低阶与高阶单源积分方程的准确性与效率

A. Zuccot ti，*IEEE*学生会员，C. M¨unger，*IEEE*会员，以及K. Cools，*IEEE*会员 *E*

arXiv:2611.32608v1 [cs.CE] 24 Nov 2026

摘要—**单源积分方程只需跟踪单个表面支撑电流密度，即可对电磁场进行建模。该方程包含积分算子的乘积，这给方程的离散化和求解带来了独特挑战。由于单源方程具有独特结构，其保形且稳定的离散化要求将两个物理迹中的一个展开为原始基函数，另一个展开为对偶基函数。与对偶基函数相比，原始基函数通常具有更好的逼近性质。本文研究了这种非对称表示对解的精度的影响，并提出一种方法，使两个物理迹均可仅使用原始基函数恢复，同时仅需增加适度的计算成本。**

此外，我们提出了一种替代离散化方案，该方案基于通过准亥姆霍兹分解逼近由表面法向叉乘算子诱导的对偶映射的逆。该离散化方案在函数空间的选择上提供了更大的灵活性，从而既支持单源方程的高阶扩展，也支持仅使用Rao-Wilton-Glisson基函数实现更高效的最低阶离散化。

数值结果展示了在最低阶和高阶离散化中，采用原始函数和对偶函数表示的影响。

索引词—**边界元方法、Buffa-Christiansen函数、电介质、对偶空间、高阶、均匀物体、积分方程、预条件、准Helmholtz投影算子、单源方程。**

I. 引言

BOUNDARY 积分方程（边界积分方程）为建立理想电导体和介电材料的电磁散射模型提供了一种高效且精确的框架。对于均匀介电问题，最广泛使用的公式是PMCHWT方程和M¨uller方程 [1]–[4]，，过去几十年来人们已对其进行了广泛研究。这些方程通过对散射体边界上相应电迹和磁迹的内部与外部Calder´on公式进行相加或相减推导而来。两种公式均产生一个关于电等效表面电流和磁等效表面电流的耦合系统。

除了这些经典公式之外，单源积分方程最初在 [5]–[7] 中提出。单源方程通过以乘法方式结合外部问题和内部问题的Calder´on公式构造而成。内部问题存在非唯一解，这种冗余使人们能够选择一种试探函数，从而得到多种可能的单源公式之一。所得系统仅涉及一个辅助电流，即电型或磁型电流中的一种，通过该电流可以恢复两个物理表面迹。与PMCHWT 或 M¨uller 方程相比，其主要优势在于未知量的数量减少了一半。此外，通过恰当选择试探函数，可以使单源公式具有内禀良好条件性，从而避免密网格崩溃，无需构造预条件子，也无需执行将其纳入迭代求解过程所需的额外矩阵-向量乘法。单源方程用于时域时，在晚时间稳定性方面具有优势。[8] 中已展示出颇具前景的结果。预计 [9] 和 [10] 中采用的稳定化方法能够实现更加稳健的实现。

然而，单源公式通常会受到内部谐振的影响。通过适当结合单源方程的两种不同拟设 [11]，可以缓解这一问题。相同的组合方法也可用于抑制复合构型中的 PEC谐振 [12]。此外，对于涉及多个区域和连接处的问题，还可以将单源公式与多迹方法结合使用。在这种情况下，未知数减半尤其有利[13], [14]。

由于存在多个积分算子的乘积，单源方程的离散化需要同时使用原空间（例如 Rao–Wilton–Glisson 空间，即 RWG [15]）和定义在细化网格上的对偶空间（例如 Buffa–Christiansen 空间，即 BC，或 Chen-Wilton空间 [16], [17]）。采用 RWG和BC基函数进行协调离散，可确保单层和双层边界积分算子的离散化满足 inf-sup 稳定性。此外，在两个单层算子的乘积中，这种离散化会使阶数为 $O(1/\omega^2)$ 的低频项相互抵消。单源方程在极低频率下可能出现数值抵消，而高对比度情形也可能带来挑战。本文不讨论这些问题，将其留待未来研究。在协调离散中，通常用原RWG函数展开辅助未知量。然而，随后通过将离散的内部单层算子和双层算子作用于辅助解，得到磁迹和电迹。因此，两个物理迹中有一个用对偶BC函数展开，另一个则用原RWG

本工作得到欧洲研究委员会（ERC）欧洲联盟地平线2020研究与创新计划资助，资助协议编号为101001847；同时得到根特大学特别研究基金（BOF）资助，资助编号为BOF.PDO.2024.0016.01。A. Zuccotti、K. Cools和C. M¨unger任职于比利时根特的根特大学信息技术系IDLab与imec（通讯作者：Alessandro Zuccotti，电子邮箱：alessandro.zuccotti@ugent.be）。

函数展开。与用原函数展开相比，用对偶函数展开的精度预计较低，尤其是在非光滑几何体的尖锐边缘和角点附近。在 [16],中，BC空间的逼近性质通过 $H^0(\mathrm{div};\Gamma)$误差估计得到，该误差以 $O(h^{1/2})$为界；而对于足够光滑且在RWG空间[18]中展开的解，则可达到 $O(h)$估计。此外，每个BC基函数都表示沿网格边流动的电流，因此会在尖锐边缘处引入伪连续性（具有准旋度协调性）；然而，电迹和磁迹的解通常会在表面法向发生突变的线处，其切向分量出现不连续。这种两个物理迹之间的精度失衡尚未在文献中得到讨论。本研究的首要目标是评估这一精度局限的严重程度，并提出缓解策略。

在本文中，我们证明了可以从表示公式推导出两种不同的单源方程¨。通过适当选择离散化方式，无需将所有积分算子离散化两次，便可在原空间中获得两种迹，因此计算成本处于可接受范围内，尽管仍需求解两个线性系统。

本文的第二个目标是讨论一种广义离散化方案，使单源方程能够进行高阶扩展。

同样，为了实现单源方程的准确、高效离散化，需要原始函数和对偶函数。RWG基函数的一种常用高阶推广是 Graglia–Wilton–Peterson（GWP）基函数，该基函数由文献 [19]提出。

以往研究也探讨了BC对偶函数的高阶扩展。在文献 [20],中，通过将基函数的无散（环）分量和有散（星）分量映射为定义在重心细分上的同一基函数的旋转有散分量和无散分量，构造了高阶对偶函数。

在 [18]，中，采用了一种替代方法对电场积分方程进行预条件处理。该方法没有使用对偶函数，而是采用一般的辅助散度协调函数，对由表面法向叉乘算子诱导的旋度相容空间与散度协调空间之间的对偶映射进行离散化，该算子记为 $\hat{\mathbf{n}}\times$。具体而言，利用一般的辅助空间以及原空间分解为无散分量和有散分量的准亥姆霍兹分解，定义了映射 Θ，以近似由 $\hat{\mathbf{n}}\times$ 算子诱导的对偶映射的逆映射。事实上，这种逆映射对于积分算子乘积的一致离散化至关重要。尽管 [18]，的数值实验并未探讨高阶情形，但映射 Θ 的构造可以很容易地推广到 GWP 函数等高阶函数。

最近， [21] 和 [22],利用原空间和辅助空间中的高阶亥姆霍兹投影算子，提出了类似的 Θ 定义。该映射用于实现电场积分方程、磁场积分方程和组合场积分方程的高阶离散化。

在 [23], 中，为磁场积分方程的一致性测试构造了B样条高阶对偶函数。

这些方法大多具有一个共同特点，即采用准亥姆霍兹分解。事实上，通常需要将空间分解为无散子空间和有散子空间，以处理低频失效，并获得一种离散化，使得单层算子的超奇异部分的平方为零。

在本文中，我们使用 Θ 中定义的 [18] 映射对单源方程进行离散化。关于采用 Θ 映射的最低阶离散的初步结果已发表于 [24] 和 [25]。在此，我们利用原空间和辅助空间选择上的灵活性，纳入高阶GWP 空间。

我们开展了数值实验，在实验中，所提出的单源拟设既用于最低阶RWG-BC离散，也用于涉及GWP 原函数和高阶对偶函数的高阶离散化；其中，高阶对偶函数被隐式定义为 Θ 算子的像。在所有情况下，我们将传统离散与新提出的公式进行比较：在传统离散中，某一个物理迹在对偶空间中展开；而在新公式中，电迹和磁迹均表示在原空间中。

此外，我们还讨论了一种利用 Θ映射来获得计算成本更低的最低阶离散方法。该方法仅使用RWG函数，而不是同时使用RWG函数和BC函数的离散方法，同时不会牺牲精度和效率。

我们对迹场以及近场和远场进行了误差分析，以展示所提方法的精度和条件性。

本文的组织结构如下：

- 第二节回顾连续的单源方程，第三节介绍其传统离散化方法。
- 第四节介绍新颖的试探函数，使两个迹能够在原空间中展开。
- 第五节介绍 Θ映射及其性质。
- 第六节介绍采用 Θ的离散化方法，第七节报告不同空间和几何结构选择下的数值结果。

II. 单源积分方程

我们考虑一个均匀域 $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^3$，其介电率为 $\epsilon_1 = \epsilon_r\epsilon_0$、磁导率为 $\mu_1 = \mu_r\mu_0$，浸没在背景介质 $\Omega_0 := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_1$, 中，该背景介质的介电率为 ϵ_0、磁导率为 μ_0。该结构受到由外部源产生的入射时谐电磁场（$\mathbf{e}^{\mathrm{inc}}$, $\mathbf{h}^{\mathrm{inc}}$）照射。我们假设入射场为平面波

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{\mathrm{inc}}(\mathbf{x}) &= \hat{\mathbf{e}}\, e^{-j\boldsymbol{\kappa}_0\cdot\mathbf{x}},\\ \mathbf{h}^{\mathrm{inc}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\eta_0}\,\hat{\boldsymbol{\kappa}}_0 \times \hat{\mathbf{e}}\, e^{-j\boldsymbol{\kappa}_0\cdot\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x}\in\Omega_0,\end{aligned} \tag{1}$$

其中$\hat{\mathbf{e}}$ 为极化方向，$\boldsymbol{\kappa}_0 = \kappa_0\hat{\boldsymbol{\kappa}}_0$ 为波矢，κ_0 为波数，$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ 为外部背景介质的特性阻抗。假设时间依赖性为 $e^{j\omega t}$，并将在本文其余部分省略

。设（$\mathbf{e}\times\hat{\mathbf{n}},\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{h}$）表示边界 Γ 上的电场和磁场切向迹：$=\partial\Omega_1$，，其中$\hat{\mathbf{n}}$ 为 Γ的外向单位法向量。由于介质中不存在物理电流，界面两侧的切向场分量连续，即（$\mathbf{e}^+\times\hat{\mathbf{n}},\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{h}^+$）=（$\mathbf{e}^-\times\hat{\mathbf{n}},\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{h}^-$）=（$\mathbf{e}\times\hat{\mathbf{n}},\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{h}$）。下面回顾麦克斯韦单层和双层算子的定义

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\kappa)&=\mathcal{T}_s(\kappa)+\mathcal{T}_h(\kappa),\\(\mathcal{T}_s(\kappa)\mathbf{j})(\mathbf{r})&=-j\kappa\hat{\mathbf{n}}\times\int_\Gamma\frac{e^{-j\kappa R}}{4\pi R}\mathbf{j}(\mathbf{r}')dS',\\(\mathcal{T}_h(\kappa)\mathbf{j})(\mathbf{r})&=\frac{1}{j\kappa}\hat{\mathbf{n}}\times\text{p.v.}\int_\Gamma\nabla\frac{e^{-j\kappa R}}{4\pi R}\nabla'\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}')dS',\\(\mathcal{K}(\kappa)\mathbf{j})(\mathbf{r})&=\hat{\mathbf{n}}\times\text{p.v.}\int_\Gamma\nabla\times\frac{e^{-j\kappa R}}{4\pi R}\mathbf{j}(\mathbf{r}')dS',\end{aligned}\tag{2}$$

其中 $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$。在没有内部源的情况下，$\Omega_1$ 内正则麦克斯韦解（$\mathbf{e}$,$\mathbf{h}$）对应的切向迹满足内部 Calder´on 公式，可表示为

$$\begin{pmatrix}-\mathcal{K}(\kappa_1)+\frac{1}{2} & \eta_1\mathcal{T}(\kappa_1)\\ -\frac{1}{\eta_1}\mathcal{T}(\kappa_1) & -\mathcal{K}(\kappa_1)+\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}\times\hat{\mathbf{n}}\\ \hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{h}\end{pmatrix},\tag{3}$$

其中 $\kappa_1=\sqrt{\epsilon_r\mu_r}\kappa_0$，$\eta_1=\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}\eta_0$ 为内部介质的波数和特性阻抗。对偶（$\mathbf{p}$,$\mathbf{q}$）=（$\mathbf{e}\times\hat{\mathbf{n}},\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{h}$）本身也满足（3），但它并非唯一解。同样，在存在入射场时，外部迹的消光公式为

$$\begin{pmatrix}\mathcal{K}(\kappa_0)-\frac{1}{2} & -\eta_0\mathcal{T}(\kappa_0)\\ \frac{1}{\eta_0}\mathcal{T}(\kappa_0) & \mathcal{K}(\kappa_0)-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}\times\hat{\mathbf{n}}\\ \hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{h}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{e}^{\text{inc}}\\ \mathbf{h}^{\text{inc}}\times\hat{\mathbf{n}}\end{pmatrix}.\tag{4}$$

将（3）代入（4）得到

$$\begin{pmatrix}\mathcal{K}_0-\frac{1}{2} & -\eta_0\mathcal{T}_0\\ \frac{1}{\eta_0}\mathcal{T}_0 & \mathcal{K}_0-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\mathcal{K}_1+\frac{1}{2} & \eta_1\mathcal{T}_1\\ -\frac{1}{\eta_1}\mathcal{T}_1 & -\mathcal{K}_1+\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}=\\=\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{e}^{\text{inc}}\\ \mathbf{h}^{\text{inc}}\times\hat{\mathbf{n}}\end{pmatrix}.\tag{5}$$

其中我们引入缩写 $\mathcal{T}_i,\mathcal{K}_i=\mathcal{T}(\kappa_i)$ $\mathcal{K}(\kappa_i)$。为将系统简化为单源方程，我们利用（$\mathbf{p}$,$\mathbf{q}$）中的冗余，选择磁性假设（$\mathbf{p},\mathbf{0}$）或电性假设（$\mathbf{0}$,$\mathbf{q}$）。这里我们采用磁性假设，并选取所得系统的第一行，得到

$$\left(\left(\mathcal{K}_0-\frac{1}{2}\right)\left(-\mathcal{K}_1+\frac{1}{2}\right)+\frac{\eta_0}{\eta_1}\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1\right)\mathbf{p}=\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{e}^{\text{inc}}.\tag{6}$$

式（6）左端的算子具有条件良好的谱，该谱与零和无穷大均保持有界距离。事实上，正如 [11]中所讨论的，式（6）中的两个项均具有良好的条件数。

在此试探函数下，$\mathbf{p}$表示辅助表面电流，而物理迹则通过内部算子恢复：

$$\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{h}=-\frac{1}{\eta_1}\mathcal{T}_1\,\mathbf{p},\quad\mathbf{e}\times\hat{\mathbf{n}}=\left(-\mathcal{K}_1+\frac{1}{2}\right)\mathbf{p}.\tag{7}$$

III. 使用原始函数和对偶函数进行离散化

这里回顾式（6）的离散化。按照佩特罗夫–伽辽金方法，每个积分算子都相对于一组基函数和测试函数进行离散化。我们采用以下记号：对于每个积分算子 $\mathcal{O}$，离散化算子的矩阵元定义为 $(\mathcal{O}_{xy})_{ij}=\langle\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{x}_i,\mathcal{O}\mathbf{y}_j\rangle$，其中$\mathbf{x}_i$ 和$\mathbf{y}_i$ 分别是两个散度协调空间的 i^{th} 基函数，而 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是L^2 内积。单层和双层算子的协调离散需要原始空间和对偶空间。最常见的选择是分别将RWG和BC 空间作为原始空间和对偶空间。这里用$\mathbf{f}_i$ 和$\mathbf{g}_i$ 表示 i^{th} RWG和BC基函数。因此，指标 f 和 g 分别表示RWG和BC空间中的展开。

我们将 G_{gf}记作映射（G_{gf}）$_{ij}=\langle\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{g}_i,\mathbf{f}_j\rangle$，即混合格拉姆矩阵。其逆记作 G^{fg}。 G_{gf}是旋度协调空间与散度协调空间之间的离散对偶配对。其逆 G^{fg} 或逆的伴随 $G^{fg^\dagger}$ 是离散化麦克斯韦积分算子乘积时所必需的，因为此类算子通常作用于散度协调函数，并使用旋度协调函数进行测试。两个积分算子乘积的离散化随后表示为 $G^{fg}\mathcal{O}_{gg}$（$-G^{fg^\dagger}$）$\mathcal{O}_{ff}$ 或$G^{fg}\mathcal{O}_{gf}G^{fg}\mathcal{O}_{gf}$。

如果辅助电流 $\mathbf{p}$ 采用 RWG函数展开，则式（6）的协调离散化为

$$G^{fg}\left(\left(\mathcal{K}_0-\frac{1}{2}\right)_{gf}G^{fg}\left(-\mathcal{K}_1+\frac{1}{2}\right)_{gf}+\\+\frac{\eta_0}{\eta_1}(\mathcal{T}_0)_{gg}(-G^{fg^\dagger})(\mathcal{T}_1)_{ff}\right)\mathbf{p}^f=G^{fg}(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{e}^{\text{inc}})_g,\tag{8}$$

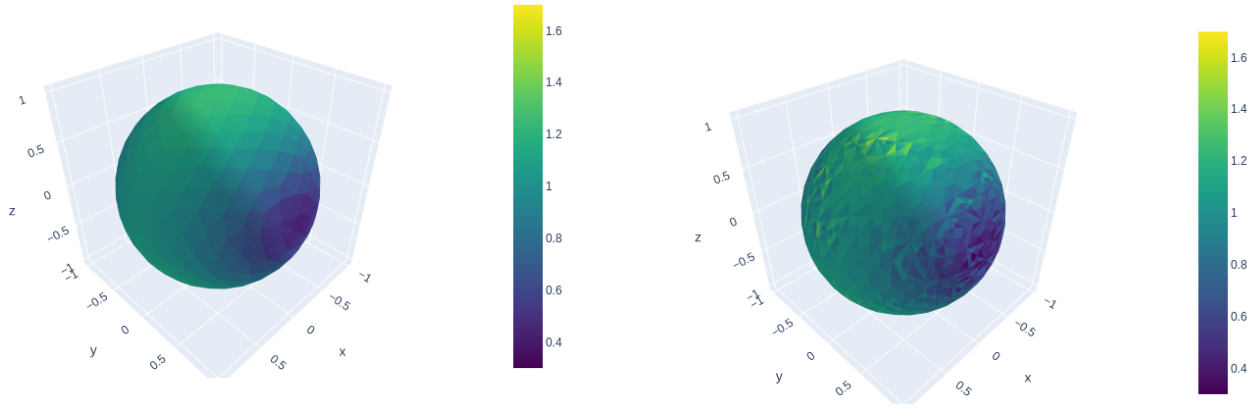
其中$\mathbf{p}^f$ 是系数的未知向量，用于在 RWG空间中展开$\mathbf{p}$，且$((\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{e}^{\text{inc}})_g)_i=\langle\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{g}_i,\ \hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{e}^{\text{inc}}\rangle$。

这种协调离散化确保了规则且条件良好的矩阵系统，并能为未知量 $\mathbf{p}$ 提供准确结果。不过，我们注意到，物理迹是通过对式（8）的解应用第一对内部算子计算得到的：

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{h})^g&=\frac{1}{\eta_1}G^{fg^\dagger}(\mathcal{T}_1)_{ff}\mathbf{p}^f,\\(\mathbf{e}\times\hat{\mathbf{n}})^f&=G^{fg}\left(-\mathcal{K}_1+\tfrac{1}{2}\right)_{gf}\mathbf{p}^f.\end{aligned}\tag{9}$$

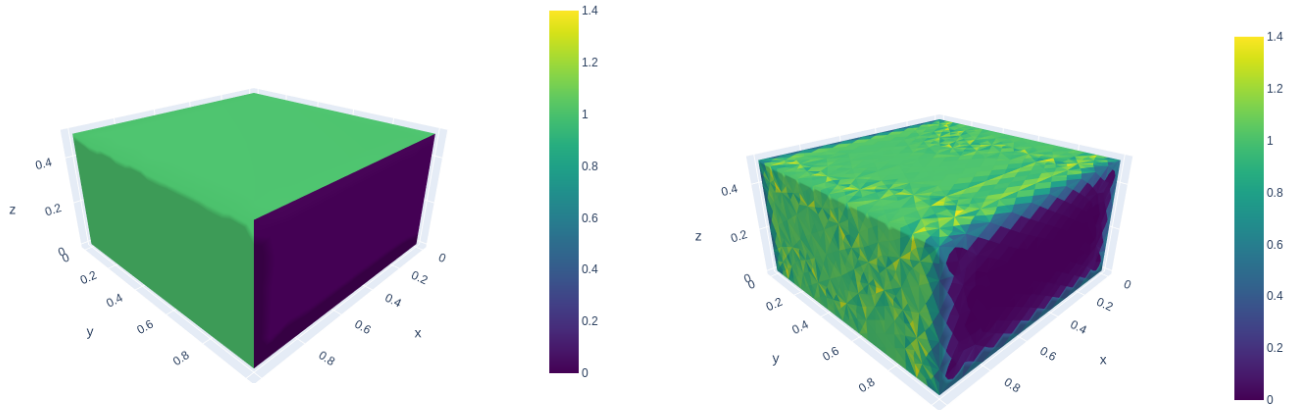
这意味着两个迹中的一个是在重心细分上定义的 BC函数中展开的。在其他常见的边界积分方程中不会出现这种情况，例如电场积分方程或磁场积分方程；在这些方程中，BC函数用于对方程进行预条件处理或测试，而物理未知量仍以 RWG函数展开。

正如我们在引言中所提到的，在 $H^0(\text{div};\Gamma)$ 范数下，采用 BC函数展开的量所产生的近似误差可能大于采用 RWG函数得到的误差。此外，BC基函数对沿网格边缘流动的电流进行建模（而不是跨越边缘流动），因此会强制单元界面之间保持连续。在存在尖锐几何特征时，这种强制连续性



(a) 以 RWG 函数展开的磁迹幅值（A/m）。(b) 以 BC 函数展开的磁迹幅值（A/m）。

图 1：球体传输问题中，采用 RWG（左）和 BC（右）展开的磁迹幅值对比。RWG 表示通过求解 PMCHWT 方程获得，BC 表示通过求解单源方程获得。对于这个光滑表面示例，BC 空间的近似精度较低，这一点已清晰可见。



(a) 以 RWG 函数展开的磁迹幅值（A/m）。(b) 以 BC 函数展开的磁迹幅值（A/m）。

图 2：长方体传输问题中，采用 RWG（左）和 BC（右）展开的磁迹幅值对比，其中 $\eta_1,\ \kappa_1 = \eta_0,\ \kappa_0$。RWG 表示通过将入射磁迹 $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{h}^{\mathrm{inc}}$ 投影到 RWG 空间获得。BC 空间中的表示通过求解单源方程获得。对于此示例，BC 空间中的解退化以及边缘处的伪连续性显而易见。

可能并不符合物理实际，因为电迹和磁迹可能会在表面法向发生突变的位置出现不连续。

为展示这一效应，我们分别针对球体和长方体几何体，对在原始RWG空间或对偶BC空间中展开的同一物理量进行两组比较。在图1中，我们展示了通过求解（8）并计算（9）得到的磁迹幅值，其中 $(\eta_1,\ \kappa_1) = (\frac{\eta_0}{1.55},\ 1.55\kappa_0)$ 首先用RWG函数展开（左图），随后将同一磁迹用BC函数展开（右图），该结果通过求解PMCHWT方程获得。

在图 2 中，我们展示了由一个填充有与背景介质相同材料的长方体（$\eta_1,\ \kappa_1 = \eta_0,\ \kappa_0$）得到的磁迹幅值。在这一特殊情况下，精确解是已知的。它对应于入射场的磁迹，该入射场在长方体各个面上的幅值是分片常数。

图 2 清楚地显示了边缘处的伪连续性。在球体和长方体算例中，对偶空间中的展开明显影响了近似量的表示。在第七节中，我们将详细分析这两种几何形状所获得的精度。在

下一节中，我们将讨论如何获得在 RWG 空间中展开的物理迹的可能策略。

IV. 单源方程的新型试探函数

为了使两个迹都在原空间中展开，可以考虑对（8）中的积分算子采用其他离散化方案。具体而言，一种可能性是选择非对称混合离散化的单层算子，例如 [26] 中针对M¨uller方程所采用的方案。然而，采用RWG基函数和旋转BC测试函数对单层算子进行离散化，其精度低于（8）中的方案。M¨uller方程是一个显著的例外，因为两个单层算子的特定组合削弱了它们的奇异性，从而减轻了混合离散化引入的误差。

类似地，对双层算子和恒等算子采用非保形离散化，可能得到一个使两个迹都在原空间中展开的系统。然而，这会引入额外误差，因为已有研究表明，混合协调方案具有最高的精度 [27]。PMCHWT方程是一个例外，其中可以对双层算子采用对称离散化，因为在组合表示公式中，恒等算子会相互抵消。

相较之下，单源方程在试探函数的选择上具有独特的灵活性。根据 (5)，可以为辅助未知量选择试探函数（$\mathbf{p}$，$\mathbf{0}$），从而得到 (8)；也可以选择另一种试探函数（$\mathbf{0}$，$\mathbf{q}$）。由这两种试探函数可以推导出两个单源方程。具体而言，在试探函数（$\mathbf{p}$，$\mathbf{0}$）中选取 (5) 的第一行，在试探函数（$\mathbf{0}$，$\mathbf{q}$）中选取 (5) 的第二行，可得以下单源方程：

$$
\begin{aligned}
&G^{fg}\Big(\Big(\mathcal{K}_0-\frac{1}{2}\Big)_{gf}G^{fg}\Big(-\mathcal{K}_1+\frac{1}{2}\Big)_{gf}+\\
&+\frac{\eta_0}{\eta_1}(\mathcal{T}_0)_{gg}(-G^{fg\dagger})(\mathcal{T}_1)_{ff}\Big)\,\mathbf{p}^f=G^{fg}(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{e}^{\mathrm{inc}})_g,\\
&G^{fg}\Big(\Big(\mathcal{K}_0-\frac{1}{2}\Big)_{gf}G^{fg}\Big(-\mathcal{K}_1+\frac{1}{2}\Big)_{gf}+\\
&+\frac{\eta_1}{\eta_0}(\mathcal{T}_0)_{gg}\big(-G^{fg\dagger}\big)(\mathcal{T}_1)_{ff}\Big)\mathbf{q}^f=G^{fg}(\mathbf{h}^{\mathrm{inc}}\times\hat{\mathbf{n}})_g.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

随后可在原空间中恢复这两个物理迹：

$$
\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{h})^f&=G^{fg}\big(-\mathcal{K}_1+\tfrac{1}{2}\big)_{gf}\mathbf{q}^f,\\
(\mathbf{e}\times\hat{\mathbf{n}})^f&=G^{fg}\big(-\mathcal{K}_1+\tfrac{1}{2}\big)_{gf}\mathbf{p}^f.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

尽管式（10）中的两个方程彼此不同，但它们使用相同的离散积分算子。因此，同时求解这两个方程组是一种可行的策略，因为积分算子的离散化通常是计算成本最高的步骤。这种双试探函数形式所增加的计算成本，基本上相当于将迭代次数加倍。已知，单源积分方程的协调离散（10）会产生这样的线性系统：采用 Krylov方法求解时，仅需少量 Krylov迭代。

在本文的其余部分，将讨论进一步优化求解器效率的其他策略。在以下各节中，我们将介绍一种替代离散化策略，旨在保持良好条件性，同时允许更加灵活地选择原空间和对偶空间，而不局限于传统的 RWG-BC空间。

V. 通过准亥姆霍兹分解进行一般对偶空间构造

如上一节所述，要获得混合格拉姆矩阵 $(G_{gf})_{ij}=\langle\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{g}_i,\ \mathbf{f}_j\rangle$ 的可逆且条件良好的映射，需要 BC 空间。此外，BC 空间经过专门设计，使得 $P_{\Sigma,\,f}G^{fg}P^{\dagger}_{\Sigma,\,g}=0$ [16]，其中$P_{\Sigma,\,f}$ 和 $P_{\Sigma,\,g}$ 分别表示 RWG 空间和 BC 空间中相应星子空间的准Helmholtz投影算子（本节后文将定义星投影算子）。由此可知，$G^{fg}(\mathcal{T}_h)_{gg}G^{fg\dagger}(\mathcal{T}_h)_{ff}=0$，其中$\mathcal{T}_h$ 表示单层算子的超奇异部分。

从现在起，我们将使用带有索引 f 和g 的记号，不仅表示 RWG 和 BC 空间，也表示两个一般的散度相容空间。我们分别将其称为原空间和辅助空间。令 $\mathbf{f}_i$ 表示原散度相容基函数的集合，令 $\mathbf{g}_i$ 表示辅助散度相容基函数的集合。我们用 A_{ff} 和 A_{gg}表示 Gram 矩阵 $(A_{ff})_{ij}=\langle\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j\rangle$、$(A_{gg})_{ij}=\langle\mathbf{g}_i,\mathbf{g}_j\rangle$，并用 A^{ff} 和 A^{gg} 表示它们的逆矩阵。请注意，与我们用于离散积分算子的记号相比，这些配对中没有 $\hat{\mathbf{n}}\times$ 因子。

对于空间的一般选择，G_{gf}不可逆。映射 $A^{ff}(-G^{\dagger}_{gf})A^{gg}$可以代替 Gram 矩阵的逆，但对于一般的散度相容空间，$P_{\Sigma,f}A^{ff}(-G^{\dagger}_{gf})A^{gg}P^{\dagger}_{\Sigma,g}\neq 0$。

下面，我们希望定义一个映射 Θ_{gf} 及其对偶对应项 $\Theta^{fg}=A^{ff}(-\Theta^{\dagger}_{gf})A^{gg}$，用以替代通常的$G_{gf}$和 G^{fg}，同时允许对空间作一般性选择，并且也满足 $P_{\Sigma,\,f}\Theta^{fg}P^{\dagger}_{\Sigma,\,g}=0$。

在 [18],中，这样的映射 Θ_{gf} 可通过利用准亥姆霍兹分解得到。本节将按照 [18],中给出的定义，并与我们的记号保持一致，回顾 Θ_{gf} 的实现。我们注意到，[18] 中的算子 Θ_h 对应于我们将记为 Θ^{fg}的映射的转置。

为了定义 Θ_{gf}和 Θ^{fg}，我们需要以下内容：

- 令 $\mathcal{F}_h$ 表示定义在网格 h 上的原空间，$\mathbf{f}_i$ 表示 ith 个基函数 $\mathcal{F}_h$。在高阶离散化中，它通常是 RWG 空间或 p 阶的 GWP(p) 空间。我们还引入最小的 Lagrange 标量不连续空间 $\mathcal{C}_{\mathcal{F},\,h}$ 它包含散度算子作用于$\mathcal{F}_h$所得的像。如果 $\mathcal{F}_h$ 是 GWP(p) 空间，$\mathcal{C}_{\mathcal{F},\,h}$ 则是同阶的标量不连续 Lagrange 函数空间。于是，星矩阵 Σ_{fc} 定义为 $(\Sigma_{fc})_{ij}=\langle\nabla\cdot\mathbf{f}_i,\ c_j\rangle$，其中 c_j 是同一网格上 $\mathcal{C}_{\mathcal{F},\,h}$ 的 jth 个基函数。我们将准 Helmholtz 星投影算子定义为

$$
P_{\Sigma,f}=A^{ff}\Sigma_{fc}(\Sigma^{\dagger}_{fc}A^{ff}\Sigma_{fc})^{+}\Sigma^{\dagger}_{fc},
\tag{12}
$$

其中 $^+$ 表示伪逆。$P_{\Sigma,\ f}$ 将原空间中无散函数子空间的正交补投影到L^2。

- 我们引入辅助空间 $\mathcal{G}_h$，它将发挥与 Buffa–Christiansen 空间类似的作用。只要该辅助空间是散度相容的，就可以相当一般地进行选择。我们将在数值实验中看到，辅助空间可以与其自身 $\mathcal{F}_h$ 重合，也可以选择为更高阶的 GWP 空间，包括半整数阶空间，例如 BDM 族 [28],，或者选择为与 $\mathcal{F}_h$ 阶数相同但定义在加密网格上的空间。我们还引入最大的连续拉格朗日标量空间$\mathcal{P}_{\mathcal{G},\ h}$ 使得作用于 $\mathcal{P}_{\mathcal{G},\ h}$ 上的曲面旋度算子 $\hat{}\mathbf{n}\times\nabla$ 的像属于 $\mathcal{G}_h$。如果 $\mathcal{G}_h$ 是 GWP(p) 空间，$\mathcal{P}_{\mathcal{G},\ h}$ 则是 $p+1$阶连续拉格朗日空间。随后，我们定义环矩阵 Λ_{gp}

$$(\Lambda_{gp})_{ij}=\langle\mathbf{g}_i,\hat{\mathbf{n}}\times\nabla p_j\rangle=-\langle\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{g}_i,\nabla p_j\rangle,\quad \mathbf{g}_i\in\mathcal{G}_h,\ p_j\in\mathcal{P}_{\mathcal{G},h}. \tag{13}$$

- 我们还定义从之前引入的不连续原标量空间到连续辅助标量空间的 L^2 投影。该投影由矩阵实现：

$$P^p_{\ c}=A^{pp}A_{pc}, \tag{14}$$

with

$$\begin{aligned}(A_{pc})_{ij}&=\langle p_i,c_j\rangle,\\ A^{pp}&=A_{pp}^{-1},\\ (A_{pp})_{ij}&=\langle p_i,p_j\rangle,\quad p_i\in\mathcal{P}_{\mathcal{G},h},\ c_j\in\mathcal{C}_{\mathcal{F},h}.\end{aligned} \tag{15}$$

为了构造映射 Θ_{gf}，我们考虑通常的混合格拉姆矩阵 $(G_{gf})_{ij}=\langle\hat{}\mathbf{n}\times\mathbf{g}_i,\ \mathbf{f}_j\rangle$，并将其分解为两项，分别对应原空间的亥姆霍兹分量：

$$G_{gf}=G_{gf}(\mathcal{I}^f_{\ f}-P_{\Sigma,f})+G_{gf}P_{\Sigma,f}, \tag{16}$$

其中 $\mathcal{I}^f_{\ f}$ 表示单位矩阵。映射 Θ_{gf} 是通过修改式 (16) 中的第二项构造的。项 $G_{gf}P_{\Sigma,\ f}$ 被替换为

$$G_{gf}P_{\Sigma,f}\to\Lambda_{gp}P^p_{\ c}(\Sigma^\dagger_{fc}A^{ff}\Sigma_{fc})^+\Sigma^\dagger_{fc}. \tag{17}$$

因此，我们定义

$$\Theta_{gf}=G_{gf}(\mathcal{I}^f_{\ f}-P_{\Sigma,f})+\Lambda_{gp}P^p_{\ c}(\Sigma^\dagger_{fc}A^{ff}\Sigma_{fc})^+\Sigma^\dagger_{fc}, \tag{18}$$

及其对偶

$$\Theta^{fg}=A^{ff}(-{\Theta_{gf}}^\dagger)A^{gg}. \tag{19}$$

根据 $P_{\Sigma,\ f}$ 的定义，式 (17) 中的替换等价于将链 $G_{gf}A^{ff}\Sigma_{fc}$ 替换为 $\Lambda_{gp}P^p_{\ c}$。从离散意义上说，$G_{gf}A^{ff}\Sigma_{fc}$ 表示弱梯度算子与 $\hat{}\mathbf{n}\times$的复合，而 $\Lambda_{gp}P^p_{\ c}$ 表示将 L^2 投影到连续标量空间的投影算子与精确的 $\hat{}\mathbf{n}\times\nabla$ 算子的复合。

如所期望的，映射 Θ^{fg} 满足

$$\begin{aligned}&P_{\Sigma,f}\Theta^{fg}P^\dagger_{\Sigma,g}=\\ &=P_{\Sigma,f}A^{ff}(\Sigma_{fc}(\Sigma^\dagger_{fc}A^{ff}\Sigma_{fc})^+{P^p_{\ c}}^\dagger\Lambda^\dagger_{gp})A^{gg}P^\dagger_{\Sigma,g}=0,\end{aligned} \tag{20}$$

因为 $P_{\Sigma,\ f}A^{ff}(\mathcal{I}^f_{\ f}-P_{\Sigma,\ f})^\dagger=0$ 且 $\Lambda^\dagger_{gp}A^{gg}P^\dagger_{\Sigma,\ g}=0$。

值得注意的是，在 [18],中的原始公式里，准亥姆霍兹分解是通过求逆一个鞍点系统完成的。事实上，以下关系成立：

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}A_{ff}&\Sigma_{0,fc}\\ \Sigma^\dagger_{0,fc}&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A^{ff}\\ 0\end{pmatrix}=\\ &=\begin{pmatrix}A^{ff}(A_{ff}-\Sigma_{fc}(\Sigma^\dagger_{fc}A^{ff}\Sigma_{fc})^+\Sigma^\dagger_{fc})\\ (\Sigma^\dagger_{0,fc}A^{ff}\Sigma_{0,fc})^{-1}\Sigma^\dagger_{0,fc}\end{pmatrix}=\\ &=\begin{pmatrix}(\mathcal{I}^f_{\ f}-P_{\Sigma,f})\\ (\Sigma^\dagger_{0,fc}A^{ff}\Sigma_{0,fc})^{-1}\Sigma^\dagger_{0,fc}\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{21}$$

其中 $\Sigma_{0,fc}$ 定义为 $(\Sigma_{0,fc})_{\ ij}=\langle\nabla\cdot\mathbf{f}_i,c_j\rangle$, $c_j\in\mathcal{C}_{0,\mathcal{F},h}$，而 $\mathcal{C}_{0,\mathcal{F},h}$ 是全局均值为零的分片常数拉格朗日函数空间。在（21）的左端，我们展示了 [18],中给出的鞍点系统，而右端则由定义Θ_{gf}时所使用的相同投影算子组成。因此，我们也可以将 Θ_{gf} 写成以下形式

$$\Theta_{gf}=\begin{pmatrix}G_{gf}&\Lambda_{gp}P^p_{\ c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{ff}&\Sigma_{0,fc}\\ \Sigma^\dagger_{0,fc}&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A_{ff}\\ 0\end{pmatrix}. \tag{22}$$

尽管（18）和（22）中的定义在解析上是等价的，但它们的数值实现具有不同的关键特性。

最后，我们提到，最近在高阶电场积分方程、磁场积分方程和组合场积分方程的背景下， [21] 和 [22], 中提出了类似的 Θ^{fg}定义。我们将这样的映射记为 $\tilde{\Theta}^{fg}$。在我们的记号中，$\tilde{\Theta}^{fg}$ 定义为

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}^{fg}&=A^{ff}(-\tilde{\Theta}^\dagger_{gf})A^{gg}\\ \tilde{\Theta}_{gf}&=G_{gf}-P^\dagger_{\Sigma,g}G_{gf}P_{\Sigma,f}.\end{aligned} \tag{23}$$

因此，可以直接验证所需的条件 $P_{\Sigma,f}\tilde{\Theta}^{fg}P^\dagger_{\Sigma\ ,g}=0$。在这种情况下，需要在原空间和辅助空间中实现星形准Helmholtz投影算子。准Helmholtz投影算子的实现需要对鞍点系统进行如（21）所示的求逆，或计算（12）中的伪逆，因此这是一项开销较大的操作。可以采用迭代求逆，但在两种实现中都需要预条件策略。与 Θ_{gf} 相比，Θ_{gf} 的定义在计算上可能更具优势，因为它只需要实现 $P_{\Sigma,f}$，且在该公式中不需要$P_{\Sigma,g}$。相反，它需要实现 Λ_{gp}（这是一个稀疏矩阵），并对 A_{pp} 求逆；后者是稀疏对称正定且条件性良好的矩阵。

A. 亥姆霍兹投影算子的高效实现

对于低阶离散化，可以采用代数多重网格技术来高效逼近算子 $(\Sigma^\dagger_{fc}A^{ff}\Sigma_{fc})^+$ [29], [30]的作用。然而，在高阶情形下，相应的算子会失去稀疏性，标准的黑盒多重网格策略因而不再能够直接应用。

我们强调，亥姆霍兹投影算子的高效实现是可以构造的，其中包括针对高阶离散化而定制的策略。这些方法依赖于对式（21）左端相关鞍点公式进行适当的预条件。

对这些实现方面进行详细分析超出了本文的范围，相关内容将在另一篇工作中报告。在本文中，我们仅关注所提出公式的解析性质以及投影算子所起的作用。

VI. 使用 Θ对单源方程进行一般协调离散

这里我们介绍单源方程的离散化，其中使用 Θ^{fg} 代替混合格拉姆矩阵的逆。按照（8）的结构，在针对辅助未知量采用单重试探函数（$\mathbf{p}$，$\mathbf{0}$）时，将 Θ^{fg} 纳入单源方程如下：

$$\Theta^{fg}\Big(\Big(\mathcal{K}_0-\frac{1}{2}\Big)_{gf}\Theta^{fg}\Big(-\mathcal{K}_1+\frac{1}{2}\Big)_{gf}+ +\frac{\eta_0}{\eta_1}(\mathcal{T}_0)_{gg}(-\Theta^{fg\dagger})(\mathcal{T}_1)_{ff}\Big)\mathbf{p}^f=\Theta^{fg}(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{e}^{\mathrm{inc}})_g. \tag{24}$$

随后，两个物理迹可表示为

$$(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{h})^g=\frac{1}{\eta_1}\Theta^{fg\dagger}(\mathcal{T}_1)_{ff}\mathbf{p}^f,\qquad (\mathbf{e}\times\hat{\mathbf{n}})^f=\Theta^{fg}\Big(-\mathcal{K}_1+\frac{1}{2}\Big)_{gf}\mathbf{p}^f, \tag{25}$$

在上述格式中，我们保留了协调离散的结构：单层算子采用对称方式离散，其中一个位于原空间，另一个位于辅助空间；而双层算子和恒等算子均采用混合格式离散。简言之，（24）中的离散化与（8）相同，但将BC空间替换为一般辅助空间，并将G^{fg} 替换为 Θ^{fg}。对偶空间隐式构造于 $\Theta^{fg\dagger}$的值域中，作为辅助空间的子空间。与电场积分方程和磁场积分方程的情形不同，在单源离散化中，我们使用 Θ^{fg} 和 $\Theta^{fg\dagger}$ 的像来展开未知量，而不仅仅是利用它们构造预条件子。

在（25）中，电迹在 Θ^{fg} 的像中展开，该像位于原空间中；而磁迹在 $\Theta^{fg\dagger}$ 的像中展开，该像位于辅助空间中。[18] 中建立的逼近性质仅适用于在 Θ^{fg} 的像中的展开。遗憾的是，对于 $\Theta^{fg\dagger}$ 的值域，尚未证明类似的逼近估计。因此，这两个迹可能具有不同的精度。第 VII 节通过数值实验研究了该方案对精度的影响。再次使用双重试探函数（$\mathbf{p}$，$\mathbf{0}$）-（$\mathbf{0}$，$\mathbf{q}$）可以得到一种离散化，使两个迹都能在 Θ^{fg} 的像中展开。在这种情况下，我们得到两个单源方程组

$$\begin{aligned}&\Theta^{fg}\Big(\Big(\mathcal{K}_0-\frac{1}{2}\Big)_{gf}\Theta^{fg}\Big(-\mathcal{K}_1+\frac{1}{2}\Big)_{gf}+ +\frac{\eta_0}{\eta_1}(\mathcal{T}_0)_{gg}(-\Theta^{fg\dagger})(\mathcal{T}_1)_{ff}\Big)\mathbf{p}^f=\Theta^{fg}(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{e}^{\mathrm{inc}})_g.\\ &\Theta^{fg}\Big(\Big(\mathcal{K}_0-\frac{1}{2}\Big)_{gf}\Theta^{fg}\Big(-\mathcal{K}_1+\frac{1}{2}\Big)_{gf}+ +\frac{\eta_1}{\eta_0}(\mathcal{T}_0)_{gg}(-\Theta^{fg\dagger})(\mathcal{T}_1)_{ff}\Big)\mathbf{q}^f=\Theta^{fg}(\mathbf{h}^{\mathrm{inc}}\times\hat{\mathbf{n}})_g,\end{aligned} \tag{26}$$

它们共享相同的离散积分算子。

随后通过以下方式计算两个物理迹

$$(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{h})^f=\Theta^{fg}\Big(-\mathcal{K}_1+\frac{1}{2}\Big)_{gf}\mathbf{q}^f,\qquad (\mathbf{e}\times\hat{\mathbf{n}})^f=\Theta^{fg}\Big(-\mathcal{K}_1+\frac{1}{2}\Big)_{gf}\mathbf{p}^f. \tag{27}$$

在（24）和（26）中，$_{1\,2}$ 项中的离散恒等算子由 $\Theta^{fg}G_{gf}$ 表示，它与单位矩阵并不一致。对 $\Theta^{fg}G_{gf}$ 进行谱分析表明，其最大特征值仍接近于 1，而最小特征值则小得多，具体取决于所选的辅助空间（见表 I）。我们将看到，这一谱性质会影响所得系统的条件性。特别是，数值结果表明，当辅助空间比原空间高两个阶时，可以得到条件良好的系统；对于基于 $\tilde{\Theta}^{fg}$ 的离散化，这一点已在 [21] 和 [22] 中得到观察。

表 I：$\Theta^{fg}G_{gf}$ 在不同原空间和辅助空间下的特征值。RWG-RWG 情形的特征在于，其核具有 $N_{\Sigma,f}-N_{\Lambda,f}$ 个零特征值，其中 $N_{\Sigma,f}$, $N_{\Lambda,f}$ 分别为 RWG空间的星子空间和局部环子空间的维数。

RWG-RWG	RWG-BDM	RWG-GWP(1)	RWG-GWP(2)
1.0004	0.995	0.996	0.998
0.9999	0.994	0.995	0.998
⋮	0.994	0.993	0.998
0.065	⋮	⋮	⋮
1.25×10^{-15}	⋮	⋮	⋮
⋮	0.068	0.127	0.706
7.91×10^{-20}	0.063	0.120	0.705

A. 使用单位矩阵的临时方案。

最后，我们引入一种临时方案，其中单源方程按照式 (24) 中的 Θ^{fg} 进行离散化，但采用不同的恒等算子表示方式。该方案的动机来自观察到的 $\Theta^{fg}G_{gf}$谱行为。具体而言，我们将 $\Theta^{fg}(\mathcal{K}_i-\frac{1}{2})_{gf}$的$_{1\,2}$项中出现的乘积 $\Theta^{fg}G_{gf}$ 替换为单位矩阵，记作 $\mathcal{I}^f{}_f$。在 RWG-BC 情形下，逆混合格拉姆矩阵 G^{fg}的离散化使恒等算子表示为 $G^{fg}G_{gf}$，按定义它就是单位矩阵。相反，正如上文所述，$\Theta^{fg}G_{gf}$ 仅

近似恒等算子，其谱取决于所选的辅助空间。由此得到的离散化为

$$\Big(\Big(\Theta^{fg}(\mathcal{K}_0)_{gf}-\frac{1}{2}\mathcal{I}^f{}_f\Big)\Big(-\Theta^{fg}(\mathcal{K}_1)_{fg}+\frac{1}{2}\mathcal{I}^f{}_f\Big)+ +\frac{\eta_0}{\eta_1}\Theta^{fg}(\mathcal{T}_0)_{gg}(-\Theta^{fg^\dagger})(\mathcal{T}_1)_{ff}\Big)\mathbf{p}^f=\Theta^{fg}(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{e}^{\mathrm{inc}})_g, \tag{28}$$

物理迹可通过应用（25）获得。

这种临时离散化的动机在于， $\Theta^{fg}G_{gf}$充当谱滤波器，较小的特征值对应于表示不佳的模态。我们将在数值结果中展示，对于辅助空间的某些选择，这种表示可能会恶化系统的条件数。所提出的替换 $\Theta^{fg}G_{gf}\to\mathcal{I}^f{}_f$可以解释为去除这种伪谱滤波，将其替换为对所有分量均匀作用的处理。预计这将减轻条件数的恶化。

请注意，在物理迹表示中，电迹表示为（$\mathbf{e}\times\hat{}\,\mathbf{n}$）$^f=\Theta^{fg}\Big(-\mathcal{K}_1+\frac{1}{2}\Big)_{gf}\mathbf{p}^f$，其中单位算子仍表示为 $\Theta^{fg}G_{gf}$。在系统的离散化过程中，我们应用替换 $\Theta^{fg}G_{gf}\to\mathcal{I}^f{}_f$以改善条件数；而在迹的计算中，单位算子采用与积分算子离散化一致的表示方式，因为观察发现，这种选择能够提供最准确的数值结果。

可以使用双重试探函数来获得 Θ^{fg}像中的两个迹。在这种情况下，我们求解

$$\Big(\Big(\Theta^{fg}(\mathcal{K}_0)_{gf}-\frac{1}{2}\mathcal{I}^f{}_f\Big)\Big(-\Theta^{fg}(\mathcal{K}_1)_{fg}+\frac{1}{2}\mathcal{I}^f{}_f\Big)+ +\frac{\eta_0}{\eta_1}\Theta^{fg}(\mathcal{T}_0)_{gg}(-\Theta^{fg^\dagger})(\mathcal{T}_1)_{ff}\Big)\mathbf{p}^f=\Theta^{fg}(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{e}^{\mathrm{inc}})_g,$$
$$\Big(\Big(\Theta^{fg}(\mathcal{K}_0)_{gf}-\frac{1}{2}\mathcal{I}^f{}_f\Big)\Big(-\Theta^{fg}(\mathcal{K}_1)_{fg}+\frac{1}{2}\mathcal{I}^f{}_f\Big)+ +\frac{\eta_1}{\eta_0}\Theta^{fg}(\mathcal{T}_0)_{gg}(-\Theta^{fg^\dagger})(\mathcal{T}_1)_{ff}\Big)\mathbf{q}^f=\Theta^{fg}(\mathbf{h}^{\mathrm{inc}}\times\hat{\mathbf{n}})_g, \tag{29}$$

并通过应用（27）获得物理迹。

采用（28）和（29）中的所提方案，可以选择维数小于重心细分上RWG空间的辅助空间。例如，可以选择RWG空间本身或BDM空间作为辅助空间。这使得所有积分算子的离散化计算成本更低，同时保持良好的条件数。另一方面，单位算子和积分算子的不同表示可能会引入一致性误差。我们无法事先评估这些误差的大小，但将在数值结果中看到，方案（28）-（25）和（29）-（27）在降低计算成本的同时，仍能给出非常准确的结果。这表明，替换主要影响系统的谱性质，而引入的误差仍然有限。

VII. 数值结果

在数值实验中，我们模拟沿ˆz方向传播且沿ˆx方向极化的入射平面波的散射，该波以相对参数为 $\epsilon_r=2.4$和$\mu_r=1.0$的散射体，在固定波数 $\kappa_0=1.0\mathrm{m}^{-1}$下发生入射，对应频率为47.7MHz。几何体的边界采用平面单纯形三角形单元进行离散化。

我们给出了尺寸为1.0米 $\times1.0$米 $\times0.5$米的长方体散射体以及半径为单位半径$R=1.0$米的球体的结果。

我们针对不同的空间和试探函数选择求解单源方程。具体而言，我们研究以下离散化：

- 离散化 (24)、(26)，其中 Θ^{fg}，采用 RWG 作为原空间，并选择不同的辅助空间，
- 离散化 (8)、(10)，采用混合格拉姆矩阵 G^{fg} 的通常逆矩阵，并使用 RWG 和 BC 分别作为原空间和对偶空间，
- 离散化 (28)、(29)，其中 Θ^{fg}，采用 RWG 同时作为原空间和辅助空间，
- 离散化 (24)、(26)，其中 Θ^{fg}，采用 GWP(1) 和 GWP(2) 作为高阶原空间，并分别采用 GWP(3) 和 GWP(4) 作为高阶辅助空间。

在第一种情况下，我们研究以 Θ^{fg} 为特征、并采用 RWG 空间作为原空间的离散化，仅针对长方体几何体分析单重构式中系统的条件性。对于其他所有选择，我们还研究离散化的精度：比较单重试探函数所得的误差（其中磁迹在对偶（辅助）空间中展开）与双重试探函数所得的误差（其中两个迹均在原空间中展开）。

为了测试每种方法的精度，我们报告了不同物理量的相对误差。误差是相对于参考解计算的。对于长方体，参考解是在精细参考网格上求解 PMCHWT方程获得的。具体而言，对于单源实验，我们研究了网格尺寸区间[0.054 m 0。4m]，，而 PMCHWT参考解所使用的网格尺寸为 $h_{\mathrm{ref}}=0.0176\mathrm{m}$。对于球体，参考解使用 Mie级数获得。

我们通过计算电场 $|\mathbf{E}-\mathbf{E}_{\mathrm{ref}}|$在长方体的 $y=0.5$ m $z=0.25$m 线段以及球体的 $y=0.0\mathrm{m}$ $z=-0.775$ m 线段上的差的范数，报告近场中的相对误差；同时还报告两种几何体在 x-z 平面上各角度$\theta\in[0,360^\circ]$ 对应的双基地雷达散射截面的相对误差。电近场由两部分贡献之和计算得到：第一部分是将单层势作用于等效电流（即磁迹，该磁迹根据试探函数的不同，在原空间或对偶空间中展开）得到的；第二部分是将双层势作用于等效磁流（即电迹，始终在原空间中展开）得到的。更准确地说，根据表示定理，外部电场通过使用外部波数 κ_0对这些势进行求值并加上入射场得到。相反，内部电场则通过使用内部波数 κ_1对相同的势进行求值得到，所用电流取相反符号，且不加上入射场。

对于长方体，我们还能够分别计算每个物理迹上的误差。这些误差通过计算该迹与 PMCHWT参考解给出的相应迹之间的范数得到。对于这些全局范数误差，我们使用以下范数；该范数等价于 $H^{-1/2}(\mathrm{div};\Gamma)$ 上的能量范数

$$\mathrm{err}_{\mathrm{div},-1/2}(\mathbf{j}_h) = \Bigg(\int_\Gamma \int_\Gamma dS' dS \Big(\kappa \frac{(\mathbf{j}_h(\mathbf{r}) - \mathbf{j}_{\mathrm{ref}}(\mathbf{r}))e^{-\kappa R}(\bar{\mathbf{j}}_h(\mathbf{r}') - \bar{\mathbf{j}}_{\mathrm{ref}}(\mathbf{r}'))}{4\pi R} + \\ + \frac{\nabla\cdot(\mathbf{j}_h(\mathbf{r}) - \mathbf{j}_{\mathrm{ref}}(\mathbf{r}))e^{-\kappa R}\nabla'\cdot(\bar{\mathbf{j}}_h(\mathbf{r}') - \bar{\mathbf{j}}_{\mathrm{ref}}(\mathbf{r}'))}{4\pi\kappa R} \Big) \Bigg)^{\frac{1}{2}}. \tag{30}$$

A. 长方体散射

a) 使用 Θ^{fg}。*RWG* 作为原空间。*RWG*、*BDM*、*GWP(1)*、*GWP(2)* 作为辅助空间：本文报告了采用 Θ^{fg} 对单源方程进行离散化所得到的结果，其中使用最低阶 RWG 原始基函数，并选择不同的辅助空间，作为 RWG-BC 方案的替代离散化方式。在本段中，我们将讨论限制在单重构式上，即求解 (24)-(25)。

我们考虑的第一种情况是辅助空间本身就是 RWG 空间。这种配置也曾在 [18] 中针对预条件化EFIE进行研究。该情况很有意义，因为其中既不采用网格细化，也不使用高阶基函数，从而降低了积分算子的组装成本。事实上，在这种情况下，所有算子都仅使用 RWG函数进行离散化：$\mathcal{O}_{gf} = \mathcal{O}_{ff}$。在这种离散化中，$\Theta^{ff}$、$G_{ff}$、$\Theta^{ff}G_{ff}$ 以及 (24) 的左端都是奇异矩阵，其核的维数为 $N_{\Sigma,\,f} - N_{\Lambda,\,f}$，其中 $N_{\Sigma,\,f}$，$N_{\Lambda,\,f}$分别表示星形子空间和局部环子空间的维数。

这个核的存在意味着，最终的解位于原始 RWG 空间的一个子空间中。

尽管对积分算子进行离散化的计算成本显著降低，但以这种方式离散化的单源方程组仍表现出轻微的病态。图3给出了长方体几何体中迭代次数随网格尺寸的变化。与典型的条件良好的单源方程组相比，所需迭代次数更多，并且随着网格细化而略有增加。这种现象并非由核引起，而是由于 $\Theta^{ff}G_{ff}$ 的像中存在残余病态性（见表 I 和表 II）。迭代次数的增长是这种配置的主要局限，使得较低的积分算子离散化成本优势仅在系统规模达到一定限度之前有效。

选择BDM空间作为辅助空间后，系统不再奇异。这一选择也曾在[18]中针对电场积分方程进行过研究。BDM空间的较小维数使得这一选择仍然具有吸引力，可以抵消积分算子离散化所需的计算成本。然而，对于 $\Theta^{fg}G_{gf}$ 以及整个单源系统，都观察到了类似的病态性，从而限制了这一选择的优势。选择GWP(1)作为辅助空间时，也会出现类似的轻度病态性，如图3所示。

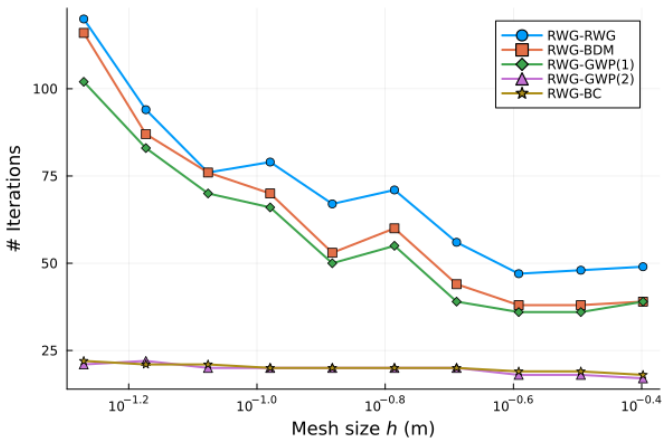


图3：以 RWG 作为原空间、采用不同辅助空间时，长方体的迭代次数随网格尺寸的变化；迭代至残差小于 10^{-8}。每种空间选择仅报告单一试探函数的情况。较小的辅助空间会受到轻微病态的影响。

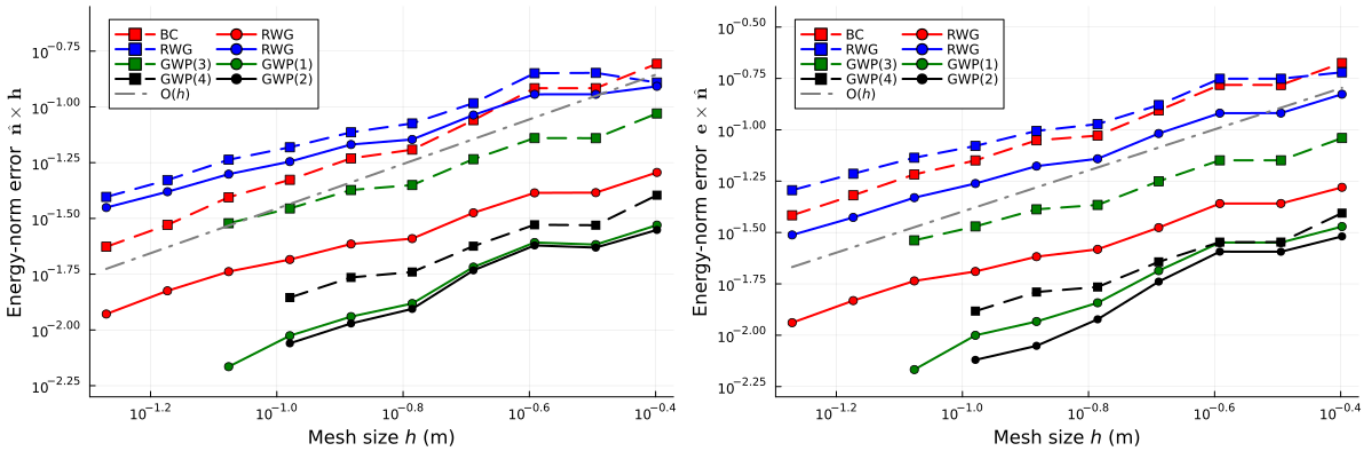
选择GWP(2)作为辅助函数后，$\Theta^{fg}G_{gf}$变得条件良好，式(24)的左端也是如此。这一观察结果与 [21]和 [22] 中采用式(23)定义的替代 $\tilde{\Theta}^{fg}$ 所报告的结果一致。另一方面，这种离散化需要使用一个规模与重心细分上定义的RWG空间相当的辅助空间来组装积分算子。因此，这种离散化的计算成本与RWG-BC离散化的计算成本相近。

选择较小辅助空间时观察到的残余病态性促使我们采用（28）和（29）中的离散化。在接下来的段落中，我们将误差分析重点放在：采用通常混合格拉姆矩阵G^{fg}的RWG-BC离散化、仅使用 RWG 函数的离散化（28）和（29），以及采用 Θ^{fg} 的高阶离散化。

表 II：长方体几何体的离散单源系统（24）左端的条件数。RWG-RWG 情形所报告的条件数通过取第一个和最后一个非零特征值之比得到。

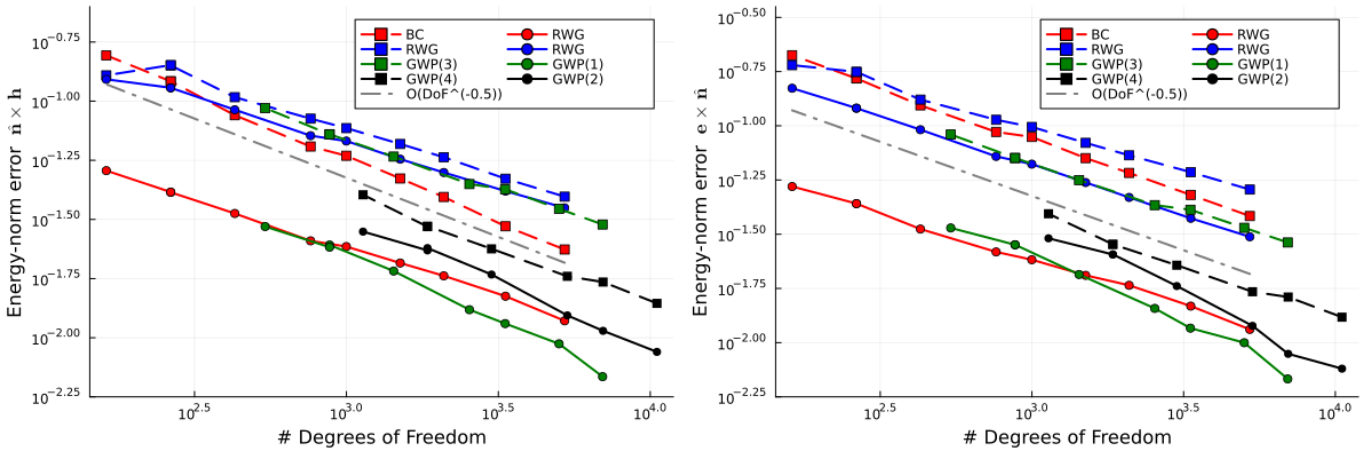
h	RWG-RWG	RWG-BDM	RWG-GWP(1)	RWG-GWP(2)
0.4	162	174	183	7.9
0.2	85	78	65	8.9
0.1	197	350	355	9.8
0.05	522	1484	1498	10.5

*b) RWG*作为原空间，*BC*作为对偶空间：在此，我们考虑分别选取RWG函数和BC函数作为原始空间和对偶空间所得到的离散化。我们比较采用单重试探函数求解（8）–（9）所得的解的精度，以及采用双重试探函数求解（10）–（11）所得的解的精度。此外，通过求解双重试探函数系统（10），我们不仅能像（11）中那样获得在RWG空间中展开的两个迹，还能够



（a）磁迹的能量范数相对误差。　　（b）电迹的能量范数相对误差。

图 4：长方体几何中磁迹（左）和电迹（右）的能量范数相对误差随网格尺寸的变化。颜色表示离散化方式：红色表示带有 G^{fg} 的 RWG-BC，蓝色表示带有 Θ^{ff} 和单位矩阵的 RWG-RWG-Id，绿色表示带有Θ^{fg}的 GWP(1)-GWP(3)，黑色表示带有 Θ^{fg}的 GWP(2)-GWP(4)。带虚线且以方形标记的数据表示在对偶（辅助）空间中的展开。带实线且以圆形标记的数据表示在原空间中的展开。对偶（辅助）空间中的展开所受误差大于原空间中的展开。在高阶原空间中的展开可进一步提高精度。



（a）磁迹的能量范数相对误差。　　（b）电迹的能量范数相对误差。

图 5：长方体几何体中磁迹（左）和电迹（右）的能量范数相对误差随系统自由度数量的变化。颜色和标记约定与图 4 相同。采用高阶原空间进行展开时，收敛斜率略有改善。

通过计算将两个迹都展开在BC空间中

$$
\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{h})^g &= \frac{1}{\eta_1} G^{fg\dagger} (\mathcal{T}_1)_{ff} \mathbf{p}^f, \\
(\mathbf{e} \times \hat{\mathbf{n}})^g &= -\eta_1 G^{fg\dagger} (\mathcal{T}_1)_{ff} \mathbf{q}^f.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

通过这种方式，我们可以比较原函数和对偶基展开对这两个量所达到的精度。在图 4和图 5中，我们展示了能量范数中的相对误差相对于网格尺寸和系统自由度的标度关系，其中后者对应于离散化中原函数的数量。图 4-5中的数值结果表明，RWG原函数展开（红色圆圈标记的实线）始终相较于 BC 对偶空间展开（红色方形标记的虚线），提高了相应量的精度。对于 RWG 和 BC 展开，均未观察到渐近标度的差异，即对应于 $O(h)$。

对于近场误差和远场误差，我们比较了单重试探函数形式和双重试探函数形式。图6展示了相对近场误差。尽管能量范数图显示，仅使用原始空间展开具有明显优势，但近场图并未显示出明显的定性差异。相反，图6显示，在内部区域，两种方法的误差处于同一量级，而单重试探函数形式在外部区域的误差较小。图7展示了.....曲线

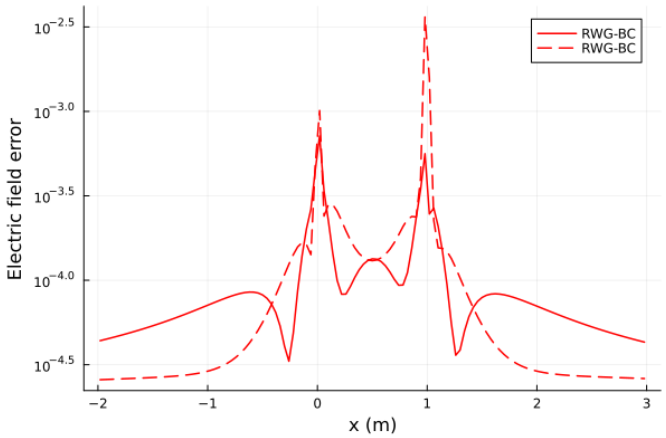


图6：采用RWG-BC离散化时，长方体几何沿 $y = 0.5$ m、$z = 0.25$m直线，在网格尺寸为 $h = 0.054$m且具有5226个自由度条件下的近场相对误差。虚线对应单重试探函数，实线对应双重试探函数。尖峰对应与长方体表面的交点，此处求积误差占主导地位。在内部区域和表面附近，误差处于同一数量级；而单重试探函数的结果在外部区域显示出更小的误差。

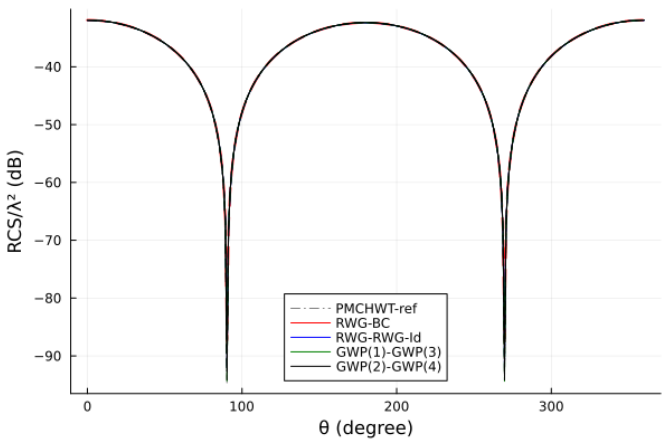


图7：长方体几何的双基地雷达散射截面。

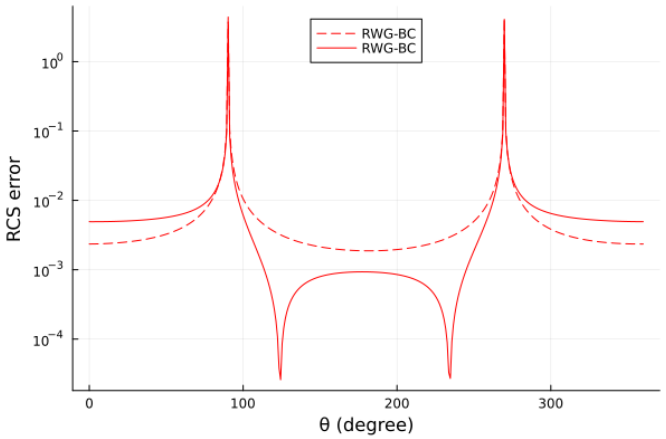


图8：长方体几何采用 RWG-BC 离散化、网格尺寸为 $h = 0.054$m 且含有 5226 个自由度时，双基地雷达散射截面的相对误差。虚线：单重试探函数。实线：双重试探函数。在 $\theta \approx 180°$ 附近的角度范围内，双重试探函数的误差较小。

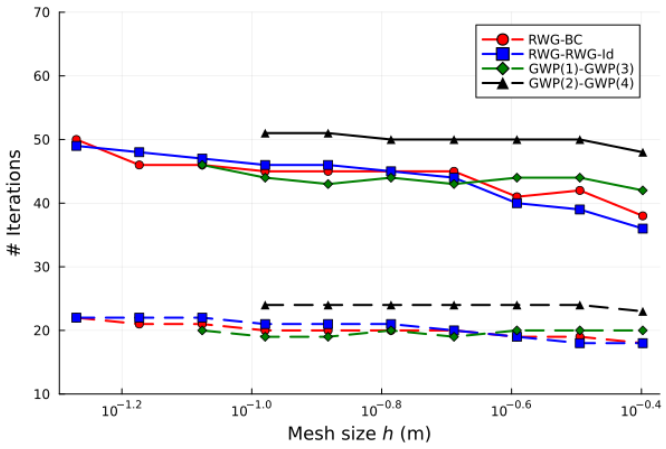


图9：长方体在采用最低阶和高阶离散化时，达到小于 10^{-8} 的残差所需的迭代次数与网格尺寸的关系。虚线表示单重试探函数公式。实线表示双重试探函数中两个求解器的迭代次数之和。

双站雷达散射截面，而图8展示了其相对误差。可以看出，对于接近 $\theta \approx 180°$ 的观测角，双重试探函数可提高精度；而在 $\theta \approx 0°$ 附近，误差则略大。

c) 采用 Θ^{fg} 和单位矩阵进行离散化。*RWG*同时作为原始空间和辅助空间：我们研究了使用RWG同时作为原始空间和辅助空间、采用离散化（28）和（29）所得的解。所有算子均仅使用RWG函数进行离散化： $\mathcal{O}_{gf} = \mathcal{O}_{ff}$。

采用这一策略的主要动机是降低积分算子相关的离散化成本。在共形RWG-BC格式（8）中，对重心细分后的网格进行离散化的单层算子需要计算 $36N_e^2$ 个相互作用积分，而采用混合格式离散化的双层算子则需要 $12N_e^2$个相互作用积分，其中 N_e 表示网格边的数量。在所提出的格式中，每个算子只需计算 N_e^2 个积分，因为其中仅涉及RWG函数。这大幅降低了组装成本。在单源情形下，双参数方法等其他低成本积分策略并不适用，因为正则化算子是方程的内在组成部分，而不仅仅是预条件子。

我们注意到，使用快速多极子方法（FMM）或例如通过自适应交叉近似（ACA）驱动的 H矩阵方法来降低内存成本和计算复杂度时，必须显式计算的积分数量会减少到大约 $O(N)$，这使得所提方案的相对影响减弱。尽管如此，近场双重表面积分仍然是计算成本高昂的操作。

图9显示，迭代行为保持稳定，

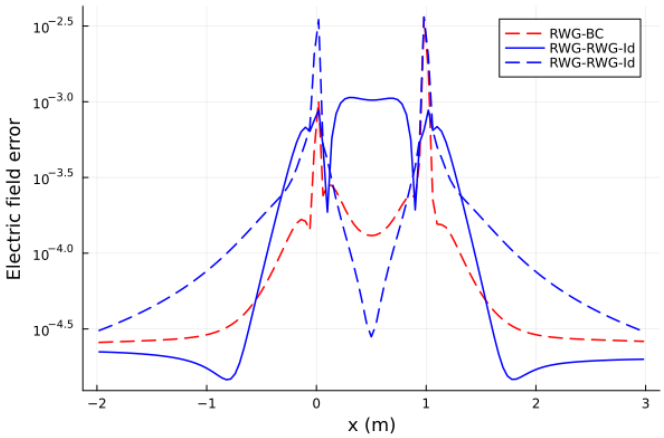


图10：采用 RWG-RWG-Id离散化的长方体几何体在近场中的相对误差，沿直线$y = 0.5\text{m}$、 $z = 0.25\text{m}$，在 $h = 0.054\text{m}$处，且具有 5226 个自由度。虚线：单重试探函数。实线：双重试探函数。单重试探函数在内部区域产生的误差较小，而双重试探函数在外部区域产生的误差较小。与 RWG-BC 情形相比，RWG-RWG-Id离散化根据所选试探函数的不同，在内部区域或外部区域具有略高的精度。

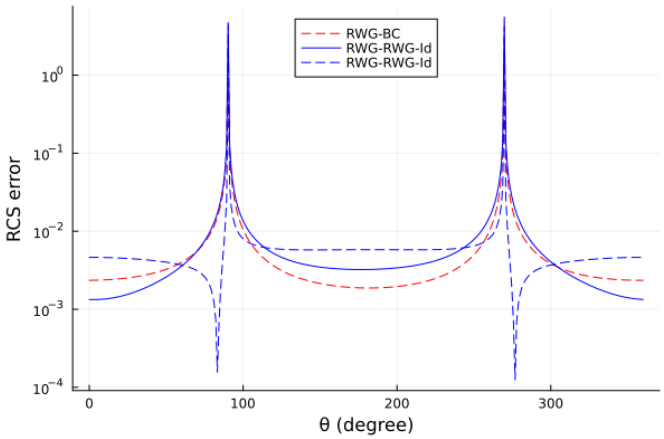


图11：采用 RWG-RWG-Id离散化的长方体几何体在双基地雷达散射截面中的相对误差，网格尺寸为 $h = 0.054$ m，且具有 5226 个自由度。虚线：单重试探函数。实线：双重试探函数。RWG-RWG-Id离散化中双重试探函数的误差与 RWG-BC离散化中的误差大小相近。

这表明，由于恒等算子采用单位矩阵表示，系统的良好条件数基本得以保留。

在单重试探函数中，物理迹通过以下方式获得

$$
\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{h})^f &= \frac{1}{\eta_1} \Theta^{ff^\dagger} (\mathcal{T}_1)_{ff} \mathbf{p}^f, \\
(\mathbf{e} \times \hat{\mathbf{n}})^f &= \Theta^{ff} \Big(-\mathcal{K}_1 + \frac{1}{2} \Big)_{ff} \mathbf{p}^f,
\end{aligned}
\tag{32}
$$

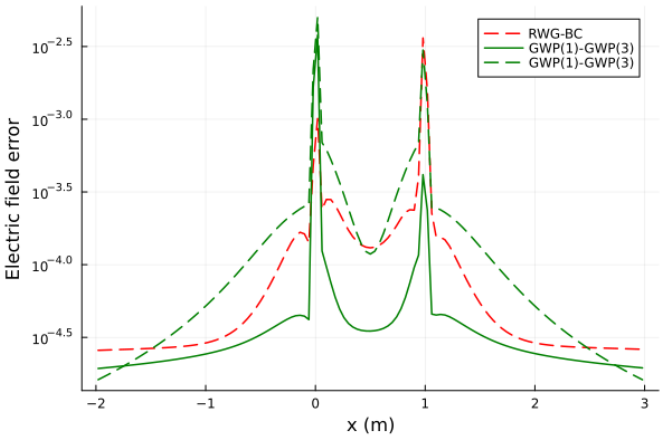


图12：采用 GWP(1)-GWP(3) 离散化、原空间中有 5010 个自由度时，长方体几何的近场相对误差，$h = 0.105\text{m}$。虚线：单重试探函数。实线：双重试探函数。与单重试探函数相比，双重试探函数在散射体附近具有更高的精度。与自由度数相近（5226）的最低阶 RWG-BC 结果相比，双重试探函数形式在外部区域的精度相近，在内部区域的精度更高。

而在双重试探函数中，我们得到

$$
\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{h})^f &= \Theta^{ff} \Big(-\mathcal{K}_1 + \frac{1}{2} \Big)_{ff} \mathbf{q}^f, \\
(\mathbf{e} \times \hat{\mathbf{n}})^f &= \Theta^{ff} \Big(-\mathcal{K}_1 + \frac{1}{2} \Big)_{ff} \mathbf{p}^f.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

尽管两种试探函数中磁迹都在 RWG空间中展开，但这两种表示并不相同，因为一种是在 $\Theta^{ff^\dagger}$ 的像中展开，另一种是在 Θ^{ff}的像中展开。

图 4-5 中的能量范数误差表明，在 $\Theta^{ff^\dagger}$ 的像中展开的量（蓝色方块标记的虚线）所受误差略大于在 Θ^{ff} 的像中展开的量（蓝色圆圈标记的实线）。从图10可以看出，单重构式在内部区域的近场精度更高，而双重试探函数形式在外部区域的精度更高。双重试探函数形式的双基地雷达散射截面远场精度略高（图11）。与相同网格尺寸下的 RWG-BC 离散化相比，能量范数误差较大，但根据所选试探函数的不同，在外部区域或内部区域的近场误差较小。双重试探函数形式的远场精度与 RWG-BC 离散化的精度相近。

结果表明，用单位矩阵表示恒等算子能够有效保持系统的条件性，而引入的一致性误差仅在迹的能量范数方面较为显著。采用双重试探函数形式时，这种误差不会显著影响外部近场与远场。

d) 使用 Θ^{fg} 进行高阶离散。*GWP(1)*、*GWP(2)* 作为原空间，*GWP(3)*、*GWP(4)* 作为辅助空间：接下来我们考虑采用高阶

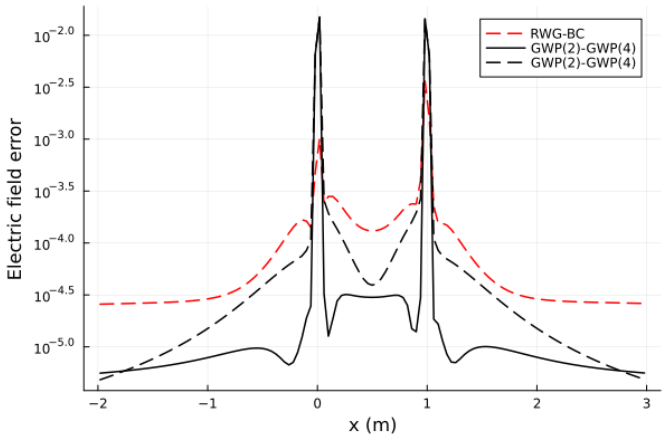


图 13：长方体几何体在 $h = 0.164$m、原空间中具有 5334 个自由度时，采用 GWP(2)-GWP(4) 离散化得到的近场相对误差。虚线：单重试探函数。实线：双重试探函数。双重试探函数在散射体附近的精度更高。与自由度相近（5226）的最低阶 RWG-BC 结果相比，GWP(2)-GWP(4) 离散化在两种试探函数下的单位自由度精度都更高。

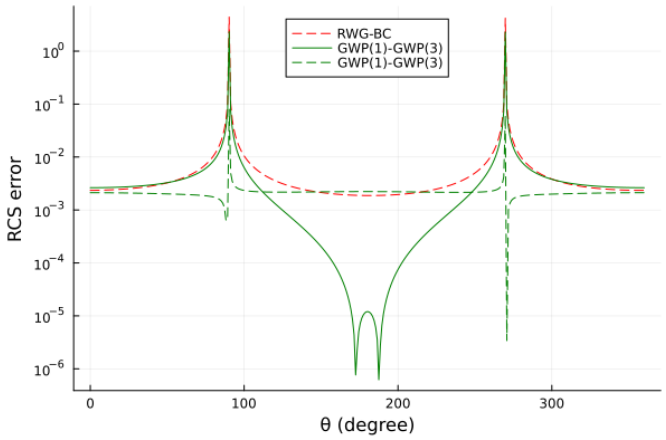


图 14：长方体几何体在 $h = 0.105$m、具有 5010 个自由度时，采用 GWP(1)-GWP(3) 离散化得到的双基地雷达散射截面相对误差。虚线：单重试探函数。实线：双重试探函数。在 $\theta \approx 180°$ 附近的角度范围内，双重试探函数的误差较小。与自由度相近（5226）的最低阶 RWG-BC 结果相比，双重试探函数在 $\theta \approx 180°$ 附近的角度范围内精度更高，而单重试探函数的精度相近。

GWP 空间同时用作原空间和辅助空间。我们特别探讨了原空间为 GWP(i) 且 $i = 1$、2，辅助空间为 GWP($i+2$) 的情形。在单重构式中，我们求解 (24)-(25)。在双重试探函数形式中，我们求解 (26)-(27)。

在图9中，我们展示了长方体算例中相对于网格尺寸的迭代次数。我们观察到，对于这些选择，其表现具有良态行为，这与[21]和 [22]中的观察类似。与最低阶算例相比，在重心细分上选择 GWP($i+2$) 而不是 GWP(i) 作为

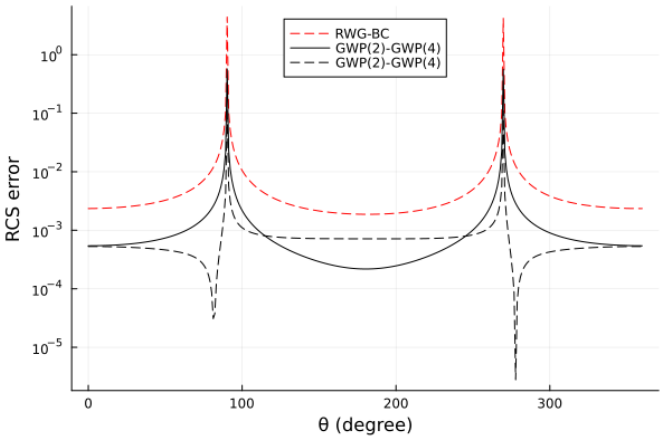


图 15：采用 GWP(2)-GWP(4) 离散化时，长方体几何体在 $h = 0.164$m 和 5334 个自由度下的双基地雷达散射截面相对误差。虚线：单重试探函数。实线：双重试探函数。在约为 $\theta \approx 180°$ 的角度处，双重试探函数的误差略小。与具有相近的 5226 个自由度的最低阶 RWG-BC 结果相比，两种试探函数均能以每个自由度获得更高的精度。

辅助空间可减少 $i > 0$的自由度总数。事实上，一般 GWP(i) 空间的基函数数量为 $N_i = (i+1)(\frac{2}{3}i+1)N_e$，其中 N_e是网格的边数。辅助空间与原空间中的函数数量之比为

$$\frac{N_{\text{Auxil.}}}{N_{\text{Primal}}} = \frac{N_{i+2}}{N_i} = \frac{(i+3)(2i+7)}{(i+1)(2i+3)}, \tag{34}$$

这小于对于任意 $i > 0$ 而言与重心细化相关的 6 倍因子。特别是在我们的情况下，$\frac{N_{i+2}}{N_i} \approx 3.6$，2。619，分别对应 $i = 1$，2。

如图 4 所示，在高阶原函数和辅助 GWP 函数中展开的迹，对于所有网格尺寸，其能量范数误差均低于最低阶展开，这符合预期，因为前者具有更多的基函数。以自由度为横坐标绘制时，高阶离散化的能量范数误差对于原始空间展开表现出略有改善的渐近收敛特性（图 5）；对于 GWP(1) 原始函数展开，其每个自由度的精度也有所提高。与相应的高阶辅助空间展开相比，高阶原始空间展开在能量范数方面系统性地提高了精度。

关于近场精度，在这两种情况下，双重试探函数公式在散射体附近产生的误差均小于相应的单一试探函数形式（图 12–13）。对于远场结果，双重试探函数仅在约 $\theta \approx 180°$ 的观测角范围内表现出更高的双基地雷达截面精度（图 14–15）；在 $\theta \approx 0°$ 附近则观察到略大的误差，这与最低阶离散的情况类似。

与 RWG-BC离散化相比，在两种双重试探函数形式中，GWP(2)- GWP(4) 离散化在每个自由度对应的近场和远场精度方面均取得了明显提升，而 GWP(1)-GWP(3) 离散化则带来

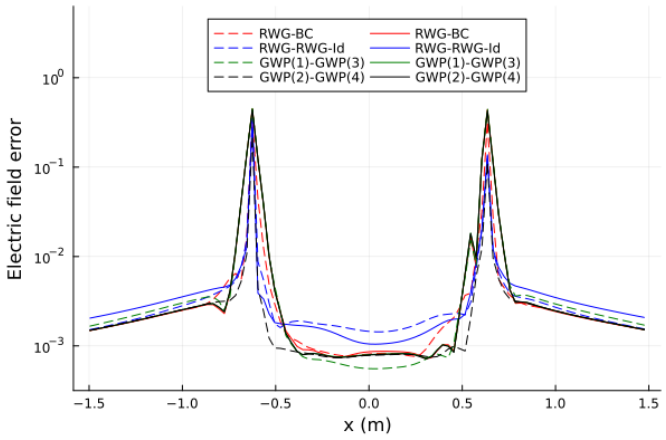


图 16：球体沿直线 $y = 0$m、 $z = -0.775$m，在网格尺寸为 $h = 0.164$m 时的近场相对误差。尖峰对应于与球体表面的交点，此处求积误差占主导地位。虚线曲线：单重试探函数。实线曲线：双重试探函数。在试探函数和离散化方式的不同选择之间，未观察到显著的精度差异。

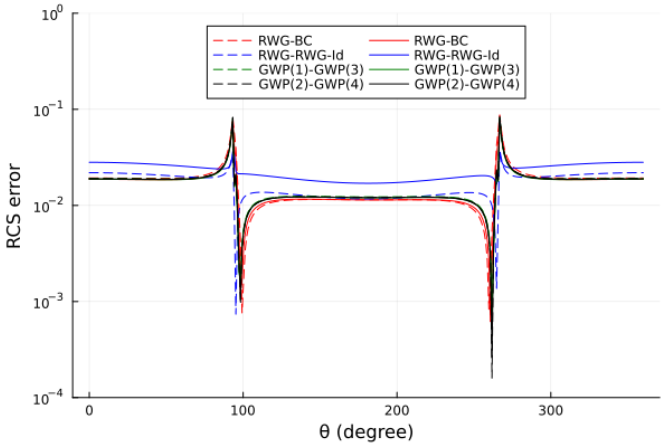


图 17：在 $h = 0.164$米处，球体双基地雷达散射截面的相对误差。虚线：单重试探函数。实线：双重试探函数。实线通过双重试探函数获得。在试探函数和离散化的不同选择之间，未观察到精度方面的显著差异。只有 RWG-RWG-Id离散化在双重试探函数结果中显示出略大的误差。

了近场精度的提升，主要是在散射体附近；在远场中，则仅在双重试探函数形式下、观测角约为 $\theta \approx 180°$ 时有所提升。

B. 球体散射

对于球体情形，不存在尖锐边缘，因此通常与对偶空间相关的伪连续性问题不会出现。相反，由于使用平面三角网格近似曲面，会产生几何误差。此外，还可以通过Mie级数获得解析参考解。

a) RWG 作为原空间，*BC* 作为对偶空间：对于球体情形，将近场和远场结果与 Mie级数解进行比较。图 16 展示了沿一条直线的近场相对误差。图 17 展示了双站雷达散射截面的误差。对于 RWG-BC离散化，采用单重试探函数和双重试探函数获得的数值结果，在近场误差和远场误差方面几乎完全相同。

b) 使用 Θ^{fg} 和单位矩阵进行离散化。*RWG* 同时作为原始空间和辅助空间：对于球体情况，RWG-RWG-Id离散化的近场误差相较于 RWG-BC 并未表现出任何劣化（图 16）。图 17 中的双基地雷达散射截面误差在单重试探函数结果中没有显示出显著劣化，而在双重试探函数结果中显示出略大的误差。数据表明，单位矩阵的特设表示不会对解的质量产生不利影响。

c) 采用 Θ^{fg}进行高阶离散。*GWP(1)*、*GWP(2)* 作为原空间，*GWP(3)*、*GWP(4)* 作为辅助空间：对于球体，将原空间的阶次从 RWG 提高到 GWP(i)，且网格尺寸保持不变时，精度并未显著提升。这两种公式的精度都受限于使用平面三角形对表面进行几何近似的方式。近场误差（图 16）和双基地雷达散射截面误差（图 17）均观察到了这一现象。

VIII. 结论

本文研究了原空间和对偶基函数在单源积分方程离散化中的作用，尤其强调了对偶空间展开对解的精度的影响。虽然协调离散化提供了稳定且条件良好的求解器，但它本质上强制采用非对称表示，其中一个物理迹在对偶空间中展开，这可能会限制公式的逼近性质。通过求解单个边界积分方程，使两个迹都能在原空间中得到精确计算的单源离散化，仍然难以实现。

为解决这一局限性，我们提出了一种双重试探函数形式，通过求解两个共享相同积分算子的单源方程，使电迹和磁迹都能在原空间中得到一致展开。因此，所涉及的积分算子只需组装一次，但需要求解两个不同的方程组。

此外，在本文中，我们采用 [18] 中提出的 Θ 映射来推广对偶空间的构造，并将单源离散化扩展到高阶离散化。

数值研究表明，对于最低阶和高阶离散化，迹展开空间对精度的影响主要体现在能量范数误差上。在最低阶情况下，近场不受影响；而在高阶离散化中，近场仅受到轻微影响。当在原空间中展开两种迹时，长方体几何的双站雷达散射截面误差显示

仅在观测角约为 180° 时，对于最低阶和高阶离散化，精度有所提高。

在近场量和远场量方面，只要对几何体的边界进行足够精确的离散化，高阶原函数就能以每个自由度获得更高的精度。Θ 映射还可以在对偶空间中使用高阶函数，从而进一步优化自由度的数量。

最后，我们结合 Θ 映射与恒等算子的特设表示，利用其灵活性获得了一种方案，在该方案中，所有积分算子均仅使用RWG函数进行离散化。借此，我们获得了接近使用RWG函数和BC函数进行离散化时的精度，同时显著降低了积分算子离散化的计算成本。

参考文献

[1] A. J. Poggio 和 E. K. Miller，《三维散射问题的积分方程解》。MB Assoc.，1970。[2] Y. Chang 和 R. Harrington，“材料物体特征模态的表面公式”，*IEEE*天线与传播学报，第25卷，第6期，第789–795页，1977。[3] T.-K. Wu 和 L. L. Tsai，“任意形状有损介质旋转体的散射”，*Radio Science*，第12卷，第5期，第709–718页，1977。[4] C. M¨uller，《电磁波数学理论基础》，第155卷。Springer Science & Business Media，2013。[5] E. Marx，“介质散射的积分方程”，*IEEE*天线与传播学报，第32卷，第2期，第166–172页，1984。[6] A. Glisson，“均匀介质体电磁散射的积分方程”，*IEEE*天线与传播学报，第32卷，第2期，第173–175页，1984。[7] M. Costabel 和 F. Le Lou¨er，“关于介质电磁散射的Kleinman–Martin积分方程方法”，*SIAM*应用数学杂志，第71卷，第656页，2011年，第2期，第635页。[8] F. Valdes、F. P. Andriulli、H. Bagci 和 E. Michielssen，“用于分析均匀可穿透物体散射的时域单源积分方程”，*IEEE*天线与传播学报，第61卷，第3期，第1239–1254页，2013。[9] F. P. Andriulli、K. Cools、F. Olyslager 和 E. Michielssen，“时域Calder´on恒等式及其在PEC物体散射积分方程分析中的应用——第二部分：稳定性”，*IEEE*天线与传播学报，第57卷，第8期，第2365–2375页，2009。[10] V. C. Le、P. Cordel、F. P. Andriulli 和 K. Cools，“使用准Helmholtz投影算子的稳定时域组合场积分方程”，*IEEE*天线与传播学报，第72卷，第7期，第5852–5864页，2024。[11] F. Valdes、F. P. Andriulli、H. Bagci 和 E. Michielssen，“用于分析均匀可穿透物体散射的Calder´on预条件单源组合场积分方程”，*IEEE*天线与传播学报，第59卷，第2328页，2011年，第6期，第2315页。[12] C. M¨unger 和 K. Cools，“无PEC谐振的多迹单源方程”，载于*2024 IEEE*天线与传播国际研讨会及*INC/USNC-URSI*无线电科学会议（*AP-S/INC-USNC-URSI*），第233–234页，2024。[13] K. Cools，“多迹、单源”，载于*2021*年国际无线电科学联盟第三十四届全体大会和科学研讨会（*URSI GASS*），第1–3页，2021。[14] K. Cools，“用于部分涂覆复合结构建模的多迹单源方程”，载于*2022 IEEE*天线与传播国际研讨会及*USNC-URSI*无线电科学会议（*AP-S/URSI*），第501–502页，2022。[15] S. Rao、D. Wilton 和 A. Glisson，“任意形状表面的电磁散射”，*IEEE*天线与传播学报，第30卷，第409–418页，1982年5月。会议名称：IEEE天线与传播学报。[16] A. Buffa 和 S. H. Christiansen，“重心细分上的对偶有限元复形”，*Comptes Rendus Mathematique*，第340卷，第6期，第461–464页，2005。[17] Q. Chen 和 D. R. Wilton，“三维任意复杂材料/导体物体的电磁散射”，载于*IEEE*天线与传播学会国际研讨会，第2卷，第590–593页，1990。[18] S. H. Christiansen 和 J.-C. N´ed´elec，“基于Calder´on公式的电场积分方程预条件子”，*SIAM*数值分析杂志，第40卷，第3期，第1100–1135页，2002。[19] R. Graglia、D. Wilton 和 A. Peterson，“用于计算电磁学的高阶插值矢量基”，*IEEE*天线与传播学报，第45卷，第329–342页，1997年3月。会议名称：IEEE天线与传播学报。[20] F. Vald´es、F. P. Andriulli、K. Cools 和 E. Michielssen，“用于电场积分方程Calder´on乘法预条件的高阶散度和准旋度相容基函数”，*IEEE*天线与传播学报，第59卷，第4期，第1321–1337页，2011。[21] J. Bourhis、D. Franz`o、A. Merlini 和 F. P. Andriulli，“基于高阶准Helmholtz投影算子的新型Calder´on预条件策略”，载于*2024*年先进应用电磁学国际会议（*ICEAA*），第700–703页，2024。[22] J. Bourhis、A. Merlini 和 F. P. Andriulli，“ 由高阶投影算子支持的预条件策略与保形离散化 ”，载于*2025*年国际无线电科学联盟电磁理论国际研讨会（*EMTS*），第1–4页，2025。[23] B. Hofmann、T. F. Eibert、F. P. Andriulli 和 S. B. Adrian，“基于B样条的磁场积分方程高阶离散化”，载于*2024*年克莱因霍伊巴赫会议，第1–4页，2024。[24] A. Zuccotti 和 K. Cools，“可穿透物体散射的无细化单源公式”，载于*2024 IEEE*天线与传播国际研讨会及*INC/USNC-URSI*无线电科学会议（*AP-S/INC-USNC-URSI*），第1327–1328页，2024。[25] A. Zuccotti 和 K. Cools，“磁场积分方程的高效良态离散化”，载于*2025*年*IEEE CNC-USNC-URSI*北美无线电科学会议（与*AP-S*研讨会联合举办），第3191–3191页，2025。[26] S. Yan、J.-M. Jin 和 Z. Nie，“利用Buffa-Christiansen函数提高第二类Fredholm积分方程的精度”，*IEEE*天线与传播学报，第59卷，第4期，第1299–1310页，2011。[27] K. Cools、F. P. Andriulli、D. De Zutter 和 E. Michielssen，“磁场积分方程的精确且相容的混合离散化”，*IEEE*天线与无线传播快报，第10卷，第528–531页，2011。[28] F. Brezzi、J. Douglas 和 L. Marini，“用于二阶椭圆问题的两族混合有限元”，*Numerische Mathematik*，第47卷，第217–235页，1985年6月。[29] O. E. Livne 和 A. Brandt，“精简代数多重网格（LAMG）：快速图拉普拉斯算子线性求解器”，*SIAM J. Sci. Comput.*，第34卷，第B499–B522页，2012年1月。出版商：工业与应用数学学会。[30] A. Napov 和 Y. Notay，“具有保证收敛率的代数多重网格方法”，*SIAM J. Sci. Comput.*，第34卷，第A1079–A1109页，2012年1月。出版商：工业与应用数学学会。