稀疏加性伸展子图与群作用的代价谱

Itai Benjamini

摘要

如果保留凯莱图的所有顶点，并允许距离最多增加一个固定的加性常数，那么它能变得多稀疏？我们研究不变随机生成子图，并以顶点的期望度衡量稀疏性。在正方格网上，稀疏网格的随机平移可以使平均度任意接近二。若必须根据独立顶点标签以等变方式作出选择，则每条边都不可或缺。在这篇综述短文中，我们将探讨这两种答案在其他群中的情形。在每个非初等双曲凯莱图中，仅凭几何性质就能保证存在一个正的差距；而在某个四正则幂零凯莱图中，选择作用可以实现 $[1,2]$ 中的每一种加性代价。作用谱的最小值恰好给出几何成本。

arXiv:2611.32607v1 [math.GR] 24 Nov 2026

第一部分：稀疏加性伸展子图

1 整个网格最少需要多少条边?

设 Γ 是一个无限群，其单位元为 e，有限生成集为 S，该生成集对取逆封闭且不包含 e。在它的凯莱图 G 中，从 g 到 gs 的一步移动 $s \in S$ 长度为一。用 $d_G = d_S$ 表示最短路径距离。这就是 S 的字度量。生成子图 H 保留每个顶点。如果它是一个加性 L稀疏距离图，则

$$d_G(g,h) \le d_H(g,h) \le d_G(g,h) + L \qquad (g,h \in \Gamma).$$

不连通的顶点对之间的距离为无穷，因此该条件保证了连通性。对于随机稀疏距离图，必须存在一个确定的有限 L，使得几乎必然对所有顶点对都适用。

在正方格网上保留所有竖直边，以及每隔 m 行的水平边。对 m 取模的均匀行偏移给出一个平移不变律。沿着离起点最近的保留行完成行程中的水平部分。这样至多增加 $2\lfloor m/2 \rfloor$ 步。原点始终有两个竖直邻点，并以 $1/m$ 的概率有两个水平邻点。其平均度为 $2 + 2/m$。

我们可以在绕行阶数相同的情况下做得更好。每隔 m行保留一行，每隔 m列保留一列。网格之外的每个顶点都贡献一条竖直边，连接到最近的网格行；若距离相同，则向下连接。一个周期单元有 m^2 个顶点和 $2m + (m-1)^2 = m^2 + 1$ 条边。因此，均匀平移后的平均度为 $2 + 2/m^2$。每个顶点都能在m 步内到达一个网格交点。两个交点之间则沿网格中的精确距离连接。任意行程增加的长度至多为 $4m$。

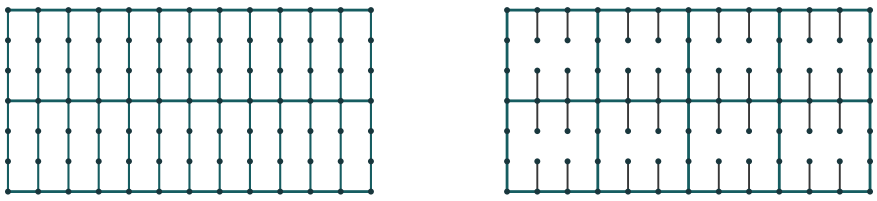

图1. 左图：每一列和每隔三行保留一行。右图：网格之外的每个顶点各有一条连接边。

在有限图上，可以直接数边。在无限凯莱图中，在不变律下，每个顶点都具有相同的期望度。这使我们能够探讨：在保持所有距离仅有有界误差的同时，边密度能接近 1 到什么程度。

2 计算无限图中的边数

不变律为 H 及其每个平移像赋予相同的分布。因此，根度 $\deg_H(e)$ 在每个顶点处都具有相同的分布。我们用其均值的一半来衡量密度，因为无向边的两个端点都被计入。周期子图在平移的某个有限指数子群作用下保持不变。从其有限轨道中均匀选择一个平移像，即可使该律保持不变。

对于固定的 L，令 $s_G(L)$ 表示 $\mathbb{E}\deg_H(e) - 2$ 在不变的加性 L-稀疏距离图中取到的下确界。无限凯莱图上的任何不变连通生成图，其平均度至少为二 [5]。记作

$$C_{\mathrm{add}}(G) = \inf_{L<\infty} \inf_{H \text{ invariant } L\text{-spanner}} \tfrac{1}{2}\mathbb{E}\deg_H(e) = 1 + \tfrac{1}{2}\inf_{L<\infty} s_G(L).$$

因此，$C_{\mathrm{add}}(G) = 1$ 表示：对于每个 $\epsilon > 0$，都存在某种规则，其平均度至多为 $2+\epsilon$，且误差有限。允许的误差可以随着 ϵ 减小而增大。等价地，也可以要求伸展子图律在所有图自同构下均不变。事实上，Γ 作用简单传递，并且是 $\mathrm{Aut}(G)$ 中的一致格。对 $\mathrm{Aut}(G)/\Gamma$ 取平均，不会改变误差和平均根度 [5, 1]。

为什么网格的阶数恰当。对于边长为 $m = \lfloor L \rfloor + 1$的正方形，$H$ 中的两条对角线距离之和至少为 $4m$。任意一组对边长度之和至多为$2m + 2L < 4m$。在树中，这三个和中最大的两个相等。因此，角点之间六条最短保留路径在半径为 $5m$的球内包含一个圈。在 $12m\mathbb{Z}^2$的某个均匀平移点处放置互不相交的此类球。在每个球中，利用独立连续标签选择一条保留圈，并删除其中一条边。所选圈的其余边仍然保留，因此连通性得以维持。所得图的平均度仍至少为二。原始平均度必须为每$12m)^2$ 个顶点承担一次删除的代价。结合网格构造，对于较大的 L [1]，可得 $s_{\mathbb{Z}^2}($ $L)$ $\asymp L^{-2}$ 。

连通性的代价。Levitt 引入了等价关系的测度代价，Gaboriau 则发展了其理论 [13, 7]。对于自由保概率作用的轨道关系，它等于所有满足连通分支恰为这些轨道的可测图的平均度一半的下确界。边可以连接同一轨道中的任意两个点。通常的群成本$\mathrm{Cost}(\Gamma)$ 是对这类作用取下确界。等价地，它是顶点集为 Γ、边不受限制的平移不变随机连通图的下确界 [9]。特别地

$$\mathrm{Cost}(\Gamma) \le C_*(\Gamma) := \inf_S C_{\mathrm{add}}(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)) \le C_{\mathrm{add}}(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)).$$

中间那个量允许选择生成元。在第二部分中，我们固定生成元，并指定必须选择边的作用。

3 笛卡尔积与多项式增长

笛卡尔积。对于无限凯莱图 X，Y我们有 $C_{\mathrm{add}}(X\square Y) = 1$。在每个因子中，将距离介于 1 和 $2r$ 之间的顶点在一个最大度为 D 的辅助图中连接。为每个顶点赋予一个相互独立、在 $[0,1]$ 上均匀分布的优先级。若某个顶点没有优先级低于它且已被接受的邻居，就接受该顶点。从一个固定顶点出发，长度为 n 的递减路径出现的概率至多为 $D^n/(n+1)!$。因此，该递归几乎必然终止，并且与平移可交换。已接受的顶点彼此距离大于 $2r$，而每个被拒绝的顶点都距某个已接受顶点不超过 $2r$ 。

独立地选择 $A \subset X$ 和 $B \subset Y$，其根包含概率为 p，q。每个半径为 r 的球至多包含一个选定点，因此 $p \le |B_X(e,\ r)|^{-1}$，q 也同理。保留 $b \in B$ 对应的行$X \times \{b\}$ 以及 $a \in A$对应的列 $\{a\} \times Y$。称它们的并集为 K。每个外部顶点

K 发送一条使其到 K的距离减小的边；若有多个选择，则按生成元顺序打破平局。一圈由 k 条附着边组成，则圈上必须有 k 个不同的尾部，但距离 K 最近的顶点不会沿着圈发送边。

每条附着路径到达 K 至多需要 $2r$ 步，因为选定点构成 $2r$-网。一旦位于保留行或保留列上，沿其至多再走 $2r$ 步即可到达 $A \times B$。在交点（a，b）与（a'，b'）之间，沿第 b 行走到（a'，b），再沿第 a' 列走到（a'，b'）。路径长度为d_X（a，a'）$+ d_Y$（b，b'），恰好等于乘积距离。每个端点在伸展子图中距离其选定交点至多 $4r$，因此由三角不等式可知，加性误差至多为 $16r$。对于因子度数 d_X，d_Y，

$$\mathbb{E}\deg_H(e) = d_X q + d_Y p + 2(1-p)(1-q) \;\longrightarrow\; 2.$$

最后一项统计了每个位于 K之外的顶点所发出边的两个端点。

幂零群。 如果一个群包含一个有限指数子群，且该子群中的所有换位子都是中心的，则称该群为类至多为二的虚幂零群。每个这类无限群的凯莱图都具有 周期性 加性伸展子图，且其平均度趋近于二。对于一个虚幂零$\mathbb{Z}^d$ 群， $d \geq 2$ 最优超额的阶为 L^{-d}；对于标准整数海森堡图，其阶为 L^{-4} [1,第 5]节。

非交换群中的问题在于，如何从一条很长的保留路径返回。在整数海森堡群中，令 $z = [a, b]$，它是中心的。要从 g 移动到 ga^n，就在 gz^j处转移到一条保留的 a-线，沿其走到 $ga^n z^j$，然后撤销 z^j。周期性构造可以将 j一致地界定。若在单词的每个字母处重复这种转移，就会失去加性界。Bodart 引理提供了一个长度近乎最小、由有界数量的幂组成的代表元，因此只需进行有界次数的转移 [6, 1]。

对于球体积与 r^D, $D > 1$ 相当的多项式增长群，在每个自由作用上都可以得到较弱的距离要求。对于 $(D+1)/(2D) < \theta < 1$，可以使平均度任意接近二，同时当环境距离为R时，距离至多为 $R + O((1+R)^{\theta})$。连续尺度上的稀疏网覆盖了较长的行程 [1]。能否始终将这一次线性误差替换为常数，是下面的第一个开放问题。

三类给出了一个具体的障碍。令 $F = F$（a，b）并对 $\gamma_4 F$（其下中心列的第四项）取商。所得的 嘉当群是由两个生成元生成的自由三阶幂零群。在其标准图上，每个周期性有限误差稀疏距离图都会保留每条边。对于在单个平移作用下遍历的平移不变律，同样的结论也成立 ab[1，定理 5。5]任意不变律的情形仍是开放问题。我们将在第 8节遇到另一个三类群。

4 双曲分支

对于每个非初等双曲凯莱图 G，存在 $\eta(G) > 0$，使得每个不变有限误差生成树的平均度至少为 $2 + \eta(G)$ [1, 定理 2。1]。双曲性意味着测地三角形具有一致的薄性。非初等排除了有限群和几乎循环群。该下界与允许的有限误差大小无关。

为何直线得以保留。 取从单位元到环境测地射线上 successive 顶点的最短 H-路径。某个子序列在每个有限初始线段上收敛。在时刻 t，亏缺 $t - d_G(e, v_t)$ 是一个不超过 L 的非递减整数，因此最终保持不变。尾部是一条环境测地线，而双曲性使其与原射线位于同一个边界点。对于无限阶元素 g的吸引端点，保留的尾部与 $\{g^n : n \geq 0\}$保持有界距离。由回归性可知，存在平移 g^{-n_j}，使其在关于 e 的越来越大的球上恢复边配置。每条平移后的尾部都经过一个公共有限球。在原 H 中取子序列极限，得到一条连接 g 两端的完整测地线。这些不动点对在不同边界点对中稠密，而紧致性保证了每一对不同边界点之间都有一条保留的直线。

为何平均度必须上升。 取所有保留的环境直线的并集 K 。固定互不相交的边界邻域，使得它们之间的每条直线都穿过一个有限球 B。在这些邻域中选择超过 $|B|$ 对且所有端点各不相同的点。其中两条对应的直线必定相交。紧致性表明，它们不可能在任意大的球中都避免分支：若最大度为二的极限构型存在，那么两条相交的直线将会重合，尽管它们的端点不同。因此，某个固定球 B_R 的每个平移都包含 K的一处分支。

K 之外的每个顶点都会选择一条使其到 K的距离缩短的保留边。这些边彼此不同，并且根据平移不变性，它们的预期流入数与流出数相等。当 $\deg_K(e) = 0$ 在 K 之外时，这就给出了有用的附着界

$$\mathbb{E}\deg_H(e) \;\geq\; \mathbb{E}\deg_K(e) + 2\mathbb{P}(e \notin V(K)).$$

K 的顶点度至少为二，其中至少有比例为 $1/|B_R|$ 的顶点是分支点。因此， $\eta(G)$可以取为 $1/|B_R|$。当生成元在固定的群上变化时，该证明无法控制 R 。

铺砌的刚性。 对于传递铺砌，该论证有一个更强的对应结论。对于正则双曲铺砌 $\{p, q\}$，其面为 p-边形且度为 q, $1/p + 1/q < 1/2$，任何在其完整对称群下保持不变的有限误差伸展子图，几乎必然保留每条边 [1,定理 3。1]。特别地，7-正则三角剖分不允许进行这种删减。选择两条相接且中点距离最大的边。连续进行半周旋转，将它们延伸为一条周期路径，其各中点位于同一条双曲直线上。沿该直线进行投影，会为路径的每个前进步赋予相同的最大推进量。所有其他中点转移都会损失一个统一的正量。因此，一条额外长度有界的路线无论沿着多长的线段前进，都只能绕过有限条规定的边。沿周期的平稳性迫使省略的概率为零。铺砌的对称性将这一结论推广到每条边。



图2. 在七正则三角剖分中，顶点会转向，而连续的边中点（空心圆）则沿双曲直线 λ 等距前进。坐标分别表示沿直线的距离以及到直线的有向距离。

5 更换生成元后，什么仍然成立?

图 $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ 规定了哪些移动的长度为一。即使只增加少数几种移动，也可能迫使稀疏距离图保留更多边。

同一棵树的两种乘积。 在 $F_2 \times F_2$ 上，笛卡尔生成元对应的代价为一。现在还允许在两个坐标上同步进行生成元步。环境距离变为两个树距离中的较大值。对于一对射线，一条近乎最短的路径最终必须在每一步都沿两个坐标前进。完整论证表明，在 $|x| + |y|$ 的一个模2奇偶类中，所有十六条对角边都必须保留。它们对平均度的贡献为八，而附着界要求在另一个奇偶类中再增加一。这个界是紧的：在一个均匀随机选取的奇偶类中保留对角边，并将其余每个顶点各附着一次。在较短坐标上进行两步回退，即可在所选奇偶类中实现最大距离。平均度为九，加性误差至多为四 [1, 定理 6.1]。

三角形树。 使用标准生成元 $a^{\pm 1}$, $b^{\pm 1}$ 的 $C_3 * C_3$，在每个三角形中独立地删除一条均匀随机边后，得到的仍是一个代价为 $4/3$（即通常群成本）的连通图。从 e 到 $(ab)^n$ 的路径必须经过 $2n$ 个三角形的强制进入点和退出点。每条被省略的直接边都会增加一步。平移不变性意味着，只要任一生成元具有正的省略概率，预期损失就会线性增长。因此，每个加性伸展子的代价都是二。

另一组生成集给出 $5/3$。使用 $A=\langle a\rangle$，取 $(A\setminus\{e\})\cup AbA\cup Ab^{-1}A$。六正则商图中相邻的三点纤维彼此完全相连。周期性地为每个纤维选取一个代表元，将商图的边复制到这些代表元上，并连接其余两个顶点。加性误差至多为二，代价为 $(6+4)/6=5/3$。对于每个 固定的有限生成集，代价都严格高于 $4/3$ [1, 定理 2.11–2。12]。证明将一列假设中趋近通常群成本的对象极限化为一片承载所有边界线的森林。有限的局部规则随后给出一棵周期性的加性生成树。树作用的刚性将迫使其所有分支点都位于同一轨道中，这与两个不同三阶因子的稳定子不相容。生成集上的下确界是否为 $4/3$ 仍是一个悬而未决的问题。

通过改变生成元逼近下确界。对于二元灯笼群 $\bigoplus_{\mathbb{Z}} C_2\rtimes\mathbb{Z}$，令 t 将光标移动一个位置，并令 a 切换该处的灯。每个固定的有限生成集，其加性代价都严格大于一。在平均度为二的假想极限中，各连通分量都是至多有两个端点的树。它们的双射线只能给出可数多个可能的极限灯配置。沿着独立指定的开关进行有界绕行，将迫使其与某个无原子随机配置相匹配 [1, 定理 7.1]。然而，对于 $a_r=t^rat^{-r}$, $r\geq 1$，四个移动t、at、a_rt、aa_rt及其逆元的最小平均度为 $2+2^{1-r}$，且可将误差控制在至多 $4r$[1, 定理 7.3]。因此，对于该群， $C_*=1$ 。

对所有生成集同时存在一个间隙。对于闭定向双曲三维流形M，记 $\Gamma=\pi_1M$和 $b=$维数 $H_1(M;\ \mathbb{R})$。则 [1,定理 1.3]

$$\mathrm{Cost}(\Gamma)=1,\qquad C_*(\Gamma)\geq 1+\lfloor b/2\rfloor\quad(b\geq 4).$$

单就连通性而言，存在一个有限覆盖纤维化到圆上。保留改变高度的边，并将所有纤维生成元放在稀疏的周期性层级上。这证明该覆盖的代价为一，而普通代价的计算可推广到有限扩张。

要理解为何度量代价更高，可将 S 投影到实同调上并取其凸包。用线性泛函暴露其中一条边，就能选出以最大速度前进的生成元。沿这些方向走很长一段路时，留给较慢步伐的预算有限。对于 $b\geq 4$ ，它们生成的子群在同调中张成一个平面，其维数大于几乎循环群，却小于虚纤维或有限指数子群。三维流形几何给出一个拟凸子群，其交换化子群的普通代价至少为二。这里的交换化子群由这样的元素组成：它们将该子群共轭到一个与之有有限指数交的子群。证明对选自多面体相对面上的 $\lfloor b/2\rfloor$ 个互不相交的生成元族，各计入至少一个高于连通性基准的单位。在 b维同调多面体的一个面上，可以找到这么多个生成元族。其图的最小度至少为 $b-1$，因此存在一条经过至少b 个顶点的路径。取该路径上隔边选取的边。它们的负边属于相对的面。所选生成元族使用互不相交的边标签，因此其贡献可相加 [1, 命题 2.8]。有限覆盖的 b [3]可以任意大。因此，即使对生成元进行优化，普通代价之上的差距仍可无界增长。

进一步的比较说明了为什么开放双曲问题固定了该群。对于 $F_2\times C_m$、$m\geq 3$，优化成本恰好是 $1+1/m$ [1, 第 2] 节。每个循环纤维中的一条生成路径与统一选定的一个树层给出了上界。指数为 m 的自由子群通过 $\beta_1^{(2)}=1/m$ 以及 Gaboriau 成本不等式 [8]给出了匹配的下界。因此，在所有 非初等双曲群上存在一致间隙是不可能的。

灯笼群对每个生成集分别都强制产生正超额，但沿着一列生成集，该超额趋于零。对于带有 $b\geq 4$ 的三维流形群，则存在一个适用于所有生成集的下界。接下来我们转向另一种变化：在不移动环境凯莱图中的任何一条边的情况下，什么可以发生改变?

第二部分。群作用的谱

6 谁选择边?

网格上的第一个构造使用了一个共同的行偏移。其分布是平移不变的，但给定的概率空间及其平移可能无法提供这样的偏移。现在我们固定群、生成元和平移距离。我们要探讨的是，利用一个预先给定的作用，且不使用超出该作用状态所提供的任何随机性，可以选取哪些稀疏距离图。

作用提供随机性。从标准概率空间 (X,μ) 中抽取一个状态 x 。右作用为每个 g 给出一个可测映射 $x\mapsto xg$ ，满足 $xe=x$ 和 $(xg)h=x(gh)$。将 xg 视为从顶点 g 观察到的同一个状态。我们假设每个映射 $x\mapsto xg$ 都保持 μ。假设该作用是自由的，即几乎处处只有当 $g=e$ 时才有 $xg=x$ 。因此，轨道 $\{xg : g\in\Gamma\}$ 在将 xg 与 xgs 相连时，是 G 的一个副本。这些轨道上的图共同构成凯莱图化。

一条边规则。对每个 $s\in S$ 选择一个可测事件 $A_s\subseteq X$。在状态 x 下，通过仅保留$\{g,gs\}$（当且仅当 $xg\in A_s$）来构造 G 的生成子图 H_x 。要求几乎处处有 $y\in A_s\iff ys\in A_{s^{-1}}$，从而两个端点达成一致。这描述了凯莱图化中每一种可测的边选择。从 e 改变观察视角为 g 会将整个输出图平移 g^{-1}。这就是该规则等变的含义。

可容许性与代价。对于非负整数 L，令 $\mathcal{A}_L(X,S)$ 为上述 $A=(A_s)_{s\in S}$ 族，其中对于 μ-几乎所有的 x 以及每个 $g,\ h\in\Gamma$，

$$d_{H_x}(g,h)\le d_S(g,h)+L.$$

我们称 H_x 为一个加性 L-稀疏距离图。一个 L 必须适用于所有点对和几乎所有状态。在单位元处，度为 $\deg_{H_x}(e)=\sum_{s\in S}\mathbf{1}_{A_s}(x)$。度数在无向边的两端各计一次。因此，我们将规则的代价定义为 $\frac12\int_X\deg_{H_x}(e)\,d\mu(x)$。作用的加性代价为

$$\boxed{C_{\mathrm{add}}(X,S)=\inf_{L=0,1,\dots}\ \inf_{A\in\mathcal{A}_L(X,S)}\frac12\sum_{s\in S}\mu(A_s).}$$

这里的 X 包含其作用。完整图符合条件，其 $L=0$ 且代价为 $|S|/2$。这些轨道上的通常的测度代价是一个下界，因为每个可容许规则都会将它们连通。

如果每个在所有群元素作用下不变的事件的概率都为零或一，则称一个作用是遍历的。固定 Γ 和 S，我们将遍历加性代价谱 定义为

$$\mathcal{S}(\Gamma,S)=\{C_{\mathrm{add}}(X,S):\ \Gamma\curvearrowright(X,\mu)\text{ is free, ergodic and probability-preserving}\}.$$

谱记录了作用所能达到的代价。对于任一作用，其代价是一个下确界，可能可以通过一列稀疏距离图逐渐逼近。

两个代价之间的联系。对于无限群的每个有限对称生成集，

$$\boxed{C_{\mathrm{add}}(\mathrm{Cay}(\Gamma,S))=\min\mathcal{S}(\Gamma,S).}$$

每条作用规则都会给出一个不变律。反过来，对于每个 n，选择一个与几何成本相差不超过 2^{-n} 的平移遍历生成树律 ν_n 。这样的律存在，因为可以将一个近似极小化者分解为遍历分量：误差界在其中几乎所有分量上都成立，且它们的代价平均后等于原代价。

取 ν_n 与一个独立的伯努利移位（在Γ上的独立均匀标记）的乘积。对角作用的几乎每个遍历分量都具有每个指定的边缘分布，因为每个边缘分布都是遍历的，而这样的边缘分布只有可数多个。在其中一个这样的分量上，这些标记确保了自由性，读取第 n个图即可得到一个代价趋于 $C_{\mathrm{add}}(G)$ 的规则。因此，即使某个作用的各个规则都无法达到其代价，仍有一个作用能够达到最小值。

7 重新审视正方格网

回到 $S=\{\pm u,\ \pm v\}$，其中 $u=(1,\ 0)$ 和 $v=(0,\ 1)$。图1的行构造只使用了一个共享的剩余类。现在我们可以准确地询问哪些作用提供了它。

共享行偏移。 固定 $k\geq 1$。状态由 $\mathbb{Z}^2$上的独立均匀 $[0,1]$ 标签以及一个独立均匀的模 k剩余类 r 组成。平移会平移这些标签。向北移动还会使 r 增加一，而向东移动则保持 r 不变。该作用是自由且遍历的。取

$$A_v=A_{-v}=X,\qquad A_u=A_{-u}=\{r=0\}.$$

因此，所有竖直边都被保留，而在满足 $r+j=0$ 模 k为 j的行上保留水平边。因此，其代价为

$$\tfrac{1}{2}(1+1+1/k+1/k)=1+1/k.$$

第 1 节给出了误差界 $2\lfloor k/2\rfloor$。因此 $C_{\mathrm{add}}(X,\ S)\ \leq 1+1/k$ 对于该作用成立。为证明等号成立，我们需要排除同一概率空间上所有代价更低的规则。

仅使用独立标签。 去掉剩余类，并令 $X=[0,1]^{\mathbb{Z}^2}$ 带有独立均匀的坐标。伯努利作用 平移整个独立标签数组。水平平移是遍历的，因为依赖有限个标签的事件的、彼此距离足够远的平移像相互独立。假设某个规则以正概率省略一条水平边。遍历性意味着，几乎必然地，每一行在向东任意远处都有被省略的边。行只有可数多个。

然而，从 $(0,\ 0)$ 到 $(n,\ 0)$ 的一条长度至多为 $n+L$ 的路径，除向东外至多有 L 步。对每个 n 各选取这样一条路径。网格具有有限度数，因此存在一个子序列，使得这些路径在每个初始片段上一致，从而得到一条除向东外至多有 L 步的无限路径。其尾部将在同一行上永远向东延伸。这与那里省略的边矛盾。竖直方向的论证完全相同。因此，完整网格是必然的，从而得到 $C_{\mathrm{add}}(X,\ S)\ =2$。共享偏移很重要，因为它提供了一个概率为 $1/k$ 的事件，而向东移动时该事件保持不变。

精确的方形网格公式。 对于水平平移 u，令 $\mathcal{I}_u$ 由在 u作用下保持不变（模零测集）的可测事件组成。$\boldsymbol{I}_u$ 的一个原子 是指一个具有正概率的事件，其中不包含该代数中概率严格介于二者之间的任何事件。在遍历 $\mathbb{Z}^2$作用下，如果存在一个原子，则它的平移像除零测集外要么互不相交，要么相等，具有相同的质量，并且覆盖 X的几乎全部。记它们的数量为 m_u；当不存在原子时，记为 $m_u=\infty$。以相同方式定义m_v。于是

$$C_{\mathrm{add}}(X,S)=1+\frac{1}{m_u m_v},\qquad \mathcal{S}(\mathbb{Z}^2,S)=\{1\}\cup\{1+1/k:k=1,2,\ldots\},\qquad 1/\infty=0.$$

对于具有行偏移的作用，水平平移恰好保留剩余类这一不变信息，因此 $m_u=k$。垂直平移的 k 次幂在每个剩余类内都是遍历的，而每次垂直平移会依次遍历这些剩余类，因此 $m_v=1$。由此可见，明确的行偏移规则具有可能的最低代价。

乘积的由来。记 R 为经过原点的行包含每条边的事件，并记 D 为相应的列事件。向东尾部论证仍然适用。根据水平平移下的回归，几乎必然地，每条被省略的边所在的行上，在任意远的前方都有被省略的边。因此，某个向东尾部位于一条完整行上。几乎每个构型都在某处具有这样的一行，所以根据平移不变性和可数性，$\mu(R)>0$。同样地，$\mu(D)\ >0$。

完整直线贡献了 $\mu(R)\ +\mu(D)$ 的代价。其外的每个顶点都可以沿着一条朝向这些直线的最短保留路径选择一条边。这些边彼此不同，并且由于不变性，它们的平均入度等于平均出度。额外代价为 $1-\mu(R\cup D)$，从而得到下界 $1+\mu(R\cap D)$。现在 $R\in\mathcal{I}_u$和 $D\in\mathcal{I}_v$。由于一个事件

同时在两个平移下保持不变，因此在 $\mathbb{Z}^2$的所有变换下都保持不变。沿着 u 对 D 的指示函数取平均，因而得到$\mu(D)$，而 R 保持不变。因此 $\mu(R\cap D)=\mu(R)\mu(D)\geq 1/(m_u m_v)$。

对于反向界，在每个有限代数中从一个原子中选取行和列。它们会以有界间隔重复出现。在没有原子的代数中，可以通过选择位置的可测极大集，使所选位置之间相隔超过横向平移的 r 步，从而选取密度任意小且间隔有界的直线。间隔条件使选择足够稀疏，而极大性保证每个位置都在其 r 步以内。用一条边将其他顶点分别连接到这个网格，并使边指向网格。每个顶点都能在有界步数内到达一个网格交点，而各交点之间则按其精确的网格距离相连。这就得到相应的下确界。

例如，如果该作用提供模 2、4、8……兼容的一致行偏移以及独立标签，就会出现成本1。同一作用允许对每个 $k=2^j$ 采用前述的行构造。每条规则都有其自身的有限误差界。每条单独的有限误差规则的代价仍然严格大于一，因为 $\mu(R)\mu(D)>0$。

其他格生成元。对于 $\mathbb{Z}^d$的有限对称生成集 S，伯努利成本等于 $\mathbb{R}^d$中 S 的凸包顶点数的一半。对于位于该凸包顶点处的生成元 s，存在一个在线性泛函上于 s 处取得严格最大值的线性泛函，从而界定近最短路径中其他步数的数量。完整直线论证迫使路径沿该方向前进。反之，对凸表示进行取整，可以沿这些方向用有界数量的连续段以及一个有界余项来实现位移。稀疏的连接边可以以任意小的额外代价处理该余项。坐标生成元给出成本 d。将 $\pm$（1，1）加入方格生成元后得到一个六边形，并使伯努利成本从二提高到三。

8 一个区间子与特定 Engel 格

方格谱除了极限点外是离散的1。对于任意有限生成集 $\mathbb{Z}^d$，完整的格公式仍然只能给出有理成本。若群中的每个非单位元都具有无限阶，则称该群为无挠群。对于类至多为二的无挠有限生成幂零群，成本等于一加上有限多个不变代数中原子重叠的最小值。相关有限因子具有一个由等权原子组成的有限共同细化。这证明了每个自由遍历作用的有理性 [2, 第3–5]节。三类是出现无理值的第一个可能类别，而一个四正则图就已经实现了整个区间 $[1,2]$。

哪个 Engel 群? 实Engel群是唯一的连通、单连通李群，其李代数的基为 B、A、C、D，非零括号为 $[B,A]=C$ $[B,C]=D$，并根据反对称性得到 [4]。对于字度量，我们指定一个整数格。在本文中，离散*Engel*群是

$$E=\mathbb{Z}^3\rtimes_U\mathbb{Z},\quad Ue_0=e_0+e_1,\quad Ue_1=e_1+e_2,\quad Ue_2=e_2,\qquad (m,i)(n,j)=(m+U^i n,i+j).$$

除非另有说明，其生成元为 $a=(e_0,\,0)$、$b=(0,\,1)$及其逆元。b 的共轭作用在 $\mathbb{Z}^3$ 上为 U。从 e_0 开始，连续的换位子给出 e_1 和 e_2。因此，该群、其生成元及其四正则图均已完全确定。

这个实群还允许其他格。例如，E 是 $\mathbb{R}^3\rtimes_{U^t}\mathbb{R}$中的一个格，其中 $U^t=\exp(t\log U)$，且 $\log U$只有一个大小为三的幂零块。其指数为二的子群 $E'=\mathbb{Z}^3\rtimes_{U^2}\mathbb{Z}$ 在那里同样是一个格。它们的阿贝尔化分别为 $\mathbb{Z}^2$ 和 $\mathbb{Z}^2\oplus\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$。事实上，$(U-I)\mathbb{Z}^3=\langle e_1,e_2\rangle$，而 $(U^2-I)\mathbb{Z}^3=\langle 2e_1+e_2,2e_2\rangle$。阿贝尔化中不同的挠刻画了这两个格的差异。第一部分中的自由三阶卡当群有两个独立的权三换位子，而 E 只有一个。下面的计算涉及 E 以及刚刚指定的生成元。

为什么在指定高度处必定会出现一条完整的线。记 $M = \mathbb{Z}^3 \leq E$，并将 (m, i) 的第二个坐标称为其高度。

在高度 i 处，一个正向 a 步会向 M 坐标添加 $U^i e_0 = (1,\ i,\ \binom{i}{2})$。在一条长度至多为 $n + L$、通往 a^n 的路径上，第一个坐标将负向 a 步和 $b^{\pm 1}$ 步的数量限制为 L，因此 $|i| \leq L$。在端点处，最后两个坐标归零。由于 $i^2 = i + 2\binom{i}{2}$，正向 a 步上的 i^2 之和等于负向步上的相应总和。后者被 L^3 所界定。因此，除了有界数量的步之外，所有步都在高度零处沿方向 a 向前进行。与网格情形一样，极限路径和回归迫使一条完整的 a 线存在。在此处，它必须位于起始的 M 轨道中。

连续统从何处出现。令 $\pi_a(x)$ 记录所有不随 a 改变的信息。形式上，由 π_a 决定的事件恰好是模零测集意义下的 a-不变可测事件。由于 M 与 a 可交换，它作用于这些记录。记 $m(x)$ 为当 m 遍历 M 时，不同记录 $\pi_a(xm)$ 的数量。如果变换 $x \mapsto xb$ 是遍历的，高度坐标便通过第 4 节的极限射线论证迫使完整的 b 线出现。在记录的每个有限轨道上，至少必须选取一次完整的 a 线。其在该处的最小相对密度为 $1/m(x)$。无限轨道允许在有界范围内进行任意稀疏的选取。所得公式为

$$C_{\mathrm{add}}(X, S) = 1 + \int_X \frac{1}{m(x)}\, d\mu(x).$$

对于上界，先通过 M中的一个元素前往选定的 a-行，沿其移动 n 步，再通过逆元返回。交换性保证了正确的端点。证明为这些转移提供了有界的绕行，其额外代价可以任意小，并将任意行程表示为数量有界的 a 运行段和 b 运行段；其长度与最短长度的误差有界。

为实现 $1 + p$，独立地选择 $i \in \mathbb{Z}$ 行。以 p 的概率将一行全部填为星号，否则用独立公平比特填充该行。元素 b 平移这些独立行，因此其作用是遍历的。元素 a 将第 i 行平移 $-i$ 个位置。加入群的一个独立伯努利作用，以确保自由性。 a- 不变记录由所有行类型以及第零行的内容组成。群 M 保持行类型不变，并将第零行平移一个位置。因此，在星号行上，其记录的轨道大小为一；而在比特行上，几乎处处具有无限轨道大小。积分为 p，因此每个 $1 + p$ 都会出现。一般下界为一，而完整的四正则图在每个作用上的上界均为二。因此，对于这些生成元， $[1, 2]$ 就是整个谱。甚至可以选择这一族，使得对于每个固定的 g，对所有 p 而言，其作为单个变换的作用在保测坐标变换下都相同。该坐标变换可以依赖于 g。

这些作用可以是弱混合的，这意味着在 X 的两个独立副本上同时作用时是遍历的。换用另一生成集后，同一族作用可达到 $[2, 3]$，尽管每个生成元都作为伯努利移位作用。一个长度为二的词即可检测到这种变化。在四正则图上，如果允许 $d_H \leq d_S + f(d_S) + L$ 对任意给定的非负 $f(n) \to \infty$，则每个自由作用的下确界都是一。

9 强混合留下了什么?

若 $\mu(A \cap Bg) \to \mu(A)\mu(B)$ 对可测的 A， B 成立，其中当 g 离开每个有限集时， $Bg = \{xg : x \in B\}$，则称一个作用是强混合的。于是，每个无限阶元素都以遍历方式作用。对于类至多为二的无挠幂零群的每个生成集，所有强混合作用都具有相同的代价。对于自由群与有限循环群的直积，即使在这一类作用中，也可以得到一个完整的区间 [2,第 9] 节。

相同的轨道，不同的代价。令 F_{25} 为由 a_1、.....、a_{25} 生成的自由群，并令 c 生成三阶循环群 C_3。在 $F_{25} \times C_3$ 中使用 $c^{\pm 1}$ 及所有 $a_j^{\pm 1} c^{\pm 1}$，符号独立选取。在同一概率空间上存在自由强混合作用，它们具有完全相同的轨道，而其加性代价可取遍 $[9, 86/9]$ 中的每个值。它们共同的轨道关系的通常测度代价为九。

这里，每个 C_3-轨道都是一个三角形。将这些三角形收缩后，得到一棵 50-正则树。跨越一条树边时，一个三角形中的每个点都能到达下一个三角形中的三个点中的两个。在一种作用中，我们可以按可测方式从每个三角形选定一个点，使相邻的选定点彼此相连。保留它们构成的树，并将每个三角形中另外两个点连接到其选定点。这样，每个顶点的代价为 $(25+2)/3 = 9$ 条边，并且任意行程至多增加两步。

对于独立标签，假设连续两条树边各自只有一个保留的交叉。这两个交叉必定相接。如果这种情况以正概率不成立，那么沿树测地线重复这一两步模式时，预期绕行长度就会线性增长。在每个三角形中，选取其唯一交叉的公共端点；若没有交叉，则选取任意可测代表元。将 x 按到该代表元的 c步数模三着色。在 x 和 xa_j处颜色相同，就意味着存在第二个交叉。令 m 为随机自由生成元步两端颜色相同的概率。用三个复数立方单位根编码这些颜色。它们在每个三角形上的平均值为零，并且它们跨一步的相关性的实部为 $m - (1-m)/2$。对于伯努利标记，50-正则树上的平均算子满足 Kesten 范数界 [11] $7/25$，因此 $m - (1-m)/2 \geq -7/25$，从而 $m \geq 11/75$。每个三角形平均对应 25 条无向树边和三个顶点。仅交叉就至少需要 $(25/3)(1 + 11/75) = 86/9$ 的代价。这个区间源于树步如何置换一个顶点上方的三个点。对每条树边，独立地选取一个 C_3中的位移：以 p 的概率取零，否则以相同概率取 $+1$ 或 -1。沿用相同的独立均匀标记和符号标记，为 $0 \leq p \leq 1/3$共同决定这些选取。自由群沿树移动，并叠加这些位移。元素c 旋转每个顶点上方的三个点。因此，无论 p如何，一个状态的轨道都包含其基轨道中每个状态上方的整个三点纤维。在 $p = 0$ 时，相邻代表元总能连接起来。在 $p = 1/3$ 时，位移是均匀的，且作用是伯努利的。沿着较长的约化字前进时，独立位移会使纤维坐标混合。改变 p 只会改变一小部分交叉，而在其附近修补路径的代价也只占很小比例 [2,第 9]节。代价连续变化，因此介值定理保证了该区间。

Kazhdan 比较。 令 $K = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$，并在 K^k, $k \geq 2$ 中，每次仅允许一个坐标上的初等矩阵。所有自由作用的普通代价均为一 [12]。有限剩余完备化（有限商群的逆极限）上的平移作用的加性代价为一，而伯努利作用的加性代价至少为 $2k$。对于一个初等矩阵 s，词 $(ss^{\mathsf{T}})^n$ 在算子范数下以可能的最大速率增长。低效的相邻矩阵对会损失一个确定的因子，因此，额外长度有界的路径只能包含有界数量的此类矩阵对。极限射线交替经过一个生成元及其转置。伯努利遍历性迫使每个坐标中至少有这样一对的四条关联边 [1,定理 9.2]。

有界误差要求有多严格？ 将 $C_c(X,\ S)$ 记作在距离界为 $d_H \leq c\, d_S + L$ 且满足 $c \geq 1$ 时定义的作用代价。如果一个有限生成群具有一族有限非空集合，使其边界边与集合大小之比可以任意小，则称其为可和 群。对于此类群的每个生成集，$\lim_{c \downarrow 1} C_c(X,\ S)$ 对每个自由作用都相同。证明在自由可和作用之间传递大型有限球上的边统计，并将局部路径连接起来，把连接误差吸收到额外的乘法余量 [2, Section 13] 中。在 $F_{25} \times C_3$ example 中，即使这些极限值也包含区间 $[9, 86/9]$。

10 开放问题

这些问题贯穿着两种选择。允许所有不变律，考察的是谱的底部 。指定作用，则要考察其上方会出现哪些值。改变生成元会同时改变这两个问题中的距离约束。

几何与生成元的选择

1. **多项式增长**。 每个具有多项式增长的无限凯莱图是否都有$C_{\mathrm{add}}(G) = 1$? 对于增长度为 $D > 1$的虚拟二步幂零群，最优固定误差超额 $s_G(L)$是否为 L^{-D}阶？ 这一增长率适用于虚拟 $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$, 以及标准海森堡图。

2. **卡当检验**。 标准卡当图的不变有限误差生成树能否以正概率省略某条边? 所有周期性的此类生成树都是完整图。若完全刚性对所有不变律都成立，那么该图的加性代价为二，并且对第一个问题给出否定答案。

3. **一致双曲间隙**。 对于固定的非初等双曲群 Γ， $C_*(\Gamma)$是否 > 1? 等价地，是否存在一个 $\eta_\Gamma > 0$ ，使得 Γ 的每个凯莱图的每个有限误差不变稀疏距离图的平均度至少为 $2 + \eta_\Gamma$? 固定图的分支论证给出的常数取决于 S。当 $b_1 \geq 4$时，闭定向双曲三维流形满足一致间隙。对于 $b_1 \leq 3$, 一般情形仍是开放问题，其中包括有理同调球。在正值范围内，同调下界何时是紧的?

4. **普通代价为一的双曲群**。 对于 $\mathrm{Sp}(n,1)$ 中的余紧格，是否存在一致间隙 $n \geq 2$? 这些群具有性质（T），且普通代价为一 [9]。在固定生成元数量和密度 $1/3 < d < 1/2$的格罗莫夫密度模型中，随机群以高概率是双曲群并具有性质（T） [10]。它是否也以高概率满足 $C_* > 1$？

5. **尖锐的自由积的值**。 $C_*(C_3 * C_3)$ 是否为 $= 4/3$? 每个单独的生成集所得的值都严格大于 $4/3$，而有一个生成集所得的值为 $5/3$。灯笼群展示了：每个生成集上均存在的正间隙，可能会在下确界中消失。

6. **中间增长**。 第一格里戈尔丘克群使用其标准生成元时，是否存在平均度可以任意接近二的不变有限误差生成树?

固定作用类的谱

1. **可和性与强混合**。 同一个有限生成可 amen 群的两个自由强混合作用，对同一个生成集会有不同的加性成本吗? 尽管弱混合作用的成本范围 E已知，这个问题仍未解决。随着乘法伸缩率趋近于一，这两个作用的极限应当相同。

2. **适用于每个作用的一组生成元**。 每个有限生成非阿贝尔无挠幂零群，是否都存在一个有限生成集，使得在每个自由遍历作用上的加性代价均为一? 这在二类群中成立。对于 E，即使对生成对进行优化，仍会得到一个范围 $[1, 2]$, ；而某个生成三元组则能使每个自由作用的代价均为一 [2,第 8]节。

3. **挠与无理性**。对于自由遍历作用，带挠的二类有限生成幂零群是否可能具有无理的加性代价? 在固定生成集 [2, Section 10] 下，它的所有自由强混合作用都具有相同的代价。一般遍历作用的有理性问题仍未解决。

延伸阅读。几何定理及其证明见 [1]。作用公式和区间构造见 [2]。两份手稿均可向 Itai Benjamini 索取，邮箱为itai.benjamini@gmail.com。

致谢。 本文由 Chat gpt 撰写。

参考文献

[1] I. Benjamini，Cayley图的稀疏加性生成器：不变随机生成器与群成本，AI笔记，2026年11月24日。[2] I. Benjamini，Cayley图化的遍历加性成本谱，AI笔记，2026年。[3] I. Agol，3维流形的虚拟性质，国际数学家大会会议录，首尔2014年，第I卷，141–170，推论6.8。[4] C. Bellettini与E. Le Donne，Engel群中具有常水平法向的集合的正则性，《分析与几何通讯》21（2013），469–507，§1.2。[5] I. Benjamini、R. Lyons、Y. Peres与O. Schramm，图上的群不变渗流，《几何与泛函分析》9（1999），29–66。[6] C. Bodart，几乎幂零群中的中间测地增长，《群、几何与动力系统》，2025年在线发表。arXiv:2306.10381，引理1.7与2.1。[7] D. Gaboriau，等价关系与群的代价，《数学发明》139（2000），41–98。[8] D. Gaboriau，不变量 ℓ^2 等价关系与群的，高等科学研究院数学出版物95（2002），93–150。[9] T. Hutchcroft与G. Pete，Kazhdan群具有成本1，《数学发明》221（2020），873–891。[10] C. J. Ashcroft，随机群密度型模型中的性质（T），《群、几何与动力系统》17（2023），1325–1356。[11] H. Kesten，群上的对称随机游走，《美国数学会汇刊》92（1959），336–354。[12] A. Khezeli，无限可数群的乘积具有固定价格一，arXiv:2509.08325。[13] G. Levitt，论生成等价关系的成本，《遍历理论与动力系统》15（1995），1173–1181。