强混合下的暴胀作为连接问题：有效场论、斯托克斯现象与宇宙学对撞机

Sebastian Garcia-Saenz,[a,b] **Yizhou Lu,**[c,d] **S´ebastien Renaux-Petel**[e]

[a]物理系，南方科技大学，中国深圳 *518055*[b]广东省拓扑物质重点实验室，南方科技大学，中国深圳 *518055*[c]上海数学与跨学科科学研究院，中国上海 *200433*[d]智能复杂系统研究院，复旦大学，中国上海 *200433*[e]巴黎天体物理研究所，法国国家科学研究中心，索邦大学，*98 bis bd Arago*，*75014* 巴黎，法国

arXiv:2611.32612v1 [hep-th] 24 Nov 2026

Abstract: 我们研究了暴胀期间与曲率扰动发生强混合的有质量场，所处情形是：在低能下，后者由具有二次色散关系的单场有效场论（EFT）描述。该 EFT 所能捕捉的内容以及超出其范围的部分，都编码在一个连接问题中；该问题联系了在早期定义真空的解与描述晚期可观测量的解。我们采用一种不依赖精确解的通用方法求解这一问题。对混合的倒数进行展开，并保留两个场，可得到以领先阶形式出现的 EFT，其修正项受到系统控制。该展开选定了 EFT 的真空，确定了 EFT 无法自行确定的相位，并描述了重模在所有时间的行为。粒子产生超出了这一渐近展开的所有阶次。我们表明，它源于色散关系复分支点处的斯托克斯现象；在两个场的旋转基底中，这一过程则化约为熟知的、质量为重质量一半的粒子产生。运动方程的反射对称性与正则对易关系相结合，随后精确确定了所有指数微小效应，并由此确定连接问题的解；该解将粒子产生与轻量子和重量子之间的转换结合起来。结合这一展开，这些精确结果给出了宇宙学对撞机信号的紧凑解析公式；其指数抑制仅为通常玻尔兹曼抑制的一半，直接反映了所产生粒子质量减半这一事实。该展开只要求尺度分离以及重模的绝热性，而反射对称性则

已经无需求解自由场的运动方程，就能给出其粒子产生；这一结论适用于德西特空间中的许多系统。因此，我们期待这种方法能够带来物理上的理解，并得出简单的公式，且其适用范围远超当前情形。

目录

1 引言 1

2 强混合系统 5

2.1 运动理论与方程 52.2 场基 7

3 从早期到晚期：连接问题 8

3.1 早期：通道与 Bunch-Davies 真空 83.2 晚期：轻模和重模 103.3 问题陈述与策略 113.4 作为参考的精确解 14

4 两个分支和三个区间 15

4.1 局部色散关系 154.2 场基底中的两个分支 164.3 绝热性与三个区间 19

5 绝热区间：两个分支的 WKB解 20

5.1 展开与领先阶 205.2 二阶与绝热描述的局限 23

6 轻分支的有效理论 24

6.1 轻分支的受限动力学 246.2 解及其两个极限 25

7 匹配与一致近似 2 6

7.1 匹配轻分支：有效理论的真空 267.2 两个通道的晚时行为 287.3 一致近似及其准确性 297.4 激发初态 30

8 超越所有阶：斯托克斯现象 3 2

8.1 为什么展开是渐近的 328.2 绝热解的斯托克斯现象 33

9 由反射对称性得到的精确结果 36

9.1 自由场的粒子产生 379.2 混合系统的晚时系数 399.3 连接问题的解 41

9.4 粒子产生与转换 43

10 宇宙学对撞机信号 47

10.1 双谱及其挤压极限 47 10.2 短模的共振 49 10.3 闭式表达式中的信号 51

11 结论 54

A 解耦四阶方程 56 B 二阶WKB展开 57 C 精确解与数值检验 58 D 相对论区域中的级数及其重求和 61 E 激发初态 63 F 共振处的抵消 64

---

1 引言

有效场论（EFTs）是表述暴胀涨落物理的语言，无论研究的只是时间平移对称性破缺的戈德斯通玻色子 [1, 2]，还是存在额外场 [3–6] 的情形。它们描述所保留的自由度，并将已被积出的模态的影响编码在其算符的系数中。在宇宙学中，背景依赖于时间，能量也不守恒，因此，这种描述究竟保留了重场的哪些部分、又舍弃了哪些部分，是一个非平凡的问题，已有研究从多个角度对其进行了考察。与暴胀子耦合的重场能够降低曲率扰动的声速，或改变其色散关系，而在此情况下单场描述成立的条件也已得到详细研究 [7–20]。宇宙膨胀产生重粒子，是宇宙学对撞机信号的起源 [4, 21, 22],，如今人们正从宇宙学数据中寻找这一信号 [23–28]。由于这种产生过程随粒子质量呈指数级抑制，它不会出现在有效场论的任何有限阶中。宇宙学有效场论（无论是局域的还是非局域的）的展开确实是渐近的 [29–31],；而最近已有研究表明，通过重求和并结合真空的选择，有可能恢复其所遗漏的部分 [32, 33]。

对于一个与曲率扰动强混合的有质量场，这些问题具有具体的表现形式。在含有额外有质量场 [4–6], 的暴胀涨落有效场论中，两者在二次阶通过混合 ρ发生耦合；在双场暴胀模型中，这一混合由场空间中轨迹转动的速率 [34, 35]决定。当混合大于额外场的质量时 m ，就不能将其视为微扰。本文关注一个更深的区域，在此区域中，混合也远大于哈勃率 H ，并且大于m^2/H。此时，混合决定了尺度分离。该系统包含一个重模，其质量量级与混合相当；同时还包含一个轻模，在低能下由具有二次色散关系的单场有效理论描述 [10],，下文将其称为有效场论。该区域会增强曲率扰动的功率谱，并导致较大的非高斯性。相关研究曾采用有效场论和数值方法 [5, 8, 29, 36–39], ，最近又通过线性理论的精确解 [40, 41] 及其对双谱的影响 [41–45]进行了研究。特别地，文献 [42, 44, 45], 获得了双谱的精确积分表示，并对其进行了数值计算；文献 [41], 则以级数形式得到了解析表达式，并发现，在这一范围内，宇宙学对撞机信号仅具有通常玻尔兹曼抑制的一半。文献 [46], 还通过一种基于混合传播子的梅林-巴恩斯表示的不同方法，得到了任意质量和混合下均收敛的级数。

在线性理论层面，这些问题可以表述为一个关于模函数的单一问题。真空定义于早期、远在视界之内，此时代表真空的解以单一正频率振荡。可观测量则在晚期计算，此时自然的解不再如此，而是表现为共形时间的确定幂次。这些解分别是恒定曲率扰动，以及有质量场的衰减振荡，后者可以具有正频率或负频率。将前一类解用后一类解表示，这就是所谓的连接问题（图 1）；其系数包含了物理信息，即涨落的晚时振幅，以及衡量宇宙膨胀产生粒子的玻戈留波夫系数。如果演化在所有时刻都是绝热的，那么一个以单一正频率起始的解将始终保持该频率，最终也会落在单一的晚时解上。这个问题之所以并非平凡，是因为绝热性会在实数或复数时间处失效。对于德西特空间中的自由场，这个问题可由将汉克尔函数与贝塞尔函数联系起来的经典公式求解。我们的目标是以一种不依赖于精确解知识的方式求解强混合系统，并确定每个系数的来源。

我们分三步进行。首先，我们将线性理论按混合的倒数展开，并始终保留两个场，证明有效场论是其领先阶。由此可确定部分系数，它们表示为混合的倒数的级数。其余系数在这一展开的所有阶上都为零，因为它们

在混合下呈指数级小。第二步，我们将这些系数追溯到色散关系的复分支点；在此处，斯托克斯现象——即沿复时间平面中的一条线出现指数级小的波——会产生粒子。我们利用方程的反射对称性和正则对易关系，根据展开所得的系数，精确求出这些系数。最后，我们结合这两步的结果，以闭式表达式推导出双谱挤压极限下的宇宙学对撞机信号。

第一步基于混合系统的局域色散关系，该关系具有两个分支。这两个分支有着简单的物理解释。对两个场进行时间依赖旋转可以消除混合；在双场暴胀模型中，这种旋转同样将沿背景轨迹和垂直于背景轨迹方向的涨落转化为原始场的涨落。在我们称为场基底的这一基底中，系统在高频下简化为两个质量为 $\rho/2$的自由场，而两个分支就是它们的两个圆偏振。轻模沿与旋转相同的方向转动，重模则沿相反方向转动。重模的频率在所有时间都保持高于哈勃率，并且以绝热方式演化。轻模在早期绝热演化，比无质量场更早穿越自身的视界，随后冻结并成为晚时曲率扰动。在绝热区间内，解由WKB近似给出，我们将其计算到WKB展开的二阶。在轻模的视界穿越过程中，运动方程化为有效场论的运动方程，其解为自变量关于共形时间呈二次形式的汉克尔函数。对轻模的两种描述存在重叠区域，以匹配渐近展开的方式将它们进行匹配 [47], 即可得到所有时间的解。

因此，有效理论可视为双场系统系统展开的领先阶。匹配确定了有效场论原本需要作为输入的内容，即其真空；该真空由双场系统的 Bunch-Davies 真空选定，同时还确定了有效场论生效之前累积的相位。对于激发初态，这一相位是可观测的；正如我们将在下文展示的，它也会对宇宙学对撞机信号的相位作出贡献。我们还以闭式表达式求得了有效场论中不包含的重模，且结果在所有时刻均成立。在此阶段，轻模最终成为恒定曲率扰动，从而决定功率谱；重模则成为有质量场的正频振荡，不含其他晚期解的混合成分。因此，展开确定了这两个晚期解的振幅。综合而言，这些结果给出了以初等函数和汉克尔函数表示的模函数近似，且在整个时间范围内均有效；我们将其与精确解进行比较。

由于始终保留两个场，因此可以系统地识别出有效场论无法捕捉的效应。我们区分三类效应：(i) 轻模动力学的修正，这些修正按混合的倒数的幂次展开，而该展开会逐阶加以组织；(ii) 重模的贡献，当有质量场沿内部线传播时，这些贡献不会受到指数抑制，而重模的闭式表达式使我们能够处理这些贡献；

(iii) 在混合意义下指数微小的效应，其中包括作为宇宙学对撞机信号起源的粒子产生。该展开控制前两类效应。第三类效应超出了展开的所有阶；事实上，该展开是渐近展开，其系数呈阶乘增长。

第三类效应是第二步的研究对象。我们证明，粒子产生源于色散关系复分支点处的斯托克斯现象，而这些分支点位于重质量的尺度上。在场基底中，这一现象归结为宇宙膨胀产生质量为 $\rho/2$ 的自由场粒子这一熟知过程。方程的反射对称性结合正则对易关系，进而能够用展开给出的两个系数精确表示所有指数小系数。该论证具有普适性。对于德西特空间中的自由场，包括存在化学势的情形，它无需求解运动方程即可给出粒子产生的玻戈留波夫系数。对于混合系统，它能在任意质量和混合强度下，用轻模表示重模的晚时曲率扰动，并用重模表示有质量场的晚时振荡。特别是，它可以直接得出宇宙学对撞机信号对质量和混合强度的指数依赖关系，该关系见 [45], 在小混合强度下过渡于通常的玻尔兹曼抑制，而在大混合强度下则过渡于其一半 [41]。

由此，我们得到了连接问题的精确解，其表达式涉及轻模晚时曲率扰动的质量、混合和相位。早期解与晚期解通过玻戈留波夫变换联系起来，其中包含两种物理效应。第一种是粒子产生，它像自由场一样混合正频率和负频率，这正是前面所描述的斯托克斯现象。它产生一对由一个轻场量子和一个重场量子组成的量子对。第二种是轻模向重模的转换，反之亦然；这种转换在不改变量子数量的情况下改变其种类。单场中不存在与之对应的现象。这两种效应都发生在重质量的尺度上，远早于轻模穿越其视界。对称性给出了它们的精确形式，而展开则提供了任意时刻的模函数，以及轻模积累的相位；后者会出现在转换过程中。

第三步将第二步的精确关系与第一步的绝热解结合起来。在双谱的挤压极限下，宇宙学对撞机信号来自长模中由反射对称性给出的指数微小振荡部分，以及两个短模的绝热演化。这一振荡与两个短波量子之间的共振产生了该信号，其发生在重质量对应的能标处，而有效场论并不适用于该能标。对于三次相互作用，我们以闭式表达式得到了其振幅和相位

暴胀涨落有效场论。这在强混合情况下，为包含于 [41, 42, 44–46] 的双谱中的宇宙学对撞机信号提供了一个紧凑表达式。特别地，我们重新得到，信号会随着顶点处曲率扰动的时间导数数量增加而增强，这一点已在 [41] 中发现并得到解释。

本文的组织结构如下。在第2 节中，我们介绍该理论、其运动方程，以及使混合消失的所谓场基底。在第3节中，我们定义适用于早期和晚期的解，提出将二者联系起来的连接问题，并回顾该系统的精确解。在第4节中，我们描述色散关系的两个分支、它们在场基底中的诠释，以及每个分支绝热演化的区间。第5 节专门讨论 WKB解，第6 节则讨论轻分支的有效理论。我们在第7节中将二者匹配起来；在这一节中，我们推导有效场论的真空和功率谱，给出在所有时间都有效的模函数近似，并将匹配推广到激发初态。第8 节专门讨论展开的所有阶数之外的效应，我们将其追溯为色散关系复分支点处的斯托克斯现象。在第9 节中，我们展示运动方程的反射对称性如何给出自由场的粒子产生，并由此精确推导这些效应，演绎出连接问题的解，同时从粒子产生和转换的角度对其进行诠释。在第10节中，我们利用这些结果计算双谱挤压极限下的宇宙学对撞机信号。我们在第11节总结全文，另有六个附录汇集技术细节。

2 强混合系统

2.1 理论与运动方程

我们在准德西特空间中，采用暴胀涨落有效场论的解耦极限，并将其扩展为包含一个有质量标量场 [1, 2]，σ [4–6]。曲率扇区由规范归一化的戈德斯通玻色子 π_c 描述，它与曲率扰动的关系为 $\zeta = -H\pi_c/f_\pi^2$，其中 $f_\pi^4 = 2M^2_{\text{普朗克}}|\dot{H}|$ 为对称性破缺尺度。在二次阶、声速为单位值且导数取领先阶时，拉格朗日量为

$$\mathcal{L}/a^3 = \frac{1}{2}\dot{\pi}_c^2 - \frac{(\partial_i\pi_c)^2}{2a^2} + \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 - \frac{(\partial_i\sigma)^2}{2a^2} - \frac{1}{2}m^2\sigma^2 + \rho\,\dot{\pi}_c\,\sigma\,, \tag{2.1}$$

其中 m 是 σ 的质量，而 ρ 是两个场之间的线性混合，二者均取为常数。我们采用与 [41], 相同的约定，并以 $\rho \equiv \rho/H$ 和 $m \equiv m/H$ 表示以哈勃单位计量的理论的两个参数。拉格朗日量（2.1）特别地可在慢滚近似的领先阶下，由一个双场暴胀模型导出；该模型的轨迹以恒定的转弯率 [34, 35],在场空间中转弯，此时 ρ 是转弯率的两倍。无论其起源如何， π_c 和 σ 通常分别被称为绝热涨落和熵涨落。

本文关注的参数区间是

$$\hat{\rho} \gg 1\,, \qquad |\hat{m}^2| \ll \hat{\rho}\,, \tag{2.2}$$

即，$\rho \gg H$ 和 $\rho \gg m^2/H$。第二个条件确保质量相对于由混合设定的动力学而言只是一个小修正。事实上，在下面的结果中，它只在相对阶数 $\hat{}m^2/\hat{}\rho$ 上出现（第 5.2 节和第 6.1 节）。在这一范围内，轻模具有 [10] 中确定的二次色散关系。除了稳定性条件 $m^2 + \rho^2 > 0$ 之外，我们不对 m^2 的符号作任何假设；在这一范围内，该条件自动满足。相反，当 $|\hat{}m^2| \gtrsim \hat{}\rho$ 时，在轻模的视界穿越处，质量项占主导地位，此时轻模以降低的声速传播$c_s^2 = m^2/\left(m^2+\rho^2\right)$ [9, 10], 在 $m^2 < 0$ [38, 48–51] 时为虚数。范围（2.2）是与之互补的情形。然而，混合不能任意增大。微扰控制要求 $\hat{}\rho \lesssim \kappa^{1/2}/\Delta_\zeta \simeq 5\times 10^3$，其中 $\kappa = 2\Gamma\left(5/4\right)^2/\pi^3$，而 Δ_ζ 是曲率功率谱的振幅。在 [5] 中，通过要求三次相互作用 $\left(\partial_i\pi_c\right)^2\sigma$ 在给定增强的功率谱（7.5）的情况下于哈勃尺度上保持弱耦合，得到了这一界限；另见 [10]。范围（2.2）涵盖了这一范围的大部分。

现在我们转而讨论运动方程。两个场的傅里叶模（共动波数为 k）彼此独立地演化，对于每个模，我们采用时间变量

$$x \equiv -k\tau = \frac{k}{aH} > 0\,, \tag{2.3}$$

其中 τ 为共形时间，因此早期对应于 $x \to \infty$，晚期则对应于 $x \to 0$。[1] 用它表示时，由（2.1）得到的运动方程为

$$\begin{aligned} \pi_c'' - \frac{2}{x}\pi_c' + \pi_c &= \frac{\hat{\rho}}{x}\,\sigma' - \frac{3\hat{\rho}}{x^2}\,\sigma\,, \\ \sigma'' - \frac{2}{x}\sigma' + \left[1 + \frac{\hat{m}^2}{x^2}\right]\sigma &= -\frac{\hat{\rho}}{x}\,\pi_c'\,, \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中撇号表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$。我们将进行的渐近分析最好在正则归一化变量上进行

$$u \equiv \frac{\pi_c}{x}\,, \qquad v \equiv \frac{\sigma}{x}\,, \tag{2.5}$$

它们与常数因子 k/H相差一个比例因子，实际上就是乘以尺度因子后的场，即萨萨基-穆哈诺夫变量 $a\pi_c$ 和 $a\sigma$。用它们表示时，系统（2.4）变为

$$\begin{aligned} u'' + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)u - \frac{\hat{\rho}}{x}\left(v' - \frac{2}{x}v\right) &= 0\,, \\ v'' + \left(1 + \frac{\hat{m}^2 - 2}{x^2}\right)v + \frac{\hat{\rho}}{x}\left(u' + \frac{1}{x}u\right) &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

[1] 变量 x 是参考文献 [41] 中所用变量 z 的相反数。

在没有混合的情况下，这些是德西特空间中无质量场和有质量场的熟知方程，其中项 $-2/x^2$ 来自宇宙膨胀。混合通过与 $\hat{}\rho/x$ 和 $\hat{}\rho/x^2$ 成正比的项引入。将它们与数量级为一的频率项进行比较可知，在非常早期，$x \gg \hat{}\rho$，混合只是频率的一个小修正；而在晚期，$x \ll \hat{}\rho$，混合则占主导地位。强混合区域的困难在于这两个极限之间的跃迁。

还应指出，两个方程可以通过提高阶数来实现退耦。此时，每个场都满足一个四阶方程，并且 σ 可由代数关系通过 π_c 及其导数确定。这些方程用于附录D，见附录A。文献 [40]中采用了等价的退耦方法。

2.2 场基底

（$\rho\,\dot{\pi}_c\,\sigma$ 2.1）中的混合属于动能混合，仅含一个时间导数；这种耦合总可以通过对场进行时间依赖旋转而消除。这种基底变换只依赖于拉格朗日量的形式，并将有助于解释本文的若干结果。

我们通过以下方式定义两个场 φ_1 和 φ_2

$$\pi_c + \mathrm{i}\,\sigma = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho t/2}\left(\varphi_1 + \mathrm{i}\,\varphi_2\right), \tag{2.7}$$

其中 t 为宇宙时间，因此在每个时刻，两个场对通过角度 $\rho t/2$的旋转相互关联。用新的场表示，拉格朗日量（2.1）在略去一个全导数后写为:

$$\mathcal{L}/a^3 = \sum_{A=1,2}\left[\frac{1}{2}\dot{\varphi}_A^2 - \frac{(\partial_i\varphi_A)^2}{2a^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^2\varphi_A^2\right] - \frac{3}{2}\,H\rho\,\pi_c\,\sigma - \frac{1}{2}m^2\sigma^2\,. \tag{2.8}$$

动能混合已经消失，而这一求和项描述了质量均为 $\rho/2$ 的两个解耦自由场。这一求和项在两个场所在平面内的旋转下保持不变，这一性质依赖于它们具有相同的声速，此处声速等于一。相比之下，最后两项仍以 π_c 和 σ 表示，并不具有这种不变性，而且它们仍使两个场相互耦合。

这种旋转在拉格朗日量（2.1）最广为人知的实现——背景轨迹在场空间中转弯的双场暴胀模型（第 2.1节）——中具有熟悉的含义。在该模型中，绝热涨落 π_c 和熵涨落 σ 分别是沿背景轨迹方向以及与其正交方向的涨落。它们定义的基底随轨迹以角速度 $\rho/2$旋转，而动能混合正是这种旋转在拉格朗日量中留下的痕迹。场 φ_1 和φ_2 则是原始场沿着不发生旋转的方向的涨落（如果场空间是弯曲的，则沿轨迹平行移动）。借用这一情形中的术语，我们将（φ_1，φ_2）称为场基底，将（π_c，σ）称为旋转基底，而不论拉格朗日量的来源如何。

共同质量的数值有一个简单的来源。拉格朗日量（2.1）仅通过导数依赖于 π_c，因此常数且均匀的 π_c（其中 $\sigma = 0$）是一个解，对应于超视界尺度上的恒定曲率扰动。在场基底中，这一构型由一个长度恒定、以角速度 $\rho/2$旋转的矢量表示，即 $\varphi_1 + \mathrm{i}\,\varphi_2 \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho t/2}$；而 φ_1和 φ_2 的共同质量恰好使这种运动得以实现。（2.8）中的最后两项不会改变这一结论。事实上，对于满足 $\sigma = 0$的构型，质量项不施加任何力，而与 $H\rho$ 成正比的项恰好补偿旋转矢量所受到的哈勃摩擦。等价地，转到旋转基底会从两个对角质量项中减去 $\rho^2/4$，这正是多场暴胀中熵质量所熟悉的离心贡献 [35]，，并且不会为 π_c留下任何贡献。

对于一个傅里叶模，$\rho t/2 = -(\hat{}\rho/2)$ 的对数 x，相差一个常数；该常数可吸收到 φ_1 和 φ_2的常数旋转中，而（2.7）可写为

$$\pi_c \pm \mathrm{i}\,\sigma = x^{\mp \mathrm{i}\hat{\rho}/2}\left(\varphi_1 \pm \mathrm{i}\,\varphi_2\right). \tag{2.9}$$

略去（2.8）的最后两项后，两个场各自满足德西特空间中质量为 $\rho/2$ 的自由场方程，

$$\left(\frac{\varphi_A}{x}\right)'' + \left(1 + \frac{\hat{\rho}^2/4 - 2}{x^2}\right)\frac{\varphi_A}{x} = 0\,, \qquad A = 1, 2\,. \tag{2.10}$$

我们将在第 4.2 节回到这两项的作用。下文中我们继续使用 π_c 和 σ，即定义曲率扰动和相互作用所用的场，并借助场基底来解释下面的若干结果。

3 从早期到晚期：连接问题

运动方程（2.4）的解中，有两组解具有特殊作用。第一组适用于早期 $x \to \infty$，此时定义真空；这组解在该处退化为单一的正频振荡。第二组适用于晚期 $x \to 0$，此时计算关联函数；这组解在该处表现为 x 的单一幂次。第一组中的一个解通常是第二组中多个解的叠加。本节将定义混合系统的这两组解，并提出本文其余部分要回答的问题：前一组解如何按后一组解分解。

3.1 早期：通道与 Bunch-Davies 真空

量子化该系统的方法众所周知 [35]，，在场基底中这一方法十分直观 [8, 36, 41, 52]。在视界深处，$x \gg \hat{}\rho$，式（2.8）中的所有质量项都可以忽略，并且 φ_1 和 φ_2 是两个自由无质量场，其正频率

模函数为 $x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$，只差 $1/x$中的修正项。两个这样的场通过两个独立量子进行量子化，每个量子对应平面（φ_1, φ_2）中的两个正交偏振之一。两个圆偏振 $\varphi_2 = -\mathrm{i}a\,\varphi_1$（其中 $a = \pm 1$）由旋转（2.9）选出，该旋转只会使它们乘上一个相位。对于这些偏振，$\pi_c - \mathrm{i}a\,\sigma = 0$ 以及

$$\pi_c + \mathrm{i}a\,\sigma \;\propto\; x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,x^{-\mathrm{i}a\hat{\rho}/2} \qquad (x \to \infty)\,. \tag{3.1}$$

混合使这些振荡的频率 $k/a(t)$ 发生了常数 $-a\rho/2$的偏移。对时间积分后，这一偏移产生了对数相位 $x^{-\mathrm{i}a\hat{\rho}/2}$（3.1），对于两种偏振其符号相反；这正是旋转（2.9）所引入的相位。沿用 [41], 的记号，我们将这两个自由度称为混合系统的 通道，并在同一对量子上展开两个场，

$$X_{\boldsymbol{k}} = \sum_{a=\pm 1}\Big[\,X_a(x)\,\hat{b}_{a,\boldsymbol{k}} + X_a^*(x)\,\hat{b}^\dagger_{a,-\boldsymbol{k}}\Big]\,, \qquad X = \pi_c, \sigma\,, \tag{3.2}$$

其中 $[\hat{b}_{a,\boldsymbol{k}}, \hat{b}^\dagger_{b,\boldsymbol{k}'}] = (2\pi)^3\delta_{ab}\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$，其他对易子均为零，$[\hat{b}_{a,\boldsymbol{k}}, \hat{b}_{b,\boldsymbol{k}'}] = [\hat{b}^\dagger_{a,\boldsymbol{k}}, \hat{b}^\dagger_{b,\boldsymbol{k}'}] = 0$。模函数（$\pi_c$, a, σ_a）构成方程（2.4）的通道-a 解，即在早期化为正频波（3.1），而另一组合消失的解，

$$\pi_{c,a} = N_a\,x^{1-\mathrm{i}a\hat{\rho}/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big[1+\mathcal{O}(1/x)\big]\,, \qquad \sigma_a = -\mathrm{i}a\,\pi_{c,a}\big[1+\mathcal{O}(1/x)\big]\,, \qquad x\to\infty\,. \tag{3.3}$$

这些条件定义了混合系统的 Bunch-Davies 真空。两点关联函数可表示为对各通道求和，$\langle X_{\boldsymbol{k}}(x_1)Y_{\boldsymbol{k}'}(x_2)\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\sum_a X_a(x_1)Y_a^*(x_2)$。

归一化 N_a 由自由场的归一化 φ_1 以及 φ_2导出。在早期，它们各自的模函数都与无质量自由场的模函数相同，其模的平方为 $H^2x^2/(2k^3)$。一个圆偏振量子，其单位偏振矢量为 $(1, -\mathrm{i}a)/\sqrt{2}$，由两个场均分，因此 $|\varphi_{1,a}|^2 = H^2x^2/(4k^3)$。由于 $\pi_{c,a} = x^{-\mathrm{i}a\hat{\rho}/2}\varphi_{1,a}$ (见 (2.9))，可得 $|N_a|^2 = H^2/(4k^3)$。因此，真空中两个通道受到的激发相同。各 N_a 的相位是约定俗成的，我们取

$$N_+ = N_- = \frac{H}{2k^{3/2}}\,. \tag{3.4}$$

对易关系。正则对易关系在所有时间都成立，并以一种我们会在全文中使用的方式约束模函数。对于方程（ f和 g（2.4）的两个解，其正则变量（u_f, v_f）和（u_g, v_g）按照（2.5）定义，朗斯基行列式

$$W[f,g] \equiv u_f\,u_g' - u_f'\,u_g + v_f\,v_g' - v_f'\,v_g - \frac{\hat{\rho}}{x}\left(u_f\,v_g - v_f\,u_g\right) \tag{3.5}$$

在系统（2.6）中守恒。借助它，两个场及其共轭动量之间的对易关系等价于通道 $f_a = (\pi_{c,\,a},\ \sigma_a)$ 与其复共轭之间的下列关系，

$$W[f_a, f_b^*] = -4\mathrm{i}\,|N_a|^2\,\delta_{ab}\,, \qquad W[f_a, f_b] = 0\,. \tag{3.6}$$

它们在早期成立，用（3.3）即可验证，因此在所有时间都成立。对于$a = b$，第一个关系确定了 $|N_a|^2$，并给出上面找到的值。其余关系联系了两个通道，并约束了第 8.2 节和9.3节中的指数小系数。我们还将使用一个对易关系的原始形式（第9.2节），即两个场在同时彼此对易，其表达式为

$$\sum_{a=\pm}\Big[\pi_{c,a}(x)\,\sigma_a^*(x) - \pi_{c,a}^*(x)\,\sigma_a(x)\Big] = 0 \tag{3.7}$$

在所有时间。

3.2 晚期：轻波与重波

晚期解。在 $x = 0$附近，我们寻找方程（2.4）的解，使其表现为单一幂次的形式（$\pi_c,\ \sigma$）$\simeq$（$p,\ q$）x^s，其中含有两个常数 p和 q。将此形式代入（2.4）得到四个可能的指数，

$$s = 0\,, \qquad s = 3\,, \qquad s = \tfrac{3}{2} + \mathrm{i}\mu_{\rm eff}\,, \qquad s = \tfrac{3}{2} - \mathrm{i}\mu_{\rm eff}\,, \tag{3.8}$$

其中

$$\mu_{\rm eff} \equiv \sqrt{\hat\rho^2 + \hat m^2 - \tfrac{9}{4}} = \hat\rho + \frac{\hat m^2 - 9/4}{2\hat\rho} + \mathcal{O}(\hat\rho^{-3}) \tag{3.9}$$

在（2.2）所述的区域内为实数。由于方程在 $x \to -x$下保持不变，每个幂次都会乘以一个关于 x^2的幂级数；由于任意两个指数之差都不是偶整数，方程确定了该级数的所有系数。因此，每个指数都定义了唯一的解，除归一化之外。对于 $s = 0$，方程给出$q = 0$，且解为常数，其中 $\pi_c \to 1$，而 σ 在 x^2时$s = 3$ 趋于零，给出一个衰减解；最后两个指数给出两个振荡解，它们互为复共轭。这四个解构成一个基，方程（2.4）的任意解都可以用带常数系数的它们进行分解。

该常数解是在超视界尺度上冻结的曲率扰动，就像无质量场的情形一样。相比之下，两个振荡解会衰减为 $a^{-3/2}$，同时以频率 $\mu_{\rm eff}H$振荡，正如质量为 $m_{\rm eff}$ 的自由场在$m_{\rm eff}^2 = m^2 + \rho^2$时所表现的那样。这一有效质量长期以来一直被认为支配着系统 [5, 18, 36, 39, 53]的晚期动力学。由于 $x^{\mathrm{i}\mu_{\rm eff}} \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_{\rm eff}Ht}$，指数为 $3/2 + \mathrm{i}\mu_{\rm eff}$ 的解具有正频率，而其复共轭具有负频率。

晚时系数。 对于 $x \to 0$，我们将通道$f_a = (\pi_{c,a}, \sigma_a)$分解为这四个解的形式：

$$\begin{aligned}\sigma_a(x) &\to T_a\, x^{3/2+\mathrm{i}\mu_{\rm eff}} + \bar{T}_a\, x^{3/2-\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}\,,\\ \pi_{c,a}(x) &\to \pi_{c,a}(0) + \hat{\rho}\left[\frac{T_a\, x^{3/2+\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}}{3/2+\mathrm{i}\mu_{\rm eff}} + \frac{\bar{T}_a\, x^{3/2-\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}}{3/2-\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}\right],\end{aligned} \tag{3.10}$$

直到非振荡项衰减至 x^2 或更快的阶，其中包括衰减解，其系数我们将不需要。由 π_c 的振荡尾项，可以通过方程（ σ ）的第二个方程得到2.4。因此，在晚期，每个通道都由三个系数刻画，即其曲率扰动$\pi_{c,a}(0)$，以及正频和负频振荡的振幅 T_a 和 $\bar{T}_a$ ，其中 T_a 是一个独立系数，并非 T_a的复共轭。

轻模和重模。如第4至7节将要证明的，在 $1/\hat{}\rho$的所有阶上，两个通道在晚期的表现都截然不同。通道 $a = +1$不包含两个振荡解中的任何一个。它是常数解和衰减解的线性组合，并最终冻结为恒定曲率扰动。相比之下，通道 $a = -1$ 仅包含指数为 $3/2 + \mathrm{i}\mu_{\rm eff}$ 的振荡解，即有质量场的正频振荡。因此，我们称它们为轻通道和重通道，并根据它们在晚期的行为定义两个精确解。重波记为 $f_{\rm h} = (\pi_{c,{\rm h}}, \sigma_{\rm h})$，是指数为 $3/2 + \mathrm{i}\mu_{\rm eff}$的振荡解，其归一化与重通道中的归一化相同。轻波记为 $f_\ell = (\pi_{c,\ell}, \sigma_\ell)$，是去除两个振荡尾项后的轻通道；这两个尾项呈指数级小（第8和9节），也就是说，轻波是沿常数解和衰减解的部分。在晚期，

$$\sigma_{\rm h}(x) \to T_-\, x^{3/2+\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}\,, \qquad \pi_{c,\ell}(x) \to \pi_{c,+}(0)\,. \tag{3.11}$$

重波的复共轭态 $f^*_{\rm h}$ 是指数为$3/2 - \mathrm{i}\mu_{\rm eff}$的振荡解，而 f^*_ℓ是常数解和衰减解的另一种组合。因此，这四个解 f_ℓ、 $f_{\rm h}$、 f^*_ℓ和 $f^*_{\rm h}$构成了一个适用于晚期的基。

3.3 问题陈述与策略

通道与波。 通道与波是方程（2.4）的两组精确解，分别定义在早期和晚期，不应将二者混淆。用粒子产生的术语来说，通道是问题的入模，而波则是出模。在第3.2节的晚期基中，两个通道写作

$$\begin{aligned} f_+ &= f_\ell + \mathcal{C}_+\, f^*_{\rm h} + \mathcal{D}_+\, f_{\rm h}\,,\\ f_- &= f_{\rm h} + \mathcal{C}_-\, f^*_\ell + \mathcal{D}_-\, f_\ell + \mathcal{E}\, f^*_{\rm h}\,,\end{aligned} \tag{3.12}$$

其中有五个常数。根据重波的晚时行为（3.10）和归一化（3.11）¯，两个通道的振荡尾项给出 $\mathcal{C}_+ = T_+/T_-^*$，$\mathcal{D}_+ = -T_+/T_-$ 以及 $\mathcal{E} = T_-/T_-^*$，而常数 $\mathcal{C}_-$ 和 $\mathcal{D}_-$ 分别是重通道在 f_ℓ^* 和 f_ℓ上的非振荡部分的系数。混合系统的连接问题在于确定两个波，特别是它们的晚时系数$\pi_{c,\,+}$（0）和 T_-，以及方程（3.12）中的五个常数，它们衡量每个通道与单波之间的差异。这种分解如图1底部面板所示。

自由场。最著名的连接问题是德西特空间中自由有质量场的连接问题，我们将在第9.1节回到这个问题。其布朗–戴维斯模函数正比于汉克尔函数 $x^{3/2}H^{(1)}_{\mathrm{i}\mu}(x)$，其中 $\mu = \sqrt{\hat{}m^2 - 9/4}$，它在早期是单个正频率波。其晚期解为贝塞尔函数 $x^{3/2}J_{\pm\mathrm{i}\mu}(x)$，每个解都是一个幂 $x^{3/2\pm\mathrm{i}\mu}$ 乘以关于x^2的幂级数。将汉克尔函数表示为这两个贝塞尔函数的连接公式 [54] 给出了晚期正频波和负频波的系数，即描述粒子产生的玻戈留波夫系数（见图1上图）。在这个例子中，问题之所以得到解决，是因为其解是已知的特殊函数。不过，提出问题和解决问题都不需要闭式解。

策略。对于混合系统，我们分三步进行。首先，我们将系统按 $1/\hat{}\rho$ 的幂展开求解（第 4 至第 7 节）。我们将证明，在该展开的所有阶上，每个通道都化为单波，$f_+ = f_\ell$ 和 $f_- = f_{\mathrm{h}}$。在这种描述中，方程（3.12）中的五个常数均为零，而展开则确定了两个波，包括 $\pi_{c,\,+}(0)$ 和 T_-。因此，这五个常数是超越所有阶的效应，其大小对 $\hat{}\rho$ 呈指数级微小（图 1中的虚线）。第二步，我们解释这些常数的来源（第 8 节），并利用运动方程的对称性和正则对易关系精确求出它们（第 9 节）。这些精确关系将五个常数确定为质量、混合以及 $\pi_{c,\,+}(0)$ 相位的函数，但不能给出两个波本身。因此，这两个步骤互为补充。展开描述了动力学，给出了两个波在所有时刻的形式，包括两个分支累积的相位；常数和可观测量都取决于这些相位。展开还揭示了指数微小效应在何处、何时产生。而对称性则给出了通道与波之间的精确关系。最后，我们结合这两个步骤计算宇宙学对撞机信号（第 10 节）。该信号源于对称性所给出的轻通道振荡尾项，以及展开所描述的、发生在重质量尺度上的共振。

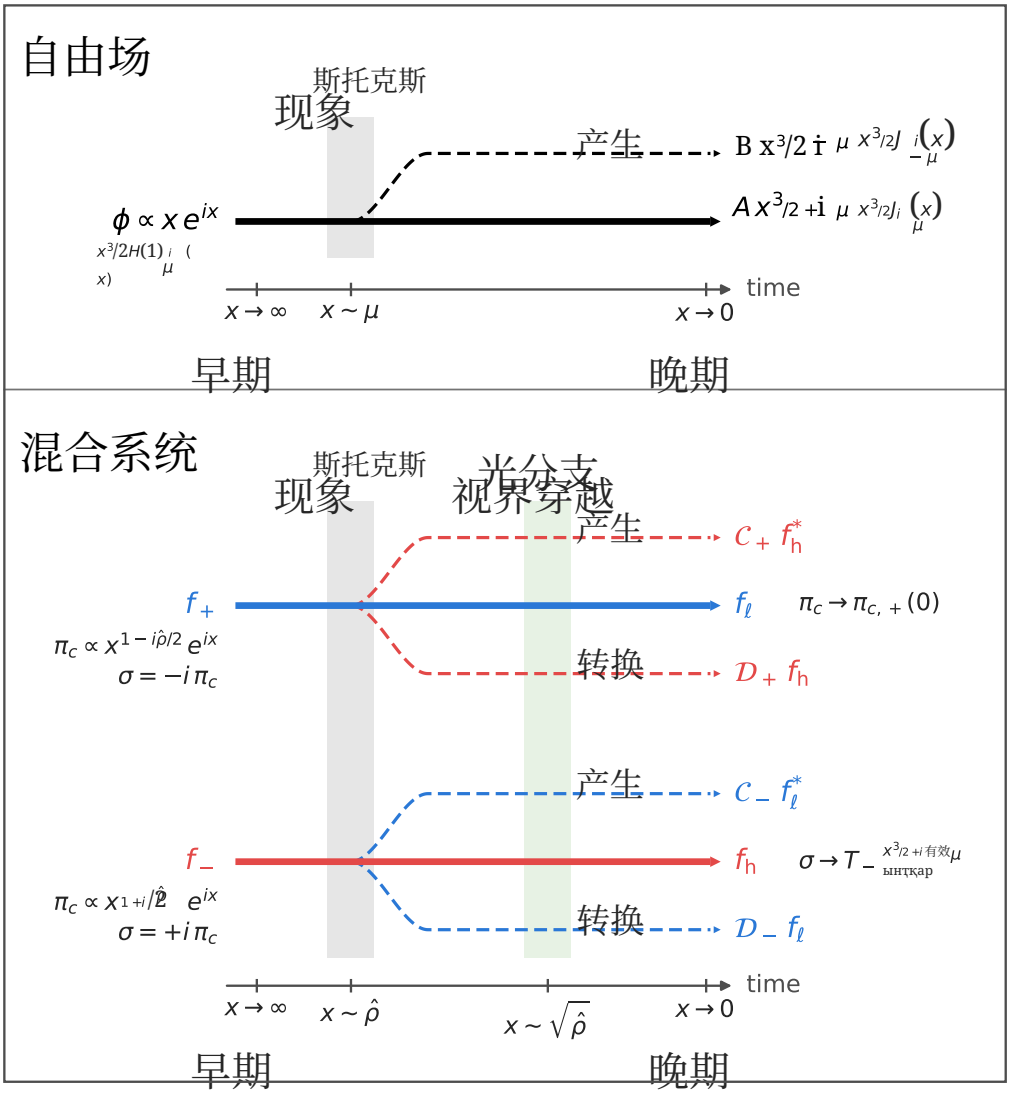

图1：自由场（上）与混合系统（下）的连接问题。时间从左向右推进，$x = -k\tau$ 逐渐减小。在早期定义的解是单个正频率波；在晚期，它按 x的幂次分解到相应的解上。上图：布朗–戴维斯真空的汉克尔函数变为两种幂次，即两个贝塞尔函数的领先项（第 9.1 节）。虚线所示的指数微小项衡量粒子产生。下图：两个通道的分解（3.12）（轻场为蓝色，重场为红色）。实线由按 $1/\hat{}\rho$幂次展开给出，其中$\hat{}\rho = \rho/H$；虚线则在$\hat{}\rho$意义下呈指数微小。粒子产生（$\mathcal{C}_{\pm}$）发生在分支点的斯托克斯线附近（第 8.2 节），而转换（$\mathcal{D}_{\pm}$）也发生在同一范围内，但自身没有分支点（第 9.4 节）。两者都发生在 $x \sim \hat{}\rho$附近，远早于轻分支的视界穿越。（3.12）中的常数 $\mathcal{E}$ 更小，因此未显示。

3.4 作为参考的精确解

混合系统恰好也具有闭式解，最近已求得任意 $\hat{\rho}$ 和 $\hat{m}$ 在 [40] 中的解；此外，采用另一种方法，在 [41]中也得到了该解。我们将使用精确解作为参考，以此衡量本文近似方法的准确性（附录 C）。下面回顾它在拉普拉斯空间表示中的形式，这种表示对我们的目的而言最为方便。该表示最近在 [55, 56] 中引入，并在 [41], 中应用于当前系统；它将模函数写成平直空间平面波的连续叠加，其中理论的所有具体信息都包含在该叠加的谱密度中。在这种表示下，有质量场的通道-a模函数及其谱密度为

$$\sigma_a(x) = -a\, N_a\, \kappa_a\, x^2 \int_1^\infty \mathrm{d}\lambda\; B_a(\lambda)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,, \qquad B_a(\lambda) = \Gamma(1-2s)\, P^{2s}_{\nu_{\rm eff}-\frac{1}{2}}(\lambda)\,, \tag{3.13}$$

其中 P^{μ}_{ν} 为缔合勒让德函数，并且

$$s = -\frac{a\,\mathrm{i}\hat{\rho}}{2}\,, \qquad \nu^2_{\rm eff} = \frac{9}{4} - (\hat{m}^2+\hat{\rho}^2)\,, \qquad \kappa_a = \frac{\mathrm{e}^{a\pi\hat{\rho}/4}\, 2^{-s}}{\Gamma(1-s)}\,. \tag{3.14}$$

运动方程随后由 σ代数地确定 π_c，最终得到 ds

$$\pi_{c,a}(x) = \frac{a\, N_a\, \kappa_a}{\hat{\rho}} \int_1^\infty \mathrm{d}\lambda\; B_a(\lambda)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \Big[\mathrm{i}\lambda(\lambda^2-1)\, x^3 + (3\lambda^2-1)\, x^2 + \big(\hat{m}^2+\hat{\rho}^2-2\big)(1-\mathrm{i}\lambda x)\Big]\,. \tag{3.15}$$

在（2.2）所述的情形下，$\nu_{\rm eff}$ 为虚数，$\nu_{\rm eff} = \mathrm{i}\mu_{\rm eff}$，其中 $\mu_{\rm eff}$ 由（3.9）给出。通道的晚时系数（3.10）可由该表示得到闭式解 [41]。常数 $\pi_{c,\,a}(0)$ 来自对谱密度在λ上的积分，而两个振荡尾项则来自其在大 λ 处的行为（附录 C）。采用通道的归一化（3.3）和（3.4）后，晚时曲率扰动为

$$\pi_{c,a}(0) = \mathrm{i}\, N_a\, \mathrm{e}^{a\pi\hat{\rho}/4}\, 2^s\, \frac{\Gamma(1-2s)}{\Gamma(1-s)}\, \frac{\Gamma\big(\frac{3}{4}-\frac{\nu_{\rm eff}}{2}\big)\,\Gamma\big(\frac{3}{4}+\frac{\nu_{\rm eff}}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{3}{4}-\frac{\nu_{\rm eff}}{2}-s\big)\,\Gamma\big(\frac{3}{4}+\frac{\nu_{\rm eff}}{2}-s\big)}\,. \tag{3.16}$$

下面将把（3.16）的两个推论作为后文的参考，分别对应分解（3.12）中的两类量。由于 $|\Gamma\,(1-2s)\,/\Gamma\,(1-s)\,|^2 = 1/\cosh\,(\pi\hat{}\rho/2)$，并且（3.16）中一个通道的最后一个因子是另一个通道对应因子的复共轭，因此晚时的两个取值在模上仅相差因子 $\mathrm{e}^{a\pi\hat{\rho}/4}$。因此，第一个推论是两个通道的曲率模函数晚时取值之比呈指数级微小，

$$\frac{|\pi_{c,-}(0)|}{|\pi_{c,+}(0)|} = \mathrm{e}^{-\pi\hat{\rho}/2}\,, \tag{3.17}$$

对于任意质量均如此。因此，轻通道几乎承载了全部的晚时曲率扰动，而重通道仅通过（$^{-\pi\hat{\rho}/2}$）中的常数 $\mathcal{C}_-$ 和 $\mathcal{D}_-$，贡献 e3.12）的量级。对 $1/\hat{}\rho$ 的幂展开不可能产生这样的因子，我们将在第 8 节对此作出解释，并在第9节推导。第二个推论是曲率扰动的功率谱，即两个通道之和；与不存在混合时的值相比，它得到了增强，$\Delta^2_{\zeta,\ 0} = (4\pi^2)^{-1}(H/f_\pi)^4$,

$$\Delta^2_\zeta = \frac{k^3}{2\pi^2}\frac{H^2}{f_\pi^4}\sum_a |\pi_{c,a}(0)|^2 \equiv R\,\Delta^2_{\zeta,0}\,, \tag{3.18}$$

其中，利用3.16和3.4，放大因子是3.16中最后一个因子的模平方，

$$R = \left|\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}{2}+\frac{\mathrm{i}\hat{\rho}}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}{2}+\frac{\mathrm{i}\hat{\rho}}{2}\right)}\right|^2\,, \tag{3.19}$$

这与 [40, 44]一致。不同于3.17， R 在区间 $1/\hat{}\rho$ （2.2）内按 $1/\hat{}\rho$ 的幂展开，7，本节的结果将与第7节的结果进行比较。

4 两个分支和三个区间

现在我们转向第3.3节策略的第一步，即将系统的解按 $1/\hat{}\rho$的幂展开；这占据了本节及接下来的三节内容。我们从局域色散关系开始，它具有两个分支；同时考察模态演化过程中由其定义的三个区间。

4.1 局域色散关系

我们首先寻找相对于宇宙膨胀快速振荡的解，也就是说，其物理频率 ω 远大于 H。将（u， v） = （U， V）$\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(x)}$写成振幅缓慢变化的形式，物理频率为 $\omega = xHS'$，并记$\hat{}\omega \equiv \omega/H = xS'$。在运动方程（2.6）中仅保留 S'^2、1 和 $\hat{}\rho S'/x$中的项，其余项在区间（2.2）内被 $1/\hat{}\omega$ 的幂所抑制，得到代数系统

$$(x^2-\hat{\omega}^2)\,U - \mathrm{i}\hat{\rho}\,\hat{\omega}\,V = 0\,, \qquad (x^2-\hat{\omega}^2)\,V + \mathrm{i}\hat{\rho}\,\hat{\omega}\,U = 0\,, \tag{4.1}$$

其行列式在 $\hat{}\omega^2 - x^2 = \pm\hat{}\rho\,\hat{}\omega$ 时为零，即为 $\omega^2 - k^2/a^2 = \pm\rho\,\omega$。因此，混合系统的局域色散关系具有两个正分支，分别标记为 h 和 ℓ，原因将在下文说明，

$$\boxed{\hat{\omega}_{\mathrm{h},\ell}(x) = \sqrt{x^2+\frac{\hat{\rho}^2}{4}}\ \pm\ \frac{\hat{\rho}}{2}\,, \qquad \text{i.e.} \qquad \omega_{\mathrm{h},\ell} = \sqrt{\frac{k^2}{a^2}+\frac{\rho^2}{4}}\ \pm\ \frac{\rho}{2}} \tag{4.2}$$

对于 h 取上号，对于 ℓ取下号，并满足 $\omega_{\rm h}\omega_\ell = k^2/a^2$。在分支 $\omega_{\rm h}$上，系统（4.1）要求 $\sigma = +{\rm i}\pi_c$；而在分支 ω_ℓ上， $\sigma = -{\rm i}\pi_c$。

(4.2) 的两个极限显而易见。在早期， $x \gg \hat{}\rho$, $\omega_{{\rm h},\ell} \simeq k/a \pm \rho/2$。此时两个分支都是相对论性的，混合只会使它们的频率偏移$\pm\rho/2$。相比之下，在 $x \ll \hat{}\rho$ 时，两个分支彼此相距甚远，

$$\hat{\omega}_{\rm h} \simeq \hat{\rho}\,, \qquad \hat{\omega}_\ell \simeq \frac{x^2}{\hat{\rho}}\,, \qquad \text{i.e.} \qquad \omega_{\rm h} \simeq \rho\,, \qquad \omega_\ell \simeq \frac{k^2}{a^2\rho}\,. \tag{4.3}$$

分支 $\omega_{\rm h}$ 描述一个重模，其质量为 ρ，它是有效质量为 $m_{\rm eff} \simeq \rho$ 的模态，决定晚期振荡（3.9）。分支 ω_ℓ 描述一个轻模，其二次色散关系 $\omega \propto k^2$ 与曲率扰动和重场强烈混合的有效单场理论中熟知的关系相同 [5, 10]。我们称它们为重分支和轻分支，因此也有了这些标签。

分支不应与第 3 节中的通道和波混淆；它们是方程（2.4）的精确解，其定义由早期或晚期的行为唯一确定。相比之下，分支是一个局部概念，它描述在绝热近似下，某个解在给定时刻如何振荡。进一步说，我们也将沿着这两个根演化的解称为轻分支和重分支，包括轻分支停止振荡之后的情形。原则上，一个通道可以是两个分支的叠加，且其权重随时间变化。然而，在这里，这种情况在 $\hat{}\rho$的任何阶都不会发生，每个通道都沿着单一分支演化。在早期，两个分支仅相差频率偏移 $\pm\rho/2$，其积分相位为 $\int(\hat{}\omega_{{\rm h},\ell} - x)\,{\rm d}x/x \simeq \pm(\hat{}\rho/2)\log x$，将其与（3.1）中通道的相位进行比较，可得

$$\text{channel } a = -1 \;\longleftrightarrow\; \text{heavy branch}\,, \qquad \text{channel } a = +1 \;\longleftrightarrow\; \text{light branch}\,, \tag{4.4}$$

以及每个通道中两个场之间的关系， $\sigma_a = -{\rm i}a\,\pi_{c,\,a}$ 在（3.3）中，确实对应于相应的分支。这种对应关系随后在所有更晚的时间都保持不变，因为第5节构造的两个分支的绝热解，在 $1/\hat{}\rho$的任何阶上都不会耦合。它们只通过在 $\hat{}\rho$ 下呈指数级微小的效应发生耦合（见第8节）。本文使用的四种概念总结于表1中。

4.2 场基底中的两个分支

色散关系（4.2）很容易在第2.2节的场基底中得到解释。只要（2.8）中的最后两项可以忽略， φ_1 和 φ_2 就是两个质量为 $\rho/2$的解耦场。它们的快速振荡 $\varphi_A/x \propto {\rm e}^{{\rm i}S(x)}$ 的频率可由（2.10）得出，

$$\hat{E}(x) \equiv xS' = \sqrt{x^2 + \frac{\hat{\rho}^2}{4}}\,, \qquad \text{i.e.} \qquad E = \sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{\rho^2}{4}}\,, \tag{4.5}$$

对象	定义	状态	标签
通道	位于.....的单个正频率波 早期，（3.3）	精确解	$a = \pm 1$
Wave	在晚期的单一振荡幂次 x 时间，或无（第 3.2）	精确解	h, ℓ
分支	局部色散关系的根 （4.2）	绝热概念	h, ℓ
圆偏振	场基中的旋转方向 sis, (4.6)	绝热概念	$a = \pm 1$

表 1：连接问题中的对象。通道 $a = +1$、轻波、轻分支以及随旋转基底转动的偏振，在 $1/\hat{}\rho$ 的所有阶数上都相同；对于 $a = -1$ 和重对象，情况也同样如此。当这种区别无关紧要时，我们使用轻模与重模这两个术语。

即质量为 $\rho/2$的相对论粒子的频率。由于两个场的频率相同，这两种振荡可以组合成平面（φ_1，φ_2）中的圆周运动，方向有两种，由此得到第 $\varphi_2 = -\mathrm{i}a\,\varphi_1$节中的圆偏振3.1。经过旋转（2.9），它们对应于 $\pi_c = x^{-\mathrm{i}a\hat{\rho}/2}\varphi_1$ 和$\sigma = -\mathrm{i}a\,\pi_c$，而因子 $x^{-\mathrm{i}a\hat{\rho}/2}$使频率 xS'偏移 $-a\hat{}\rho/2$,

$$\varphi_2 = -\mathrm{i}a\,\varphi_1\,, \quad \hat{\omega} = \hat{E} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sigma = -\mathrm{i}a\,\pi_c\,, \quad \hat{\omega} = \hat{E} - \frac{a\hat{\rho}}{2}\,. \tag{4.6}$$

人们可以辨认出（4.2）中的两个分支，以及其中得到的两个场之间的关系。轻分支 $a = +1$ 是与旋转基底同向转动的圆偏振，而重分支 $a = -1$ 则是反向转动的圆偏振（图 2）。随后，通道与分支之间的对应关系（4.4）便显而易见了。事实上，通道在早期是圆偏振；只要拉格朗日量在旋转下保持不变，它就始终是圆偏振，而圆偏振对应单一分支。

第4.1节讨论的两个分支的极限可以用同样的方式理解。在早期，$k/a \gg \rho$，两个场的质量 $\rho/2$ 在 (4.5) 中可以忽略，而旋转仅使频率 $E \simeq k/a$ 偏移 $\mp\rho/2$。另一方面，在 $k/a \ll \rho$，两个场以频率 $\rho/2$振荡，该频率就是旋转基底的角速度。此时，随基底转动的偏振几乎相对于基底静止，对应于第2.2节所述的 π_c 恒定解；轻分支的频率在小 k/a时趋于零。它在 (4.3) 中的频率 $\omega_\ell \simeq (k/a)^2/\rho$，就是动量为 $p = k/a$ 、质量为 $M = \rho/2$的非相对论粒子的动能 $p^2/2M$；旋转消去了它的静能。以相反方向转动的偏振则具有两倍的频率 $\rho/2$，这就是重模的质量 ρ 。

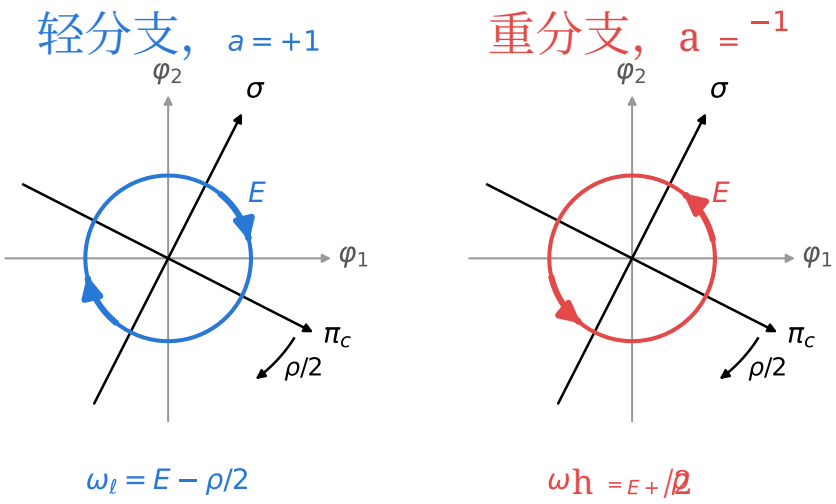

图2：两个场所在的平面。旋转基底（π_c，σ）相对于场基底（φ_1，φ_2）以角速度 $\rho/2$ 转动，按照约定（2.7）沿顺时针方向，其中常数 π_c 是向量 $\varphi_1 + \mathrm{i}\,\varphi_2 \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho t/2}$。在绝热区间，$\varphi_1$ 和 φ_2 以（4.5）中的相同频率 E 振荡，圆偏振在该平面内描绘出一个圆：当 $a = +1$（左）时，其方向与旋转基底相同；当 $a = -1$（右）时，则相反。从旋转基底看来，两个角速度分别为 $E - \rho/2$ 和 $E + \rho/2$，即轻分支和重分支的频率（4.2）。在 $k/a \ll \rho$ 处，当 $E \simeq \rho/2$ 时，第一种偏振在旋转基底中几乎静止，常数 π_c 也是如此。

同一描述也可以用另外两种语言来表达。用力学术语来说，混合 $\rho\,\dot{\pi}_c\,\sigma$ 就是旋转基底的科里奥利耦合。对于复场 $\varphi_1 + \mathrm{i}\,\varphi_2$，两个圆偏振分别是它的粒子和反粒子，它们在旋转下携带相反电荷；转到旋转基底后，它们的能量会偏移 $\mp\rho/2$，就像化学势所起的作用一样。

最后，让我们回到（2.8）中的最后两项；它们在旋转下并不保持不变，从而限制了这一描述。与 $H\rho$ 成正比的项源于宇宙膨胀，并且是 π_c的移位对称性所要求的。在膨胀宇宙中，这一对称性确实与旋转不变性不相容。如果拉格朗日量在旋转下保持不变，也就是说，简化为（2.8）中的求和，那么均匀场将满足 $\ddot{\varphi}_A + 3H\dot{\varphi}_A + (\rho^2/4)\,\varphi_A = 0$，而哈勃摩擦会使它们衰减，如 $a^{-3/2}$所示。一个恒定且均匀的 π_c，即第2.2节中的旋转矢量，将不再是一个解，而 $H\rho$ 中的项正是使其恢复为解的原因。只要频率远大于哈勃率，它就可以忽略；这是推导（4.2）时所采用的条件。而在轻分支的视界穿越处，它变得十分重要，并使曲率扰动能够保持为常数。

仅涉及 σ的质量项，其相对大小为 $\hat{m}^2/\hat{\rho}$ ，相较于前一项而言。在这种情况下，（2.2）所描述的区域正是质量对旋转不变性的破坏程度小于宇宙膨胀的区域，因此它在所有时间都只是一个小修正。与共同质量项相比，当$m \ll \rho$ 时它较小，而当 $m \gg \rho$时它占主导地位。在第一种情况下，系统的自然模态是两个圆偏振，也就是这些通道；在第二种情况下，则是 π_c 和 σ 本身，它们通过混合弱耦合。这为强混合与弱混合之间的区别提供了清晰的物理图像。

4.3 绝热性与三个区间

只要某个分支的频率在一个周期内变化缓慢，就可以对其进行绝热跟踪。对于正则变量（2.5），第5 节的 WKB展开正是建立在这些变量之上的，绝热参数为 $|S''/S'^2| = |H/\omega + \dot{\omega}/\omega^2|$，其中点表示对宇宙时间的导数。除了频率的变化之外，该参数还包含宇宙膨胀对正则变量的影响。回顾 $\hat{\omega} = xS'$ 并利用（4.2），可得在每个分支上，若 $\hat{\omega} = \hat{\omega}_{\rm h}$ 或 $\hat{\omega}_\ell$,

$$\left|\frac{S''}{S'^2}\right| = \frac{\hat{\rho}}{2\hat{\omega}\sqrt{x^2+\hat{\rho}^2/4}} \le \frac{1}{\hat{\omega}}, \qquad \left|\frac{S''}{S'^2}\right| \simeq \begin{cases} \dfrac{\hat{\rho}}{2x^2}, & x \gg \hat{\rho}, \\ \dfrac{1}{\hat{\omega}}, & x \ll \hat{\rho}. \end{cases} \tag{4.7}$$

因此，只要其物理频率远大于哈勃率，某个分支就是绝热的，这正如第4.1节所假设的那样。然而，两个分支的行为截然不同。重分支在所有时间都具有绝热性，因为 $\omega_{\rm h} \ge \rho \gg H$，其绝热参数被 $1/\hat{\rho}$所限制，该上界在晚期达到。轻分支在早期具有绝热性，但其绝热参数随 $\hat{\rho}/x^2$增长，并在 $\omega_\ell \sim H$ 时变为数量级为一，在

$$x \sim \sqrt{\hat{\rho}}, \qquad \text{i.e.} \qquad \frac{k^2}{a^2\rho} \sim H, \tag{4.8}$$

这就是轻分支的视界穿越点。在此点以下，轻分支被冻结，必须用其运动方程的精确解替代对它的绝热描述。

动量为 k 的模态的演化因此经历三个区间，如图 3所示:

（i）相对论区域， $x \gg \hat{\rho}$，此时两个分支仅相差常数ρ，它与 k/a相比很小，并且设定了布朗–戴维斯真空（3.3）；

（ii）修正色散区间， $\sqrt{\hat{\rho}} \ll x \ll \hat{\rho}$，此时两个分支已经分离，重分支以频率 ρ 振荡，而轻分支遵循色散关系 $\omega = k^2/(a^2\rho)$，二者均处于绝热状态；

（iii）轻分支的晚时间区间，$x \lesssim \sqrt{\hat{}}\rho$，该区间始于其视界穿越：此时轻分支停止振荡，并冻结为一个常数，最终成为晚时曲率扰动；与此同时，重分支继续振荡并按 $x^{3/2}$衰减。

这些区间之间的跃迁发生在 $x \sim \hat{}\rho$ 和 $x \sim \sqrt{\hat{}}\rho$处；当 $\hat{}\rho \gg 1$时，两者在参数上彼此分离。正是这种分离使得问题可以通过匹配渐近展开求解。用这种语言来说，绝热解构成外展开，在固定 $x/\hat{}\rho$时成立；轻分支的有效理论则构成内展开，在固定 $x^2/\hat{}\rho$时成立。在绝热区间内，WKB近似适用于每个分支；我们将在第5节中为两个分支构造二阶近似。轻分支在视界穿越过程中所满足的方程足够简单，可以用汉克尔函数精确求解。这个方程就是单场有效场论的方程，我们将在第6节中从完整双场系统推导出该方程。轻分支的两种描述在修正色散区间内重叠，并将在第7节中进行匹配。由于重分支始终处于绝热状态，其 WKB 解完全无需匹配。

5 绝热区间：两个分支的 WKB解

5.1 展开与领先阶

现在，我们在每个分支上构造（2.6）的绝热解，将其表示为关于 $1/\hat{}\rho$ 的系统展开。该展开以变量

$$\xi \equiv \frac{2x}{\hat{\rho}}\,, \tag{5.1}$$

为展开区域中两个分支分离处的数量级为一的量，以及小参数 $\varepsilon \equiv 2/\hat{}\rho$。我们写成

$$u = \exp\Big[\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\,\Psi(\xi)\Big]\,, \qquad v = Z(\xi)\,u\,, \qquad \begin{aligned} \Psi' &= p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots\,, \\ Z &= Z_0 + \varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z_2 + \dots\,, \end{aligned} \tag{5.2}$$

其中撇号现表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi$，因此 $\Psi = \Psi_0 + \varepsilon\Psi_1 + \varepsilon^2\Psi_2 + \dots$，其中 $\Psi_n' = p_n$；我们将其代入（2.6），在该式中 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x = \varepsilon\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi$，而混合项 $\hat{}\rho/x$ 和 $\hat{}\rho/x^2$ 变为 $2/\xi$ 和 $2\varepsilon/\xi^2$。在 ε 的每一个阶次上，都可以得到关于两个未知量 p_n 和 Z_n 的两个线性方程；除领先阶外，每一阶所对应的矩阵都是相同的非退化矩阵，因此展开是代数性的，可以按需要推进到任意阶。具体细节见附录 B。Ψ 的虚部给出该解的振幅，而其实部给出相位。在变量 ξ中，两个频率（4.2）写为

$$\hat{\omega}_{\mathrm{h},\ell} = \frac{\hat{\rho}}{2}\,(r \pm 1)\,, \qquad r \equiv \sqrt{1+\xi^2}\,, \tag{5.3}$$

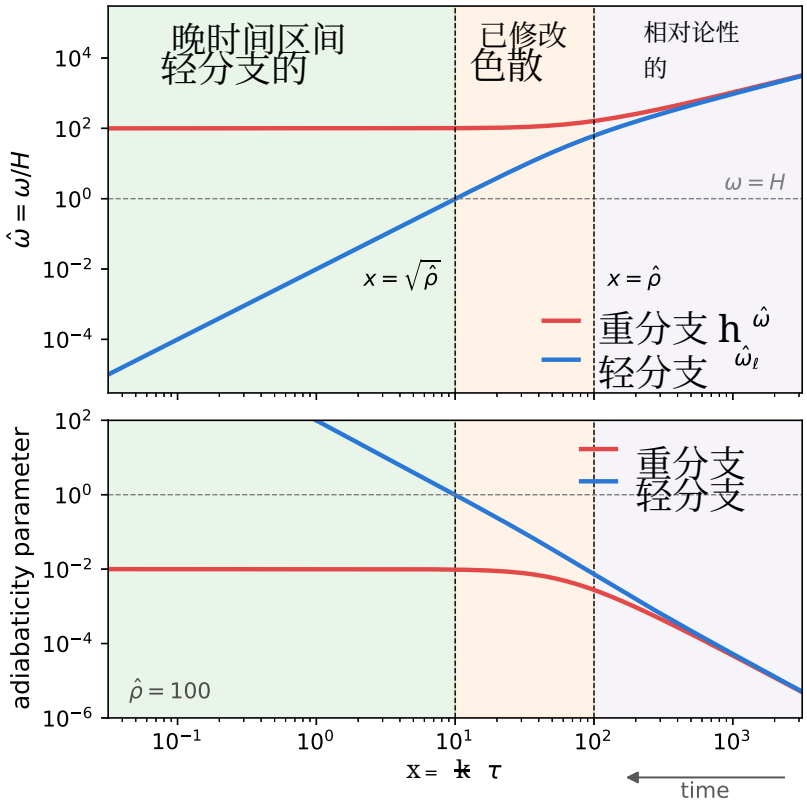

图3：上图：局域色散关系 (4.2) 的两个分支 $\hat{\omega}_{\mathrm{h},\ell} = \omega_{\mathrm{h},\ell}/H$，随 $x = -k\tau$ 对 $\hat{\rho} = 100$ 的变化。时间从右向左流逝。第 4.3 节的三个区间以阴影标出，并由 $x = \hat{\rho}$ 和 $x = \sqrt{\hat{\rho}}$ 分隔。轻分支在 $x = \sqrt{1+\hat{\rho}}$ 处穿越哈勃率 $\omega_\ell = H$（虚线）。下图：绝热性参数 (4.7)。重分支的绝热性参数在所有时间均不超过 $1/\hat{\rho}$，而轻分支的绝热性参数随 $\hat{\rho}/x^2$ 增大，并在轻分支的视界穿越处达到 1。

并且我们还使用 $q \equiv r/\xi = \sqrt{1+1/\xi^2}$。函数

$$\operatorname{arcsinh}\frac{\hat{\rho}}{2x} = \log\frac{1+r}{\xi} \simeq \begin{cases} \hat{\rho}/2x\,, & x \gg \hat{\rho}\,, \\ \log(\hat{\rho}/x)\,, & x \ll \hat{\rho}\,, \end{cases} \tag{5.4}$$

它会反复出现在相位中。它在早期趋于零，在晚期趋于 $\log(\hat{\rho}/x)$。

在领先阶，$p_0 = (r \pm 1)/\xi$ 和 $Z_0 = \pm\mathrm{i}$。由于 $\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}S/\mathrm{d}x$，我们恢复了色散关系（4.2），$\mathrm{d}S/\mathrm{d}x = \hat{\omega}_{\mathrm{h},\,\ell}/x$，以及每个分支上两个场之间的关系。在一阶，对于两个分支均可得到

$$p_1 = \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{q'}{q}\,, \qquad Z_1 = \pm\frac{3}{2(r\pm1)}\,, \tag{5.5}$$

其中，上号对应重分支，下号对应轻分支。由于 p_1 纯虚，一阶项仅对振幅有贡献，$\exp(\mathrm{i}\Psi_1) = q^{-1/2}$，而相位不会获得 $\hat{\rho}^0$ 阶的修正。因此，相位的第一个修正项（阶数为 $1/\hat{\rho}$）来自 p_2，并在第5.2节中计算。在此阶数下，两个场之间的关系变为 $Z = \pm\mathrm{i} \pm 3/[\hat{\rho}(r \pm 1)]$，，并带有相对大小为 $3/[\hat{\rho}(r \pm 1)]$ 的实修正。在重分支上，该修正始终被 $3/2\hat{\rho}$ 所界定。相反，在轻分支上，由于晚期 $r - 1 \simeq 2x^2/\hat{\rho}^2$，它会按 $3\hat{\rho}/2x^2$ 增长，并在 $x \sim \sqrt{\hat{\rho}}$ 时变为一阶，这在展开中首次表明，轻分支的绝热描述在其视界穿越（4.8）处失效。对相位积分，$\int p_0 \, \mathrm{d}\xi = r \pm \log \xi -$ 反双曲正弦$(1/\xi)$（相差一个常数），我们定义每个通道的主导相位，

$$S_a(x) \equiv \sqrt{x^2 + \frac{\hat{\rho}^2}{4}} \; - \; a\,\frac{\hat{\rho}}{2}\log x \; - \; \frac{\hat{\rho}}{2}\,\mathrm{arcsinh}(\hat{\rho}/2x)\,, \tag{5.6}$$

并得到两个分支的领先阶 WKB模函数，我们直接将其写成通道（4.4）并采用归一化（3.3），

$$\pi_{c,a}(x) = N_a \, \frac{x \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}S_a(x)}}{(1 + \hat{\rho}^2/4x^2)^{1/4}} \left[1 + \mathcal{O}(\hat{\rho}^{-1})\right], \qquad \sigma_a(x) = -\mathrm{i}a\,\pi_{c,a}(x)\left[1 + \mathcal{O}(\hat{\rho}^{-1})\right]. \tag{5.7}$$

在早期，分母趋于 1，$\sqrt{x^2 + \hat{\rho}^2/4} \to x$ 且 $\overline{\mathrm{arcsinh}(\hat{\rho}/2x)} \to 0$，因此（5.7）退化为布朗–戴维斯行为（3.3）。下方给出的修正项的相对阶数为 $1/\hat{\omega}$，即重分支上为 $1/\hat{\rho}$，而轻分支上为 $\max(1/\hat{\rho}, \hat{\rho}/x^2)$。附录D 通过对附录5.7中的四阶方程按 $\hat{\rho}/x$的幂次展开进行重求和，给出了（4.2）的独立推导。当前推导说明了为什么这种重求和存在，以及为什么它与质量无关。事实上，重求和后的级数就是两个分支的绝热解，而质量并不出现在色散关系（4.2）中。

逐一考察每个分支在进入修正色散区间时的（5.7）是有帮助的，$x \ll \hat{\rho}$，其中 $\sqrt{x^2 + \hat{\rho}^2/4} \simeq \overline{\hat{\rho}/2 + x^2/\hat{\rho}}$，反双曲正弦$(\hat{\rho}/2x) \simeq$对数$(\hat{\rho}/x) + x^2/\hat{\rho}^2$，而前因子变为 $x^{3/2}\,(2/\hat{\rho})^{1/2}$。在重分支 $a = -1$上，两个对数相加，并且

$$\pi_{c,-}(x) \;\simeq\; N_- \left(\frac{2}{\hat{\rho}}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\hat{\rho}}{2}(1-\log\hat{\rho})} \; x^{3/2+\mathrm{i}\hat{\rho}} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2/2\hat{\rho}}\,. \tag{5.8}$$

在轻分支 $a = +1$ 上，两个对数则相互抵消，并且

$$\pi_{c,+}(x) \;\simeq\; N_+ \left(\frac{2}{\hat{\rho}}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\hat{\rho}}{2}(1-\log\hat{\rho})} \; x^{3/2} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2/2\hat{\rho}}\,, \tag{5.9}$$

其中，唯一的时间依赖相位是 $x^2/2\hat{\rho} = \int \hat{\omega}_\ell \, \mathrm{d}x/x$，它以轻分支的频率 $\omega_\ell \simeq k^2/(a^2\rho)$ 累积。两个分支共有常相位 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0}$，其中 $\gamma_0 \equiv (\hat{\rho}/2)(1 - \log\hat{\rho})$。这一相位记录了从

Bunch-Davies 真空演化至修正色散区间，而第 7 节的匹配会将其传递给有效场论。它们还共有二次相位 $x^2/2\hat{\rho}$。事实上，由于 $\hat{\omega}_{\rm h} - \hat{\omega}_\ell = \hat{\rho}$ 恰好成立，重分支的相位就是轻分支的相位加上 $\hat{\rho}\log x$。在轻分支视界穿越之前，二次相位可以忽略；此时 $x \ll \sqrt{\hat{\rho}}$，(5.8) 化为质量为 ρ的重场的晚时行为。

5.2 二阶效应与绝热描述的局限

在二阶情况下，p_2 对于两个分支都为实数。因此，WKB 振幅 $q^{-1/2}$ 在 $1/\hat{\rho}$阶不接受修正，而二阶效应只会通过$2\Psi_2/\hat{\rho}$来改变相位。对 p_2进行积分，我们得到（附录 B）

$$\Psi_2^{(\mathrm{h},\ell)} = -\frac{4\hat{m}^2 - 9}{16}\,\mathrm{arcsinh}(\hat{\rho}/2x) + Q_{\mathrm{h},\ell}(r)\,, \qquad Q_{\mathrm{h},\ell}(r) = \frac{57r^3 \mp 6r^2 + 10r \pm 10}{48\,r^3(r \pm 1)}\,, \tag{5.10}$$

对于 h 取上号，对于 ℓ 取下号。二阶相位由两部分组成。第一部分与反双曲正弦($\hat{\rho}/2x$)成正比，质量只通过将 (3.9) 中的 $\hat{\rho}$ 移位为 $\mu_{\rm eff}$ 的组合进入其中。事实上，由于 $2\Psi_2/\hat{\rho} = -(\mu_{\rm eff} - \hat{\rho})$反双曲正弦($\hat{\rho}/2x$) + $2Q_{\mathrm{h},\ell}/\hat{\rho} + \mathcal{O}(\hat{\rho}^{-3})$，领先相位 (5.6) 中反双曲正弦($\hat{\rho}/2x$) 的系数 $-\hat{\rho}/2$ 变为 $-(\mu_{\rm eff} - \hat{\rho}/2)$。该项在早期消失，因此不会改变布朗–戴维斯行为。在晚期，此时反双曲正弦($\hat{\rho}/2x$) $\simeq$log($\hat{\rho}/x$)，它向相位中增加 $(\mu_{\rm eff} - \hat{\rho})\log x$，也就是说，它使两个分支的频率都发生相同的偏移，即 $(\mu_{\rm eff} - \hat{\rho})H \simeq (m^2 - 9H^2/4)/2\rho$。对于重分支，这会将 ρ 变为 $\mu_{\rm eff}H$，并将 (5.8) 中的指数 $x^{3/2+\mathrm{i}\hat{\rho}}$ 变为精确值 $x^{3/2+\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}$。对于轻分支，这是对 $\omega_\ell \simeq k^2/(a^2\rho)$ 的小修正，其相对大小为 $(\hat{m}^2 - 9/4)/2x^2$；因此，在视界穿越处其阶数为 $\hat{m}^2/\hat{\rho}$，此时它累积的相位 $(\mu_{\rm eff} - \hat{\rho})\log x$ 的阶数为 $\hat{\rho}^{-1}\log\hat{\rho}$。在这一阶，质量不会以其他方式进入轻分支。第二部分 $Q_{\mathrm{h},\ell}$ 与质量无关，只有它能够区分两个分支。

在重分支上，$Q_{\rm h}$ 有界，从晚期的 71/96 递减至早期的零，因此二阶相位始终很小，量级为 $1/\hat{\rho}$。二阶结果随即给出了一个在所有时间都有效的模函数，

$$\pi_{c,-}(x) = \frac{N_-\,x}{(1 + \hat{\rho}^2/4x^2)^{1/4}}\,\exp\left\{\mathrm{i}\left[S_-(x) - (\mu_{\rm eff} - \hat{\rho})\mathrm{arcsinh}(\hat{\rho}/2x) + \frac{2Q_{\rm h}(r)}{\hat{\rho}}\right]\right\}, \tag{5.11}$$

振幅误差为 $\hat{\rho}^{-2}$ 量级，相位误差为 $\hat{\rho}^{-3}$ 量级，并且对 x 一致成立。它对第3.2节中的重波一致近似。对于重通道的曲率扰动，这一近似一直适用到指数小常数（3.17）开始占主导的时刻；展开的任何阶都不包含这个常数。有质量场随之得到：$\sigma_- = Z\pi_{c,-}$ 其中 $Z = \mathrm{i} + {}^{3}\hat{\rho}(r+1) + \mathcal{O}(\hat{\rho}^{-2})$。仅用初等函数

仅用（5.11）即可描述从早期的布朗–戴维斯波 $x^{1+\mathrm{i}\hat{\rho}/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ 到晚期的重场衰减 $x^{3/2+\mathrm{i}\mu_{\mathrm{eff}}}$。

相较之下，在轻分支上，Q_ℓ 在晚期会发散，

$$Q_\ell \simeq \frac{21}{8\,\xi^2} \qquad (\xi \to 0)\,, \qquad \text{that is} \qquad \frac{2Q_\ell}{\hat{\rho}} \simeq \frac{21\,\hat{\rho}}{16\,x^2}\,, \tag{5.12}$$

而二阶相位在 $x \sim \sqrt{\hat{}}\rho$ 处变为量级为一，这与 Z的一阶修正相似。因此，轻分支的二阶解（5.11）将 $a = +1$和 Q_ℓ 代入 Q_{h}后，仅在 $x \gg \sqrt{\hat{}}\rho$ 范围内成立。轻分支在视界穿越过程中需要另一种描述，即第 6 节的有效场论，并在第 7 节与之匹配。

与精确解的比较。 我们比较了 $\hat{}\rho = 20$ 为 40 和 80，以及 $\hat{}m^2 = 1$ （附录 C）时 WKB 解与精确解的结果。在重分支上，误差在 5.11 式之后所述的整个 x范围内均符合所述情况。在轻分支上，当 $x \gg \sqrt{\hat{}}\rho$ 时，误差相同；而当 $x/\sqrt{\hat{}}\rho$ 变为量级为一时，误差会增大，正如发散（5.12）所预示的那样。

6 轻分支的有效理论

6.1 轻分支的约束动力学

在 $x \sim \hat{}\rho$ 以下，轻分支相较于 k/a以频率$\omega_\ell \simeq k^2/(a^2\rho)$缓慢振荡；而在 $x \sim \sqrt{\hat{}}\rho$以下，即当该频率低于 H时，它完全不再振荡。在这两种情况下，该分支上的有质量场相对于其运动方程第二行（2.4）中由项 k/a 设定的频率尺度 $+1$ 变化缓慢。更准确地说，在轻分支上，σ'' 和 σ'/x 比 σ 小一个数量级为 $\max(x^2/\hat{}\rho^2, 1/x^2)$的因子，而质量项 $\hat{}m^2\sigma/x^2$ 则小 m^2/x^2。在范围

$$1 \ll x \ll \hat{\rho} \qquad (\text{and } x \gg \hat{m})\,, \tag{6.1}$$

其中包含轻分支的视界穿越 $x \sim \sqrt{\hat{}}\rho$，因此 σ 的运动方程在 $1/\hat{}\rho$ 的领先阶上化为一个代数约束，

$$\sigma = -\frac{\hat{\rho}}{x}\,\pi_c'\,. \tag{6.2}$$

因此，在轻分支上，重场不再是动力学自由度，而是跟随曲率扰动。只要轻分支仍在振荡，$\pi_c' \simeq \mathrm{i}(x/\hat{}\rho)\pi_c$ and (6.2)就化为第 $\sigma = -\mathrm{i}\pi_c$ 节4.1中的关系，并将其延伸至视界穿越阶段，此时轻分支停止振荡。将(6.2)代入(2.4的第一行，并保留关于 $x \ll \hat{}\rho$ 的领先项，可得一个关于曲率扰动的封闭二阶方程：

$$\pi_c'' - \frac{4}{x}\,\pi_c' + \frac{x^2}{\hat{\rho}^2}\,\pi_c = 0\,, \tag{6.3}$$

在这个方程中，混合将相对论频率项 π_c 替换为 $x^2\pi_c/\hat{}\rho^2$，从而得到式(4.3)的修正色散关系 $\omega_\ell \simeq k^2/(a^2\rho)$，现在还包含控制视界穿越的摩擦项。质量从该方程中消失了，因为在约束中忽略了项 $\hat{}m^2\sigma/x^2$ 以及 σ的时间导数。若保留该项，则有 $(1+\hat{}m^2/x^2)\,\sigma = -\hat{}\rho\,\pi_c'/x$，因此在视界穿越附近，质量仅通过第5.2节所述的频率 ω_ℓ 的偏移，以相对阶 $\hat{}m^2/\hat{}\rho$ 的量级影响轻分支。式(6.3)是具有二次色散关系 [5, 10], 的有效理论的运动方程；该有效理论是在 [10] 中通过从双场作用量中舍弃两个场的相对论性动能项得到的。与此不同，这里它表现为完整双场系统轻分支上关于 $1/\hat{}\rho$ 的系统展开的领先阶，该展开也控制其修正项和适用范围（第6.2节和附录 D）。同样的计数方式还解释了为何有效场论只描述轻分支。在以频率 ρ, $\sigma'' \simeq -(\hat{}\rho/x)^2\sigma$ 振荡的重分支上，该项超过 σ 达 $\hat{}\rho^2/x^2$倍。此时，时间导数在 σ 的运动方程中占主导，而非可以忽略，因此不会产生约束。

6.2 解及其两个极限

方程 (6.3) 的解可用阶数为 $5/4$ 、宗量为 $x^2/2\hat{}\rho$ 的贝塞尔函数表示。将通解写成汉克尔函数的形式，并结合约束 (6.2) 以及恒等式 $\mathrm{d}[z^\nu H_\nu(z)]/\mathrm{d}z = z^\nu H_{\nu-1}(z)$，可得

$$\begin{aligned}\pi_c^{\rm eff}(x) &= x^{5/2}\Big[A_+\,H^{(1)}_{5/4}\Big(\frac{x^2}{2\hat{\rho}}\Big) + A_-\,H^{(2)}_{5/4}\Big(\frac{x^2}{2\hat{\rho}}\Big)\Big]\,,\\ \sigma^{\rm eff}(x) &= -x^{5/2}\Big[A_+\,H^{(1)}_{1/4}\Big(\frac{x^2}{2\hat{\rho}}\Big) + A_-\,H^{(2)}_{1/4}\Big(\frac{x^2}{2\hat{\rho}}\Big)\Big]\,,\end{aligned} \tag{6.4}$$

两个场中具有相同的两个常数 $A_\pm$ 。有效场论有两个解，而完整系统有四个解。缺失的两个解是重分支及其正、负频率；绝热解 (5.11) 对所有 x 都描述了该分支。有效场论的模函数在两个极限下都很简单。在其适用范围内的早期，$\sqrt{\hat{}}\rho \ll x \ll \hat{}\rho$，汉克尔函数处于渐近区域，$H^{(1,2)}_\nu(z) \simeq \sqrt{2/\pi z}\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(z-\nu\pi/2-\pi/4)}$，并且

$$\pi_c^{\rm eff}(x) \;\simeq\; 2\sqrt{\frac{\hat{\rho}}{\pi}}\,x^{3/2}\sum_\pm A_\pm\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta(x)}\,, \tag{6.5}$$

与 $\theta(x) \equiv x^2/2\hat{}\rho - 7\pi/8$。这些是修正色散区间内轻分支的两个 WKB波，其相位为 $\pm x^2/2\hat{}\rho$ ，振幅为 $x^{3/2}$。正频率波的形式就是绝热解（5.9）。在晚期，$x \ll \sqrt{\hat{}}\rho$, [2]

[2]约束（6.2）是在范围（6.1）内推导得出的，而（6.4）则被用于直至 $x \to 0$。在 $1/\hat{}\rho$ 的领先阶近似下，这样使用是合理的。事实上，在范围（6.1）以下，曲率扰动

using $H_\nu^{(1,2)}(z) \simeq \mp(\mathrm{i}/\pi)\Gamma(\nu)(z/2)^{-\nu}$,

$$\pi_c^{\mathrm{eff}}(x) \;\to\; -\frac{\mathrm{i}}{\pi}\,\Gamma\!\left(\tfrac{5}{4}\right)(4\hat{\rho})^{5/4}\left(A_+ - A_-\right), \quad \sigma^{\mathrm{eff}}(x) \;\to\; \frac{\mathrm{i}}{\pi}\,\Gamma\!\left(\tfrac{1}{4}\right)(4\hat{\rho})^{1/4}\left(A_+ - A_-\right)x^2, \tag{6.6}$$

曲率扰动冻结，而有质量场衰减为 x^2，即为 a^{-2}。式（6.6）中的常数就是晚时曲率扰动，它由常数$A_\pm$确定。在有效场论中，通常会施加正频率条件 $A_- = 0$，并通过有效作用量的朗斯基行列式 [5, 10]对模函数进行归一化。这确定了 A_+的模，但有效场论无法判断这是否是从完整系统的布朗–戴维斯真空继承而来的状态；该真空设定于 $x \gg \hat{}\rho$，也无法确定 A_+的相位。两者都需要将有效解与修正色散区间内轻分支的绝热解进行匹配才能得到；这正是下一节要讨论的对象。

7 匹配与一致近似

在本节中，我们将前两节的描述进行匹配。匹配沿着每个通道从早期到晚期进行，给出第 3.3 节连接问题中并非指数级微小的两个晚时系数，并得到一个在所有时间都有效的各通道近似解。最后，我们将其推广到激发初态。

7.1 匹配轻分支：有效理论的真空

在修正色散区间 $\sqrt{\hat{}\rho} \ll x \ll \hat{}\rho$ 中，轻分支既由从早期开始有效的绝热解（5.7）描述，也由一直有效到晚期的有效解（6.4）描述。二者在该区间必须彼此一致。由于频率上的误差会在相位中累积，因此有效解的领先阶形式实际上仅在 $x \ll \hat{}\rho^{3/4}$ 时是准确的；此时其相位与绝热解的相位相差 $x^4/4\hat{}\rho^3 \ll 1$，因此两个领先阶描述在 $\sqrt{\hat{}\rho} \ll x \ll \hat{}\rho^{3/4}$ 区间重叠。比较（5.9）与（6.5），即可确定有效理论的常数，

$$A_+ = N_+\,\frac{1}{\hat{\rho}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma_0 + 7\pi/8)}, \qquad A_- = 0\,, \tag{7.1}$$

与 γ_0 （5.9）的常相位。

保持不变且有质量场较小，$\sigma \simeq -x^2\pi_c/\hat{}\rho$，因此（6.2）中忽略的项只会以相对阶数 $\hat{}\rho^{-2}$修正演化。附录D 的系统展开证实，领先阶恰好就是（6.4），一直成立到 $x \to 0$。在视界穿越附近，固定 $x^2/\hat{}\rho$时，其修正的相对阶数为 $1/\hat{}\rho$。由于晚时常数（6.6）在视界穿越时确定，因此它受到该阶数的修正，而不是 $\hat{}\rho^{-2}$。我们将在第 7.2 节利用精确解求出其中的首个修正。

真空与归一化。只有有效理论的正频率解被激发，在 $H^{(2)}$ 的任意阶 $1/\hat{\rho}$中都没有混入其他成分。因此，此处从完整双场系统的布朗–戴维斯真空推导出有效理论施加的正频率条件，并将该真空设定在相对论区域深处。作为领先阶之外的检验，$H^{(1)}_{5/4}$（z）在大自变量下的渐近展开中的首个相位修正为（$4\nu^2-1$）$/8z$，其中 $\nu=5/4$且 $z=x^2/2\hat{\rho}$，即 $21\hat{\rho}/16x^2$，恰好是轻分支的二阶相位（5.12）。 A_+ 的模重现了有效理论根据其自身朗斯基行列式 [5, 10]得到的归一化。

轻分支的相位。 相位 γ_0，另一方面，有效理论无法处理。这一相位由轻分支在相对论区域与修正色散区间之间累积而来，表现为对 $\omega_\ell - k/a$跨越 $x\sim\hat{\rho}$处跃迁的时间积分；在该处以下，有效场论适用。等价地， $\gamma_0 = S_+$（0）是轻分支在 $x=0$处的主导相位（5.6），在该处其频率消失。该相位不会影响布朗–戴维斯 真空中的功率谱，但会进入轻分支与另一波相干的任何可观测量中，正如我们将在第 7.4节的激发态中看到的那样。绝热解的二阶相位通过质量进入轻分支，并在 γ_0 中增加一个量级为 $\hat{\rho}^{-1}\log\hat{\rho}$的常数，该常数大于对有效场论的修正（见下方插文）。我们通过将（ γ_0，在（7.1）以及下文中，替换为

$$\gamma \equiv \gamma_0 - \frac{\mu_{\rm eff}-\hat{\rho}}{2}\log\hat{\rho} = \frac{\hat{\rho}}{2} - \frac{\mu_{\rm eff}}{2}\log\hat{\rho}\,. \tag{7.2}$$

对数相位。——上述匹配仅涉及绝热解的主导相位。其二阶相位（5.10）还包含质量进入轻分支时所经过的相位， $-(\mu_{\rm eff}-\hat{\rho})$ 反双曲正弦($\hat{\rho}/2x$)（第 5.2 节）。二阶相位有两部分。第一部分 $2Q_\ell/\hat{\rho}$ 如上所述，可由汉克尔函数重现。在匹配区域内，反双曲正弦($\hat{\rho}/2x$) $\simeq\log(\hat{\rho}/x)$ 时，第二部分为

$$-(\mu_{\rm eff}-\hat{\rho})\log\frac{\hat{\rho}}{x} = -\frac{\mu_{\rm eff}-\hat{\rho}}{2}\log\hat{\rho} + \frac{\mu_{\rm eff}-\hat{\rho}}{2}\log\frac{x^2}{\hat{\rho}}\,. \tag{7.3}$$

最后一项通过 $x^2/\hat{\rho}$（有效解的变量）依赖于时间；在该变量取固定值时，它的量级为 $1/\hat{\rho}$。因此，它属于有效场论的一阶修正（第6.2节），我们不会对其进行计算。另一项是一个常相位，匹配过程将其转移到 A_+。它的量级为 $\hat{\rho}^{-1}\log\hat{\rho}$，大于这些修正，并给出（7.2）。这个对数计数的是质量作用于轻分支期间的 e 折叠数。实际上，其频率的偏移 $(\mu_{\rm eff}-\hat{\rho})H$ （第5.2节）在 $x\sim\hat{\rho}$ 以下起作用，直到轻分支在 $x\sim\sqrt{\hat{\rho}}$ 冻结，也就是说，持续 $\log(\hat{\rho}/\sqrt{\hat{\rho}}) = \frac{1}{2}\log\hat{\rho}$ 个 e 折叠数。相比之下，重分支永不冻结，并且始终累积这一相位，这使其指数变为 $i\mu_{\rm eff}$，并在下方的（7.7）中留下常数 $-(\mu_{\rm eff}-\hat{\rho})\log\hat{\rho}$。

7.2 晚时行为：两个通道

轻通道和功率谱。 结合（7.1）和（7.2）代入（6.6），轻通道曲率模函数的晚时间值为

$$\boxed{\pi_{c,+}(0) = N_+ \,\frac{4\,\Gamma(5/4)}{\sqrt{\pi}}\,\hat{\rho}^{1/4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma+3\pi/8)}\,\left[1+\mathcal{O}(\hat{\rho}^{-1})\right].} \tag{7.4}$$

不同于下文重通道的结果，这里是一个领阶公式，但其相位的对数项除外。重通道在展开的任何阶都没有贡献，因为其绝热解（5.11）按 $x^{3/2}$衰减。由（3.4），功率谱的放大（3.18）为

$$R = \frac{8\,\Gamma(5/4)^2}{\pi}\,\sqrt{\hat{\rho}} = \frac{\pi}{\Gamma(3/4)^2}\,\sqrt{\hat{\rho}} \;\simeq\; 2.09\,\sqrt{\hat{\rho}}\,, \tag{7.5}$$

曲率功率谱的增强 $\propto \sqrt{\hat{\rho}}$ 首次在 [8], 中发现，其系数由有效场论 [10]的模函数得到[3] 。方程（7.5）是在 $\hat{\rho}$ 很大且 $\hat{m}$固定时，精确结果（3.19）的极限，此时后者变为[4]

$$R = \frac{\pi\sqrt{\hat{\rho}}}{\Gamma(3/4)^2}\,\mathrm{e}^{\pi(\hat{\rho}-\mu_{\rm eff})/2}\,\left[1+\mathcal{O}(\hat{\rho}^{-2})\right] = \frac{\pi\sqrt{\hat{\rho}}}{\Gamma(3/4)^2}\left[1+\frac{\pi\,(9-4\hat{m}^2)}{16\,\hat{\rho}}+\mathcal{O}(\hat{\rho}^{-2})\right]. \tag{7.6}$$

第一个表达式中的指数因子为一阶量。事实上，在固定质量下，$\mu_{\rm eff}-\hat{\rho} = (\hat{m}^2-9/4)/2\hat{\rho}+\mathcal{O}(\hat{\rho}^{-3})$，因此该因子是关于 $1/\hat{\rho}$的幂级数，其首项显示在第二个表达式中。有效场论的一阶修正包含质量，并且质量以与二阶相位（5.10）相同的组合 $\hat{m}^2-9/4$ 出现。在我们的展开中，它来自视界穿越处有效场论方程（6.3）的一阶修正，质量正是通过该方程进入轻分支的（第6.1节和附录 D）。我们尚未对其进行计算。

重通道。 重通道无需匹配，其晚时行为可由（5.11）令 $x\to 0$，其中 $\operatorname{arcsinh}(\hat{\rho}/2x)\simeq\log(\hat{\rho}/x)$，

$$\begin{aligned}
\pi_{c,-}(x) \;&\to\; N_-\sqrt{\frac{2}{\hat{\rho}}}\;x^{3/2+\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}\;\exp\left\{\mathrm{i}\left[\gamma_0-\left(\mu_{\rm eff}-\hat{\rho}\right)\log\hat{\rho}+\frac{71}{48\,\hat{\rho}}\right]\right\},\\
\sigma_-(x) \;&\to\; \left(\mathrm{i}+\frac{3}{2\hat{\rho}}\right)\pi_{c,-}(x)\,,
\end{aligned} \tag{7.7}$$

模的相对阶数修正为 $\hat{\rho}^{-2}$ ，相位的相对阶数修正为 $\hat{\rho}^{-3}$ ；正如我们与精确的晚时系数（第 3.4节）进行核对后所验证的那样。重通道

[3]系数的两个表达式由 $\Gamma(5/4)\,\Gamma(3/4) = \pi\sqrt{2}/4$.[4]我们将 $|\Gamma(a+\mathrm{i}y)|^2 = 2\pi\,y^{2a-1}\mathrm{e}^{-\pi y}[1+\mathcal{O}(y^{-2})]$ 用于（3.19）中三个大参数伽马函数，并使用 $\Gamma(\frac{3}{4}+\mathrm{i}\,2(\hat{\rho}-\mu_{\rm eff}))\to\Gamma(\frac{3}{4}\mathrm{i}2)$，因为 $\mu_{\rm eff}-\hat{\rho}\to 0$。

因此是第3.2节中的正频振荡解，其包络为$|\sigma_-|^2 \to (H^2/2k^3)\; x^3/\hat{}\rho$。[5] 在晚期以及 $1/\hat{}\rho$ 的所有阶上，有质量场因此都由重通道承载，表现为衰减振荡；而在轻通道中，它通过约束（6.2）与曲率扰动联系在一起，并在后者冻结后按 x^2 衰减。在曲率扰动中，$|\pi_{c,\,-}(x)|^2/|\pi_{c,\,+}(0)|^2 = \Gamma(3/4)^2\, x^3/\pi\hat{}\rho^{3/2}$。在固定 x 时，重通道因此仅比轻通道小一个混合的幂次，而非指数级小；在轻分支的视界穿越处 $x \sim \sqrt{\hat{}}\rho$，即后者冻结时，二者大小相当。当有质量场沿内部线传播时，这一点十分重要。

由展开给出的系数。现在我们可以说明，关于 $1/\hat{}\rho$ 的幂次展开对于第 3.3节连接问题（3.10）的晚时行为7.7意味着什么。按照记号（3.10），重通道的晚时行为（7.7）是一个单一尾部，其振幅为

$$T_- = N_-\left(\mathrm{i}+\frac{3}{2\hat{\rho}}\right)\sqrt{\frac{2}{\hat{\rho}}}\;\exp\left\{\mathrm{i}\left[\gamma_0-\left(\mu_{\rm eff}-\hat{\rho}\right)\log\hat{\rho}+\frac{71}{48\,\hat{\rho}}\right]\right\}, \tag{7.8}$$

精度如其中所述。结合轻通道的晚时曲率扰动（7.4），可得到两个并非指数小的晚时系数，$\pi_{c,\,-}(0)$ 以及 T_-。另外四个系数 $\pi_{c,\,-}(0)$、T_+、T_+ 和 T_-在 $1/\hat{}\rho$的所有阶次上均为零，因此在所有这些阶次上，每个通道在分解（3.12）中都是一个单一波。

7.3 一致近似及其精度

现在，我们为每个通道汇总出一个在所有时间都有效的单一公式。对于重通道，无需进行汇总，因为二阶绝热解（5.11）在全域内均有效。我们将其与有质量场一并重述为 $\sigma_- = Z\pi_{c,\,-}$ 其中 Z取到一阶，

$$\boxed{\begin{aligned}\pi_{c,-}^{\rm unif}(x) &= \frac{N_-\, x\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}S_-(x)}}{\left(1+\hat{\rho}^2/4x^2\right)^{1/4}}\;\exp\left\{\mathrm{i}\left[-(\mu_{\rm eff}-\hat{\rho})\,\mathrm{arcsinh}(\hat{\rho}/2x)+\frac{2Q_{\rm h}(r)}{\hat{\rho}}\right]\right\},\\ \sigma_-^{\rm unif}(x) &= \left[\mathrm{i}+\frac{3}{\hat{\rho}\,(r+1)}\right]\pi_{c,-}^{\rm unif}(x)\,.\end{aligned}} \tag{7.9}$$

相比之下，对于轻通道，我们有两种定义域相互重叠的描述：对于 $x \gg \sqrt{\hat{}}\rho$，是绝热解（5.7）；对于 $x \ll \hat{}\rho$，是带有匹配常数（7.1）的有效解（6.4）。二者必须结合为一个整体。有效解与其渐近形式（6.5）的差异，来自汉克尔函数的修正级数$1+\mathrm{i}\,21\hat{}\rho/(16x^2)+\ldots$；这些修正在视界穿越附近具有重要影响，而当 $x \gg \sqrt{\hat{}}\rho$时则变得可以忽略。结合这两种描述的自然方式

[5]振荡部分在 $x\to 0$ 处的模可由朗斯基行列式（3.6）精确得到。它给出$|\pi_{c,\,-}|^2 \to \frac{H^2}{2k^3}\hat{}\mu_{\rm eff}\frac{\rho^2x^3}{\rho^2+(\hat{}\hat{}m^2)}$ 以及 $|\sigma_-|^2 \to \frac{H^2}{2k^3}\frac{x^3}{\mu_{\rm eff}}$，与（7.7）一致，误差为固定质量下 $\hat{}\rho^{-2}$ 阶的相对修正。

是用这些修正乘以绝热波；绝热波在所有时间都具有正确的相位$S_+(x)$。对于轻通道中的两个场，我们将一致近似定义为：绝热解乘以有效解与其渐近形式之比，

$$\boxed{\begin{aligned}\pi_{c,+}^{\rm unif}(x) &= \frac{N_+\, x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S_+(x)}}{(1+\hat\rho^2/4x^2)^{1/4}}\, h_{5/4}\Big(\frac{x^2}{2\hat\rho}\Big)\,,\\ \sigma_+^{\rm unif}(x) &= -\mathrm{i}\,\frac{N_+\, x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S_+(x)}}{(1+\hat\rho^2/4x^2)^{1/4}}\, h_{1/4}\Big(\frac{x^2}{2\hat\rho}\Big)\,,\end{aligned}} \tag{7.10}$$

with

$$h_\nu(z) \equiv \sqrt{\frac{\pi z}{2}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z-\nu\pi/2-\pi/4)}\, H_\nu^{(1)}(z)\,, \tag{7.11}$$

将汉克尔函数归一化为其渐近形式。由于 h_ν 在大自变量下趋于 1，因此（7.10）对于 $x \gg \sqrt{\hat\rho}$时退化为绝热解。对于 $x \ll \hat\rho$，绝热前因子除以相位 $x^4/4\hat\rho^3$ 和振幅 $x^2/\hat\rho^2$后，退化为常见形式（5.9）；在 $x \sim \sqrt{\hat\rho}$以下二者都很小，因此（7.10）在视界穿越期间一直到晚期都退化为有效解。因而，方程（7.9）和（7.10）以初等函数以及对于轻通道的一个汉克尔函数，给出了每个通道在所有时间的解。

精度。我们逐个通道比较了（7.9）和（7.10）与 π_c的模函数的精确解，其中 $\hat m^2 = 1$ 和 $\hat\rho = 4$分别取 20、100 和 1000。我们在此总结结果，具体细节（包括相对误差随时间的变化）留在附录 C中。图 4 展示了最大相对误差随时间的变化，并将其表示为混合的函数。

对于重通道，误差的相对阶数为 $\hat\rho^{-2}$，正如预期。在 $\hat\rho = 4$ 处，误差由晚期主导，此时精确的重通道冻结为指数小常数（3.17），相关讨论见第 8节。对于轻通道，误差的相对阶数则为 $\hat\rho^{-1}$，而在 $\hat\rho = 4$处仍为 25%，此时展开参数已不再很小。最后，对于功率谱的放大，主导公式（7.5）在 $1/\hat\rho$时趋近于精确结果（3.19），在 $\hat\rho = 10$处误差为 9%，在 $\hat\rho = 100$处误差为 1%；指数形式（7.6）则在 $1/\hat\rho^2$ 时趋近于精确结果，在 $\hat\rho = 10$ 处误差已为 0.3%（见附录 C 中的图 9 ）。

7.4 激发的初始态

相位 γ （7.2）会对宇宙学对撞机信号的相位产生影响（第10节）。当初始态被激发时，它已能在功率谱中观测到，如下所示。双场系统的一般齐次纯高斯态，其模函数为

$$\tilde X_a = \sum_{b=\pm}\Big[\alpha_{ab}\, X_b + \beta_{ab}\, X_b^*\Big]\,, \qquad X = \pi_c, \sigma\,, \tag{7.12}$$

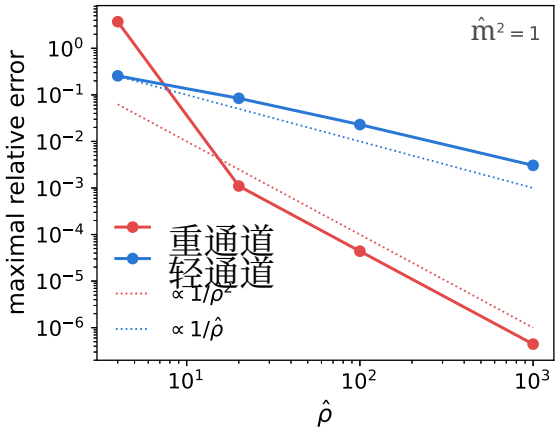

图4：一致近似（7.9）和（7.10对 π_c 的模函数在整个时间范围内的最大相对误差，以混合为函数，针对 $\hat{m}^2 = 1$。虚线表示标度关系 $\hat{\rho}^{-1}$ 和 $\hat{\rho}^{-2}$。重通道在 $\hat{\rho} = 4$ 处的点由第8节的晚时常数主导，而绝热解完全遗漏了该常数。对于 σ_-，该常数没有贡献，其误差保持在百分之几的水平。

其中 X_b 是前几节得到的布朗–戴维斯模函数，而α， β 是 2×2 满足 Bogoliubov 条件的复矩阵 $\alpha\alpha^\dagger - \beta\beta^\dagger = \mathbb{1}$和 $\alpha\beta^T = \beta\alpha^T$，它们保持正则对易关系 [35]。由于重通道会衰减，只有 α_{a+} 和 β_{a+} 会进入晚时曲率扰动；相对于真空中的值，功率谱会乘以（见附录E）

$$1 + 2n_+ + 2\,\mathrm{Re}\left[\mathcal{I}\, e^{2i\theta_0}\right], \qquad n_+ \equiv \sum_a |\beta_{a+}|^2\,, \qquad \mathcal{I} \equiv \sum_a \alpha_{a+}\,\beta^*_{a+}\,, \tag{7.13}$$

其中 $\theta_0 \equiv \gamma + 3\pi/8$ 是（7.4）中的相位。前两项是轻通道占据数 n_+ 带来的增强，这在单场情形中已很熟悉。最后一项是轻分支的正频率波与负频率波之间的干涉，其相位包含 γ。对于场空间中 (π_c, σ) 旋转下保持不变的任何状态，它都会消失；这种对称性是视界深处动力学所具有的（第 2.2 节和第 3.1 节），例如由 $x \gg \hat{\rho}$ 处的 a''/a 特征产生的状态，该特征以相同方式作用于两个场。相比之下，只要激发能够区分两个场，这一项就会出现。例如，对于仅在时间 $x_f \gg \hat{\rho}$ 作用于 π_c 的单场玻戈留波夫变换，其系数为 α 和 β，$n_+ = |\beta|^2/2$ 和 $|\mathcal{I}| = |\alpha\beta^*|/2$，即单场数值的一半，因为只有由轻通道承载的那部分激发能够存留下来（见附录 E），并且 γ 是可观测的。

8 超越所有阶：斯托克斯现象

在前几节关于 $1/\hat{}\rho$ 的幂次展开中，每个通道都是单波，而分解的常数（3.12）是超越所有阶的效应，在 $\hat{}\rho$中呈指数级微小。本节将解释它们在双场理论中的来源。在第 9 节中，我们将精确计算它们；在第 10 节中，我们将利用它们得到双谱挤压极限下的宇宙学对撞机信号。

8.1 为什么展开是渐近的

这个展开实际上是渐近展开。将放大因子（3.19）按 $1/\hat{}\rho$的幂展开到高阶，我们发现，其系数按阶乘增长，在第$n-1$阶时增长为$/\pi^n$。n因此，级数各项先逐渐减小，直到 $n \simeq \pi\hat{}\rho$，随后开始增大；在最小项处截断后，误差的量级为 $\mathrm{e}^{-\pi\hat{\rho}}$，这是该级数所能达到的最佳精度。[6] 这一误差的大小与重通道对功率谱的贡献相当，而后者是（$^{-\pi\hat{\rho}/2}$）中的因子 e 的平方。3.17这种情况在质量为 $m \gg H$的自由场中很常见：绝热展开在H/m 中可以任意阶地给出模函数，却无法给出与粒子产生相关的玻戈留波夫系数 $\mathrm{e}^{-\pi m/H}$。

在这两种情况下，起源都是相同的。局域色散关系的每个根都对应一个绝热波；只要各个根彼此不同，这些波在绝热展开的所有阶上都相互独立地演化。因此，绝热描述只会在两个根重合之处失效。对于自由场，两个根 $\pm\sqrt{x^2+\hat{}m^2}$ 在实时间内从不重合。不过，它们会在复平面中的 $x=\pm\mathrm{i}\hat{}m$处重合，该点距离实轴为 $\hat{}m$。因此，正频率波与负频率波之间的耦合，仅由一个关于这一距离呈指数小的效应产生，也就是玻戈留波夫系数，正如第8.2 节所确切说明的那样。

相比之下，在双场理论中，根是四个频率 $\pm\hat{}\omega_{\mathrm{h}}$ 和$\pm\hat{}\omega_\ell$，对应于（4.2）。由于 $\hat{}\omega_{\mathrm{h}}-\hat{}\omega_\ell=\hat{}\rho$ 和 $\hat{}\omega_{\mathrm{h}}\hat{}\omega_\ell=x^2$，其中两个频率仅有两种方式可以重合。[7] 第一种是 $\hat{}\omega_\ell=0$，位于 $x=0$，此处轻分支的正频率波与负频率波合并。该点位于实轴上，在较晚的

[6]用博雷尔求和的语言来说，该级数的博雷尔变换在距离原点为π 处存在一个奇点，这就是为什么该级数只能将 R 确定到 $\mathrm{e}^{-\pi\hat{\rho}}$量级的项为止。[7]或许有人会问，在存在混合后，自由有质量场的点 $x=\pm\mathrm{i}\,\hat{}m$ 会发生什么变化。它们并没有消失，而是改变了分支。在色散关系中保留 σ 的质量后，两个频率满足 $\hat{}\omega_{\mathrm{h}}^2\hat{}\omega_\ell^2=x^2(x^2+\hat{}m^2)$ 和 $\hat{}\omega_{\mathrm{h}}^2+\hat{}\omega_\ell^2=2x^2+\hat{}\rho^2+\hat{}m^2$；当略去质量时，它们分别化为 $\hat{}\omega_{\mathrm{h}}\hat{}\omega_\ell=x^2$ 和 $\hat{}\omega_{\mathrm{h}}-\hat{}\omega_\ell=\hat{}\rho$。因此，两个频率中的一个会在 $x=0$ 和 $x=\pm\mathrm{i}\,\hat{}m$处变为零。沿虚轴从 $x=0$ 跟踪这两个根，可以发现，只要 $\rho^2>m^2$，在后一个点处变为零的频率就是 $\hat{}\omega_\ell$。换言之，混合将它们从有质量场转移到了轻分支。在情形 (2.2) 下，$\lceil\hat{}m\rceil\ll\sqrt{\hat{}\rho}$，因此它们位于轻分支视界穿越区域的深处（图5）；在该区域内，这一分支由有效理论描述，其中质量只在相对阶 $\hat{}m^2/\hat{}\rho$ 上作出贡献（第 6.1 节）。因此，它们不会产生独立的指数小效应。

时间，此处的效应并不小，因为这对应于轻分支的视界穿越；对于 $x \lesssim \sqrt{\hat{}}\rho$，绝热描述在此失效。我们已通过有效理论以及第 6 节和第 7 节的匹配处理了这一点。第二种是 $\sqrt{\hat{}}\omega_{\rm h} + \sqrt{\hat{}}\omega_\ell = \sqrt{\sqrt{\hat{}}\rho^2 + 4x^2} = 0$，位于

$$x = \pm \frac{\mathrm{i}\hat{\rho}}{2}\,, \tag{8.1}$$

其中 $\sqrt{\hat{}}\omega_{\rm h} = -\sqrt{\hat{}}\omega_\ell$。在这些点，重分支的正频波与轻分支的负频波合并，它们的复共轭态也同样如此（图 5）。不同于 $x = 0$，这些点距实轴 $\sqrt{\hat{}}\rho/2$，而两个分支在实轴上从不交叉，因此它们的影响随这一距离呈指数级微弱，与自由场的情形一样。因此，系统的绝热描述仅在两处失效，即点 $x = 0$（第 7 节的匹配已处理此点），以及分支点（8.1），后者正是本节的主题。我们将在第 9.3 节看到，另一种指数级微弱的效应——转换——会同时涉及这两者。

绝热展开本身就揭示了这些分支点，因为其二阶相位（5.10）在 $r = 0$ 处是奇异的，此处 $r = \sqrt{1 + 4x^2/\sqrt{\hat{}}\rho^2}$ 为零，也就是说，恰好位于（8.1）所示的位置。分支点位于 $|x| = \sqrt{\hat{}}\rho/2$，即重质量的尺度上。另一方面，有效理论的色散关系 $\omega \propto k^2/(a^2\rho)$——即轻分支在 $x \ll \sqrt{\hat{}}\rho$ 极限下的情形——不存在这样的点。因此，有效场论在任何阶上都无法产生这些效应；它们只通过系数的阶乘增长，才显现在关于$1/\sqrt{\hat{}}\rho$ 的幂级数展开中。

8.2 绝热解的斯托克斯现象

现在我们确定分支点在何种程度上以及何时使两个分支发生混合。问题在于含时背景中的粒子产生：在这种背景下，正频波会获得一个振幅呈指数级微小的负频率分量。对于单场，答案已知 [57]。当解穿过斯托克斯线时，便会获得该分量，而其振幅由频率积分到复分支点所决定。在宇宙学中，这种描述已被应用于粒子产生 [58, 59] 以及关联函数的计算 [60]。在这里，我们将同类型的分析应用于属于混合系统两个分支的两列波，而不是应用于单场的正、负频率。

就分支点而言，第 2.2 节的场基底表明，这一差异仅仅来自基底的不同。在此基底下，一旦忽略（2.8）中不具有旋转不变性的两项——色散关系（4.2）中正是如此——两个场就是自由场，其质量为 $\rho/2$，两个圆偏振彼此独立地演化。（8.1）中的点，就是它们的频率 E （4.5）为零的点，因为，对于质量为 $x = \pm\mathrm{i}\sqrt{\hat{}}m$ 的自由场， m。因此，在这一近似下，问题就是一个质量为 $\rho/2$的自由场的粒子产生问题，其中一个正频

偏振的波（频率为 E）获得了同一偏振的负频波，其频率为 $-E$。用 π_c 和 σ 表示时，两者的频率分别为 $\hat{}\,\hat{}E - a\hat{}\rho/2$ 和 $-(E + a\hat{}\rho/2)$（见（4.6））。因此，第一个是一个分支的波，第二个则是另一个分支的波的复共轭。不过，我们不继续在场基底中进行分析。原因在于，连接问题是在通道和波上提出的，而获得的波必须一直追踪到晚期；在那里，破坏旋转不变性的两项已不再可以忽略，两个偏振也不再彼此独立地演化（见第 4.2节）。因此，我们将标准结果转换为两个分支的语言。

考虑在（8.1）处合并的两种波，分别为$^{\mathrm{i}S_-}$ 重分支中的波和$^{-\mathrm{i}S_+}$ 轻分支的负频率波。它们的相位（5.6）是频率的对数积分，$x\,\mathrm{d}S_-/\mathrm{d}x = \hat{}\,\omega_{\mathrm{h}}$ 以及 $x\mathrm{d}S_+/\mathrm{d}x = \hat{}\,\omega_{\ell}$。决定两种波之间交换的量，是从分支点 $x_c = \mathrm{i}\hat{}\,\rho/2$测得的相对相位，

$$F(x) \equiv \mathrm{i}\int_{x_c}^{x} \left(\hat{\omega}_{\mathrm{h}} + \hat{\omega}_{\ell}\right) \frac{\mathrm{d}x'}{x'} = \frac{\pi\hat{\rho}}{2} + \mathrm{i}\left[2\sqrt{x^2 + \frac{\hat{\rho}^2}{4}} - \hat{\rho}\,\mathrm{arcsinh}(\hat{\rho}/2x)\right], \tag{8.2}$$

其中括号内为 $S_+ + S_-$。这对波的斯托克斯线，是从分支点出发、且 F 为实数的曲线，因此两种波之比是实指数，其中一个相对于另一个达到最大优势。沿着两种波之一传播的解，恰好在穿过这条线时 [61, 62]获得沿另一种波的分量。在这里，一条 $S_+ + S_-$ 为纯虚数的单一斯托克斯线连接两个分支点（见图5）。它在 $x_s \simeq 0.33\hat{}\,\rho$处穿过实轴，即 $2\sqrt{x^2 + \hat{}\,\rho^2/4} = \hat{}\,\rho$ 反双曲正弦($\hat{}\,\rho/2x$)的根，位于修正色散区间内。~~在~~ 在实轴上，$S_+ + S_-$ 为实数，因此有

$$\mathrm{Re}\,F = \frac{\pi\hat{\rho}}{2}\,, \qquad \mathrm{Im}\,F = S_+ + S_-\,, \tag{8.3}$$

并且 Im F在 x_s处消失。所获得分量的振幅为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\,F} = \mathrm{e}^{-\pi\hat{\rho}/2}$，在绝热展开的领先阶上还要乘以一个模为一的常数，这一结果称为 Dykhne公式 [63, 64]。正如预期，该振幅与德西特空间中质量为 $\rho/2$ 的自由场的粒子产生因子 $\mathrm{e}^{-\pi\mu}$ 相一致，其中 $\mu \simeq \hat{}\,\rho/2$。如 Berry [62]所示，这一切换是平滑的。更准确地说，沿着实轴，所获得的分量增长为

$$\mathcal{S}(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{-\mathrm{Im}\,F}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}\,F}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(-\frac{S_+ + S_-}{\sqrt{\pi\hat{\rho}}}\right)\right], \tag{8.4}$$

从早期的零变为晚期的一。由于交叉附近的 $S_+ + S_- \simeq 3.6(x - x_s)$，切换发生在 $|x - x_s| \lesssim 0.5\sqrt{\hat{}\,\rho}$ 的时间范围内，此时两个分支都是绝热的；在轻分支穿越其视界之前很久，切换便已完成，位置为

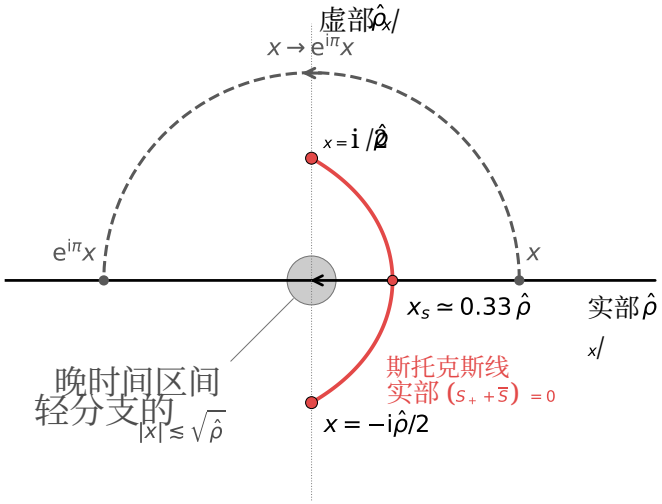

图5：以 x ˆ为单位的复ρ平面。阴影圆盘是区域 $|x| \lesssim \sqrt{\hat{}}\rho$，位于轻分支的视界穿¯越以下，绘制于$\rho = 100$处，此时绝热描述失效，而有效理论适用。色散关系的分支点（8.1）（点）由斯托克斯线 Re（$S_+ + S_-$） $= 0$（红色）连接，该线在 $x_s \simeq 0.33\hat{}\rho$处穿过实轴，位于修正色散区间内。 $S_+ + S_-$ 的虚部沿斯托克斯线增长，从 x_s 处的零增长至 $\pm\pi\hat{}\rho/2$ 分支点处的值。其他从分支点出发的斯托克斯线未显示。实轴上的箭头表示时间方向。虚线半周旋转 $x \to e^{i\pi}x$ （灰色）是第9节所采用的延拓，其中其半径取为很大。

$x \sim \sqrt{\hat{}}\rho$。该轮廓取决于绝热波的精确定义，但连接问题只涉及最终获得的振幅。

现在让我们将这一结果转译为两个通道的语言。穿过斯托克斯线时，每个通道都会获得另一个分支的波的复共轭态。利用一致近似（7.9）和（7.10）所描述的绝热波，这些获得的项为

$$\delta\pi_{c,-}(x) = \mathcal{C}_-\,\mathcal{S}(x)\left[\pi^{\rm unif}_{c,+}(x)\right]^*, \qquad \delta\pi_{c,+}(x) = \mathcal{C}_+\,\mathcal{S}(x)\left[\pi^{\rm unif}_{c,-}(x)\right]^* \qquad (x \gg \sqrt{\hat{\rho}}), \tag{8.5}$$

对于 σ 也同样如此，其中有两个模为 $e^{-\pi\hat{\rho}/2}$ 的常数。我们用与（3.12）中相同的符号表示它们，因为它们就是相同的常数。事实上，在绝热区间内，第3.2 节中的轻模和重模就是两个分支的绝热波，正如我们将在第9.3节中看到的那样，因此（8.5）描述了（ $\mathcal{C}_+\, f^*_{\rm h}$和 $\mathcal{C}_-\, f^*_\ell$）中的项3.12以及它们出现的时间。在这一阶，质量不会出现在指数中，因为分支点取自主导色散关系，而质量并不出现在其中。不过，质量确实会通过 $\mu_{\rm eff} - \hat{}\rho$ 出现在精确常数（9.20）中，该量的阶数为 $1/\hat{}\rho$。

这两个常数实际上相等，这是对易关系（3.6）所要求的。

注意到，两个通道的绝热波（此处记为 $f_{\text{绝热}\pm}$）在 $1/\hat{}\rho$的每一阶上都各自满足这些关系，因为获得的项（8.5）比 $1/\hat{}\rho$的任意次幂都小。切换之后，每个通道都是其绝热波加上获得的项 $f_\pm = f_\pm^{\mathrm{ad}} + \mathcal{C}_\pm \left(f_\mp^{\mathrm{ad}}\right)^*$，而关系$W[f_+, f_-] = 0$在获得项的一阶近似下写作：

$$W[f_+, f_-] = \mathcal{C}_- W\left[f_+^{\mathrm{ad}}, \left(f_+^{\mathrm{ad}}\right)^*\right] + \mathcal{C}_+ W\left[\left(f_-^{\mathrm{ad}}\right)^*, f_-^{\mathrm{ad}}\right] = -4\mathrm{i}\,|N_+|^2\left(\mathcal{C}_- - \mathcal{C}_+\right) = 0\,, \tag{8.6}$$

w这里我们用到了朗斯基行列式是反对称的，以及 $N_+ = N_-$。因此

$$\mathcal{C}_+ = \mathcal{C}_- \equiv \mathcal{C}\,. \tag{8.7}$$

我们将在第9.3节回到这个等式。在那里，将相同的关系应用于轻模和重模，可精确得到重通道的常数。

一旦获得，每个波便可独立地作为方程（2.4）的解演化。在轻通道中，获得的波属于重分支，因此它会持续振荡，并在晚期成为有质量场的尾部 $x^{3/2-\mathrm{i}\mu_{\mathrm{eff}}}$。而在重通道中，获得的波属于轻分支。因此，它会像轻通道本身一样在视界穿越时冻结，而重波则衰减为$x^{3/2}$。于是，重通道在晚期留下的曲率扰动量级为 e $^{-\pi\hat{\rho}/2}\,\pi^*_{c,\ +}$(0)，与精确结果（3.17）一致。

领先阶分析只能确定 $\mathcal{C}$ 的模。其相位以及关于 $1/\hat{}\rho$ 的幂次修正，则需要在分支点处求一个局部解，因为绝热波在此处失效；随后还需按照第 7 节的方式，在分支点两侧将局部解与绝热波匹配。不过，方程的一个对称性免去了这项工作。下一节中，我们将利用这一对称性精确求出两个通道的晚时行为，从而确定常数 $\mathcal{C}$。我们还将看到，（8.5）中的项并非各通道所获得的唯一项。更准确地说，（ $\mathcal{D}_\pm$ 3.12）中的常数会乘上另一分支本身的波，而非其复共轭；这些常数的量级相同。由于没有分支点关联这两个波，本节的分析无法捕捉到它们。这些常数描述了转换，而这种转换在单场情形中并无对应物（见第 9.4 节）。

9 反射对称性的精确结果

本节将从运动方程和正则对易关系的对称性出发，精确求出第 8.2 节的分析尚未确定的内容，即常数 $\mathcal{C}$ （8.5）和（8.7）的相位、方程（ $\mathcal{D}_\pm$ 和 $\mathcal{E}$ 3.12）中的常数，以及两个通道的指数级小晚时系数（3.10）。由于这一论证并非混合系统所特有，我们先说明它如何给出自由场的粒子产生，再将其一般化，并应用于化学势（第9.1节）。随后，我们将其应用于混合系统，在那里它给出指数级

小的两个通道的晚时系数（第 9.2节）。最后，我们推导出轻模和重模上的分解常数（3.12），从而解决第 3节的连接问题（第 9.3节）；并从粒子产生和转换的角度，对这一解作出物理解释，并说明它与斯托克斯现象的关系（第 9.4节）。

9.1 自由场的粒子产生

自由场。我们首先考虑德西特空间中的一个质量为 ϕ 的自由场 m。我们取$\mu \equiv \sqrt{\hat{}}$ $m^2 - 9/4$ 为实数，即考虑该场在晚期振荡的情形。其模函数满足 σ （2.4）中的方程，但不含混合项：

$$\phi'' - \frac{2}{x}\,\phi' + \left[1 + \frac{\hat{m}^2}{x^2}\right]\phi = 0\,. \tag{9.1}$$

在 Bunch-Davies 真空中，模函数在早期以正频波$\phi \propto x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ 开始，而在晚期则变为两个幂次项之和：

$$\phi(x) \to A\,x^{3/2+\mathrm{i}\mu} + B\,x^{3/2-\mathrm{i}\mu}\,, \tag{9.2}$$

其中第二项是宇宙膨胀产生的负频波。场与其共轭动量之间的正则对易关系在所有时间都成立。用模函数表示，这意味着朗斯基行列式（$\phi\,\phi^{*\prime} - \phi^*\phi'$）$/x^2$ 是守恒的，这也可由（9.1）得到。比较其在早期和晚期的取值可得 μ（$|A|^2 - |B|^2$）$= 1$，其中模函数归一化为 $\phi \to x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$。因此，$\alpha \equiv \sqrt{\mu}\,A$和 $\beta \equiv \sqrt{\mu}\,B$是将 Bunch-Davies 真空与晚期波联系起来的玻戈留波夫系数，其中 $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$，而 $|\beta|^2$ 是粒子产生的通常度量。系数 A 和 B 通常通过小自变量下汉克尔函数的展开读出。下面我们将展示，这两个系数的比值实际上可以由方程的对称性得到，而无需求解方程。

确实，方程（9.1）在 $x \to -x$ 下保持不变，且其系数为实数。如果 ϕ（x）是一个解，那么 ϕ（$-x$）和 ϕ^*（x）也都是解。沿着上半平面中的半周旋转延拓模函数 $x \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x$，便得到另一个解；我们根据其早期行为来确定它。在上半平面中，早期波 $x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ 衰减，而另一个早期解 $x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$则增长。由于斯托克斯现象只能给一个解增加一个比其自身指数小的分量，因此早期波在那里不可能获得沿增长解方向的分量。因此，在大半径的半周旋转过程中，其展开仍然成立；在此过程中它变为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = -\left[x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right]^*$。延拓解与 $-\phi^*$ 具有相同的早期行为，而早期行为能够唯一确定一个解，因此可得，对于所有 $x > 0$，

$$\phi\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x\right) = -\,\phi^*(x)\,. \tag{9.3}$$

对于自由场，其模函数是汉克尔函数（见第 3.3节），该关系就是解析延拓公式 $H_\nu^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}H_\nu^{(2)}(z)$ [54]。然而，我们的推导仅使用了方程的对称性以及解的早期行为。因此，正如本节余下部分将展示的，它也适用于并非汉克尔函数的模函数。现在让我们在晚期考察这一关系。在半周旋转下，方程（9.2）中的两个幂分别乘以一个常数，

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x\right)^{3/2\pm\mathrm{i}\mu} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(3/2\pm\mathrm{i}\mu)}\,x^{3/2\pm\mathrm{i}\mu} = -\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mp\pi\mu}\,x^{3/2\pm\mathrm{i}\mu}\,, \tag{9.4}$$

并令 $x^{3/2-\mathrm{i}\mu}$ 在等式（9.3）两边的系数相等，得到

$$B = -\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi\mu}\,A^*\,. \tag{9.5}$$

这里精确地得到了德西特空间中的粒子产生因子 $\mathrm{e}^{-\pi\mu}$，并且还得到了它的相位。结合对易关系 $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$，可得 $|\beta|^2 = 1/(\mathrm{e}^{2\pi\mu}-1)$。

一般性陈述。论证仅用到三个性质。（i）运动方程是线性的，具有实系数，并且在 $x \to -x$ 下保持不变，也可以同时交换系统的模态。（ii）每个模态都从布朗–戴维斯真空开始，表现为一列波

$$f_\chi(x) \propto x^{1-\mathrm{i}\chi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \qquad (x\to\infty)\,, \tag{9.6}$$

其中实数 χ 允许存在对数相位，使波的频率降低 χH。（iii）模态在晚期表现为 x 的幂次形式，正如它们在德西特空间中通常呈现的那样。在半周旋转下，波（9.6）变为

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x\right)^{1-\mathrm{i}\chi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x)} = -\,\mathrm{e}^{\pi\chi}\,x^{1-\mathrm{i}\chi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = -\,\mathrm{e}^{\pi\chi}\left[x^{1+\mathrm{i}\chi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right]^*, \tag{9.7}$$

它等于 $-\mathrm{e}^{\pi\chi}$ 倍的、具有相反对数相位的波的复共轭。我们将以后一种形式开始的模态称为共轭模，并用 $f_{-\chi}$ 表示它。对于两个模态采用相同的归一化，延拓解因此为

$$f_\chi\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x\right) = -\,\mathrm{e}^{\pi\chi}\,f^*_{-\chi}(x)\,. \tag{9.8}$$

对于晚期的一对振荡幂，$f_\chi \to A_\chi\,x^{3/2+\mathrm{i}\mu} + B_\chi\,x^{3/2-\mathrm{i}\mu}$，方程（9.4）和（9.8）给出

$$B_\chi = -\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi(\mu-\chi)}\,A^*_{-\chi}\,. \tag{9.9}$$

因此，某个模态的负频波由其共轭模的正频波给出，而对数相位将指数从 $\pi\mu$ 降低到π（$\mu-\chi$）。

化学势。 化学势会产生恰好这样的对数相位 [59, 60]。对于一个由切恩-西蒙斯耦合滚动标量场产生化学势的有质量矢量场的标准示例，每个横向模的模函数 $v = f/x$ 满足

$$v'' + \left[1 - \frac{2\chi}{x} + \frac{\mu^2 + 1/4}{x^2}\right] v = 0\,, \tag{9.10}$$

其中 χ 是以 H为单位的化学势，其符号取决于模态的螺旋度。布朗–戴维斯解的形式为（9.6）。由于 χ/x 中的项关于 x是奇函数，反射 $x \to -x$ 会将符号相反的 χ模态互换，而（9.9）给出了它们之间的关系。与上面的自由场一样，朗斯基行列式守恒，因此玻戈留波夫系数 $\alpha_\chi \equiv \sqrt{\mu}_- A_\chi$ 和 $\beta_\chi \equiv \sqrt{\mu}\, B_\chi$ 满足 $|\alpha_\chi|^2 - |\beta_\chi|^2 = 1$，对 χ的每个符号均成立。由于 $|\beta_\chi| = \mathrm{e}^{-\pi(\mu-\chi)}\,|\alpha_{-\chi}|$ （见（9.9）），这些关系构成关于 $|\alpha_\chi|^2$ 和 $|\alpha_{-\chi}|^2$的两个线性方程，其解为

$$|\beta_\chi|^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\pi\chi} + \mathrm{e}^{-2\pi\mu}}{2\sinh(2\pi\mu)}\,, \tag{9.11}$$

这与 [59] 中利用求解（9.10）的惠特克函数得到的结果一致。当 $\chi = 0$时，它退化为自由场的结果。

厄米解析性。对于没有对数相位的单场，关系式（9.3）在模函数的归一化意义下，称为 Bunch-Davies 真空模函数的厄米解析性 [65, 66]。在这些研究中，它被表述为固定时间下关于 $k \to -k^*$ 的一种性质，并通过 k中传播子的解析延拓来约束宇宙波函数。这里，我们考察模函数晚时幂次上的同一性质，它给出了粒子产生的系数。

9.2 混合系统的晚时系数

按 $1/\hat{}\rho$ 展开可得到¯通道六个晚时系数（3.10）中的两个：$\pi_{c,\ +}(0)$（第7.2节）。现在我们证明，其余四个系数 $\pi_{c,\ -}(0)$、 T_{+}、 $_T_{+}$ 和 T_{-}虽然在该展开的所有阶上都为零，却由这两个系数决定。

反射关系。 系统（2.4）具有第 9.1 节所述的三个性质。特别是，其方程在 $x \to -x$ 下保持不变，并且其系数除 $x = 0$ 外均为实且解析。因此，可以在复平面中延拓这些通道；在那里，分支点（8.1）仅对绝热波是奇异的，而对解本身并非如此。如第9.1节所述，我们考虑一个大半径的半周旋转（图 5），在此过程中通道保持其早期时间形式。两个通道共享相同的指数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ ，仅在 x 的幂次上有所不同，因此二者之间不存在一个相对于另一个指数微小的情况，并且在半周旋转过程中，斯托克斯现象无法将一个通道添加到另一个通道中。在此半周旋转上，通道 a 是

波（3.3），其形式为（9.6），其中 $\chi = a\hat{}\rho/2$。在（9.7）的两侧，两个场以相同方式相关，其中，在延拓解上有 $\sigma_a = -\mathrm{i}a\,\pi_{c,a}$，而对于另一个通道的复共轭，则有$\sigma^*_{-a} = (\mathrm{i}a\,\pi_{c,-a})^* = -\mathrm{i}a\,\pi^*_{c,-a}$。因此，一个通道的共轭模就是另一个通道，并且由于 $N_+ = N_-$ （见（3.4）），方程（9.8）对于 $f = (\pi_c, \sigma)$ 及所有 $x > 0$ 读作：

$$\boxed{f_a\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x\big) = -\,\mathrm{e}^{a\pi\hat{\rho}/2}\,f^*_{-a}(x)\,.} \tag{9.12}$$

该指数因子来自（3.3）中的对数相位，而混合以相反符号将该相位赋予两个通道。尽管这一关系是在大半径下建立的，但它对所有 x都成立，因为解在 $x = 0$之外是解析的。特别是，半周旋转的半径并不重要；我们将在第9.3节中利用这一性质。

重通道的曲率扰动。现在我们利用晚时行为（3.10）计算晚期的（9.12）。在半周旋转下，常数保持不变，而两个振荡幂分别乘以常数（9.4），其中$\mu = \mu_{\mathrm{eff}}$。对于 $a = -1$，由（9.12）的常数项得到：

$$\pi_{c,-}(0) = -\,\mathrm{e}^{-\pi\hat{\rho}/2}\,\pi^*_{c,+}(0)\,, \tag{9.13}$$

这就是精确关系（3.17），这里只是带有其相位。该关系对 $1/\hat{}\rho$的幂次没有任何修正，并且对任意质量都成立。第3.2节中的衰减解关于 x为奇函数，其行为方式相同。它在重通道中的系数等于 $\mathrm{e}^{-\pi\hat{\rho}/2}$ 乘以其在轻通道中的系数的复共轭。因此，重通道的非振荡部分整体上呈指数级微小。

有质量场的尾部。(3.10) 的振荡幂满足9.9，其中$\mu = \mu_{\mathrm{eff}}$ 以及 $\chi = a\hat{}\rho/2$是通道 a 的共轭模，而通道 $-a$为其共轭通道，

$$\bar{T}_a = -\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi(\mu_{\mathrm{eff}} - a\hat{\rho}/2)}\,T^*_{-a}\,, \qquad a = \pm\,. \tag{9.14}$$

¯因此，反射将每个通道的尾部 T 表示为另一个通道的尾部 T。对于轻通道，它给出 $\bar{T}_+ = -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi(\mu_{\mathrm{eff}} - \hat{\rho}/2)}\,T^*_-$，其中 T_- 见(7.8)。¯然而，对于重通道，T_- 则表示为 T_+，而反射并未确定后者。

这个最后的系数由两个场的对易关系(3.7) 得出，而单场不存在与之对应的关系。利用晚时行为(3.10)，该关系中 $x^{3/2+\mathrm{i}\mu_{\mathrm{eff}}}$ 的系数为

$$\sum_{a=\pm}\Big[\pi_{c,a}(0)\,\bar{T}^*_a - \pi^*_{c,a}(0)\,T_a\Big] = 0\,. \tag{9.15}$$

¯ ¯代入（9.13）中的 $\pi_{c,-}(0)$ 以及（9.14）中的 T_+ 和 T_-，可得

$$T_+ = \frac{\pi_{c,+}(0)}{\pi^*_{c,+}(0)}\,\mathrm{e}^{-\pi\hat{\rho}/2}\,\frac{1 + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi(\mu_{\mathrm{eff}} - \hat{\rho})}}{1 + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi(\mu_{\mathrm{eff}} + \hat{\rho})}}\,T_-\,. \tag{9.16}$$

分母来自重通道，与 1 的差为 $\mathrm{e}^{-2\pi\hat{\rho}}$阶的项。因此，方程（9.13）、（9.14）和（9.16）给出了四个指数小系数关于 $\pi_{c,+}(0)$ 和 T_- 的精确表达式。由于 $\mu_{\text{eff}} - \hat{\rho} = \mathcal{O}(1/\hat{\rho})$，$\pi_{c,-}(0)$ 和 $\bar{T}_+$ 在领先阶比 $\pi_{c,+}(0)$ 和 T_- 小一个 $\mathrm{e}^{-\pi\hat{\rho}/2}$ 因子，T_+ 小$\mathrm{e}\sqrt{2}$，而 $\bar{T}_-$ 小 $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-2\pi\hat{\rho}}$。

在场基底中读取。关系式 (9.13) 在 $1/\hat{\rho}$ 的幂次中不接受修正，且与质量无关；这一点在场基底中很容易理解。由 (2.9) 可知，组合 $\varphi_1 + \mathrm{i}a\,\varphi_2 = x^{\mathrm{i}a\hat{\rho}/2}\,(\pi_c + \mathrm{i}a\,\sigma)$ 在早期表现为通道 a 的波 (3.1)，去除了其对数相位后，就如同一个自由场。因此，指数项仅来自晚期：在此时，场基底中以 $x^{\mathrm{i}\nu}$ 振荡的项在半周旋转下会乘上 $\mathrm{e}^{-\pi\nu}$。轻通道中 π_c 的晚时常数是 $\varphi_1 + \mathrm{i}\,\varphi_2$ 的 $x^{\mathrm{i}\hat{\rho}/2}$ 项；后者是第2.2节中的旋转矢量，其角速度恰好等于基底的角速度，即 $\nu = \hat{\rho}/2$，与质量无关。由此便得到 (9.13)。同理，轻通道的尾部 $x^{3/2-\mathrm{i}\mu_{\text{eff}}}$ 在场基底中变为 $x^{3/2-\mathrm{i}(\mu_{\text{eff}}-\hat{\rho}/2)}$，从而给出 (9.14) 的指数项。

9.3 连接问题的求解

在第9.1节中，自由场的布朗–戴维斯模函数在晚期写成正频波与负频波之和（9.2），玻戈留波夫系数就是该和的系数。混合系统中与此对应的是第3.2节中两个通道在轻模和重模上的分解（3.12）。现在，我们利用第9.2节的晚时系数和对易关系求出其中的五个常数。轻场¯通道的常数是晚时系数之比，$\mathcal{C}_+ = T_+/T_-^*$ 和 $\mathcal{D}_+ = T_+/T_-$，由（9.14）¯和（9.16）精确给出。同理，重通道的尾部 T_- 用（9.14）表示为 T_+后，得到常数 $\mathcal{E} = \bar{T}_-/T_-^* = -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi(\mu_{\text{eff}}+\hat{\rho}/2)}\,\mathcal{D}_+^*$，其阶为 $\mathrm{e}^{-2\pi\hat{\rho}}$。它们的值列于下文的汇总（9.20）中。

波与分支。由于 $\mathcal{C}_+$ 和 $\mathcal{D}_+$ 均呈指数级微小，轻波与轻通道在 $1/\hat{\rho}$ 的幂次展开相同。特别是在绝热区间内，它是轻分支的正频波；而对于 $|x| \ll \hat{\rho}$，在领先阶上，它由带有常数 (7.1) 的有效解 (6.4) 给出。后一个结论对复数 x同样成立，因为在固定 $x^2/\hat{\rho}$时，有效解是附录 D 展开的领先阶，而这并不要求x 为实数。类似地，重通道等于重波加上第3.2节中的另外三个¯解；其中的系数$\pi_{c,-}(0)$、T_- 以及衰减解的系数都呈指数级微小。因此，重波与重通道在 $1/\hat{\rho}$ 的幂次展开相同，其表达式由 (7.9) 给出。因此，在所有时间内，该波都是重分支的正频波，这也符合预期，因为该分支始终处于绝热区间内（第 4.3 节）。

重通道。剩下的两个常数 $\mathcal{C}_-$ 和 $\mathcal{D}_-$属于重通道的非振荡部分。它们可由应用于轻波和重波的对易关系（3.6）得到，只需注意到轻波与重波及其复共轭的朗斯基行列式均为零。轻波是常数解和衰减解的组合，它们分别表现为x^0 和 x^3 乘以关于 x^2的幂级数；而重波则表现为 $x^{3/2+\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}$乘以这样的级数（见（3.8））。因此，它们的朗斯基行列式（3.5）等于 $x^{\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}$ 乘以关于 x的实数幂之和。由于它不依赖于 x 和 $\mu_{\rm eff}\neq 0$，所以它为零。对重波的复共轭也同样成立，因此

$$W[f_\ell, f_{\rm h}] = W[f_\ell, f_{\rm h}^*] = 0\,, \tag{9.17}$$

四个波中唯一不为零的朗斯基行列式为 $W_\ell \equiv W[f_\ell, f_\ell^*]$和$W_{\rm h} \equiv W[f_{\rm h}, f_{\rm h}^*]$。将分解（3.12）代入关系式 $W[f_+, f_-]$ =$W[f_+, f_-^*] = 0$，由于朗斯基行列式是反对称的，可得

$$\mathcal{C}_-\, W_\ell = \big(\mathcal{C}_+ - \mathcal{D}_+\mathcal{E}\big)\, W_{\rm h}\,, \qquad \mathcal{D}_-^*\, W_\ell = -\big(\mathcal{D}_+ - \mathcal{C}_+\mathcal{E}^*\big)\, W_{\rm h}\,, \tag{9.18}$$

关系式 $W[f_a, f_a^*] = -4\mathrm{i}\ |N_a|^2$ 与 $N_+ = N_-$ 随后给出 W_ℓ =$(1-|\mathcal{E}|^2)\ W_{\rm h}$。因此

$$\mathcal{C}_- = \frac{\mathcal{C}_+ - \mathcal{D}_+\mathcal{E}}{1-|\mathcal{E}|^2}\,, \qquad \mathcal{D}_- = -\,\frac{\mathcal{D}_+^* - \mathcal{C}_+^*\mathcal{E}}{1-|\mathcal{E}|^2}\,. \tag{9.19}$$

忽略相对阶数为 $\mathrm{e}^{-2\pi\hat\rho}$的项后，这些关系化为 $\mathcal{C}_- = \mathcal{C}_+$，这就是（8.7），现在已针对精确波得到；以及 $\mathcal{D}_- = -\mathcal{D}_+^*$。

连接问题的解。汇集这些常数以及（9.19）中的常数，两个通道在轻场波和重场波上的分解（3.12）写为

$$\boxed{\begin{aligned}
&f_+ = f_\ell + \mathcal{C}_+\, f_{\rm h}^* + \mathcal{D}_+\, f_{\rm h}\,, \qquad f_- = f_{\rm h} + \mathcal{C}_-\, f_\ell^* + \mathcal{D}_-\, f_\ell + \mathcal{E}\, f_{\rm h}^*\,,\\
&\mathcal{C}_+ = -\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi(\mu_{\rm eff}-\hat\rho/2)}\,, \qquad \mathcal{D}_+ = \frac{\pi_{c,+}(0)}{\pi_{c,+}^*(0)}\,\mathrm{e}^{-\pi\hat\rho/2}\,\frac{1+\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi(\mu_{\rm eff}-\hat\rho)}}{1+\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi(\mu_{\rm eff}+\hat\rho)}}\,,\\
&\mathcal{E} = -\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi(\mu_{\rm eff}+\hat\rho/2)}\,\mathcal{D}_+^*\,, \qquad \mathcal{C}_- = \frac{\mathcal{C}_+ - \mathcal{D}_+\mathcal{E}}{1-|\mathcal{E}|^2}\,, \qquad \mathcal{D}_- = -\,\frac{\mathcal{D}_+^* - \mathcal{C}_+^*\mathcal{E}}{1-|\mathcal{E}|^2}\,,
\end{aligned}} \tag{9.20}$$

对于任意质量和混合都严格成立。这五个常数仅取决于质量、混合以及 $\pi_{c,\,+}(0)$ 的相位。将波按照通道的方式归一化后，这个分解就是严格的玻戈留波夫变换（见下方插文）。

严格的玻戈留波夫变换。——这些波并未严格按照通道的方式归一化。将（9.20）代入关系式 $W[f_a, f_a^*] = -4\mathrm{i}\,|N_a|^2$，其中 $N_+ = N_-$，可得$W_\mathrm{h} = -4\mathrm{i}\,|N_+|^2\,\nu_\mathrm{h}^2$ 以及 $W_\ell = -4\mathrm{i}\,|N_+|^2\,\nu_\ell^2$，其中

$$\nu_\mathrm{h}^{-2} = 1 - |\mathcal{E}|^2 + |\mathcal{D}_+|^2 - |\mathcal{C}_+|^2\,, \qquad \nu_\ell^2 = \left(1 - |\mathcal{E}|^2\right)\nu_\mathrm{h}^2\,.$$

这些波 f_ℓ/ν_ℓ 和 $f_\mathrm{h}/\nu_\mathrm{h}$ 因此与通道一样经过归一化，而（9.20）是从它们到通道的变换（7.12），其中

$$\alpha = \begin{pmatrix} \nu_\ell & \mathcal{D}_+\,\nu_\mathrm{h} \\ \mathcal{D}_-\,\nu_\ell & \nu_\mathrm{h} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{C}_+\,\nu_\mathrm{h} \\ \mathcal{C}_-\,\nu_\ell & \mathcal{E}\,\nu_\mathrm{h} \end{pmatrix}.$$

这些矩阵严格满足第7.4 节的 Bogoliubov 条件，因为后者是用归一化波写出的对易关系（3.6）。因子 ν_ℓ和 ν_h 与 1 仅相差 e 阶的项$^{-\pi\hat{\rho}}$，就像 $|\mathcal{C}_+|^2$ 和 $|\mathcal{D}_+|^2$一样。

9.4 粒子产生与转换

为便于从物理角度解读解（9.20），只需考虑其中关于指数小常数的领先阶；从现在起，我们便限于这一阶。略去相对阶为 e$^{-2\pi\hat{\rho}}$的项后，常数 $\mathcal{E}$ 可以忽略，$\mathcal{C}_- = \mathcal{C}_+$ 且 $\mathcal{D}_- = -\mathcal{D}_+^*$。接着我们省略下标 $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_+$ 和 $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_+$，两个通道便写作

$$f_+ = f_\ell + \mathcal{C}\,f_\mathrm{h}^* + \mathcal{D}\,f_\mathrm{h}\,, \qquad f_- = f_\mathrm{h} + \mathcal{C}\,f_\ell^* - \mathcal{D}^*\,f_\ell\,. \tag{9.21}$$

在这一阶，波与通道的归一化方式相同，因此上方插入式中的 Bogoliubov 变换可化为

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{D} \\ -\mathcal{D}^* & 1 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.22}$$

在第7.4节中，这种变换作用于通道，并描述了激发初态。相比之下，此处的状态是 Bunch-Davies 真空，而该变换将问题的入模（通道）与其出模（波）联系起来。

这两个常数描述了两种不同的效应。常数 $\mathcal{C}$（出现在 β 中）将轻通道与重波的复共轭态联系起来，并将重通道与轻波的复共轭态联系起来。正如第 β 9.1 节中自由场的系数 一样，它混合了正频率和负频率，我们将这种效应称为粒子产生，或简称产生。至于常数$\mathcal{D}$（出现在 α 中），它将轻通道与重波本身联系起来，并将重通道与轻波本身联系起来，而不进行复共轭。某一类型的波会部分转换为另一类型的波，我们将这种效应称为转换。单场中没有与此相类似的效应。

重通道的晚时曲率扰动是这两种效应之和。在重波衰减的晚期，式（9.21）给出

$$\begin{aligned}\pi_{c,-}(0) &= \mathcal{C}\,\pi^*_{c,+}(0) - \mathcal{D}^*\,\pi_{c,+}(0)\\ &= \Big[-\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi(\mu_{\mathrm{eff}}-\hat{\rho})} + \Big(-1+\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi(\mu_{\mathrm{eff}}-\hat{\rho})}\Big)\Big]\,\mathrm{e}^{-\pi\hat{\rho}/2}\,\pi^*_{c,+}(0) \qquad (9.23)\\ &= -\,\mathrm{e}^{-\pi\hat{\rho}/2}\,\pi^*_{c,+}(0)\,.\end{aligned}$$

第二行中，第一项是产生，括号内的部分是转换。它们都通过 e 中的项依赖于质量$^{-\pi(\mu_{\mathrm{eff}}-\hat{\rho})}$，该项在两者中符号相反，并在求和时相互抵消。精确关系（9.13）之所以与质量无关，正是由于这种抵消，而（9.20）中的精确常数保留了这一性质。

转换的起源。关系式（9.19）是精确的，但没有说明转换从何而来。反射（9.12）有助于回答这个问题，只要将其与有效解结合起来。该关系用沿半周旋转延拓的轻通道来表示重通道，而重通道的非振荡部分（其中包含 $\mathcal{C}_-$ 和 $\mathcal{D}_-$）正是以这种方式延拓的轻波。在 $1/\hat{}\rho$ 的领先阶，并且对于 $|x| \ll \hat{}\rho$，轻波就是有效解，即自变量为 $x^2/2\hat{}\rho$的汉克尔函数；当 x 进行半周旋转时，该自变量完成一整周旋转。经过一整周旋转后，汉克尔函数 $H^{(1)}$ 不会回到自身，而是获得一项 $H^{(2)}$，从而给出轻波的复共轭。正如我们将在下方插文中所展示的，重通道于是可写为

$$f_- = f_{\mathrm{h}} - \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi\hat{\rho}/2}\,f^*_\ell + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\gamma}\,\mathrm{e}^{-\pi\hat{\rho}/2}\,f_\ell\,, \qquad (9.24)$$

精确到相对阶 $1/\hat{}\rho$ 的修正项。这与精确常数（9.19）一致；在领先阶下，它们化为 $\mathcal{C}_- = -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi\hat{\rho}/2}$；再结合（$\pi_{c\text{的相位，}+}$（0）在（7.4）中给出，得到 $\mathcal{D}_- = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\gamma}\,\mathrm{e}^{-\pi\hat{\rho}/2}$。

因此，有效解揭示了转换的各个因子分别来自何处。指数因子 $\mathrm{e}^{-\pi\hat{\rho}/2}$ 是反射的前因子，与产生的情况相同。因子 $\sqrt{2}$ 来自点 $x=0$，在该点，轻分支的正频率波和负频率波合并，且该分支穿越视界（见第8.1节）。事实上，有效解在该点周围并非单值；转换来自汉克尔函数的自变量绕行一周后，它在 $H^{(2)}$ 中获得的项，而产生则来自 $H^{(1)}$中的项。最后，相位是轻分支所累积相位 γ 的两倍。

由有效解产生的转换。—对于 $a=+1$，反射（9.12）为$f_+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x) = -\mathrm{e}^{\pi\hat{\rho}/2}f^*_-(x)$，即

$$f_-(x) = -\,\mathrm{e}^{-\pi\hat{\rho}/2}\left[f_+\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x\big)\right]^*. \qquad (9.25)$$

轻通道的两个振荡解是 x 的幂乘以关于 x^2的幂级数。半周旋转使级数保持不变，并将 $f_{\rm h}$ 乘以 $-{\rm i}\,{\rm e}^{-\pi\mu_{\rm eff}}$，将 $f_{\rm h}^*$乘以 $-{\rm i}\,{\rm e}^{\pi\mu_{\rm eff}}$（见（9.4））。将（9.20）代入（9.25），轻通道的项 $\mathcal{C}_+ f_{\rm h}^*$因此给出 $-{\rm e}^{-\pi\hat\rho/2}\,({\rm i}\,{\rm e}^{\pi\mu_{\rm eff}})\,\mathcal{C}_+^* f_{\rm h} = f_{\rm h}$，而项 $\mathcal{D}_+ f_{\rm h}$给出$\mathcal{E}\,f^*{}_{\rm h}$。因此，恰好得到

$$f_-(x) = f_{\rm h}(x) + \mathcal{E}\,f_{\rm h}^*(x) - {\rm e}^{-\pi\hat\rho/2}\left[f_\ell\big({\rm e}^{{\rm i}\pi}x\big)\right]^* . \tag{9.26}$$

经过半周旋转的轻波是常数解和衰减解的线性组合，$f_\ell({\rm e}^{{\rm i}\pi}x) = c_1\,f_\ell(x) + c_2\,f_\ell^*(x)$，而 (9.26) 给出 $\mathcal{C}_- = -{\rm e}^{-\pi\hat\rho/2}\,c_1^*$和 $\mathcal{D}_- = -{\rm e}^{-\pi\hat\rho/2}\,c_2^*$。对于实数正值 $x \ll \hat\rho$，轻波在领先阶下为

$$\pi_{c,\ell}(x) = A_+\,x^{5/2}\,H^{(1)}_{5/4}(z)\,, \qquad \sigma_\ell(x) = -A_+\,x^{5/2}\,H^{(1)}_{1/4}(z)\,, \qquad z \equiv \frac{x^2}{2\hat\rho}\,. \tag{9.27}$$

当 x 旋转半周时，z 旋转一整周，而 [54]

$$H^{(1)}_\nu\big({\rm e}^{2{\rm i}\pi}z\big) = -\,H^{(1)}_\nu(z) - 2\cos(\nu\pi)\,{\rm e}^{-{\rm i}\nu\pi}\,H^{(2)}_\nu(z)\,, \tag{9.28}$$

其中，对于 $\nu = 5/4^-$，有 $2\cos(\nu\pi) = -\sqrt{2}$；对于 $\nu = 1/4$，有 $+\sqrt{2}$。对于曲率扰动，这给出

$$\begin{aligned}\pi_{c,\ell}\big({\rm e}^{{\rm i}\pi}x\big) &= {\rm i}\,A_+\,x^{5/2}\Big[-H^{(1)}_{5/4}(z) + \sqrt{2}\,{\rm e}^{-5{\rm i}\pi/4}\,H^{(2)}_{5/4}(z)\Big]\\ &= -\,{\rm i}\,\pi_{c,\ell}(x) + \sqrt{2}\,{\rm e}^{-3{\rm i}\pi/4}\,\frac{A_+}{A_+^*}\,\pi^*_{c,\ell}(x)\,,\end{aligned} \tag{9.29}$$

这里我们用到了：对于实数 ν 和实数正值 z，$H^{(2)}_\nu(z) = \big[H^{(1)}_\nu(z)\big]^*$，因此 $A_+^*\,x^{5/2}H^{(2)}_{5/4}(z) = \pi^*_{c,\ell}(x)$。由 (7.1) 和 (7.2)，$A_+/A_+^* = {\rm e}^{2{\rm i}(\gamma+7\pi/8)}$，而最后一个系数为 $-\sqrt{2}{\rm e}^{2{\rm i}\gamma}$。有质量场在阶数为 $1/4$ 时给出相同的两个系数。因此，在领先阶下，$c_1 = -{\rm i}$ 且 $c_2 = -\sqrt{2}{\rm e}^{2{\rm i}\gamma}$，从而得到 (9.24)。

与斯托克斯现象的关系。 在绝热区间，轻模和重模是轻分支和重分支的绝热波。因而，轻通道的 $\mathcal{C}\,f_{\rm h}^*$和重通道的 $\mathcal{C}\,f_\ell^*$分别是在穿过斯托克斯线时获得的项（8.5）。换言之，产生是分支点（8.1）的斯托克斯现象，而 $\mathcal{C}$ 是其常数；在领先阶，其模确实为 ${\rm e}^{-\pi\hat\rho/2}$。方程（9.20）在任意质量和混合下都精确给出了这个常数。其相位 $-{\rm i}$ 与自由场的玻戈留波夫系数（9.5）的相位相同。

然而，这种转换在第 8.2 节中没有对应物。它将正频率的轻波与重波联系起来；由于对所有 $\omega_{\rm h} - \hat\omega_\ell = \hat\rho$ 均成立 x，二者从不合并，因此没有分支点会交换它们。正如我们刚刚看到的，其常数同时包含了绝热描述失效的两个位置，即分支点：一方面通过它与产生项共有的指数因子，另一方面通过其因子 $x = 0$ 所对应的点 $\sqrt{2}$。这种结构让人联想到二阶以上方程的新斯托克斯线；它们不附着于任何分支

点，而是在普通斯托克斯线交叉的位置出现 [67, 68]。

转换时间。方程（9.24）对所有 $x \ll \hat{}\rho$均成立；对于 $x \gg \sqrt{\hat{}\rho}$而言，它的两种轻波分别是轻分支的正频率和负频率绝热波。因此，转换波在修正色散区间中就已经存在，而在早期，每个通道都只是单一的绝热波。与产生一样，转换也发生在 $x \sim \hat{}\rho$附近，远早于轻分支穿越其视界。然而，这一结论要求晚期定义的重波在修正色散区间内，除小于 $\mathrm{e}^{-\pi\hat{\rho}/2}$的项外，始终是单一的绝热波。我们通过沿虚轴跟踪重波，确认了这一点；在虚轴上，如此大小的轻波混合项将达到一阶。我们尚未研究这种切换的具体轮廓，即转换所对应的（8.4）的类似形式。

量子。用量子来描述这两种效应最为直观。波定义了自身的量子，其湮灭算符为

$$\hat{b}_{\ell,\boldsymbol{k}} = \hat{b}_{+,\boldsymbol{k}} - \mathcal{D}^*\,\hat{b}_{-,\boldsymbol{k}} + \mathcal{C}^*\,\hat{b}^\dagger_{-,-\boldsymbol{k}}\,, \qquad \hat{b}_{\mathrm{h},\boldsymbol{k}} = \hat{b}_{-,\boldsymbol{k}} + \mathcal{D}\,\hat{b}_{+,\boldsymbol{k}} + \mathcal{C}^*\,\hat{b}^\dagger_{+,-\boldsymbol{k}}\,, \tag{9.30}$$

也就是说，$\hat{b}_{w,\,\boldsymbol{k}} = \sum_a (\alpha_{aw}\,\hat{b}_{a,\,\boldsymbol{k}} + \beta^*_{aw}\,\hat{b}^\dagger_{a,\,-\boldsymbol{k}})$ 对应的矩阵（9.22）。由于在这一阶上这些矩阵满足第 7.4 节的 Bogoliubov 条件（对于第 9.3节中插入的 $\hat{}$，则严格成立），算符$b_{w,\,\boldsymbol{k}}$ 满足与 $\hat{}$相同的对易关系$b_{a,\,\boldsymbol{k}}$ （另见（E.1））。利用（9.21），将场按各通道的量子作展开的（3.2）式，便可改写为按各波的量子作展开：

$$X_{\boldsymbol{k}} = \sum_{w=\ell,\mathrm{h}} \Big[\, X_w(x)\,\hat{b}_{w,\boldsymbol{k}} + X^*_w(x)\,\hat{b}^\dagger_{w,-\boldsymbol{k}} \Big]\,, \qquad X = \pi_c, \sigma\,, \tag{9.31}$$

其中波就是模函数。这些关系在任意时刻都成立。不过，算符 $b_{w,\,\boldsymbol{k}}$ 只有在波为正频率绝热波的区域内才描述粒子：产生和转换在$x \sim \hat{}\rho$附近发生之后，轻波对应轻分支的视界穿越之前；对于重波，则在此后所有时刻均成立。更早的时候，与粒子相关的概念是通道。

在（9.30）中，$\mathcal{C}^*$ 混合湮灭算符和产生算符，并描述$\hat{}$产生过程。被 $b_{a,\boldsymbol{k}}$湮灭的布朗–戴维斯真空，因此包含两种波的量子，每种波的占据数为 $|\mathcal{C}|^2$。它们成对产生：一个轻场量子和一个重场量子具有相反的动量，$\langle \hat{b}^\dagger_{\ell\,,\boldsymbol{k}} \hat{b}^\dagger_{\mathrm{h}\,\boldsymbol{k}'} \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}')\mathcal{C}$。另一方面，$\mathcal{D}$中的各项仅涉及湮灭算符，并描述转换过程。这种效应守恒量子数并改变其种类，例如中微子味之间的转换，或光子转换为轴子。因此，轻通道的一个量子部分地也是重波的一个量子，其概率为 $|\mathcal{D}|^2$。转换作用于激发初态的量子

（第 7.4节），而真空中不含有通道的量子。在真空中，它仅作用于产生的量子，且处于指数小常数的二阶。在这一过程中，例如，一对量子中的重场量子会转变为轻场量子，$\langle \hat{b}^\dagger_{\ell,\boldsymbol{k}} \hat{b}^\dagger_{\ell,\boldsymbol{k}'} \rangle = -(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\, \mathcal{CD}$。

场基底。第2.2节的场基底也区分了产生和转换这两种效应。在这个基底中，轻波和重波是两种圆偏振，$a=+1$ 和 $a=-1$，见（4.6），复共轭会交换两种偏振，因为它会将 $\varphi_2 = -\mathrm{i}a\,\varphi_1$ 变为 $\varphi_2^* = \mathrm{i}a\,\varphi_1^*$。因此，重波的复共轭具有轻波的偏振。产生过程关联的是两个偏振相同、频率相反的波。因此，这就是质量为 $\rho/2$的自由场粒子的产生，正如第8.2节所述。相比之下，转换过程关联的是两种偏振。如果拉格朗日量在旋转下保持不变，转换过程便会消失，因为两种偏振将独立演化；因此，转换过程源自（2.8）式的最后两项。在 $x \sim \hat{\rho}$附近，这些项可以忽略，而转换后的波会在此处出现（第4.2节）。不过，这并不矛盾。正如产生过程的常数由实轴之外的分支点决定，转换过程的常数并非由波出现时的时间决定，而是涉及点 $x=0$，在该点这些项至关重要。

10 宇宙学对撞机信号

上一节的关系带来了一个可观测后果，即宇宙学对撞机信号。在曲率扰动双谱的挤压极限下，其中一个动量远小于另外两个动量，有质量场会在动量比的对数中留下振荡。本节将在（2.2）所示的区域计算这一信号。我们将双谱写成二点函数的时间积分，取挤压极限；此时信号来自上文得到的长模中指数微小的振荡，并计算剩余的短模积分。

10.1 双谱及其挤压极限

双谱。在导数的领先阶下，有效场论的暴胀涨落（三次相互作用见第 2.1 节）为 [5]

$$\mathcal{L}_{\rm int}/a^3 = -g\,\sigma^3 - \frac{\alpha}{2}\,\dot{\pi}_c\,\sigma^2 - \frac{\dot{\pi}_c^2\sigma}{2\Lambda_2} - \lambda_2\,\dot{\pi}_c^3 - \frac{(\partial_i\pi_c)^2\sigma}{2\Lambda_1 a^2}\,. \tag{10.1}$$

最后一个相互作用的耦合由对称性决定，$\Lambda_1^{-1} = \rho/f_\pi^2$，而产生混合的算符也会对 $\dot{\pi}_c^2\sigma$ 作出贡献，其中 $\Lambda_2^{-1} = -\rho/f_\pi^2$在不存在其他算符时 [5]。为明确起见，我们考虑这五种相互作用。

含有更多导数的相互作用可以用同样的方式处理。混合被保留在模函数中，因此在这些相互作用的一阶近似下，双谱是一个接触图。令 $H_{\rm int} = -\int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L}_{\rm int}$，in-in公式给出晚时间关联函数为

$$\left\langle \pi_{c,\boldsymbol{k}_1}\pi_{c,\boldsymbol{k}_2}\pi_{c,\boldsymbol{k}_3}\right\rangle = 2\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}\tau\; a\left\langle \pi_{c,\boldsymbol{k}_1}(0)\,\pi_{c,\boldsymbol{k}_2}(0)\,\pi_{c,\boldsymbol{k}_3}(0)\;H_{\rm int}(\tau)\right\rangle, \tag{10.2}$$

其中右边的场是相互作用绘景场（3.2）。根据Wick定理，三个外部场分别与顶点的一个场收缩。因此，图中的每条线都是晚时曲率扰动与顶点处场 X 之间的二点函数，其表达式为第3.1节中各通道之和：

$$\langle \pi_c(0)\,X(x)\rangle'_k = \sum_{a=\pm}\pi_{c,a}(0)\,X_a^*(x)\,, \qquad x=-k\tau\,, \tag{10.3}$$

撇号表示已去掉动量守恒δ函数，下标表示该线的动量。对于相互作用 σ^3，3!种收缩彼此相同，因此

$$\langle\pi_c^3\rangle' \equiv \left\langle \pi_{c,\boldsymbol{k}_1}\pi_{c,\boldsymbol{k}_2}\pi_{c,\boldsymbol{k}_3}\right\rangle' = 12\,g\;\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}\tau\; a^4\prod_{i=1}^{3}\langle\pi_c(0)\,\sigma(x_i)\rangle'_{k_i}\,, \tag{10.4}$$

其中 $x_i=-k_i\tau$。其他相互作用具有相同的结构：时间导数作用于某条线时为 $\langle\pi_c(0)\;\dot\pi_c(x)\rangle'$，动量为 $\boldsymbol{k}_i$的线上有空间梯度时会产生因子$\mathrm{i}\boldsymbol{k}_i$ ，并对各种收缩求和。

挤压极限与长模。 现在取 $k_1=k_2=k\gg k_3$，并使用短模的时间变量 $x=-k\tau$。此时长模位于 $x_3=(k_3/k)\;x\ll x$，因此当短模仍深处其视界内时，它已穿越自己的视界。暂且假设，在积分占主导的时刻，长模已经穿越视界。相应条件（10.19）将在确定这些时刻后于下文推导。这样，长模对应的线便可用其晚时表达式替代。利用有质量场的晚时行为（3.10），式（10.3）中的振荡部分在$X=\sigma$ 时为

$$\langle\pi_c(0)\,\sigma(x)\rangle'_{\rm osc} = \Big[\sum_a \pi_{c,a}(0)\,\bar T_a^*\Big]\,x^{3/2+\mathrm{i}\mu_{\rm eff}} + \Big[\sum_a \pi_{c,a}(0)\,T_a^*\Big]\,x^{3/2-\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}\,. \tag{10.5}$$

对易关系（9.15）表明，这两个括号内的量互为复共轭，因此相关函数为实数。此外，在第一个括号中，重通道比轻通道小一个量级为 $\mathrm{e}^{-2\pi\hat\rho}$ （第 9.2节）的因子。结合轻通道的（9.14），我们得到

$$\langle\pi_c(0)\,\sigma(x)\rangle'_{\rm osc} = \mathcal{T}\,x^{3/2+\mathrm{i}\mu_{\rm eff}} + \mathcal{T}^*\,x^{3/2-\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}\,, \qquad \mathcal{T} = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi(\mu_{\rm eff}-\hat\rho/2)}\;\pi_{c,+}(0)\,T_-\,. \tag{10.6}$$

系数 $\mathcal{T}$ 同时包含两个通道。它等于轻通道的晚时曲率扰动（7.4）与重通道的尾部（7.8）之积，再乘以一个指数小因子；这个因子正是 $\mathcal{C}^*$，即粒子产生的常数（9.20）。另一方面，转换并未出现，因为轻通道的尾部T_+ 包含了转换，但它只出现在（10.5）的第二个括号中，即第一个括号的复共轭。换言之，在这个第二个括号中，由 T_+ 携带的转换会与重通道的晚时曲率扰动相抵消，如（9.23）所示，因此只剩下产生。于是，信号仅由产生所决定。具体地，在 $1/\hat{}\rho$的领先阶上，

$$\begin{aligned}\langle \pi_c(0)\,\sigma(x)\rangle'_{\rm osc} \simeq -\,\frac{\Gamma(1/4)}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{H^2}{k^3}\,\frac{\mathrm{e}^{-\pi(\mu_{\rm eff}-\hat\rho/2)}}{\hat\rho^{1/4}}\,x^{3/2}\\ \times\cos\!\left[\mu_{\rm eff}\log\frac{x}{\hat\rho}-\frac{\mu_{\rm eff}-\hat\rho}{2}\log\hat\rho+\hat\rho+\frac{3\pi}{8}\right].\end{aligned} \tag{10.7}$$

带时间导数的腿由此得出。根据（3.10），π_c的振荡尾项是$\rho/$（$3/2\pm\mathrm{i}\mu_{\rm eff}$）倍的 σ 振荡尾项，并且由于 $\dot\pi_c=-Hx\,\mathrm{d}\pi_c/\mathrm{d}x$，

$$\langle \pi_c(0)\,\dot\pi_c(x)\rangle'_{\rm osc} = -H\hat\rho\,\langle \pi_c(0)\,\sigma(x)\rangle'_{\rm osc}\,. \tag{10.8}$$

在 $x_3=(k_3/k)\,x$ 处取值时，这些振荡通过 $(k_3/k)^{3/2\pm\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}$ 依赖于动量，因此会产生双谱在 $\log(k_3/k)$ 中的振荡。腿的非振荡部分会对双谱的非振荡部分作出贡献，也就是有效理论中的非振荡部分；而长模上的梯度则受到 k_3/k 的抑制。以下我们不考虑这两者。

10.2 短模的共振

短模与时间积分。短模的各条腿需要在同一共形时间处取值，此时这些模态仍在振荡。在求和式（10.3）中，重通道受到其晚时曲率扰动（9.13）的抑制，因此

$$\langle \pi_c(0)\,X(x)\rangle'_k \simeq \pi_{c,+}(0)\,X^*_+(x)\,, \tag{10.9}$$

达到 e 阶的相对修正$^{-\pi\hat\rho/2}$。将三条腿代入时间积分（10.2）后，对于（10.1）中的所有相互作用，双谱的振荡部分为：

$$\langle\pi_c^3\rangle'_{\rm osc}=\frac{2k^3}{H^4}\,\mathrm{Im}\left\{\pi_{c,+}(0)^2\left[\mathcal{T}_3\left(\frac{k_3}{k}\right)^{3/2+\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}\mathcal{J}_+ + \mathcal{T}_3^*\left(\frac{k_3}{k}\right)^{3/2-\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}\mathcal{J}_-\right]\right\}, \tag{10.10}$$

其中 $\pi_{c,\,+}(0)$ 是短模的，$\mathcal{T}_3$ 是长模的系数（10.6），而 $\mathcal{J}_\pm$ 仅依赖于短模，具体通过以下积分

$$I^{XY}_\pm \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}x\; x^{-5/2\pm\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}\; X^*_+(x)\,Y^*_+(x)\,, \tag{10.11}$$

其中 X_+ 和 Y_+ 是顶点处由短模携带的场所对应的轻通道的模函数，即 σ_+、$\dot{\pi}_{c,+}$，或（k/a）$\pi_{c,+} = Hx\,\pi_{c,+}$对于梯度，我们将其标记为 $\partial\pi$。对于（10.1）中的五种相互作用，我们得到

	σ^3	$\dot{\pi}_c\,\sigma^2$	$\dot{\pi}_c^2\,\sigma$	$\dot{\pi}_c^3$	$(\partial_i\pi_c)^2\,\sigma$
$\mathcal{J}_\pm$	$6g\,I_\pm^{\sigma\sigma}$	$\alpha\big[2I_\pm^{\dot{\pi}\sigma} - H\hat{\rho}I_\pm^{\sigma\sigma}\big]$	$\Lambda_2^{-1}\big[I_\pm^{\dot{\pi}\dot{\pi}} - 2H\hat{\rho}I_\pm^{\dot{\pi}\sigma}\big]$	$-6\lambda_2 H\hat{\rho}I_\pm^{\dot{\pi}\dot{\pi}}$	$\Lambda_1^{-1}I_\pm^{\partial\pi\partial\pi}$

(10.12)

其中每一项里，与 $H\hat{}\rho$ 成正比的项，都是长模携带时间导数的项（见（10.8））。对于梯度相互作用，长模携带 σ，而两个梯度带来 $-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2 \simeq k^2$。

共振。接下来需要计算积分（10.11）。其被积函数是振荡的，并且如宇宙学对撞机信号的标准计算中那样（例如参见 [60, 69, 70]），积分主要由其相位达到驻值的时间（如果存在）贡献。为找到这些时间，我们使用轻通道的绝热模函数（5.7），其适用范围为 $x \gg \sqrt{}\hat{}\rho$。在此范围内，顶点处的场是 $\pi_{c,+}$ 的倍数，其中 $\sigma_+ = -\mathrm{i}\,\pi_{c,+}$ 以及 $\dot{\pi}_{c,+} = -\mathrm{i}H\hat{}\omega_\ell\,\pi_{c,+}$。除去这些变化缓慢的因子后，被积函数为

$$
\begin{aligned}
x^{-5/2\pm\mathrm{i}\mu_{\rm eff}}\left[\pi^*_{c,+}(x)\right]^2 &= N_+^2\,\eta(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi_\pm(x)}\,,\\
\eta(x) = \frac{x^{-1/2}}{(1+\hat{\rho}^2/4x^2)^{1/2}}\,,&\qquad \Phi_\pm(x) = \pm\mu_{\rm eff}\log x - 2S_+(x)\,,
\end{aligned}
\tag{10.13}
$$

其相位变化为

$$
x\,\frac{\mathrm{d}\Phi_\pm}{\mathrm{d}x} = \pm\mu_{\rm eff} - 2\,\hat{\omega}_\ell(x)\,. \tag{10.14}
$$

对于下号，相位处处都不是驻定的。由于被积函数是解析的，并且在 $\log x$ 的取值范围两端都衰减——早期在通常的 $\mathrm{i}\epsilon$ 处方下如此，晚期则按 x 的幂律衰减——因此 $\mathcal{J}_-$ 指数级小于 $\mathcal{J}_+$，后文将舍去这一项。然而，对于上号，当

$$
2\,\hat{\omega}_\ell(x_*) = \mu_{\rm eff}\,,\qquad \text{that is,}\qquad x_* = \frac{\hat{\rho}}{2}\sqrt{\left(1+\frac{\mu_{\rm eff}}{\hat{\rho}}\right)^2 - 1} \;\simeq\; \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{\rho}\,. \tag{10.15}
$$

驻点即为共振。事实上，轻分支的频率随时间降低；当其达到 $\mu_{\rm eff}H/2$ 时，两个短波量子共同与长模的晚时振荡发生共振，其频率为 $\mu_{\rm eff}H$。共振发生在 $k/a \simeq (\sqrt{3}/2)\,\rho$，即重质量的尺度处。此时短模深处于其视界内，绝热解（5.7）适用，正如假设的那样；但它们已超出有效场论的适用范围，$x \ll \hat{}\rho$。

在驻点附近，$\Phi(x) \simeq \Phi(x_*) + \frac{1}{2}\Phi''(x_*)\,(x-x_*)^2$，其中 $\Phi''(x_*) = -4/(\hat{}\rho + \mu_{\rm eff})$，因此共振持续 $\Delta x \sim \sqrt{}\hat{}\rho \ll x_*$，而高斯积分

给出

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \eta(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(x)} \simeq \eta(x_*) \sqrt{\frac{\pi\,(\hat{\rho}+\mu_{\rm eff})}{2}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\Phi(x_*)-\pi/4]}\,, \tag{10.16}$$

其模 $\sqrt{\pi}\,3^{1/4}/\sqrt{2}$ 在领先阶不依赖于混合。缓慢变化的因子在驻点处取值，此处 $\sigma_+^* = \mathrm{i}\pi_{c,+}^*$、$\dot{\pi}_{c,+}^* = \mathrm{i}\,(\mu_{\rm eff}H/2)\,\pi_{c,+}^*$并且梯度会带来 $k/a = Hx_*$。因此，(10.12) 的每种组合都变为

$$\mathcal{J}_+ \simeq N_+^2\, \mathcal{V}\, \eta(x_*) \sqrt{\frac{\pi\,(\hat{\rho}+\mu_{\rm eff})}{2}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\Phi(x_*)-\pi/4]}\,, \tag{10.17}$$

其中因子 $\mathcal{V}$ 汇集了顶点处的耦合和场。在 $1/\hat{\rho}$ 的领先阶，其中 $\mu_{\rm eff} \simeq \hat{\rho}$ 和 $x_* \simeq (\sqrt{3}/2)\,\hat{\rho}$，它为

	σ^3	$\dot{\pi}_c\,\sigma^2$	$\dot{\pi}_c^2\,\sigma$	$\dot{\pi}_c^3$	$(\partial_i\pi_c)^2\,\sigma$
$\mathcal{V}$	$-6\,g$	$\frac{3\mathrm{i}}{2}\alpha H$	$\frac{3}{4}\hat{\rho}^2H^2/\Lambda_2$	$\frac{3}{2}\frac{2}{\hat{\rho}^3}\lambda_2 H^3$	$\frac{3}{4}\hat{\rho}^2H^2/\Lambda_1$

(10.18)

相互作用 $\dot{\pi}_c\sigma^2$ 是一个例外。(10.12) 中的两项分别由短模和长模承载导数，它们相加得到 $\alpha H\,[\hat{\rho} - 2\,\hat{\omega}_\ell(x_*)]$,由于满足共振条件 (10.15)，该结果在领先阶为零。因此，(10.18) 中给出的值来自一阶修正，计算过程见附录 F。

长模的条件。 现在可以说明，在什么条件下长模可由其晚时振荡描述，正如我们所假设的那样。这个条件比较两个时间。短模发生共振时，即 4.8)，长模必须已经越过自身的视界 $k_3^2/(a^2\rho) \ll H$，短模共振发生在 $k/a \simeq (\sqrt{3}/2)\,\rho$。由于长模在共振时处于 $x_3 = (k_3/k)\,x_*$，这要求

$$\frac{k_3}{k}\,x_* \ll \sqrt{\hat{\rho}}\,, \qquad \text{that is,} \qquad \frac{k_3}{k} \ll \hat{\rho}^{-1/2}\,. \tag{10.19}$$

否则，长模的振荡仍然包含相位 $x^2/2\hat{\rho}$ （5.8）的相位，在这里等于（3/8）$\hat{\rho}$（k_3/k）^{2}。条件（10.19）是二次色散关系下的对应条件，即通常要求短模与有质量场发生共振时，长模位于其视界之外。

10.3 信号的闭式表达式

所得信号。 最后，我们用曲率扰动的双谱的形状 S 来表示结果，该形状定义为 $\langle\zeta_{\boldsymbol{k}_1}\zeta_{\boldsymbol{k}_2}\zeta_{\boldsymbol{k}_3}\rangle' = (2\pi)^4\Delta_\zeta^4\, S/(k_1k_2k_3)^2$。结合 $\zeta = -H\pi_c/f_\pi^2$ 以及功率谱（3.18），其中重通道可以忽略，形状为

$$S(k,k,k_3) = -\frac{f_\pi^2}{4H}\left(\frac{k_3}{k}\right)^2 \frac{\langle\pi_c^3\rangle'}{|\pi_{c,+}(0)|^4}\,, \tag{10.20}$$

其中 π_{c}、$_{+}$(0) 表示短模的相应量。我们将双谱（10.10）代入其中，短模取（10.17），长模取（10.7），每个模函数都用其自身动量处的 $N_a = H/(2k^{3/2})$ 进行归一化。两个分支累积的相位通过 π_{c}、$_{+}$(0)^2 和 $\mathcal{T}_3$ 表现出来，即轻场通道（7.4）的相位 γ 的三倍，以及重场通道（7.8）的相位一次。它们与共振处的相位 $\Phi(x_*)$ 结合，形成 $\hat{}\rho \log(3\sqrt{3}/4) - \frac{3}{2}(\mu_{\rm eff} - \hat{}\rho) \log \hat{}\rho$,– 忽略 $_1/\hat{}\rho$ 阶的项。对于形状的振荡部分，我们得到

$$\boxed{\begin{aligned} S_{\rm osc}(k,k,k_3) &\simeq \frac{\pi\, 3^{1/4}}{8\,\Gamma(1/4)}\,\frac{f_\pi^2}{H^3}\,\frac{\mathrm{e}^{-\pi(\mu_{\rm eff}-\hat\rho/2)}}{\hat\rho^{3/4}}\left(\frac{k_3}{k}\right)^{1/2}\mathrm{Re}\left[\mathcal{V}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\right], \\ \vartheta &= \mu_{\rm eff}\log\frac{k_3}{k} + \hat\rho\,\log\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\,(\mu_{\rm eff}-\hat\rho)\log\hat\rho + \frac{3\pi}{8}\,, \end{aligned}} \tag{10.21}$$

在 $1/\hat{}\rho$ 的领先阶，并在条件（10.19）下，其中 $\mathcal{V}$ 由（10.18）给出。 ϑ的第三项，其阶数为 $\hat{}\rho^{-1}\log \hat{}\rho$，来源于（7.2）的对数相位，而（10.21）的修正项阶数为 $1/\hat{}\rho$。

信号特征。信号有三个值得强调的特征，即其对质量和混合的指数依赖、其随顶点处时间导数数量增加而增长，以及当相互作用仅由混合产生时的取值。

指数行为。（10.21）的指数是产生常数C的模，其精确表达式由（9.20）给出；尽管（10.21）的其余部分仅在 $1/\hat{}\rho$ 的领先阶成立，我们仍将该指数保持为这种形式。这一结果源于任意质量和混合下的反射对称性。更准确地说，因子 $\mathrm{e}^{\pi\hat\rho/2}$ 来自早期时间波（9.7）的对数相位的半周旋转，而玻尔兹曼因子 $\mathrm{e}^{-\pi\mu_{\rm eff}}$来自晚期时间幂（9.4）的半周旋转。对短模的积分由实时间处的共振主导；如上文所示，在区间（2.2）内以及在小混合下，该积分都不会增加额外的指数因子。这一指数在小混合下化为通常的 $\mathrm{e}^{-\pi\mu_{\rm eff}}$，而在区间（2.2）内化为 $\mathrm{e}^{-\pi\mu_{\rm eff}/2}$，即通常玻尔兹曼抑制的一半，这一点已在 [41]中得到。这一半有着简单的来源。粒子是在修正色散区间内产生的，在该区间中，场基底的两个场是质量为 $\rho/2$ 的自由场（第 8.2 节）；由于 $\mu_{\rm eff} \simeq \hat{}\rho$，$\mathrm{e}^{-\pi\mu_{\rm eff}/2}$ 与这些自由场的玻戈留波夫系数 $\mathrm{e}^{-\pi\hat\rho/2}$ 重合。在 [45], 中，通过精确的双谱，在整个质量与混合平面上得到了相同的规律；而在这里，它源于运动方程的对称性。在大质量且混合固定时，该结果与 [43]中为相互作用 σ^3 得到的闭式表达式的指数依赖一致。

时间导数。$\hat{}$ 的幂次ρ 在（10.18）中很容易理解。在短腿上，时间导数会带来共振处的频率， $\mu_{\rm eff}H/2$。相反，在长腿上，它带来的是混合本身，$\hat{}\rho H$ （参见晚期关系（10.8））。因此，信号会随着顶点处曲率扰动的时间导数次数增加而增强，正如 [41]中所发现并解释的那样。短腿上的梯度

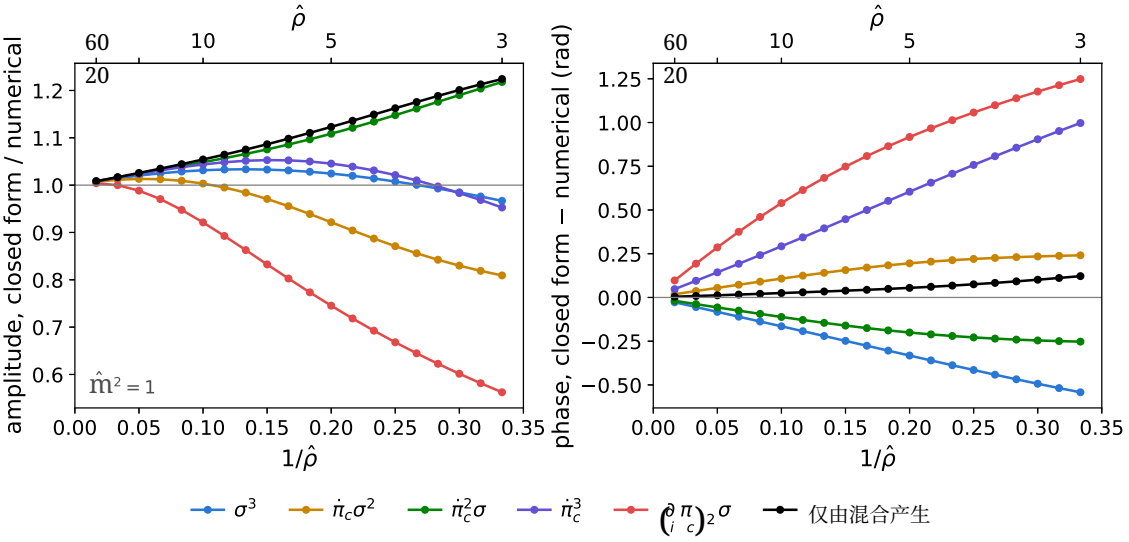

图6：宇宙学对撞机信号的闭式表达式（10.21）与其数值计算的对比，二者均为 $1/\hat{}\rho$的函数，针对$m^2 = 1$，适用于（10.1）中的五种相互作用，以及仅由混合产生的组合。左图：振荡振幅之比，振荡发生在 $\mu_{\rm eff}\log(k_3/k)$中。右图：相位之差，即两种振荡在其自变量 $\mu_{\rm eff}\log(k_3/k)$中的偏移。

会在共振处带来$\bar{} k/a \simeq (\sqrt{3}/2)\,\rho$，因此梯度相互作用也会以同样的方式增强。

混合本身产生的信号。上述针对 $\dot{\pi}_c\sigma^2$ 所指出的抵消，也发生在 $\dot{\pi}_c^2\sigma$ 与梯度相互作用之间；当二者均由单独的混合产生时，在 [41], 中曾暂不考虑后者，$\Lambda_2^{-1} = -\Lambda_1^{-1} = -\rho/f_\pi^2$。此时这两种相互作用合并为 $-(\rho/2f_\pi^2)\,[(\partial_i\pi_c)^2/a^2 - \dot{\pi}_c^2]\,\sigma$，它们对（10.18）的贡献相互抵消，同样是由于共振条件；而一阶修正给出（见附录F） $\mathcal{V} = -(21\mathrm{i}/4)\,\hat{}\rho H^2/\Lambda_1$，即 $\mathcal{V} f_\pi^2/H^3 = -(21\mathrm{i}/4)\,\hat{}\rho^2$。此值给出了混合本身产生的宇宙学对撞机信号，其中没有自由参数。

精度。为评估（10.21）的精度，我们使用精确的腿部模函数（10.3）计算了相同的信号，并通过直接积分求得时间积分。图6 展示了五种相互作用以及仅由混合产生的组合中，两种结果的振幅之比和相位之差。差异会随着 $1/\hat{}\rho$（展开参数）的减小而减小。在 $\hat{}\rho = 10$ 时，振幅差异低于 10%，相位差低于 0.55 弧度；在 $\hat{}\rho = 40$ 时，振幅差异低于 *1.5%*，相位差低于 *0.*15 弧度。

11 结论

暴胀期间，与曲率扰动耦合的大质量场会在原初关联函数中留下印记；对这些关联函数的计算，最常见的做法是将两者之间的混合作为微扰处理。近期，混合较强的参数区间受到了广泛关注，无论是在理论上 [5, 29, 39–46] 还是在观测上 [28, 71]。本文研究的参数区间中，混合不仅很强，而且远大于哈勃率 $\hat{}$ $\rho \equiv \rho/H \gg 1$，也远大于 m^2/H。我们的研究思路与微扰理论相反：将两个场始终保留在理论中，并按混合的倒数展开。我们要回答的是一个连接问题，即早期由布朗–戴维斯真空定义的解，如何分解为晚期由其行为定义的解。其系数给出了涨落的晚时振幅以及粒子产生的玻戈留波夫系数。回答这一问题使我们得以推导描述该参数区间低能行为的单场有效理论，计算超出该理论范围的效应，并由此获得宇宙学对撞机信号。

该展开建立在混合系统局域色散关系的两个分支之上。对两个场进行时间依赖旋转可以消除混合；在旋转后的基中，系统在高频下化为两个质量为$\rho/2$的自由场，其两个圆偏振分别对应两个分支。重模始终绝热演化，而轻模在越过自身视界之前也保持绝热；在视界附近，轻模遵循有效场论的运动方程。有效场论作为展开的领先阶出现，而将两种描述进行匹配则确定了其真空，并设定了一个在有效场论生效之前累积的相位——这是有效场论自身无法确定的，而宇宙学对撞机信号的相位取决于此。有效场论不包含的重模可以在所有时间上以闭式表达式求得。因此，关于混合的倒数的展开提供了有效理论，并辅以处于其绝热真空中的重模；相应修正可以系统地计算。

宇宙学对撞机信号起源处的粒子产生在混合参数中呈指数小，因此超出了这一渐近展开的所有阶。我们已经证明，它源于色散关系的复分支点处的斯托克斯现象；这些复分支点位于重质量的尺度上，是有效场论无法观测到的。在旋转后的基中，这一现象归结为质量为 $\rho/2$ 的自由场的粒子产生，其玻戈留波夫系数为 $\mathrm{e}^{-\pi\hat{\rho}/2}$。运动方程在共形时间反射 $\tau \to -\tau$ 下的对称性，再结合正则对易关系，便能在任意质量和混合参数下，利用渐近展开所确定的系数，精确给出全部指数小系数，以及连接问题的解。特别地，它给出了宇宙学对撞机信号对质量和混合参数的指数依赖

，这一依赖见于 [45], ；在大混合参数下，它化为这一玻戈留波夫系数 [41]。从物理上看，连接问题的解是在早期时间和晚期时间定义的解之间的玻戈留波夫变换，其中包含两种效应：粒子产生和转换。这两种效应都在重质量的尺度上获得，远早于轻模穿越其视界。粒子产生会产生一对轻量子和重量子，而转换在单场情况下没有对应物；它在不改变量子数目的情况下改变量子的种类。

对称性给出的精确关系，结合展开的绝热解，以闭式表达式给出了暴胀涨落有效场论中三次相互作用的双谱在挤压极限下的宇宙学对撞机信号，包括其振幅和相位，见方程（10.21）。该信号由长模的晚时振荡与两个短波量子之间的共振产生，其能标为重质量，超出了有效场论的适用范围。在顶点处，每个时间导数通常都会带来一个量级为混合的因子，但在共振处主导贡献相互抵消的情形除外；因此，随着曲率扰动的时间导数数量增加，信号会增强，正如 [41]中所发现的那样。这些结果与其中得到的解析双谱互为补充。后者适用于任意质量和混合，并以级数形式给出；而方程（10.21）则以闭式表达式给出了大混合下的宇宙学对撞机信号，并使其物理起源一目了然。

除了这一信号外，树级双谱的其余部分都可以通过混合的倒数展开来计算。重模对晚时曲率扰动的贡献仅通过指数微小项产生，因此图中的外腿只涉及轻通道。因此，接触图在领先阶给出有效场论的双谱，而混合的倒数展开可以计算其幂次修正。对于交换图或圈图中的内部线，重模不再受到指数抑制，其模函数在这里已得到闭式表达式，因此可以据此求出重模的贡献。这些计算留待未来工作。

近期也从复苏理论的角度研究了重场的指数微小效应。对于混合以微扰方式处理的重场，有效场论的导数展开是渐近的 [29–31], 而其重求和结合边界条件，已被证明能够还原重粒子产生的效应 [32, 33]。本文的分析与之互补。我们在强混合下对模函数进行研究，并在复时间平面中追踪其绝热解，从而直接计算这些效应：它们来自色散关系分支点处的斯托克斯现象以及反射对称性，无需对混合的倒数展开进行重求和。若能将这两种描述联系起来，将十分有趣。

最后，本文采用的方法并不依赖于存在一个

精确解；在本文中，精确解仅被用作检验。混合的倒数展开只需要尺度分离以及重模的绝热性，而指数微小效应在原点处分支点的出现，仅由色散关系决定。精确确定这些效应的反射对称性也并非该系统所特有。即使存在化学势，该对称性也能给出自由场的粒子产生，而无需解其运动方程；对于德西特空间中许多具有常参数的系统，它同样成立，可能只需交换其模态即可。因此，我们预计这里采用的策略可以更广泛地适用，例如适用于多于两个场的情形。当混合或质量随时间变化时，这种对称性通常会丧失。粒子产生仍可通过在分支点处进行局部分析，并与两侧的绝热波相匹配，作为混合的倒数级数来计算；而转换不会由任何单独的分支点产生，因此需要对斯托克斯现象进行更精细的分析。宇宙学中的粒子产生总是可以表述为一个连接问题，即连接适用于早期和晚期的解；我们希望这一策略能帮助解决那些不具备精确解的情形。

致谢

我们非常感谢 Nathan Belrhali、Arthur Poisson、Zhiming Shuai 和 Tao Zhu 富有益处的交流。作者使用 Claude（Anthropic）协助完成了这项工作，并对其内容承担全部责任。SGS 得到了广东省拓扑物质重点实验室（2026B1212010004）和省级资助（2023QN10X389、2026B0303050001）的支持。YL 感谢 SIMIS 提供的支持。

可解耦的四阶方程

两个二阶方程（2.4）可以通过提高阶数来实现解耦。对第一个方程求导，并利用第二个方程消去 σ''；随后对第二个方程求导，并利用第一个方程消去 π_c''，可得到四个关于 σ、σ'、σ'' 和 σ'''的线性关系，并可将它们表示为 π_c 及其导数的形式。关于 σ 本身的结果为

$$\sigma = -\frac{x}{\hat{\rho}\,(x^2+\hat{m}^2)}\left[x^2\pi_c''' + \left(x^2-2+\hat{\rho}^2\right)\pi_c' + 2x\,\pi_c\right]. \tag{A.1}$$

在（6.1）的范围内，对于一个 π_c 按照第6.1节的意义缓慢变化的量，即每次求导都会带来数量级为 max（$x/\hat{}\rho$，$1/x$）的因子，括号中的项由 $\hat{}\rho^2\pi_c'$ 主导，并且（A.1）化为约束（6.2）。将（A.1）代回

（2.4）的第一个方程给出了仅由 π_c 满足的四阶方程，

$$\begin{aligned}\pi_c'''' &- \frac{2x}{x^2+\hat{m}^2}\,\pi_c''' + \frac{\hat{\rho}^2+\hat{m}^2+2x^2-2}{x^2}\,\pi_c'' \\ &- \frac{2\big(x^4+2\hat{\rho}^2x^2+\hat{m}^2x^2-4x^2+\hat{\rho}^2\hat{m}^2+\hat{m}^4-2\hat{m}^2\big)}{x^3\,(x^2+\hat{m}^2)}\,\pi_c' \\ &+ \frac{x^4+2\hat{m}^2x^2-6x^2+\hat{m}^4-2\hat{m}^2}{x^2\,(x^2+\hat{m}^2)}\,\pi_c = 0\,,\end{aligned} \tag{A.2}$$

交换两个场的角色并执行相同的步骤，可得到 σ 所满足的方程，

$$\begin{aligned}\sigma'''' &- \frac{2}{x}\,\sigma''' + \frac{2x^2+4+\hat{\rho}^2+\hat{m}^2}{x^2}\,\sigma'' \\ &- \frac{2}{x}\Big(1+\frac{2+2\hat{\rho}^2+2\hat{m}^2}{x^2}\Big)\sigma' + \Big(1+\frac{\hat{m}^2}{x^2}+\frac{6\hat{\rho}^2+6\hat{m}^2}{x^4}\Big)\sigma = 0\,.\end{aligned} \tag{A.3}$$

The这些方程是精确的。它们是附录级数展开的起点D .

B 二阶 WKB 展开

采用试探形式（5.2），系统（2.6）除以 u 后变为：

$$-\Psi'^2 + \mathrm{i}\varepsilon\Psi'' + 1 - \frac{2\varepsilon^2}{\xi^2} - \frac{2\varepsilon}{\xi}Z' - \frac{2\mathrm{i}}{\xi}Z\Psi' + \frac{4\varepsilon}{\xi^2}Z = 0\,, \tag{B.1}$$

$$\varepsilon^2 Z'' + 2\mathrm{i}\varepsilon Z'\Psi' + \mathrm{i}\varepsilon Z\Psi'' - Z\Psi'^2 + Z + \frac{(\hat{m}^2-2)\varepsilon^2}{\xi^2}Z + \frac{2\mathrm{i}}{\xi}\Psi' + \frac{2\varepsilon}{\xi^2} = 0\,. \tag{B.2}$$

代入展开式（5.2）并收集 ε 的各次幂，可得在 ε^0 阶时：

$$1 - p_0^2 - \frac{2\mathrm{i}}{\xi}\,Z_0 p_0 = 0\,, \qquad (1-p_0^2)\,Z_0 + \frac{2\mathrm{i}}{\xi}\,p_0 = 0\,. \tag{B.3}$$

第二个方程给出 $Z_0 = -2\mathrm{i}p_0/[\xi(1-p_0^2)]$,，于是第一个方程可写为 $(1-p_0^2)^2 = 4p_0^2/\xi^2$。它的两个正根 $1-p_0^2 = \mp 2p_0/\xi$ 为 $p_0 = (r\pm 1)/\xi$，其中 $Z_0 = \pm\mathrm{i}$。因此，我们重新得到色散关系（5.3），$\hat{}\omega_{\mathrm{h},\ \ell} = x\,p_0$，以及每个分支上两个场之间的关系。在 ε^1 阶，关于 p_1 和 Z_1 的方程为

$$-\frac{2r}{\xi}\,p_1 - \frac{2\mathrm{i}p_0}{\xi}\,Z_1 = -\mathrm{i}p_0' - \frac{4}{\xi^2}\,Z_0\,, \qquad \mp\frac{2\mathrm{i}r}{\xi}\,p_1 \mp \frac{2p_0}{\xi}\,Z_1 = -\mathrm{i}Z_0 p_0' - \frac{2}{\xi^2}\,, \tag{B.4}$$

其中左边用到了 $Z_0' = 0$ 和 $1-p_0^2 = \mp 2p_0/\xi$。在 ε^2 阶，同一个矩阵乘以 $(p_2,\ Z_2)$，而右边则涉及一阶解，并且首次涉及质量，

$$\begin{aligned}-\frac{2r}{\xi}\,p_2 - \frac{2\mathrm{i}p_0}{\xi}\,Z_2 &= p_1^2 + \frac{2\mathrm{i}}{\xi}\,Z_1 p_1 - \mathrm{i}p_1' + \frac{2}{\xi}\,Z_1' - \frac{4}{\xi^2}\,Z_1 + \frac{2}{\xi^2}\,, \\ \mp\frac{2\mathrm{i}r}{\xi}\,p_2 \mp \frac{2p_0}{\xi}\,Z_2 &= Z_0 p_1^2 + 2Z_1 p_0 p_1 - 2\mathrm{i}Z_1' p_0 - \mathrm{i}Z_0 p_1' - \mathrm{i}Z_1 p_0' - \frac{\hat{m}^2-2}{\xi^2}\,Z_0\,.\end{aligned} \tag{B.5}$$

这一结构在每一阶 $n \geq 1$都成立。式 ε^n （B.1）和（B.2）中各项的系数关于 p_n 和 Z_n呈线性关系，所用矩阵为式（B.4）中的矩阵，其行列式为 $8p_0q/\xi$（差一个符号），右边则由低阶项构成，因此 p_n 和 Z_n可唯一确定。计算时，采用变量 $t = \xi + \sqrt{1 \pm \xi^2} = \mathrm{e}^{\text{反双曲正弦}\xi}$ 会更方便；在该变量下，$\xi = (t - t^{-1})/2$、$r = (t + t^{-1})/2$ 和 $\mathrm{e}^{\operatorname{arcsinh}(1/\xi)} = (t+1)/(t-1)$ 都是有理函数，因此每个系数都是 t 的有理函数，而 p_2 的积分也可初等求出。用 $r = \sqrt{1+\xi^2}$ 表示，并对重分支取上号，可得

$$p_1 = \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{q'}{q} = -\frac{\mathrm{i}}{2\xi\, r^2}\,, \qquad Z_1 = \pm\frac{3}{2(r \pm 1)}\,, \tag{B.6}$$

$$Z_2 = \mathrm{i}\,\frac{2\hat{m}^2 r^2(r \pm 1) - 6r^3 \mp 21r^2 + 12r \pm 6}{8\, r^2 (r \pm 1)^2}\,, \tag{B.7}$$

$$\operatorname{Re} p_2 = \frac{\mathrm{d}\Psi_2^{(\mathrm{h},\ell)}}{\mathrm{d}\xi}\,, \qquad \operatorname{Im} p_2 = 0\,, \tag{B.8}$$

其中 $\Psi_2^{(\mathrm{h},\ell)}$ 由（5.10）给出。质量仅通过（B.5）的最后一项出现，因此只出现在 Z_2 和 Ψ_2中。$Q_{\mathrm{h},\,\ell}$ 的极限为

$$Q_{\mathrm{h}} \to \frac{71}{96}\,, \quad Q_\ell \simeq \frac{21}{8\xi^2} \qquad (\xi \to 0)\,; \qquad\qquad Q_{\mathrm{h},\ell} \simeq \frac{19}{16\,\xi} \qquad (\xi \to \infty)\,. \tag{B.9}$$

在早期，$\xi \to \infty$，反双曲正弦$(\hat{}\rho/2x)$和$Q_{\mathrm{h},\,\ell}$ 均趋于零，因此 $\Psi_2 \to 0$ 在两个分支上都成立。因此，二阶修正不会影响（5.7）的布朗–戴维斯归一化。在晚期，$\xi \to 0$，反双曲正弦$(\hat{}\rho/2x) \simeq \log(\hat{}\rho/x)$，而在重分支上

$$\frac{2\Psi_2^{(\mathrm{h})}}{\hat{\rho}} \;\to\; (\mu_{\mathrm{eff}} - \hat{\rho}) \log\frac{x}{\hat{\rho}} + \frac{71}{48\,\hat{\rho}}\,, \tag{B.10}$$

也就是说，（5.8）的指数从 $x^{\mathrm{i}\hat{\rho}}$ 变为 $x^{\mathrm{i}\mu_{\mathrm{eff}}}$，并伴有一个常相位。另一方面，在轻分支上，$2\Psi_2^{(\ell)}/\hat{}\rho \simeq 21\,\hat{}\rho/(16x^2)$发散，正如（5.12）中所指出的。

C 精确解和数值检验

第 3.4 节的精确解是一对通道，即满足（2.4）且具有布朗–戴维斯行为（3.3）的解。本文的近似结果在第5.2、7.3和10.3节中与其进行了比较。其晚时系数具有闭式表达式（见下文的（3.16）和（C.2））。然而，在有限时间下，我们通过对运动方程进行数值积分来求得它。

精确的晚时尾部。 在大 λ下，谱密度（3.13）衰减为两个幂次之和 [41],

$$
\begin{aligned}
B_a(\lambda) &\simeq D_+^{(a)}\,\lambda^{-\frac{1}{2}+\nu_{\rm eff}} + D_-^{(a)}\,\lambda^{-\frac{1}{2}-\nu_{\rm eff}}\,, \\
D_\pm^{(a)} &= \frac{\Gamma(1-2s)\,\Gamma(\pm 2\nu_{\rm eff})\;2^{\frac{1}{2}\mp\nu_{\rm eff}}}{\Gamma\big(\frac{1}{2}\pm\nu_{\rm eff}\big)\,\Gamma\big(\frac{1}{2}\pm\nu_{\rm eff}-2s\big)}\,,
\end{aligned}
\tag{C.1}
$$

以及功率谱 $\lambda^{-1/2\mp\nu_{\rm eff}}$ 是有质量场晚时功率谱的对偶映像 $x^{3/2\pm\nu_{\rm eff}}$ 。采用 $-a\,N_a\,\kappa_a$ 式（3.13）的归一化后，式（3.10）的尾部为

$$
\begin{aligned}
T_a &= -a\,N_a\,\kappa_a\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu_{\rm eff}/2}\,\Gamma\big(\tfrac{1}{2}-\nu_{\rm eff}\big)\,D_-^{(a)}\,, \\
\bar{T}_a &= -a\,N_a\,\kappa_a\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\pi\nu_{\rm eff}/2}\,\Gamma\big(\tfrac{1}{2}+\nu_{\rm eff}\big)\,D_+^{(a)}\,.
\end{aligned}
\tag{C.2}
$$

结合式（3.16），它们为任意质量和混合精确给出了六个晚时系数。我们在第 10.3 节（图6）中对宇宙学对撞机信号的长模进行数值计算时使用了这些系数。这些表达式还为本文的若干结果提供了检验。它们满足式（9.13）、（9.14）和（9.16），第9 节从反射对称性和对易关系出发推导了这些关系；当 $\hat{}\rho$ 较大时，它们在此处所述的精度下化为式（7.4）和（7.8）。

数值积分。 每个通道都从 $x_{\rm in} = 1500\hat{}\rho$开始积分，此时系统深处于相对论区域，并采用第5.2节的二阶绝热解进行初始化。初始数据的截断会以 $1/x_{\rm in}$的量级在另一个通道中产生种子。这个问题仅影响重通道。事实上，重通道在晚期按 $x^{3/2}$衰减，而轻通道则会冻结，因此后者的微小混合相对于前者会不断增长。因此，初始点取得足够靠前，使这种混合保持在我们检验重通道时的精度以下，其相位误差约为 $\hat{}\rho^{-3}$ 。我们已检查数值解与积分表示（3.13）一致，在 10^7 处的$\rho = 20$，从相对论区域一直到 $x = 0.2$，误差为千分之一。

WKB解。 图 7 展示了数值解的相位：减去式（5.7）的主导相位后，所得结果与二阶预测$2\Psi_2/\hat{}\rho$，以及减去后二阶预测后的残差，分别对应两个分支。在重分支上，残差在整个范围内均按 $\hat{}\rho^{-3}$ 缩放，直至 $x \ll 1$；未显示的振幅与 $q^{-1/2}$ 在 $\hat{}\rho^{-2}$阶上吻合。然而，在轻分支上，只有当 $x \gg \sqrt{\hat{}\rho}$时，各曲线才重合；当 $x/\sqrt{\hat{}\rho}$ 变为数量级为一时，曲线便开始分离，这正如发散式（5.12）所预示的那样。

一致近似。 图 8 展示了（7.9）和（7.10）随时间变化的误差，包括 π_c 模函数的相对误差以及其相位误差。在所示 x 范围内的最大值分别如图 4所示。

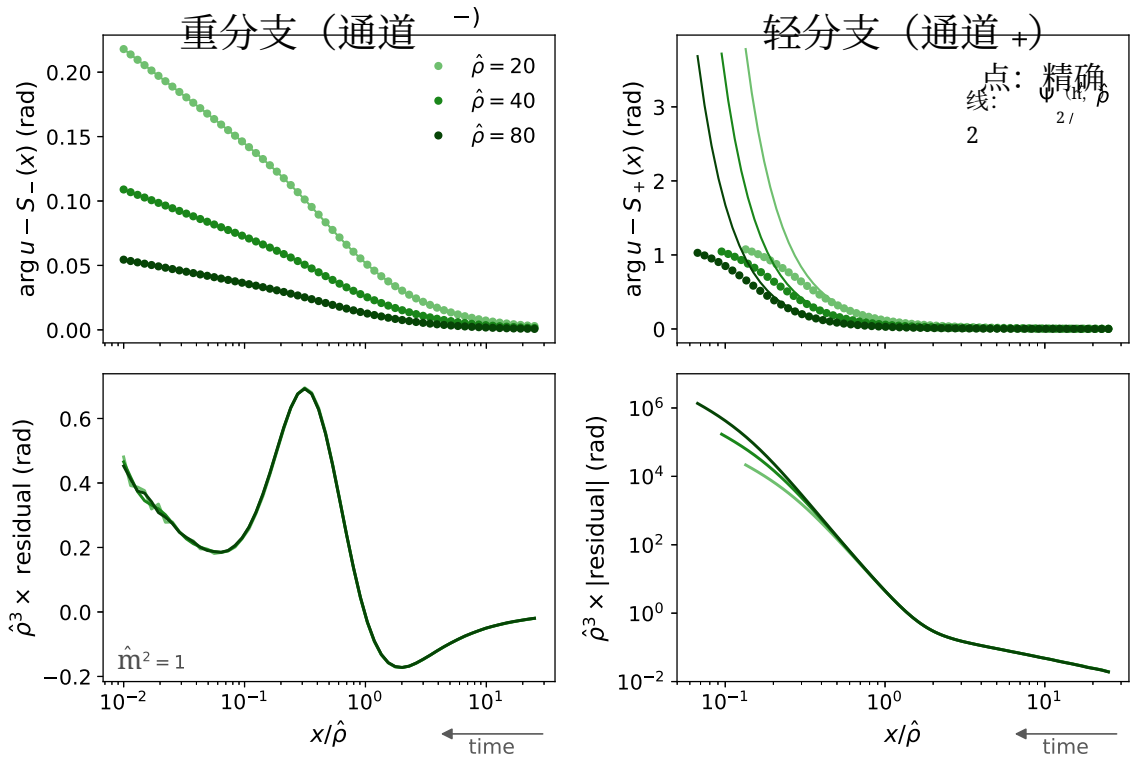

图7：对于$\hat{m}^2 = 1$和$\hat{\rho} = 20$，在40、80处，二阶WKB与精确解的对比。上图：减去式（5.6）的主导相位$S_a(x)$后，精确正则模函数$u = \pi_{c,a}/x$的相位（点），与式（5.10）的二阶预测$2\Psi_2^{(\mathrm{h},\ell)}/\hat{\rho}$（线）进行比较；分别展示重分支（左）和轻分支（右）随$x/\hat{\rho}$的变化。下图：减去$2\Psi_2^{(\mathrm{h},\ell)}/\hat{\rho}$后所得残差乘以$\hat{\rho}^3$，取绝对值并以对数尺度表示，展示轻分支的情况。重分支的三条曲线在所有时间都重合；轻分支的三条曲线则在$x \gg \sqrt{\hat{\rho}}$范围内重合，此时它们遵循展开的下一阶项。当$x \sim \sqrt{\hat{\rho}}$时，也就是$x/\hat{\rho} \sim \hat{\rho}^{-1/2}$时，它们开始分开，此时轻分支失去绝热性（5.12）。

对于$\rho = 4$处的重通道，该近似在修正色散区间内仍保持较高精度，误差仅为几个百分比；只有在晚期才失效，此时精确的重通道冻结为常数（3.17）。对于轻通道，误差在视界穿越处达到峰值，即$x \sim \sqrt{\hat{\rho}}$，并在晚期趋于晚时常数的误差。其相位误差还包含一个对数项，这是因为近似式（7.10）建立在主导相位$S_+(x)$之上，并未包含由质量引起的相位；该相位在晚期成为（7.2）中的对数项。未展示的有质量场模函数在轻通道中的误差与π_c的误差大小相同，而在重通道中，其误差以与ρ^{-2}相同的方式减小。

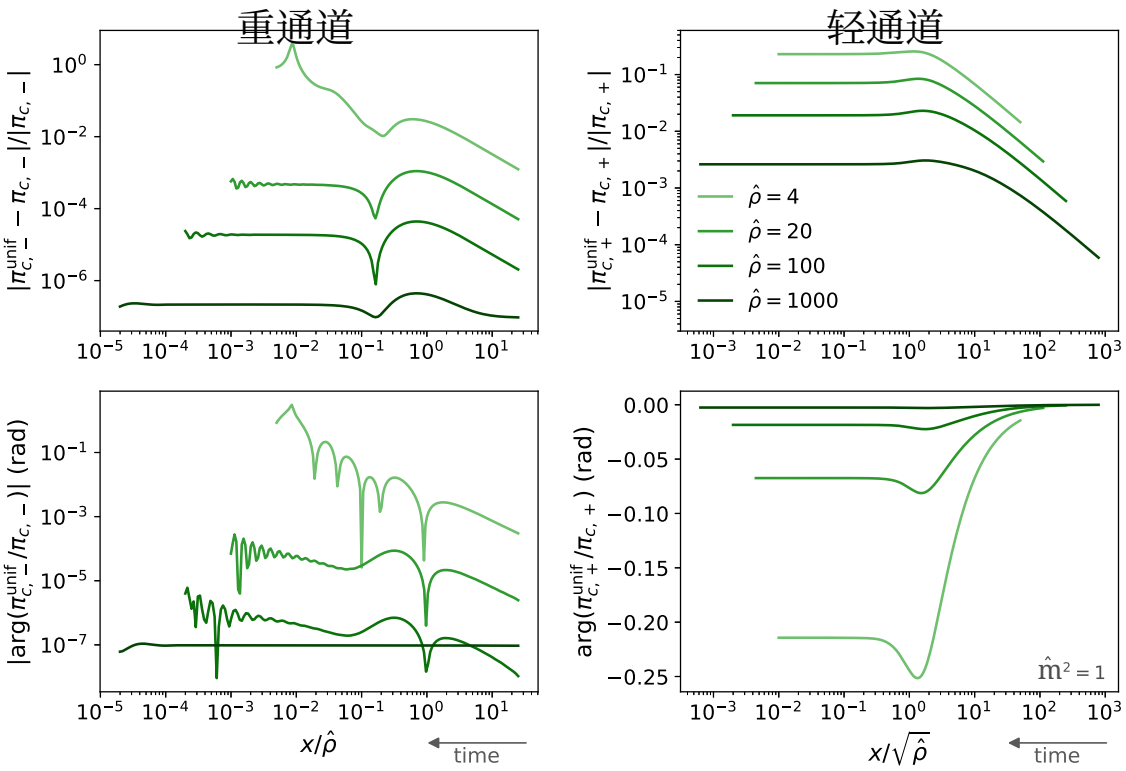

图 8：一致近似的精度，其中 $\hat{m}^2 = 1$ 以及混合的四个取值。 左图：重通道，一致近似（7.9）的$\pi_{c,-}$：相对误差（上）以及相位误差的绝对值（下），以对数尺度表示，作为 $x/\hat{\rho}$的函数。 右图：轻通道，一致近似（7.10）的$\pi_{c,+}$：相对误差（上）以及相位误差（下），作为 $x/\sqrt{\hat{\rho}}$的函数。重通道在晚时的失效（$\hat{\rho} = 4$）对应于第 8 节中讨论的指数小常数。

功率谱。 图 9 比较了主导公式（7.5）和指数形式（7.6）与精确放大因子（3.19）的结果。前者在 $1/\hat{\rho}$ 时趋近于精确放大因子，后者在 $1/\hat{\rho}^2$时趋近于精确放大因子，误差见第 7.3 节。

相对论区域中的 D 级数及其重求和

本附录独立推导第 5 节和第 6 节的结果。其第二部分是在固定 x 下的展开，按阶次整理视界穿越过程中的有效解修正，而在该过程中 WKB展开并不适用。

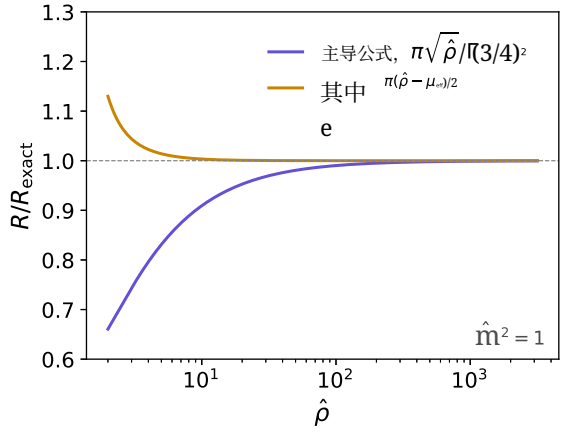

图 9：功率谱的放大 R，相对于精确结果（3.19）归一化，分别采用主导公式（7.5）和指数形式（7.6），作为混合的函数，其中 $\hat{m}^2 = 1$。

相对论区域中的级数。 在 x 很大时，四阶方程（A.2）有如下形式的解

$$\pi_c = x^{1-\mathrm{i}s_1\hat{\rho}/2}\exp\left[\mathrm{i}s_2\,x\Big(1+\sum_{n\geq 1}a_n\,\frac{\hat{\rho}^{2n}}{(2x)^{2n}}\Big)+\sum_{n\geq 1}b_n\,\frac{\hat{\rho}^{2n}}{(2x)^{2n}}\right], \qquad s_1, s_2 = \pm 1\,, \tag{D.1}$$

四个解各对应一个：具有正频率和负频率的两个分支，其系数取决于 $\hat{\rho}$ 和 $\hat{m}$，但当 $\hat{\rho}\to\infty$ 时趋于普适值

$$a_n = \frac{(-1)^n\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,(2n-1)^2\,\Gamma(n+1)}\,, \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{4n}\,, \tag{D.2}$$

与分支无关。这些是 $\sqrt{1+u^2}-u$ 反双曲正弦 u 以及 $-\frac{1}{4}\log(1+u^2)$ 关于 $u=\hat{\rho}/2x$ 的泰勒系数，因此这些级数重求和后得到绝热解（5.7），其中 $s_1 = a$ 表示通道，$s_2 = +1$ 表示正频率。（D.1）的截断形式仅在 $x \gg \hat{\rho}$ 时有效。然而，其重求和结果即绝热解，在轻分支上一直有效至 $x \gg \sqrt{\hat{\rho}}$，而在重分支上则在所有时间都有效，正如第 5 节和第 7.3 节所示。

在固定 x 时的级数。 若改为在固定 $1/\hat{\rho}$ 时按 x 的幂展开，则系统 (2.4可通过两次求积逐阶求解，解的形式为

$$\begin{aligned}\pi_c &= \pi_0\sum_{n\geq 0}\frac{\mathcal{P}_n(x)}{\hat{\rho}^{2n}} - \frac{\sigma_0\,x^3}{\hat{\rho}}\sum_{n\geq 0}\frac{\mathcal{Q}_n(x)}{\hat{\rho}^{2n}}\,,\\ \sigma &= \sigma_0\,x^3\sum_{n\geq 0}\frac{\mathcal{R}_n(x)}{\hat{\rho}^{2n}} - \frac{\pi_0\,x^2}{\hat{\rho}}\sum_{n\geq 0}\frac{\mathcal{S}_n(x)}{\hat{\rho}^{2n}}\,,\end{aligned} \tag{D.3}$$

其中， π_0 和 σ_0 是两个积分常数， $\mathcal{P}_n$、 $\mathcal{R}_n$、 $\mathcal{S}_n$ 和 $\mathcal{Q}_n$ 是关于 x的偶多项式，前三个的次数为 $4n$ ，最后一个的次数为 $4n+2$ ，且$\mathcal{P}_0 = \mathcal{R}_0 = \mathcal{S}_0 = 1$ 和 $\mathcal{Q}_0 = x^2/5 + \hat{m}^2/3$。它们的系数取决于质量$\hat{}$ $\hat{}$，最高次单项式的系数除外，我们将这些系数记为 $\mathcal{P}_n$、 $\mathcal{Q}_n$、 $\hat{}$ $\hat{}\mathcal{R}_n$ 和 $\mathcal{S}_n$。这些系数满足二项递推关系，其解为

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}_n &= \frac{(-1)^n}{2^{4n}\,n!}\,\frac{\Gamma(-\frac{1}{4})}{\Gamma(n-\frac{1}{4})}\,, \qquad & \hat{\mathcal{Q}}_n &= \frac{(-1)^n}{2^{4n+2}\,n!}\,\frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(n+\frac{9}{4})}\,, \\ \hat{\mathcal{R}}_n &= \frac{(-1)^n}{2^{4n}\,n!}\,\frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(n+\frac{5}{4})}\,, \qquad & \hat{\mathcal{S}}_n &= -\frac{(-1)^n}{2^{4n+2}\,n!}\,\frac{\Gamma(-\frac{1}{4})}{\Gamma(n+\frac{3}{4})}\,. \end{aligned} \tag{D.4}$$

由最高次单项式构成的级数是自变量为$x^2/2\hat{}\rho$的贝塞尔函数级数，并可重求和为

$$\begin{aligned} \pi_c &= x^{5/2}\Big[\mathcal{A}\,J_{-5/4}\Big(\frac{x^2}{2\hat{\rho}}\Big) - \mathcal{B}\,J_{5/4}\Big(\frac{x^2}{2\hat{\rho}}\Big)\Big]\,, \\ \sigma &= x^{5/2}\Big[\mathcal{B}\,J_{1/4}\Big(\frac{x^2}{2\hat{\rho}}\Big) + \mathcal{A}\,J_{-1/4}\Big(\frac{x^2}{2\hat{\rho}}\Big)\Big]\,, \end{aligned} \tag{D.5}$$

其中 $\mathcal{A} = \Gamma(-\frac{1}{4})(4\hat{}\rho)^{-5/4}\,\pi_0$以及 $\mathcal{B} = \Gamma(\frac{5}{4})(4\hat{}\rho)^{1/4}\,\sigma_0$。人们可以辨认出有效解（6.4），它是用第一类贝塞尔函数而非汉克尔函数的基来表示的。每个多项式的低次单项式在固定$x^2/\hat{}\rho$时受到 $1/x^2$的幂次抑制，因此在视界穿越处贡献的相对阶数为 $1/\hat{}\rho$，而在晚期贡献的相对阶数为 $\hat{}\rho^{-2}$ 。因此，有效解就是该展开的领先阶，在固定 $x^2/\hat{}\rho$下重求和，并一致适用于直到 $x \to 0$，正如第 6.2节所采用的那样。至于低次单项式，质量正是在轻分支中首次出现于其中。

E 激发初态

晚时功率谱。 第 7.4 节的条件表明，新态的算符是正则的。将布朗–戴维斯算符表示为它们的形式，$\hat{}\ b_b = \sum_a(\alpha_{ab}\,\tilde{b}_a + \beta^*_{ab}\,\tilde{b}^\dagger_a)$，并要求这些算符同样满足正则性，可得等价形式

$$\alpha^\dagger\alpha - \beta^T\beta^* = \mathbb{1}\,, \qquad \alpha^\dagger\beta = \beta^T\alpha^*\,. \tag{E.1}$$

在晚期，重通道及其复共轭在 $1/\hat{}\rho$ 的每一阶上都会衰减，因此 $\tilde{\pi}_{c,a}(0) = \alpha_{a+}\pi_{c,+}(0) + \beta_{a+}\pi^*_{c,+}(0)$。由于 $\pi_{c,+}(0) = |\pi_{c,+}(0)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$，(3.18) 中对通道的求和变为$|\pi_{c,+}(0)|^2\sum_a|\alpha_{a+} + \beta_{a+}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta_0}|^2$，而 (E.1) 中第一条关系的 $(+,+)$ 元素 $\sum_a|\alpha_{a+}|^2 = 1 + \sum_a|\beta_{a+}|^2$ 给出了 (7.13)。在这些项中， n_+ 是新状态中轻通道的布朗–戴维斯量子的平均数目。

旋转不变态。在视界深处，$x \gg \hat{}\rho$，(2.6) 中 $\hat{}\rho/x^2$ 和 $\hat{}m^2/x^2$ 的项可以忽略，而 $\hat{}\rho/x$ 中剩余的混合项以反对称方式耦合两个场。于是，动力学在场空间中 (π_c, σ) 的旋转下保持不变，而通道是这些旋转下的电荷本征态，即 (3.1) 中具有相反对数相位的组合 $\pi_c + \mathrm{i}a\,\sigma$。通道 a 的共轭态具有电荷 $-a$。在旋转不变态中，α 只能连接电荷相等的通道，而 β 只能连接相反电荷的通道。因此 α 是对角的，β 是非对角的，并且 $\mathcal{I} = 0$。对 π_c 和 σ 应用相同的单场变换 (α, β)，得到这样的状态，即 $\alpha_{ab} = \alpha\,\delta_{ab}$ 和$\beta_{ab} = \beta\,(1 - \delta_{ab})$，其中 $n_+ = |\beta|^2$。

曲率扰动的激发。我们考虑仅作用于 π_c 的激发，时间为 $x_f \gg \hat{}\rho$。[8] 由（3.3）可知，此时通道模函数为$X_a \propto x_f^{-\mathrm{i}a\hat{\rho}/2}$（1，−i$a$），差一个公共因子，因此，使其 σ 分量分别为零的解 π_c 为

$$X_\pi = \frac{x_f^{\mathrm{i}\hat{\rho}/2} X_+ + x_f^{-\mathrm{i}\hat{\rho}/2} X_-}{\sqrt{2}}\,, \qquad X_\sigma = \mathrm{i}\,\frac{x_f^{\mathrm{i}\hat{\rho}/2} X_+ - x_f^{-\mathrm{i}\hat{\rho}/2} X_-}{\sqrt{2}}\,. \tag{E.2}$$

它们是在 x_f 分别取两个场得到的模函数。作用于 π_c 的玻戈留波夫变换（α，β）在 x_f 将 X_π 替换为 $\alpha X_\pi + \beta X_\pi^*$，并保持 X_σ 不变。重新用通道表示后，得到 $\alpha_{++} =$ （$\alpha + 1$）/2、$\alpha_{-+} =$ （$\alpha - 1$）$x_f^{\mathrm{i}\hat{\rho}}$/2、$\beta_{++} = \beta\, x_f^{-\mathrm{i}\hat{\rho}}/2$ 和 $\beta_{-+} = \beta/2$，它们满足（E.1）。因此，$n_+ = |\beta|^2/2$ 和 $\mathcal{I} = \frac{1}{2}\alpha\beta^*\, x_f^{\mathrm{i}\hat{\rho}}$。干涉项的相位很容易解释。作用于 x_f 的变换系数，是相对于该时刻的模函数（E.2）定义的，其相位为 x_f。如果我们用 $\alpha\beta^* = |\alpha\beta|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta - 2x_f)}$ 定义变换所固有的相位 δ，则（7.13）中干涉项的相位为 $\delta + 2[\theta_0 - S_+\,(x_f)\,]$,，其中 $S_+\,(x_f) \simeq x_f -$ （$\hat{}\rho/2$）log x_f 是 x_f 时轻通道的相位（5.6）。第二项是从变换发生到其冻结期间，轻通道所积累相位的两倍。由于该相位是在变换之后跨越 $x \sim \hat{}\rho$ 处的跃迁积累的，因此其中包含 γ。

共振处的抵消

在本附录中，我们推导 $\mathcal{V}$（10.18）中的因子，针对的是主导贡献相互抵消的两种情形，即相互作用 $\dot{\pi}_c\sigma^2$，以及由混合单独产生的$\dot{\pi}_c^2\sigma$ 与（$\partial_i\pi_c$）$^2\sigma$ 的组合。在这两种情形下，对

[8]暴胀子势中的阶跃会在领先阶产生这样的激发。在双场模型微扰的绝热与熵分解中，绝热涨落满足包含项 z''/z 的 Mukhanov-Sasaki 方程，其中 $z \propto a\sqrt{\epsilon}$ 对慢滚参数 ϵ 中的阶跃敏感，而熵涨落则仅涉及 a''/a [72]。在 $x_f \gg \hat{}\rho$ 处，大小为 $\hat{}\rho/x_f$ 的混合在领先阶不会将激发从一个场传递到另一个场。

各腿求和会在（10.11）的被积函数中产生一个在驻点（10.15）处消失的因子，因此结果来自一阶修正。

我们将短模在顶点处携带的场写成$\pi_{c,+}$的倍数，其中 $\sigma_+ = Z\pi_{c,+}$ 和 $\dot{\pi}_{c,+} = -H\, d\, \pi_{c,+}$，其中 $d \equiv x\, \mathrm{dlog}\, \pi_{c,+}/\mathrm{d}x$。在所需阶数下，

$$Z = -\mathrm{i} - \frac{3}{\hat{\rho}\,(r-1)}\,, \qquad d = \mathrm{i}\,\hat{\omega}_\ell + 1 + \frac{1}{2r^2}\,, \tag{F.1}$$

第一项是两个场在一阶时的关系，如下所示（5.5）；第二项则由（5.7）的相位和振幅得出。于是，待计算的积分具有如下形式 $\int \mathrm{d}x\, \eta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\, \mathcal{V}(x)$，其中 η 和 Φ 由（10.13）给出，而 $\mathcal{V}(x)$ 是 Z^*, d^* 和 x的组合。由于 $x\,\Phi' = \mu_{\rm eff} - 2\hat{}\omega_\ell$，在驻点处为零的因子可以通过分部积分处理。对于缓慢变化的函数 G，有

$$\int \mathrm{d}x\; \eta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\, \big(\mu_{\rm eff} - 2\hat{\omega}_\ell\big)\, G = \mathrm{i} \int \mathrm{d}x\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\, \frac{\mathrm{d}(x\,\eta\, G)}{\mathrm{d}x}\,, \tag{F.2}$$

因此，在积分号下，$(\mu_{\rm eff} - 2\hat{}\omega_\ell)$ G 等价于 $\mathrm{i}\,[G\,(\frac{1}{2} + r^{-2}) + x\,G']$，这里我们用到了 $x\,\eta'/\eta = -\frac{1}{2} + r^{-2}$。其他相对阶数为 $1/\hat{}\rho$的修正，来自二阶相位（5.10）以及驻相近似本身，它们都乘以一个在驻点处为零的因子，因此在此阶不产生贡献。

相互作用 $\dot{\pi}_c\sigma^2$。长模携带时间导数，这会带来$-H\hat{}\rho$，并留下两个带有 σ 的短腿；或者携带 σ，留下一个带有 $\dot{\pi}_c$ 的短腿，另一个带有 σ，其收缩数是前者的两倍。耦合为 $\alpha/2$ 时，得到$\mathcal{V}(x) = -\alpha H\, Z^*\,[\hat{}\rho\, Z^* + 2\, d^*]$，而（F.1）给出

$$\hat{\rho}\, Z^* + 2\, d^* = \mathrm{i}\,\big(\mu_{\rm eff} - 2\hat{\omega}_\ell\big) + \mathrm{i}\,\big(\hat{\rho} - \mu_{\rm eff}\big) - \frac{3}{r-1} + 2 + \frac{1}{r^2}\,. \tag{F.3}$$

第一项是在共振处消失的因子。利用（F.2），取 $G = 1$，它等价于 $-\frac{1}{2} - r^{-2}$。第二项的阶为 $1/\hat{}\rho$,$^-$可以忽略。因此，两项之和为 $\frac{3}{2} - 3/(r-1)$，它在 $-\frac{3}{2}$ 处等于 $r_* = 2$，并且取 $Z^* = \mathrm{i}$ 后，我们得到$\mathcal{V}(x_*) = (3\mathrm{i}/2)\,\alpha H$。由此，我们恢复了（ $\mathcal{V}$ 10.18）中的因子 $\mathcal{V}(x)$，它对于所有相互作用，都是驻点处的取值。

由混合产生的相互作用。利用 $\Lambda_2^{-1} = -\Lambda_1^{-1}$，这两个相互作用合并为哈密顿量密度 $(2\Lambda_1)^{-1}\,[(\partial_i\pi_c)^2/a^2 - \dot{\pi}_c^2]\,\sigma$。当长模携带 σ 时，两个短腿要么携带两个梯度，贡献 $(k/a)^2 = H^2x^2$，要么携带两个时间导数。当长模携带其中一个时间导数时，短腿则携带另一个时间导数和 σ。这给出 $\mathcal{V}(x) = (H^2/\Lambda_1)\,[x^2 - d^{*2} - 2\hat{}\rho\, d^*Z^*]$。利用 (F.1) 和轻分支的色散关系 (4.2)，$x^2 = \hat{}\omega_\ell(\hat{}\omega_\ell + \hat{}\rho)$，我们得到

$$x^2 - d^{*2} - 2\hat{\rho}\, d^*Z^* = -\hat{\omega}_\ell\big(\mu_{\rm eff} - 2\hat{\omega}_\ell\big) + 2\mathrm{i}\,\big(\hat{\omega}_\ell - \hat{\rho}\big)\Big(1 + \frac{1}{2r^2}\Big) - \frac{6\,\mathrm{i}\,\hat{\omega}_\ell}{r-1} + \mathcal{O}(\hat{\rho}^0)\,. \tag{F.4}$$

第一项在远离共振时为 $\hat{}\rho^2$ 阶，在共振处消失。利用 (F.2)，并取 $G = -\hat{}\omega_\ell$ 和 $x\,\hat{}\,\omega_\ell' = \hat{}\rho\,(r^2-1)/2r$，该项等价于 $-\mathrm{i}\,[\hat{}\omega_\ell(\tfrac{1}{2}+r^{-2}) + x\,\hat{}\,\omega_\ell']$。在驻点处，$r=2$ 且 $\hat{}\,\omega_\ell = \hat{}\rho/2$，(F.4) 的三项分别为 $-9\mathrm{i}\hat{}\rho/8$、$-9\mathrm{i}\hat{}\rho/8$ 和 $-3\mathrm{i}\hat{}\rho$，因此

$$\mathcal{V} = -\frac{21\,\mathrm{i}}{4}\,\frac{\hat{\rho}H^2}{\Lambda_1}\,, \tag{F.5}$$

$\hat{}$ 的一次幂ρ 低于分别单独取每个相互作用时的贡献。这两个结果与图 6中对信号进行的数值计算进行了比较。

参考文献

[1] *P. Creminelli*、*M.A. Luty*、*A. Nicolis* 和 *L. Senatore*，《开启宇宙：零能量条件的稳定违反与非标准宇宙学》，高能物理杂志 *12*（*2006*） 080 [*hep-th/0606090*].[2] *C. Cheung*、*P. Creminelli*、*A.L. Fitzpatrick*、*J. Kaplan* 和 *L. Senatore*，《暴胀有效场论》，高能物理杂志 *03*（*2008*） 014 [0709.0293].[3] *L. Senatore* 和 *M. Zaldarriaga*，《多场暴胀有效场论》，高能物理杂志 *04*（*2012*） 024 [1009.2093].[4] *T. Noumi*、*M. Yamaguchi* 和 *D. Yokoyama*，《准单场暴胀的有效场论方法及重场的影响》，高能物理杂志 *06*（*2013*）*051*[1211.1624].[5] *L. Pinol*、*S. Renaux-Petel* 和 *D. Werth*，《宇宙学流：原初关联函数的系统方法》，*JCAP 02*（*2025*） 019 [2312.06559].[6] *L. Pinol*，《多场暴胀涨落的有效场论》，*Phys. Rev. D 110*（*2024*）*L*041302 [2405.02190].[7] *A.J. Tolley* 和 *M. Wyman*，《凝胶子情景：多场动力学产生的等边型非高斯性》，*Phys. Rev. D 81*（*2010*） 043502 [0910.1853].[8] *S. Cremonini*、*Z. Lalak* 和 *K. Turzynski*，《双场暴胀模型中的强耦合微扰》，*JCAP 03*（*2011*） 016 [1010.3021].[9] *A. Achucarro*、*J.-O. Gong*、*S. Hardeman*、*G.A. Palma* 和 *S.P. Patil*，《质量层级与多标量场动力学中的非退耦》，*Phys. Rev. D 84*（*2011*）*043502*[1005.3848].[10] *D. Baumann* 和 *D. Green*，《等边型非高斯性与视界上的新物理》，*JCAP 09*（*2011*） 014 [1102.5343].[11] *G. Shiu* 和 *J. Xu*，《多场暴胀中的有效场论与退耦：一个说明性案例研究》，*Phys. Rev. D 84*（*2011*） 103509 [1108.0981].[12] *S. Cespedes*、*V. Atal* 和 *G.A. Palma*，《暴胀期间的重场为何重要》，*JCAP 05*（*2012*） 008 [1201.4848]。

[13] *A. Achucarro*、*J.-O. Gong*、*S. Hardeman*、*G.A. Palma* 和 *S.P. Patil*，《重场影响下单场暴胀的有效理论》，高能物理杂志 *05*（*2012*） 066 [1201.6342].[14] *A. Avgoustidis*、*S. Cremonini*、*A.-C. Davis*、*R.H. Ribeiro*、*K. Turzynski* 和 *S. Watson*，《退耦在暴胀中依然成立：审视暴胀期间的有效场论违反》，*JCAP 06*（*2012*） 025 [1203.0016].[15] *A. Achucarro*、*V. Atal*、*S. Cespedes*、*J.-O. Gong*、*G.A. Palma* 和 *S.P. Patil*，《重场、降低的声速与暴胀期间的退耦》，*Phys. Rev. D 86*（*2012*）121301 [1205.0710].[16] *C.P. Burgess*、*M.W. Horbatsch* 和 *S. Patil*，《在谷底中暴胀：由多场弯曲谷得到的单场有效理论》，高能物理杂志 *01*（*2013*）*133*[1209.5701].[17] *R. Gwyn*、*G.A. Palma*、*M. Sakellariadou* 和 *S. Sypsas*，《弱耦合暴胀模型的有效场论》，*JCAP 04*（*2013*） 004 [1210.3020].[18] *E. Castillo*、*B. Koch* 和 *G. Palma*，《含时背景中场与量子的积分》，高能物理杂志 *05*（*2014*） 111 [1312.3338].[19] *R. Gwyn*、*G.A. Palma*、*M. Sakellariadou* 和 *S. Sypsas*，《宇宙暴胀的简并模型》，*JCAP 10*（*2014*） 005 [1406.1947].[20] *S. Garcia-Saenz*、*L. Pinol* 和 *S. Renaux-Petel*，《重新审视弯曲场空间中的多场暴胀非高斯性》，高能物理杂志 *01*（*2020*） 073 [1907.10403].[21] *X. Chen* 和 *Y. Wang*，《准单场暴胀与非高斯性》，*JCAP 04*（*2010*） 027 [0911.3380].[22] *N. Arkani-Hamed* 和 *J. Maldacena*，《宇宙学对撞机物理》，*1503.08043*。[23] *W. Sohn*、*D.-G. Wang*、*J.R. Fergusson* 和 *E.P.S. Shellard*，《在普朗克宇宙微波背景数据中搜寻宇宙学对撞机》，*JCAP 09*（*2024*） 016 [2404.07203].[24] *G. Cabass*、*O.H.E. Philcox*、*M.M. Ivanov*、*K. Akitsu*、*S.-F. Chen*、*M. Simonovi´c* 等，《*BOSS* 对暴胀期间有质量粒子的约束：宇宙学对撞机的实际应用》，*Phys. Rev. D 111*（*2025*） 063510 [2404.01894].[25] *O.H.E. Philcox*，《利用宇宙微波背景剖析标量宇宙学对撞机》，*2607.18369*。[26] *P. Suman*、*D.-G. Wang*、*W. Sohn*、*J.R. Fergusson* 和 *E.P.S. Shellard*，《普朗克数据中的宇宙学对撞机信号有多显著？》，*2511.17500*。[27] *S. Kumar*、*Q. Lu*、*Z.-Z. Xianyu* 和 *Y. Zhang*，《利用普朗克数据搜寻超越哈勃尺度的宇宙学对撞机》，*2603.15728*。[28] *O.H.E. Philcox*，《利用宇宙微波背景剖析标量宇宙学对撞机》，*2607.18369*。[29] *S. Jazayeri*、*S. Renaux-Petel* 和 *D. Werth*，《宇宙学低速对撞机的形状》，*JCAP 12*（*2023*） 035 [2307.01751]。

[30] *S. Jazayeri*、*S. Renaux-Petel*、*X. Tong*、*D. Werth* 和 *Y. Zhu*，暴胀期间涌现非局域性导致的宇称破坏，《*Phys. Rev. D*》*108*（*2023*） 123523 [2308.11315].[31] *C. Duaso Pueyo*、*H. Goodhew*、*C. McCulloch* 和 *E. Pajer*，论宇宙学有效理论的渐近性质，《*JHEP*》*01*（*2026*） 009 [2505.17820].[32] *Y. Li* 和 *Z.-Z. Xianyu*，复苏理论下的宇宙学关联函数，*2609.20925*。[33] *D. Dorigoni*、*L. Engelbrecht*、*N. Nussbaumer* 和 *G.L. Pimentel*，恶魔下凡至德西特：宇宙学中发散的有效场论展开，*2611.00189*。[34] *C. Gordon*、*D. Wands*、*B.A. Bassett* 和 *R. Maartens*，暴胀产生的绝热扰动和熵扰动，《*Phys. Rev. D*》*63*（*2000*） 023506 [*astro-ph*/0009131].[35] *S. Groot Nibbelink* 和 *B.J.W. van Tent*，多场慢滚暴胀期间的标量扰动，《*Class. Quant. Grav.*》*19*（*2002*） 613 [*hep-ph*/0107272].[36] *H. An*、*M. McAneny*、*A.K. Ridgway* 和 *M.B. Wise*，非微扰区域中的准单场暴胀，《*JHEP*》*06*（*2018*） 105 [1706.09971].[37] *X. Tong*、*Y. Wang* 和 *S. Zhou*，论准单场暴胀的有效场论，《*JCAP*》*11*（*2017*） 045 [1708.01709].[38] *S. Garcia-Saenz*、*S. Renaux-Petel* 和 *J. Ronayne*，偏离轨道暴胀中的原初涨落与非高斯性，《*JCAP*》*07*（*2018*） 057 [1804.11279].[39] *D. Werth*、*L. Pinol* 和 *S. Renaux-Petel*，原初关联函数的宇宙学流，《*Phys. Rev. Lett.*》*133*（*2024*） 141002 [2302.00655].[40] *J. Huenupi*、*C. Mu˜noz*、*G.A. Palma* 和 *S. Sypsas*，推进原初前沿：多场暴胀中的精确线性解，*2606.18248*。[41] *N. Belrhali*、*A. Poisson* 和 *S. Renaux-Petel*，拉普拉斯空间中强混合下的解析宇宙学对撞机，*2608.23243*。[42] *J. Huenupi*、*C. Mu˜noz*、*G.A. Palma* 和 *S. Sypsas*，推进原初前沿：强混合下的宇宙学对撞机信号，*2607.14529*。[43] *X. Wang*、*Y. Wang* 和 *Y. Zhao*，强混合下的宇宙学对撞机信号，*2607.14891*。[44] *L. Pinol*，多场暴胀中的新精确双谱形状，*2607.15251*。[45] *L. Pinol*，强混合多场暴胀中的精确双谱，*2609.38167*。[46] *X. Chen* 和 *Z.-Z. Xianyu*，准单场暴胀的三重重场交换双谱，*2611.15660*。[47] *C.M. Bender* 和 *S.A. Orszag*，科学家与工程师高级数学方法（一），*Springer*（*1999*），*10.1007/978-1-4757-3069-2*。[48] *S. Garcia-Saenz* 和 *S. Renaux-Petel*，具有虚声速的暴胀有效场论产生的扁平型非高斯性，《*JCAP*》*11*（*2018*）*005*[1805.12563]。

[49] *J. Fumagalli*、*S. Garcia-Saenz*、*L. Pinol*、*S. Renaux-Petel* 和 *J. Ronayne*，具有强非测地运动的暴胀中的超非高斯性，《*Phys. Rev. Lett.*》*123*（*2019*） 201302 [1902.03221].[50] *R.Z. Ferreira*，具有较大负熵质量的暴胀模型中的非高斯性，《*JCAP*》*08*（*2020*） 034 [2003.13410].[51] *S. Garcia-Saenz*、*Y. Lu* 和 *S. Renaux-Petel*，强非测地运动暴胀中的圈图，《*JCAP*》*11*（*2025*） 039 [2503.18516].[52] *V. Assassi*、*D. Baumann*、*D. Green* 和 *L. McAllister*，普朗克尺度抑制算符，《*JCAP*》*01*（*2014*） 033 [1304.5226].[53] *A.V. Iyer*、*S. Pi*、*Y. Wang*、*Z. Wang* 和 *S. Zhou*，强耦合准单场暴胀，《*JCAP*》*01*（*2018*） 041 [1710.03054].[54] *“NIST* 数学函数数字图书馆。”*http://dlmf.nist.gov/*，*2019*年*9*月*15*日发布的 *1.0.24* 版。[55] *N. Belrhali*、*A. Poisson* 和 *S. Renaux-Petel*，宇宙学关联函数的拉普拉斯空间方法，*2606.27309*。[56] *N. Belrhali*、*A. Poisson* 和 *S. Renaux-Petel*，来自平直时空的有质量宇宙学关联函数：拉普拉斯空间方法，*2606.27311*。[57] *C.K. Dumlu* 和 *G.V. Dunne*，时变激光脉冲中的斯托克斯现象与施温格真空粒子对产生，《*Phys. Rev. Lett.*》*104*（*2010*）*250402*[1004.2509].[58] *S. Hashiba* 和 *Y. Yamada*，斯托克斯现象与引力粒子产生——如何在实践中进行评估，《*JCAP*》*05*（*2021*） 022 [2101.07634].[59] *C.M. Sou*、*X. Tong* 和 *Y. Wang*，弗里德曼-勒梅特-罗伯逊-沃克时空中的化学势辅助粒子产生，《*JHEP*》*06*（*2021*） 129 [2104.08772].[60] *Z. Qin*、*S. Renaux-Petel*、*X. Tong*、*D. Werth* 和 *Y. Zhu*，破坏自举对称性的宇宙学关联函数的精确与近似描述，《*JCAP*》*09*（*2025*） 058 [2506.01555].[61] *M.V. Berry* 和 *K.E. Mount*，波动力学中的半经典近似，《*Rept. Prog. Phys.*》*35*（*1972*）*315*。[62] *M.V. Berry*，绝热量子跃迁的历史，《*Proc. Roy. Soc. Lond. A*》*429*（*1990*）*61*。[63] *A.M. Dykhne*，离散谱态的绝热微扰，《*Sov. Phys. JETP*》*14*（*1962*）*941*。[64] *J.P. Davis* 和 *P. Pechukas*，时变哈密顿量在半经典/绝热极限下诱导的非绝热跃迁：双态情形，《*J. Chem. Phys.*》*64*（*1976*）*3129*。[65] *H. Goodhew*、*S. Jazayeri* 和 *E. Pajer*，宇宙学光学定理，《*JCAP*》*04*（*2021*） 021 [2009.02898]。

[66] *H. Goodhew*、*S. Jazayeri*、*M.H.G. Lee* 和 *E. Pajer*，《切割宇宙学关联函数》，*JCAP 08*（*2021*） 003 [2104。06587]。[67] *H.L. Berk*、*W.M. Nevins* 和 *K.V. Roberts*，《*WKB*理论中的新的斯托克斯线》，《数学物理学杂志》*23*（*1982*）*988*。[68] *N. Honda*、*T. Kawai* 和 *Y. Takei*，《虚转向点》，*Springer*数学物理学丛书第*4*卷，*Springer*，东京（*2015*），*10.1007/978-4-431-55702-9*。[69] *X. Chen*、*M.H. Namjoo* 和 *Y. Wang*，《量子原初标准钟》，*JCAP 02*（*2016*） 013 [1509。03930]。[70] *X. Chen*、*R. Ebadi* 和 *S. Kumar*，《经典宇宙学对撞机物理与原初特征》，*JCAP 08*（*2022*） 083 [2205。01107]。[71] *O.H.E. Philcox*，《宇宙学对撞机分析的局限性》，*2607.12010*。[72] *D. Langlois* 和 *S. Renaux-Petel*，《广义多场暴胀中的微扰》，*JCAP 04*（*2008*） 017 [0801。1085]。