 为其例外除子。将这六条直线编号为 L_j =($\ell_j = 0$)，用 L_j，表示它们的严格变换，并令$I_i = \{j:\ p_i \in L_j\}$。每个 I_i 含有三个元素，并且

$$\widetilde{L}_j \sim \Lambda - \sum_{i:p_i \in L_j} E_i, \qquad \sum_{j=1}^6 \widetilde{L}_j = \tau^*\left(\sum_{j=1}^6 L_j\right) - 3E.$$

由于 $H \sim 3\Lambda - E$，这就得到

$$D = \sum_j \widetilde{L}_j + E \sim 6\Lambda - 2E \sim 2H.$$

经典的五次指数 Hirzebruch–Kummer构造给出一个有限伽罗瓦覆盖π：$Y \to X$，其伽罗瓦群为 $G \simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^5$，，沿着 D.的全部十个分支以五重指标分歧。光滑射影曲面 Y 是一个紧致球商空间；见 [1,引言]。这里，对 X 在扩张中的正规化

$$\mathbb{C}(\mathbb{P}^2)\big((\ell_j/\ell_1)^{1/5} : 2 \leq j \leq 6\big).$$

由沿 L_2、……、 L_6. 取阶可知，这五个比值的乘积只有在所有指数都能被五整除时才可能是五次幂。因此，该扩张具有所述的伽罗瓦群。用加法记号，作如下对应

$$G = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^6/\langle(1,\dots,1)\rangle,$$

并令 g_j 为第 j 个标准基向量的像，从而 $\sum_j g_j = 0.$。对于 $j \in I_i$ 和 $j_0 \notin I_i$，所选扩张包含 $(\ell_j/\ell_{j_0})^{1/5}$，而 $\mathrm{ord}_{E_i}(\ell_j/\ell_{j_0}) = 1.$。沿着 $\sim L_j$ 的惯性群由 g_j 生成，沿着 E_i 的惯性群由 $\sum_{j\in I_i} g_j$ 生成，该元素非零且阶为五。在边界交叉处，两个惯性群生成元要么是 g_j，g_k（对于 $j \neq k$，），要么是 g_j，$\sum_{k\in I_i} g_k$（对于 $j \in I_i$，），并且它们在 $\mathbb{F}_5$. 上线性无关。对于第二对，在这个商中的一个线性关系可提升为 $(1,\dots,1)$ 的倍数；先考察 I_i 之外的坐标，再考察 $I_i \setminus \{j\}$，中的坐标，最后考察第 j 个坐标，即可推出两个系数都为零。

沿 E_i 的分歧也可以直接通过局部坐标看出。选取一条不经过 p_i 的参考直线，这不会改变域扩张，并选取坐标使三条相交直线的方程为 $u = 0$、$v = 0$ 和 $u - v = 0.$。对局部全纯单位开五次方根后，局部扩张可通过添加 u、v 和 $u - v.$ 的五次方根得到。在爆破解 $v = r$ 中，它等价于通过添加 r、t 和 $t - 1.$ 的五次方根得到。经过这些局部选取后，正规化的每个连通局部分支可描述为

$$r = z^5, \quad t = \alpha^5, \quad \beta^5 = \alpha^5 - 1.$$

三个原始五次方根为 $z\alpha$、z 和 $z\beta.$。令 ζ 为本原五次单位根。分别将这些根乘以 ζ^A、ζ^B 和 ζ^C，其中 A、B 和 $C \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$，可得到

$$(z,\alpha,\beta) \longmapsto (\zeta^B z, \zeta^{A-B}\alpha, \zeta^{C-B}\beta).$$

当且仅当 $A = B = C.$ 时，这样的自同构在 $(z = 0)$ 的一般点处的剩余域 $\mathbb{C}(\alpha,\beta)$ 上作用平凡。因此，惯性子群由同时乘以三个原始根的操作生成，即元素 $\sum_{j\in I_i} g_j.$。$E_i = (r = 0)$ 的约化原像由 $z = 0$ 给出，且法向参数满足 $r = z^5$，所以分歧指数为五。诱导的分歧曲线映射在切向上一般是 étale 的，而曲面映射在法向上仍然分歧。在 E_i 的一个光滑边界点上方的点 $(0,\alpha_0,\beta_0)$ 处，令 $t_0 = \alpha_0^5 \notin \{0,1,\infty\}$。由于 $\alpha_0\beta_0 \neq 0$，隐函数定理表明 $\eta = \alpha^5 - t_0$ 是分歧曲线上的一个局部参数。取源坐标 (z,η) 和目标坐标 $(r, t - t_0)$，映射变为 $(z,\eta) \mapsto (z^5, \eta)$。

设 $R = (\pi^{-1}D)_{\mathrm{red}}.$ 经过适当的局部解析坐标变换后，光滑边界点和交点上方的模型分别为 $(u,\ v) \mapsto (u^5,\ v)$ 和 $(u,\ v) \mapsto (u^5,\ v^5)$。约化原像 R 在第一种情形下局部为 $(u = 0)$，在第二种情形下局部为 $(uv = 0)$。因此，R 是简单正规交叉，且

$$\pi^*\Omega^1_X(\log D) \simeq \Omega^1_Y(\log R).$$

由于每个分支的分歧指数均为五，分歧公式给出

$$K_Y \sim \pi^*K_X + 4R, \quad \pi^*D = 5R.$$

因此，

$$K_Y^{\otimes 5} \simeq \pi^*(K_X^{\otimes 5} \otimes \mathscr{O}_X(4D)) \simeq (\pi^*H)^{\otimes 3}.$$

令 $p\colon \mathbb{P}(T_Y) \to Y$ 参数化切线，使得 $p_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(T_Y)}(r) = \mathrm{Sym}^r \Omega^1_Y$ 对 $r \geq 0$ 球度量使 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(T_Y)}(1)$ 为正，且线丛

$$\mathscr{N} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}(T_Y)}(3) \otimes p^*K_Y^{-1}$$

是数值有效的。为完整起见，在酉标架下将球度量的曲率张量归一化为

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -b(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{kj}), \quad b > 0.$$

At $(y,\ [v]) \in \mathbb{P}(T_Y)$，在 Chern-水平向量 u 上诱导的曲率形式满足

$$\Theta_{\mathscr{O}(1)}(u,\bar{u}) = b\left(\|u\|^2 + \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{\|v\|^2}\right),$$

$$\Theta_{K_Y}(u,\bar{u}) = 3b\|u\|^2.$$

因此，$\mathscr{N}$的水平曲率为 $3b|\langle u,\ v\rangle|^2/\|v\|^2 \geq 0$，其垂直曲率为 $3\omega_{\mathrm{FS}} > 0$，并且在此水平分解中混合项消失。这些是标准的射影丛曲率公式；参见 [4, 引理 1.3 的证明以及引理 1 后的讨论。4]。令

$$\mathscr{A} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}(T_Y)}(6) \otimes p^*\pi^* H^{-1}.$$

前述线丛恒等式给出

$$\mathscr{A}^{\otimes 3} \simeq \mathscr{O}_{\mathbb{P}(T_Y)}(3) \otimes \mathscr{N}^{\otimes 5}.$$

右侧是充足的，因此 $\mathscr{A}$ 是充足的。

选择一个整数 $q \geq 1$ 使得 $\mathscr{A}^q$ 整体生成，并令 $N = |G|$. 固定 $x \in X\backslash D$和 $0 \neq v \in T_{X,\ x}$. 由于 π 在 $X \setminus D$上是 *étale* 的，向量 v 在 $\pi^{-1}(x)$ 的N 个点中的每一个点处都有一个非零提升。整体生成性以及有限个真线性子空间不能覆盖复向量空间这一事实，使我们可以选择

$$P \in H^0\big(Y, \mathrm{Sym}^{6q}\,\Omega^1_Y \otimes \pi^* H^{-q}\big)$$

其在所有这些提升方向上的取值均非零。利用自然的 G-等变包含

$$\Omega^1_Y \hookrightarrow \Omega^1_Y(\log R) \simeq \pi^*\Omega^1_X(\log D),$$

乘积 $\prod_{g\in G} g^*P$ 是一个 G-不变截面

$$\pi^*\big(\mathrm{Sym}^{6qN}\,\Omega^1_X(\log D) \otimes H^{-qN}\big).$$

投影公式以及 $(\pi_*\mathscr{O}_Y)^G = \mathscr{O}_X$ 将此乘积下降为X 上的整体截面 Q，满足 $Q_x(v) \neq 0$. 整数 q 和 N 的选取均独立于 x 和 v. 。由于$X_1(D) = \mathbb{P}(T_X(-\log D))$，且一阶不变喷射微分是对称微分，我们得到

$$\mathrm{Bs}\left|\left(\mathscr{O}_{X_1(D)}(6) \otimes \pi_{0,1}^* H^{-1}\right)^{qN}\right| \subset \pi_{0,1}^{-1}(D).$$

这就证明了（1.5）对所述固定三元组成立，其中 $c = 6$.

例3.10（吹起边界交叉点）。设（X，D，H）为例 3.9中的一对，并设 σ： $X' \to X$ 为对 D 的一个交点进行的爆破，其例外曲线为 F. 定义

$$D' = (\sigma^{-1}D)_{\mathrm{red}} = \sigma^*D - F, \qquad H' = 2\sigma^*H - F.$$

除子 D' 是简单正规交叉的，且 F 与两条边界分支的严格变换分别交于两个不同的点。由于 H 非常丰，通过爆破中心的超平面截面生成 $\sigma^*H - F$，因此该线丛是数值有效的。对于每条不可约曲线 $C \neq F$

$$H' \cdot C = \sigma^*H \cdot C + (\sigma^*H - F) \cdot C > 0.$$

此外，$H' \cdot F = 1$ 且 $(H')^2 = 19$，因此中井–莫伊谢宗判别准则表明 H' 是充足的。自然对数微分映射是一个同构

$$\sigma^*\Omega^1_X(\log D) \simeq \Omega^1_{X'}(\log D').$$

事实上，若中心附近有 $D =(xy = 0)$，则图表 $x = u$，$y = uv$ 有 $D' =(uv = 0)$，并且

$$\sigma^*(d\log x) = d\log u, \qquad \sigma^*(d\log y) = d\log u + d\log v.$$

另一个爆破解也给出相同的可逆性。根据示例 3.9，存在一个固定整数$s \geq 1$，使得在 $X \setminus D$ 上的每个非零方向，对某个

$$Q \in H^0\big(X, \mathrm{Sym}^{6s}\,\Omega^1_X(\log D) \otimes H^{-s}\big).$$

令 s_F 为 $\mathscr{O}_{X'}(F)$ 的典范截面。 那么

$$Q' = s_F^s(\sigma^*Q)^2 \in H^0\big(X', \operatorname{Sym}^{12s}\Omega^1_{X'}(\log D') \otimes (H')^{-s}\big),$$

因为 $(H')^{-s} = (\sigma^*H)^{-2s} \otimes \mathscr{O}_{X'}(sF)$。 在 $X' \setminus D'$，映射 σ 是一个同构，且 s_F 非零，因此这些截面能够检测出那里的每个非零切向方向。于是，

$$\operatorname{Bs}\left|\left(\mathscr{O}_{X'_1(D')}(12) \otimes \pi_{0,1}^*(H')^{-1}\right)^s\right| \subset \pi_{0,1}^{-1}(D'),$$

证明 (1.5)（取 $(k,\ m,\ a) = (1,\ 12,\ 1)$ 以及 $c = 12$.

例3.11 （吹起一个光滑边界点）。 设 $(X,\ D,\ H)$ 仍如例 3.9所述，选取一个 $q \in D_i$ 不位于其他边界分支上的点，并令 $\sigma:\ X'' \to X$ 为其爆破，例外曲线为 F.置

$$D'' = (\sigma^{-1}D)_{\mathrm{red}} = \sigma^*D, \qquad H'' = 2\sigma^*H - F.$$

这里， F 被包含在边界中，并与 D_i 的严格变换在一点处横截地相交。因此， D'' 是简单正规交叉的，且例 3.10中的交理论证表明 H'' 是充足的。

存在一个自然的正则映射

$$\sigma^*\Omega^1_X(\log D) \longrightarrow \Omega^1_{X''}(\log D''),$$

它在 $X'' \setminus D''.$ 上是同构。为检查沿 F 的正则性，选取满足 $D = (x = 0)$ 的局部坐标。 在图表 $x = u$中， $y = uv$，新的边界为 $(u = 0)$，且

$$\sigma^*(d\log x) = d\log u, \qquad \sigma^*(dy) = uv\,d\log u + u\,dv.$$

在图表 $x = zt$中， $y = t$，新的边界为 $(zt = 0)$，且

$$\sigma^*(d\log x) = d\log z + d\log t, \qquad \sigma^*(dy) = t\,d\log t.$$

这两个矩阵的行列式分别为 u 和 t，因此该映射是正则的，并沿 $F.$ 退化

取相同的固定指数 s 以及 Q 由例 3.9 提供的截面，并通过这个自然映射将它们的拉回视为对数对称微分。令 s_F 为 $\mathscr{O}_{X''}(F)$ 的典范截面，这些截面

$$Q'' = s_F^s(\sigma^*Q)^2 \in H^0\big(X'', \operatorname{Sym}^{12s}\Omega^1_{X''}(\log D'') \otimes (H'')^{-s}\big)$$

检测 $X'' \setminus D''.$ 上的每一个非零切向方向。由此可得

$$\operatorname{Bs}\left|\left(\mathscr{O}_{X''_1(D'')}(12) \otimes \pi_{0,1}^*(H'')^{-1}\right)^s\right| \subset \pi_{0,1}^{-1}(D''),$$

因此（1.5）再次成立，其中 （k、 m、 a） = （1、12、1），且 $c = 12.$ 例外曲线属于边界，无需额外的代数例外集。

例3.9–3.11 在 1-射流层面实现了稳定基底轨迹假设。这两次爆破给出了例3.9中补集的不同光滑简单正规交叉紧化。

以下例子在更高阶数上实现了（1.5），并确定了每种情形下的最小射流阶数。我们首先针对以超平面截面为边界的一般超曲面给出一个共同的论证。

设 $n \geq 2$，令 $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ 为次数为 $d \geq 2(n+1)^{2n+6}$的一般光滑超曲面，并置 $H = \mathscr{O}_X(1)$。令 B 为处于线性一般位置的 s 个超平面的约化并，其中$1 \leq s \leq n+2$，选取它们使得 X 与 B 的每个层都横截地相交。于是 $D = B|_X$ 是约化的简单正规交叉。由 Deng [10, 定理C和推论D]，，存在一个固定权重 $m_0 \geq 1$，使得对于 X 上的每个正则 n-喷射，E_n的某个整体截面 $_{m_0}\Omega^1_X \otimes H^{-1}$ 具有非零取值。嵌入对数喷射微分的自然包含在$X \setminus D.$ 上保持取值。事实上，边界分支法向的普通导数由对数喷射坐标构成正则多项式，其依据是恒等式 $x^{(h)} = xB_h((\log\ x)', \ldots, (\log\ x)^{(h)})$。该包含尊重源参数的变换，因此保持不变子层。由此，(1.5) 对 $(k, m, a) = (n, m_0, 1)$ 成立，并且所需的包含对于线丛本身的基 locus 已经成立。

为排除所有较低阶数，写作 $E=\Omega^1_X(\log\ D)$ 和 $V=\Omega^1_{\mathbb{P}^{n+1}}(\log\ B)|_X$.。经过射影坐标变换后，可将这些超平面取为坐标超平面。在对数欧拉正合列中，满射 $\mathscr{O}^{\oplus s}\oplus\mathscr{O}(-1)^{\oplus(n+2-s)}\to\mathscr{O}$ 由与欧拉向量场的缩并给出，并且通过第一个平凡直和项分裂。因此

$$V\simeq\mathscr{O}_X^{\oplus(s-1)}\oplus\mathscr{O}_X(-1)^{\oplus(n+2-s)}.$$

Th与所有边界分层横截相交，得到对数余法丛正合列 e

$$0\longrightarrow\mathscr{O}_X(-d)\longrightarrow V\longrightarrow E\longrightarrow 0.$$

局部地， X 的定义方程可与边界分支的局部方程一起补成一个适配坐标系，因此其微分生成核，即使在交点处也是如此。对每个 $\ell\geq 1$，取对称代数的次数-ℓ 部分，得到正合列

$$0\longrightarrow\mathscr{O}_X(-d)\otimes\mathrm{Sym}^{\ell-1}V\longrightarrow\mathrm{Sym}^{\ell}V\longrightarrow\mathrm{Sym}^{\ell}E\longrightarrow 0.$$

对 $\ell=0$，有 $\mathrm{Sym}^0E=\mathscr{O}_X$.

对数 Green-Griffiths 滤子 [6, 命题 2.4(c)] 在阶数 j 处的分次因子为 $\bigotimes_{h=1}^{j}\mathrm{Sym}^{\ell_h}E$，其中 $\sum_{h=1}^{j}h\ell_h=w$，而 w 为权。将刚得到的局部可分裂解张量起来，并对 H^{-a} 作扭曲（其中 $a\geq 1$），可得到每个扭曲因子的一个长度至多为 j 的解，其项为负线丛 $\mathscr{O}_X(-b)$ 的直和，其中 $b>0$.。射影空间中的超曲面正合列给出 $H^i(X,\mathscr{O}_X(-b))=0$，其中 $0\leq i<n$ 且$b>0$.。当 $j<n$时，该解的上同调长正合列因此给出每个扭曲因子的 H^0 消失。利用滤子以及不变喷射微分到 Green-Griffiths 喷射微分中的包含关系，可得

$$H^0(X,E_{j,w}\Omega^1_X(\log D)\otimes H^{-a})=0,\qquad 1\leq j<n,\qquad w,a\geq 1.$$

这包括稳定基底轨迹定义中每个正次幂的权和扭曲，因此，对于1.5，采用此极化时的最小阶数恰好为 n.

例 3.12 (一个具有光滑边界且需要二阶喷射的曲面)。 设 $X\subset\mathbb{P}^3$ 是次数为 $d\geq 2\cdot 3^{10}=118098$ 的一般光滑曲面，设 D 是一个光滑超平面截面，并取$H=\mathscr{O}_X(1)$。 以上关于 $n=2$ 和 $s=1$ 的论证证明了（1.5）在二阶时成立，而在一阶时不成立。

例 3.13 (一个具有两个边界分支且需要二阶喷射的曲面)。 设 $X\subset\mathbb{P}^3$ 是次数为 $d\geq 118098$ 的一般光滑曲面，并设 $D=D_1+D_2$ 是两个一般超平面截面的和。这两个分支在其公共直线与 d 相交的 X. 个点处横截相交。以上关于 $n=s=2$ 的论证表明，对于 1.5，取 $H=\mathscr{O}_X(1)$ 时，其最小阶数为二。

例3.14 （一个需要三阶喷射的三维簇）。 令 $X\subset\mathbb{P}^4$ 为次数 $d\geq 2\cdot 4^{12}=33554432$ 的一般光滑超曲面，令 D 为光滑超平面截面，并取 $H=\mathscr{O}_X$（1）。上面对 $n=3$ 和 $s=1$ 的论证证明了（1.5）在三阶处成立，并给出了 H 在一阶和二阶处对所有负扭曲幂的消失。

例3.15 （吹起光滑边界点后的二阶喷射）。 取 （X， D， H）自例 3.12 ，并令 σ：$X'\to X$ 为 D中一点的爆破，其例外曲线为 F.~记 D 为严格变换，并设

$$D'=\sigma^*D=\widetilde{D}+F,\qquad H'=2\sigma^*H-F.$$

除子 D' 是简单正规交叉。由于 H 是非常丰的，丛 σ^*H-F 由通过中心的超平面整体生成。因此，根据其分解为 $\sigma^*H+(\sigma^*H-F)$， H' 在除F 以外的每条曲线上都有正次数。 由于 $H'\cdot F=1$ 且（H'）$^2=4d-1>0$，中井–莫伊谢宗判别准则给出了丰性。

令 m_0 为由 X，上的构造所给出的固定权重，并令 s_F 为 $\mathscr{O}_{X'}(F)$ 的典范截面。 对于每个在 $X'\backslash D'$ 上的正则二阶喷射，选取一个截面 (， $E_{2,\ m_0}\Omega^1_X\otimes$

$H^{-1})$，该截面可以检测其在 σ. 下的像。将这个普通射流微分通过全纯映射 σ，拉回，再嵌入对数喷流微分中，可得

$$s_F(\sigma^*Q)^2 \in H^0\big(X', E_{2,2m_0}\Omega^1_{X'}(\log D') \otimes (H')^{-1}\big).$$

其在所选的射流上的取值非零，这是因为 σ 在边界的补集上是同构，且 s_F在那里不消失。这就证明了 (1.5)，其中 $(k,m,a) = (2,2m_0,1)$在一次幂时就成立。

更一般地，任意整体截面 Q'属于 $E_{k,w}\Omega^1_{X'}(\log D') \otimes (H')^{-a}$，其中 $k,w,a \geq 1$，都可以写成 $Q' = s_F^a\sigma^*Q$，其中

$$Q \in H^0\big(X, E_{k,w}\Omega^1_X(\log D) \otimes H^{-2a}\big).$$

在 $X' \setminus F$ 上，除以 s_F^a后，便得到 X中爆破解析中心补集上的一个截面，而局部自由层的Hartogs延拓可将其延拓至该点。对数拉回由下文所用爆破图表中的链式法则可知是正则的，因此该恒等式可延拓至 F.特别地，所有这类截面在 F 上消失，并且根据前面的低阶计算，一阶截面恒等地消失于 X.

在 $F\setminus \widetilde{D}$ 上的一个精确边界点处，有 $h_F = 1$、$\rho_F = -1$ 和 $\nu_F = -1$，因为 $F \simeq \mathbb{P}^1$并在一点处与另一边界分支相交。因此，$\mu_F(p) = 1/p$，所以 (1.4) 给出$b_F(p) = (2m_0 - p)_+$，对于接触阶为 p. 的情形。通过 X 的因子分解给出了更强的局部极点界，在交点处也成立。在 D 上，根据伴随公式，斜率为 $d(d-3)$，法向次数为 d，而 $H^{2a}|_D$ 的次数为 $2ad$. 。因此，定理 1.1 结合单位接触权表明，Q 属于纯法向射流理想的 τ 次幂，其中$\tau = \lceil 2a/(d-3)\rceil$. 。在局部坐标 (x,y) 中，$D = (x=0)$，该理想由 x、y'、.....、$y^{(k)}$. 生成。在图表 $x = u$ 中，$y = uv$，这些生成元中每一个的对数拉回都可被 u 整除，因为 u 的每个普通导数都是 u 乘以其对数喷射坐标中的一个多项式。在图表 $x = zt$ 中，$y = t$，同样的生成元拉回后都是 t. 的倍数。x 的对数导数在第一个图表中是 u 的对数导数，在第二个图表中则是 z 和 t 的对数导数之和，因此拉回在两个图表中都是正则的。这些图表覆盖 F，其中$\sim u = 0$，而 $t = 0$ 具有其相应的方程，并且第二个图表包含交点以及 D. 。由此可知，作为仿射对数喷气空间上的多项式，Q' 可被 $s_F^{a+\tau}$ 整除。对于以 F 为中心且不包含于 D' 中的全纯弧 γ，令 $p_F = \operatorname{ord}_0 \gamma^*F$. 。源权重为 w 的剩余多项式的极点阶至多为 w，因为阶数为 h 的每个对数导数的极点阶至多为 h.。因此

$$\operatorname{pole}_0 Q'(j_k\gamma) \leq \left(w - \left(a + \left\lceil \frac{2a}{d-3} \right\rceil\right) p_F\right)_+ .$$

前述高阶示例中的超曲面根据 [10,定理C]本身就是 Kobayashi 双曲的。爆破中不包含于边界的非常值整曲线，通过与爆破映射复合，会在原超曲面上给出一条非常值整曲线。爆破示例中极点界的比较涉及局部全纯弧。

3.3. 锐性与比较

下面的乘积计算检验整数阈值的切向部分，并表明其上取整不可能统一增大。取亏格至少为二的光滑曲线 C，B $p \in B$，以及整数 $1 \leq s < m$. 令

$$X = C \times B, \qquad D = C \times \{p\}, \qquad L = \operatorname{pr}_C^* K_C^s \otimes \operatorname{pr}_B^*(K_B(p))^{m-s}.$$

这里，L 是充足的，$D^2 = 0$，$\mu = 2g(C) - 2$，并且 $L\cdot D = s\mu$. 分解

$$\Omega^1_X(\log D) = \operatorname{pr}_C^* K_C \oplus \operatorname{pr}_B^* K_B(p)$$

给出一个具有 s 个切向因子和 $m-s$ 个法向对数因子的截面。它沿着切向导数非零的横截弧的极点恰为 $m-s$. 。将 L 中的 K_C^s 替换为

$K_C^s(-A)$，其中 A 有效且 $0 < \deg A < 2g(C) - 2$，可实现具有相同上取整值且在 A. 之外具有相同极点的非整数比值。由于该乘积不含非常值整曲线，这个例子检验了代数极点估计。

交点处也可能出现满权极点。对于 $X = (\mathbb{P}^1)^2$ 和 D 这两个垂直纤维与 $q \geq 3$水平纤维之和，

$$\Omega^1_X(\log D) = \mathrm{pr}_1^* \mathscr{O}(q-2) \oplus \mathrm{pr}_2^* \mathscr{O}(q-2).$$

从两个加项中分别取正整数个因子组成的乘积，可得到权为 $m = r_1 + r_2$ 、在横截交点处极点阶为 m 的负充分扭曲截面。用于扭曲的充足线丛为

$$L = \mathrm{pr}_1^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(r_1(q-2)) \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(r_2(q-2)).$$

在此， $s_i + s_j = m$, 因此定理 1.5 恰好给出 m. 。此例表明局部极点界是锐性的，并且该对在每个射流阶数下都不满足（1.5）。事实上，固定第一因子上边界之外一点处的一个正则 k-射流，并将第二因子的所有对数喷射坐标设为零。这些射流构成一个正则族，其参数取遍第二因子，包括其边界点。沿该族对任何带有扭曲 H^{-a} 的全局不变对数喷射微分取值，所得结果是 H^{-a} 在第一投影的纤维上的限制截面。该线丛的次数为负，因此 D 之外的相应正则塔点，对于（1.5）中的每个正整数次幂都是基点。经典投影论证已经涵盖了此例的计数不等式。

条件（1.5）是 [3, 推论 4。8]的充分假设；例如 [3,推论 4。5] 这样的构造可在适当的高次数族中验证该条件。对于光滑不可约边界，以及每个满足（ k, m, a ）1.5的三元组，推论 3.1 给出的计数系数严格小于m/a, 且与幂 q. 无关。将特殊情形下的一对对象与其他结果进行比较时，还必须考虑它们的截面构造和计数约定。

受限喷射构造还需要额外论证。例如，在 [14, 定理 1.9 的证明的情形 2 中，第 6 节5], , 当初始全局微分沿曲线消失时，第二个微分是在除子 $Z \subset X_2(D)$ 上构造的。在全局对数喷射微分的取值非零的情形下，对于次数为 d. 的光滑平面边界，定理 1.1 给出的权与扭曲之比需要减去 $1/(d-3)$。取 Z 在从正则仿射对数二阶喷射到$\sim X_2(D)$ 的正则喷射轨迹的商映射下的逆像，并令 Z 为其在 J_2. 中的概形论闭包。由引理 2.2 在 $\mathscr{O}_{\widetilde{Z}}$ 上诱导的滤子所得的伴随分次代数，是环境伴随分次代数的一个商。商不一定保留最大斜率上界或整体截面的不存在性，并且受限轨迹在纯法向轨迹上可能是奇异的。因此，本文的证明无法将该文中的每个系数 C_d 都替换为 $C_d - 1/(d-3)$。这需要针对受限轨迹的独立定理。

参考文献

[1] I. Bauer 和 F. Catanese，《德尔佩佐曲面、刚性直线构型与 Hirzebruch–Kummer 覆盖》，意大利数学联合会通报 12（2019），43–62，doi:10.1007/s40574-018-0169-x。[2] D. Brotbek 和 Y. Deng，《关于对数余切丛的正性》，傅里叶研究所年刊 68（2018），3001–3051，doi:10.5802/aif.3235。[3] D. Brotbek 和 Y. Deng，《高次数一般超曲面补集的 Kobayashi双曲性》，几何与泛函分析 29（2019），690–750，doi:10.1007/s00039-019-00496-2。[4] Y. Brunebarbe、B. Klingler 和 B. Totaro，《对称微分与基本群》，杜克数学杂志 162（2013），2797–2813，doi:10.1215/00127094-2381442。[5] B. Cadorel，《球商环面紧化上的喷射微分》，傅里叶研究所年刊 70（2020），2331–2359，doi:10.5802/aif.3356。[6] F. Campana、L. Darondeau、J.-P. Demailly 和 E. Rousseau，《关于对数喷丛与轨形射流微分的存在性》，勒贝格年刊 7（2024），1–67，doi:10.5802/ahl.197。[7] F. Campana 和 M. Păun，《具有退化整曲线的弱特殊簇》，组合数学 143（2007），95–111；arXiv:math/0512124。

[8] T. Cui、L. Hou、J. Liu 和 S.-Y. Xie，《关键消失引理与双曲性最优二阶喷射阈值的对称方法》，arXiv:2606.19155v2，2026年8月24日，条件计算手稿。[9] J.-P. Demailly，《Kobayashi 双曲射影簇与喷射微分的代数判据》，《代数几何——圣克鲁斯 1995》，纯粹数学研讨会论文集 62，第2部分，美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，1997，285–360。[10] Y. Deng，《关于 Diverio–Trapani 猜想》，高等师范学校科学年刊（第4辑）53（2020），787–814，doi:10.24033/asens.2434。[11] G. Dethloff 和 S. S.-Y. Lu，《对数喷丛及其应用》，大阪数学杂志 38（2001），185–237，doi:10.18910/11682。[12] D. Greb、S. Kebekus、S. J. Kovács 和 T. Peternell，《对数典范空间上的微分形式》，高等研究院数学出版物 114（2011），87–169，doi:10.1007/s10240-011-0036-0。[13] R. Hartshorne，《代数几何》，数学研究生教材 52，Springer-Verlag，纽约，1977，doi:10.1007/978-1-4757-3849-0。[14] L. Hou、D. T. Huynh、J. Merker 和 S.-Y. Xie，《不变二阶喷射微分的消失与二维情形中改进的双曲性次数界》，arXiv:2603.14881v4，2026年9月30日；作者 PDF 日期为2026年10月1日。[15] L. Hou、D. T. Huynh、J. Merker 和 S.-Y. Xie，《关于与三个圆锥曲线相交的整曲线的第二主定理》，arXiv:2512.03948v4，2026年9月30日。[16] L. Hou、P. Wang 和 S.-Y. Xie，《关于两个平面曲线补集的不变二阶喷射与有效双曲性》，arXiv:2608.22714v3，2026年10月7日。[17] D. T. Huynh、D.-V. Vu 和 S.-Y. Xie，《映入射影空间并与高次数一般超曲面相交的整全纯曲线》，傅里叶研究所年刊 69（2019），653–671，doi:10.5802/aif.3253。[18] S. Kobayashi，《复向量丛微分几何》，日本数学会出版物 15，岩波书店与普林斯顿大学出版社，1987。[19] J. Noguchi 和 J. Winkelmann，《多复变函数与丢番图逼近中的 Nevanlinna 理论》，数学科学基础 350，Springer，东京，2014，doi:10.1007/978-4-431-54571-2。[20] I. Petrakiev，《齐次插值与一些连分数》，美国数学会汇刊B辑 1（2014），23–44；arXiv:1211.6380。[21] S. Ramanan 和 A. Ramanathan，《关于不稳定旗标的若干评论》，东北数学杂志 36（1984），269–291，doi:10.2748/tmj/1178228852。[22] J.-P. Serre，《代数几何与解析几何》，傅里叶研究所年刊 6（1956），1–42，doi:10.5802/aif.59。[23] Y.-T. Siu，《复射影空间中一般高次数超曲面的双曲性》，数学发明 202（2015），1069–1166，doi:10.1007/s00222-015-0584-x。[24] The Stacks Project Authors，《The Stacks Project》，引理 36.32.1，标签 0BDN，访问日期：2026年11月5日。[25] S.-Y. Xie，《关于完全交的余切丛的丰性》，数学发明 212（2018），941–996，doi:10.1007/s00222-017-0783-8。[26] S.-T. Yau，《关于紧Kähler流形的 Ricci 曲率与复 Monge–Ampère 方程 I》，纯粹与应用数学通讯 31（1978），339–411，doi:10.1002/cpa.3160310304。

曲阜师范大学数学科学学院，山东济宁曲阜，273165，中华人民共和国

电子邮件地址： xjdong05@126.com

曲阜师范大学数学科学学院，山东济宁曲阜，273165，中华人民共和国电子邮件地址：lvyanda2000@163.com