arXiv:2611.32619v1 [cond-mat.mes-hall] 24 Nov 2026

螺旋度量硬壁圆柱中的电子：时间反演配对、三次反交叉与扭转激活的偶极跃迁

Humberto Belich Jr. [1] 和 Edilberto O. Silva [2], *[1] *Departamento de Física, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, Espírito Santo 29075-910, Brazil*
[2] *Programa de Pós-Graduação em Física & Coordenação do Curso de Física – Bacharelado, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, Maranhão 65080-805, Brazil*（日期：2026年11月25日）

我们研究螺旋度量中的标量薛定谔方程，其中轴向由嵌入算子定义域的狄利克雷壁封闭。存在硬壁时，轴向导数不能替换为行波因子；在旋转对称的无自旋腔体中，时间反演使方位角量子数为 m 和 $-m$ 的能级严格简并。我们将哈密顿量写成厄米耦合子带矩阵，并给出精确的规范适配变分表示。对于有限半径，主要扭转修正为二次项，并在临界长宽比处变号；对于无界径向区域，该修正关于 $|\Omega_g|$ 为线性。通过在一个 m 扇区内调节长宽比，使其经过孤立的径向—轴向共振，会产生一个避免交叉，其能隙在首阶为 $\Delta_{\rm gap}/E_R = 1.648775\ldots|\Omega_g R^2/L|^3$。一种在无扭转时被禁止的横向偶极跃迁获得了关于扭转的二次振子强度，其由微扰理论得到的首项系数为 0.0559408010，适用于 $R/L = 2$。偶极求和规则和电流的收敛性可用于检验数值结果。我们还给出了标量实现所需的逆质量张量，并在修正模型下重新审查早期文章 [Opt. Quantum Electron. **58**, 113 (2026)]中的每一项陈述和每一幅图。

I. 引言

几何通过至少三种方式进入波动力学：通过空间本身的动能度量，通过将环境问题约化为受限曲面或曲线，以及通过工程化材料响应。每种途径都会导出各自的算符。三维度规的拉普拉斯–贝尔特拉米算子不同于嵌入曲面的薄层几何势 [1]，而标量光学类比本身并不能确定麦克斯韦本构张量 [2]。本文研究的模型属于第一种类型。讨论其如何实现以及它与光学的关系时，还会再次涉及另外两种途径。

DeWitt 综述了弯曲空间中的经典与量子作用原理 [3]。在凝聚态物质领域，Jensen、Koppe 和 da Costa 提出的薄层方法使这一问题变得具体起来：粒子在陡峭限制势作用下被压缩到曲面或曲线上时，会获得一个取决于嵌入曲率的有效势 [1, 4, 5]。后续研究表明，约化哈密顿量取决于约束的施加方式 [6]，并将约化推广到一般嵌入以及外电场和磁场 [7, 8]，同时估算了由此产生的纳米结构中的能量位移 [9]。对于变形圆柱，已有研究预测了由几何驱动的电子性质变化 [10]，并且这些变化已通过实验得到观测 [11]。卷曲成管和螺旋体的应变双层 [12, 13]使得测量弯曲二维电子气中的磁输运成为可能 [14, 15]，而弯曲且扭曲量子线（包括曲面上的自旋–轨道耦合）中的电子，也已通过有效低维模型得到描述 [16–19]。

数学物理中还有一条相关研究路线，关注管中的狄利克雷拉普拉斯算子。将横截面恒定的管弯曲，会在本质谱的阈值以下产生束缚态 [20–23]，而参考曲线的扭转会改变这些束缚态 [24]。扭转横截面不具旋转对称性的管则会产生相反的作用：它导致 Hardy 不等式，因此微小的吸引性扰动不再产生束缚态，并加速热半群的衰减 [25, 26]。周期性扭转和局部扰动扭曲也已得到研究 [27, 28]，而文献 [29] 综述了这一领域。所有这些问题中的环境空间都是欧几里得空间，圆形横截面的扭转可以通过旋转坐标予以消除。本文考察的螺旋度量则不同。其标量曲率为 $-2\Omega_g^2$，即使对于圆柱体，扭转也仍保留在动能算符中。

同样的度规也出现在缺陷的几何理论中，其中位错和向错被编码在有效三维几何的挠率和曲率中 [30–33]。在这一描述中，螺型位错通过修正后的动能算符和拓扑相位作用于电子 [34–36]，并使朗道能级发生偏移

带电粒子的 [37, 38]。式（1）的度规与平行螺型位错的均匀密度相关联；轴向动量随后充当均匀有效磁场中的电荷，而谱呈现弹性朗道能级的形式 [39, 40]。这将该模型与朗道问题和福克–达尔文问题 [41–44]以及磁通诱导相位联系起来 [45]。Darwin 早已表明，样品的边界会影响自由电子的轨道磁性 [43]，而壁面也位于

* edilberto.silva@ufma.br

本文的中心位置。数学上，式（1）是海森堡群的左不变度规，即 Thurston 八种模型几何中的 Nil 几何[46, 47], ，其紧致商空间上的拉普拉斯谱也已得到计算 [48, 49]。

由于有效场与轴向动量成正比，该模型也与合成规范场有关；在合成规范场中，通过设计将有效磁场内置于动能算符中。激光诱导规范势可为超冷原子产生这类场 [50–52]。石墨烯中的非均匀应变会产生赝磁场 [53, 54], ，在纳米气泡中观测到的赝磁场强度超过 300 T[55], ，同时还伴随位置依赖速度张量[56]。应变光子晶格和非平面光学谐振腔支持光子朗道能级 [57, 58]。

几何也可以施加于光。Pleba´nski 证明，引力场对电磁波的作用类似于各向异性介质 [59], ，这一结果构成了变换光学 [60–62] 及其度规表述 [2]的基础。局限于曲面介电表面上的光 obeys 位于弯曲二维空间中的波动方程[63], ；实验已将内禀曲率与外在曲率区分开来，测量了强度关联，控制了曲面纳米光子结构中的光，并观测到加速波包 [64–67]。飞秒激光直写波导重现了受限量子粒子的几何势 [68] 以及许多其他量子光学类比 [69, 70]。螺旋扭曲光子晶体光纤将扭转与光的轨道角动量耦合 [71]；它们表现出轨道角动量共振、旋光性和螺旋布洛赫模，而仅凭扭转就能在无芯光纤中引导光[72–76]。对于螺型位错度规本身，最小耦合麦克斯韦理论在最低傍轴阶给出了类朗道轨道传播 [77], ，而额外的轴向电磁响应则产生扭转旋光性 [78]。这些类比中的每一个都重现了某个特定算符；正如上文所述，弯曲空间中的标量波动方程并不能确定矢量本构关系[2, 59]。

标量模型的物理实现需要一个具有特定位置依赖逆质量张量的有效质量算符。此类算符的排序以及异质界面处的匹配条件已有悠久的研究历史 [79, 80], ，而包络函数理论给出了单带描述成立的条件[81–83]。在光谱学方面，横向受限电子的远红外吸收可分辨其在磁场中的离散能级 [84], ，科恩定理表明，相互作用不会使平移不变电子气的回旋频率发生偏移 [85]。当参数发生变化时，相同对称性的能级会彼此避免交叉 [86], ，因此，避免交叉以及相邻谱线之间振子强度的转移，可以揭示微扰破坏了哪些对称性。

参考文献 [87] 将轴向行波与硬壁相结合，得到了一个含有同时对方位整数 m 和狄利克雷指标 n呈线性项的谱。对于硬壁，这种代换并不允许，因为行波不属于轴向导数的定义域：硬壁本征函数是驻波，而混合导数在单个实轴向模态中没有对角矩阵元。微弱的子带间混合也无法挽救这一结果，因为完整受限哈密顿量的对称性禁止任何 $m \leftrightarrow -m$能级劈裂。第VIIIC 节和附录C 逐一审视参考文献 [87] 中的论述，并重新推导其中在修正模型中有对应内容的部分。

在这里，我们考察纵向限制如何改变三维标量哈密顿量的谱和概率流。我们定义自伴模型，在适用时保留行波解，并在可能的情况下解析地、在其他情况下数值地求得有限圆柱谱，而不以 $\partial_z \mathrm{i}k_n$取代它。除了第VIIIA节对已发表光学程序的检验之外，所有数值结果均来自修正后的哈密顿量，且没有任何结果取自文献 [87]；对于所述的截断，反交叉系数和偶极系数通过直接贝塞尔求积计算，并在独立组装的基中进行了交叉核验。我们还考察扭转诱导的子带混合是否会出现在各个偶极振子强度中，以及避免交叉在扭转的何阶开启，并确定物理实现必须复现的动能张量、边界条件和对称性。

我们的新结果聚焦于狄利克雷圆柱体本身。扭转响应会随长宽比改变符号；扭转达到三阶时会出现避免交叉；扭转还会激活原本在无扭转时被禁止的偶极跃迁。此前关于均匀缺陷密度下类朗道能级的研究 [39, 40], 、关于扭转非圆形线材有效一维理论的研究 [17], ，以及关于紧致海森堡幂零流形拉普拉斯谱的研究 [49] ，探讨的都是其他定义域和边界条件；我们的新增内容是有限的狄利克雷定义域及其耦合子带谱。我们还给出了散度型标量算子为重现该模型所必须具有的局部逆质量张量。这是对算子的条件，我们并未声称某种特定的半导体结构满足这一条件。可编程电路和矢量麦克斯韦传播留待后续工作探讨。

本文结构安排如下。第II–IV节介绍模型、狄利克雷腔体和弱扭转理论。第V节给出谱和电流，第VI节讨论偶极光谱学，第VII节阐述物理实现的条件。第VIII 节讨论光学模型和文献 [87], ，第IX 节作总结；附录C列出文献 [87]中各项陈述的状态。

II. 螺旋度量、标量哈密顿量与行波

我们首先确定度规、标量哈密顿量及其作用的定义域（第 IIA节）。在开放轴上，

轴向波数守恒，扭转产生朗道问题（第 IIB节）。第 III 节中的腔体仅通过其轴向壁面与此情形有所不同。

A. 度规、哈密顿量和算子定义域

我们使用柱坐标 $r \geq 0$、$0 \leq \phi < 2\pi$、$z \in \mathbb{R}$ 以及度规 [31, 39, 47, 48, 77, 78]

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\phi^2 + (\mathrm{d}z + \Omega_g r^2 \mathrm{d}\phi)^2, \qquad [\Omega_g] = \mathrm{length}^{-1}. \tag{1}$$

对于常实数 Ω_g，度规、其逆以及体积元分别为

$$\begin{aligned} (g_{ij}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 + \Omega_g^2 r^4 & \Omega_g r^2 \\ 0 & \Omega_g r^2 & 1 \end{pmatrix}, \\ (g^{ij}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & -\Omega_g \\ 0 & -\Omega_g & 1 + \Omega_g^2 r^2 \end{pmatrix}, \\ \sqrt{g} &= r. \end{aligned} \tag{2}$$

正交标架余标架及其对偶为

$$\vartheta^{\hat{r}} = \mathrm{d}r, \quad \vartheta^{\hat{\phi}} = r\mathrm{d}\phi, \quad \vartheta^{\hat{z}} = \mathrm{d}z + \Omega_g r^2 \mathrm{d}\phi, \tag{3}$$

$$e_{\hat{r}} = \partial_r, \quad e_{\hat{\phi}} = r^{-1}\partial_\phi - \Omega_g r \partial_z, \quad e_{\hat{z}} = \partial_z. \tag{4}$$

该度规是 Nil 几何的左不变度规 [47]，，其标量曲率为 $\mathcal{R} = -2\Omega_g^2$。由于列维-奇维塔联络无挠率，我们将 Ω_g 称为度规扭转，而不是嘉当挠率。在缺陷的几何理论中，同一度规还与一个平坦且度规相容的缺陷联络配对，其挠率为 $T^{\hat{z}} = 2\Omega_g\, \vartheta^{\hat{r}} \wedge \vartheta^{\hat{\phi}}$；对于伯格斯矢量为 b [39, 77]、面密度均匀为 σ 的平行螺型位错，伯格斯通量给出 $\Omega_g = b\sigma/2$。下文的标量哈密顿量仅使用度规及其列维-奇维塔联络，因此该挠率不会进入其中。要将 Ω_g 与实际弹性介质中的缺陷密度联系起来，还需要对材料参数作单独的确定。

图 1 从几何上展示了交叉项的含义。由于 $e_{\hat{z}} = \partial_z$ 是单位矢量，当 $\vartheta^{\hat{z}}$ 沿曲线处处为零时，该曲线便与轴向基灵矢量场 ∂_z 正交，即 $\mathrm{d}z = -\Omega_g r^2 \mathrm{d}\phi$。保持 z 不变的径向直线满足这一条件，但保持 r 和 z 不变的圆则不满足：经过圆上某一点的正交曲线每转一圈上升 $2\pi|\Omega_g|r^2$，因此不会闭合。在 $r = R$ 处，对于公式 (45)中的参数，上升量为 $1.26\,\mu$米，即$12.6L$。参考文献 [87], 所采用的描述中，每个横向平面旋转 $\Omega_g \Delta z$，对应的则是 $\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\phi + \Omega_g \mathrm{d}z)^2 + \mathrm{d}z^2$，这表示螺旋坐标下的平直空间。

对于恒定有效质量，标量哈密顿量$M > 0$ 是该度规的拉普拉斯–贝尔特拉米算子

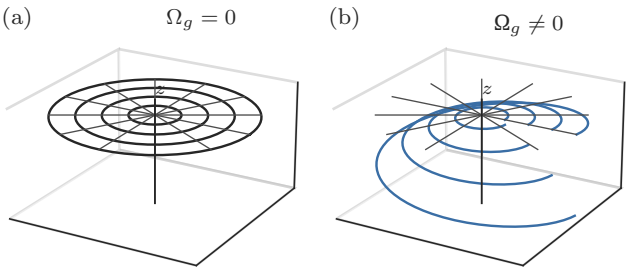

图 1. $z = 0$ 处的极坐标网格：(a) 无扭转；(b) 有扭转。此时圆被与 ∂_z正交的曲线所取代，即 $\mathrm{d}z = -\Omega_g r^2 \mathrm{d}\phi$；图中绘出了 $r/R = 0.25$、0.5、0.75、1 和 $\Omega_g R = 0.1$的情形。径向直线在保持z不变时仍与 ∂_z 正交；经过这些圆的曲线每转一圈上升 $2\pi|\Omega_g|r^2$，因此不会闭合。

[3, 37, 39],

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_g, \\ \Delta_g &= \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 \\ &\quad + (1 + \Omega_g^2 r^2)\partial_z^2 - 2\Omega_g \partial_\phi \partial_z. \end{aligned} \tag{5}$$

二次型为

$$\begin{aligned} \langle \Psi, H\Psi \rangle = \frac{\hbar^2}{2M} \int r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \big(|\partial_r \Psi|^2 \\ + |r^{-1}\partial_\phi \Psi - \Omega_g r \partial_z \Psi|^2 + |\partial_z \Psi|^2 \big). \end{aligned} \tag{6}$$

方程（5）中不含 da Costa 型势，因为这里没有进行薄层约化 [1, 4]。只有在指定定义域和边界条件后，才能定义其谱。我们在有限圆柱上施加狄利克雷条件

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{R,L} = \{ 0 < r < R,\ -L/2 < z < L/2, \\ \phi \in \mathbb{S}^1 \}, \\ \Psi|_{r=R} = \Psi|_{z=\pm L/2} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

假设在 $r = 0$ 处正则。在扇区 $m = 0$中，径向方程在轴附近具有以下局部行为 $F(r) \sim 1$和 $F(r) \sim \log r$；对数分支的径向狄利克雷能量发散 $\int_0^\epsilon r|F'(r)|^2\,\mathrm{d}r$，因此被 Friedrichs 型式域排除。对于 $|m| \geq 1$，正则行为为 $F \sim r^{|m|}$。轴上不设置点相互作用或延拓参数，方程（6）的正闭型定义了一个自伴 Friedrichs 实现。我们还考虑 $R \to \infty$ 以及周期性轴向。这些是不同的算符，其谱不能由同一个分离变量解得到。

B. 行波与类 Landau 扇区

在平移不变轴上，$\Psi = e^{\mathrm{i}m\phi + \mathrm{i}kz} F(r)$，$m \in \mathbb{Z}$ 是一个可接受的广义特征函数。并且

$\beta = |\Omega_g k|$ 和 $k\Omega_g \neq 0$，其径向算符为

$$H_{m,k} = -\frac{\hbar^2}{2M}\left(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - m^2 r^{-2}\right) + \frac{\hbar^2 k^2}{2M} + \frac{\hbar^2 \Omega_g^2 k^2 r^2}{2M} - \frac{\hbar^2 \Omega_g m k}{M}. \tag{8}$$

这些 $r \in [0,\infty)$ 解由径向拉盖尔量子数 $n_r = 0$、1、.....标记；方位角量子数为 $m \in \mathbb{Z}$。对于轴向狄利克雷模，我们保留$n_z = 1$、2、.....；下文中的字母 p、n 是轴向基组指标。与福克–达尔文和朗道问题 [39, 41–43],一样，这些解为

$$F_{n_r,m,k}(r) = \mathcal{N}_{n_r,m}\, r^{|m|} e^{-\beta r^2/2} L_{n_r}^{|m|}(\beta r^2),$$
$$\mathcal{N}_{n_r,m} = \left[\frac{2\beta^{|m|+1} n_r!}{\Gamma(n_r + |m| + 1)}\right]^{1/2}, \tag{9}$$
$$E_{n_r,m}(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} + \frac{\hbar^2 |\Omega_g k|}{M}(2n_r + |m| + 1) - \frac{\hbar^2 \Omega_g m k}{M}. \tag{10}$$

我们将 F 按 $\int_0^\infty r\,\mathrm{d}r\,|F|^2 = 1$进行归一化。方程（10）中的每一项都具有能量的量纲；特别是，线性交叉项带有因子 $\hbar^2/M$。在 k 固定时，$+m$ 与 $-m$ 的能量不同，但时间反演要求

$$E_{n_r,m}(k) = E_{n_r,-m}(-k). \tag{11}$$

对于周期性轴向，k 的正负两种符号都属于谱。相同几何下的导引电磁模具有相同的结构：在固定传播方向下，$+m$ 与 $-m$ 之间的能级劈裂在（m、k_z）$\to$（$-m$、$-k_z$）[78]下保持不变。在 $k = 0$ 处，无限圆盘上不存在由扭转诱导的径向振子。族（10）不满足边界条件（7）。

对于固定的 k，式（8）是电荷处于均匀场（$qB_{\mathrm{eff}} = 2\hbar\Omega_g k$）中的对称规范朗道哈密顿量，并平移了 $\hbar^2 k^2/2M$ [41, 42, 44]。回旋能为 $\hbar\omega_c = 2\hbar^2|\Omega_g k|/M$，式（10）变为 $E = \hbar\omega_c(N + \frac{1}{2}) + \hbar^2 k^2/2M$，其中朗道指标为 $N = n_r + [|m| - m\,\mathrm{sgn}(\Omega_g k)]/2$。$m$ 的线性项是顺磁耦合 $-(qB_{\mathrm{eff}}/2M)L_z$，而文献 [87] 在 $k = \pi/L$ 处发现的 1.0408 毫电子伏能级劈裂为 $\hbar\omega_c$。同一映射也确定了概率电流的方向。对于第 V B 节中物理方位电流 $J_{\hat\phi} = (\hbar/M)\,\mathrm{Im}\,[\Psi^*(r^{-1}\partial_\phi - \Omega_g r\partial_z)\Psi]$，以及态（9）的 $\langle r^2\rangle = (2n_r + |m| + 1)/|\Omega_g k|$，平面本征态 $\Psi = e^{im\phi + ikz}F/\sqrt{2\pi}$ 具有

$$\frac{M}{\hbar}\int \mathrm{d}^2 r\, r\, J_{\hat\phi} = m - \Omega_g k\langle r^2\rangle = -(2N+1)\,\mathrm{sgn}(\Omega_g k). \tag{12}$$

每个行波本征态的积分环流符号都与 $-\Omega_g k$ 相同，与 m 的符号无关。

取参考文献 $k = \pi/L$ 中采用的数值 [87] 以及方程（45）中的参数，$\omega \equiv \hbar\Omega_g k/M = 7.906 \times 10^{11}\mathrm{s}^{-1}$

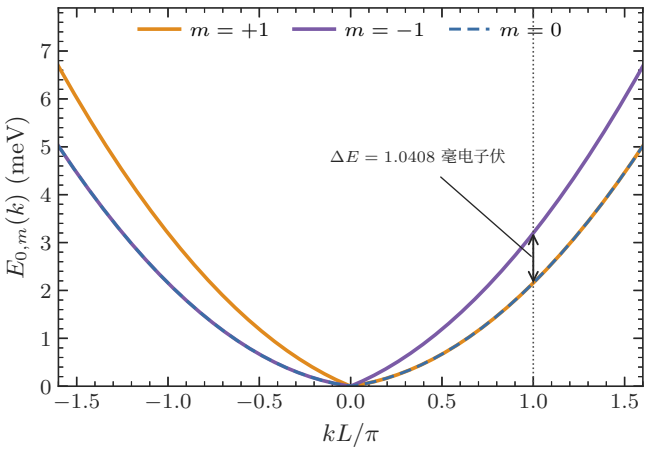

图2。无界径向区域的行波谱：$n_r = 0$ 分支，其中 $m = 0, \pm1$ 是轴向波数 k的函数；对于 $\Omega_g > 0$ 以及式（45）中的材料参数。虚线 $m = 0$ 分支在 $m = +1$ 时与 $k > 0$ 重合，在 $m = -1$ 时与 $k < 0$（朗道指标 $N = 0$）重合。在 $k = \pi/L$ 处，两个 $|m| = 1$ 能量相差 1。040818 毫电子伏，且完整谱将（m，k）与（$-m$，$-k$）配对。这些态不满足封闭腔体的狄利克雷条件。

且 $\ell_{\mathrm{ho}} = (\Omega_g k)^{-1/2} = 79.8$ nm。$u = \sqrt{r}\,F$ 的径向方程具有如下有效势

$$V_{\mathrm{eff}}(r) = \frac{\hbar^2(m^2 - \frac{1}{4})}{2Mr^2} + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2 - \hbar\omega m + \frac{\hbar^2 k^2}{2M}, \tag{13}$$

如图3(a)所示，对于 $m = 1$。其最小值位于 $r_0 = \sqrt{(m^2 - \frac{1}{4})}\,\ell_{\mathrm{ho}} = 74.3$ 纳米处，其中 $V_{\min} = \hbar\omega(\sqrt{m^2 - 1/4} - m) + \hbar^2 k^2/2M = 1.565$ 毫电子伏。这些是文献 [87] 的图2中的数值；它们适用于行波态的约化函数 u，而不是封闭腔体的能级。采用横向归一化 $\int \mathrm{d}^2 r\,|\psi|^2 = 1$ 后，$n_r = 0$ 态具有 $|\psi_{0,0}(0)|^2 = 1/(\pi\ell_{\mathrm{ho}}^2)$，而对于 $m = 1$ 和 $\Omega_g k > 0$，式（47）的方位分量为

$$J_{\hat\phi}(r) = \frac{\hbar}{M}|\psi_{0,1}|^2\left(\frac{m}{r} - \Omega_g k r\right) = \frac{\hbar}{\pi M \ell_{\mathrm{ho}}^3}\, x(1 - x^2)e^{-x^2}, \qquad x = \frac{r}{\ell_{\mathrm{ho}}}. \tag{14}$$

密度峰值出现在 $r = \ell_{\mathrm{ho}}$，此处局部电流改变符号。电流在 $0.468\ell_{\mathrm{ho}} = 37.4$ nm 处达到正最大值，在 $1.510\ell_{\mathrm{ho}} = 120.5$ nm 处达到负最小值 [图 3(b),(c)], ，其一阶矩给出公式（12）。单独使用平直空间项 m/r（见文献 [87], 中的公式（21））时，电流只有一种符号，且在 $\ell_{\mathrm{ho}}/\sqrt{2} = 56.4$ nm 处达到最大值；度规项则使 $r = \ell_{\mathrm{ho}}$之外的环流反向。

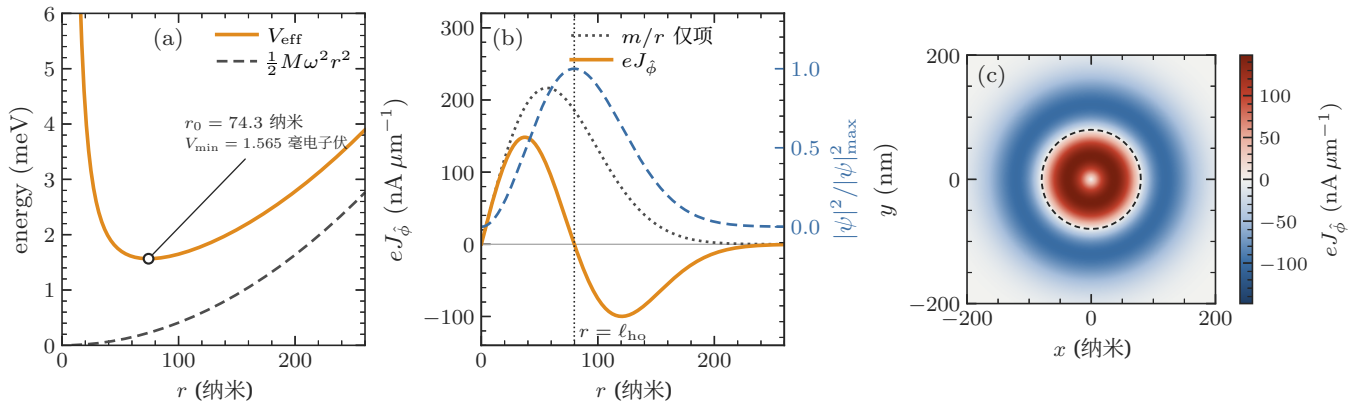

图 3. 行波态，其中 $k = \pi/L$，$n_r = 0$，$m = +1$ 以及式（45）中的参数。(a) 约化函数 $u = \sqrt{r}F$ 的有效势（式 13）（实线）及其谐振部分（虚线）；圆圈标示 $r_0 = 74.3$ 纳米，$V_{\rm min} = 1.565$ 毫电子伏。(b) 式（14）中单个电子的方位电流 $eJ_{\hat\phi}$，其中横向归一化（实线）、单独的平直空间 m/r 项（点线）和归一化密度（虚线，右轴）；竖线标示 $r = \ell_{\rm ho} = 79.8$ 纳米。(c) $eJ_{\hat\phi}$ 的分布图；虚线圆为 $r = \ell_{\rm ho}$，此处电流改变符号。

III. 狄利克雷腔体

轴两端的硬壁改变了问题，因为轴向导数在狄利克雷模态中不再是对角的。我们首先证明 m 和 $-m$ 的能级重合（第 IIIA节），然后在贝塞尔–正弦基中将哈密顿量写成精确矩阵（第 IIIB节），最后精确求解 $m = 0$ 扇区（第 IIIC节）。

A. 轴向约束与时间反演对称性

轴向约束保持旋转不变性。写作

$$\Psi(r,\ \phi,\ z) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} u_m(r,\ z) \tag{15}$$

将哈密顿量精确化简为

$$H_m = \frac{\hbar^2}{2M}\Big[-\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{m^2}{r^2} - (1+\Omega_g^2 r^2)\partial_z^2 + 2im\Omega_g\partial_z\Big]. \tag{16}$$

令 $\mathcal{K}$ 表示对 u_m 取复共轭。由于完整的拉普拉斯–贝尔特拉米算符的系数均为实数，

$$\mathcal{K}H_m(\Omega_g)\mathcal{K}^{-1} = H_{-m}(\Omega_g), \quad H_m(\Omega_g) \text{ and } H_{-m}(\Omega_g) \text{ are isospectral.} \tag{17}$$

对于无自旋粒子，这就是时间反演作用于 $e^{im\phi}u_m$ 的形式。

定理 III.1（精确狄利克雷轨道配对）。若标量算子（5）具有实系数，且其有界条件／定义域条件在无自旋时间反演和绕 z的旋转下保持不变，则m 扇区中的每个本征值也属于 $-m$ 扇区，且具有相同的重数。特别地，对于狄利克雷圆柱体（7），无自旋时间反演 *[88]* 给出

$$E_{\alpha,m}(\Omega_g) = E_{\alpha,-m}(\Omega_g), \qquad m \in \mathbb{Z}, \tag{18}$$

where α 对任一等谱扇区内的能级进行重新排序扇区。

证明。如果 $H\Psi = E\Psi$ 和 $-i\partial_\phi\Psi = m\Psi$，那么 $H\Psi^* = E\Psi^*$、$-i\partial_\phi\Psi^* = -m\Psi^*$，且实狄利克雷迹仍然为零。复共轭是两个扇区之间的可逆反幺正映射。□

这不是克拉默简并，因为 $\mathcal{T}^2 = +1$；这两个伙伴具有不同的角向本征值，并且彼此正交。破坏旋转对称性的边界可以将它们混合成实驻波，此时仅凭时间反演不再强制产生二重简并。

对于常数 Ω_g，关于 $\mathcal{P}_z$：$z \mapsto -z$ 盒子中心的反射还给出 $E_{\alpha,\,m}(\Omega_g) = E_{\alpha,\,m}(-\Omega_g)$。在有限 R 下，因此孤立能级在零点附近关于 Ω 既解析又为偶函数$_g$；无限径向区域是一个奇异极限（第 IVC节）。

B. 精确子带矩阵与选择定则

选择狄利克雷基底

$$\chi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\Big[\frac{n\pi}{L}(z + L/2)\Big], \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad k_n = \frac{n\pi}{L}. \tag{19}$$

其导数矩阵为

$$\langle\chi_p|\partial_z|\chi_n\rangle = \frac{1}{L}D_{pn}, \quad D_{pn} = \begin{cases} \dfrac{4pn}{p^2 - n^2}, & p+n \text{ odd}, \\ 0, & p+n \text{ even}. \end{cases} \tag{20}$$

因此 $D_{pp}=0$ 和 $D_{pn}=-D_{np}$：在硬墙模态中，导数没有对角元，且只连接相反的轴向宇称。在狄利克雷定义域上，算符 $-\mathrm{i}\hbar\partial_z$ 是对称的，但不是自伴的，并且没有本征值 $\pm\hbar k_n$，尽管 $-\partial_z^2$ 具有本征值k_n^2。

对于有限径向边界，使用 $\ell=|m|$ 和归一化贝塞尔基

$$B_{\ell s}(r)=\frac{\sqrt{2}}{R|J_{\ell+1}(j_{\ell s})|}J_\ell(j_{\ell s}r/R),\qquad \int_0^R r\,\mathrm{d}r\,B_{\ell s}B_{\ell t}=\delta_{st}. \tag{21}$$

其中，$j_{\ell s}$ 是 J_ℓ的第 s个正根。对于无量纲径向坐标 $x=r/R$，相应的归一化基为 $\mathcal{B}_{\ell s}(x):=RB_{\ell s}(Rx)$，因此$\int_0^1 x\mathrm{d}x\,\mathcal{B}_{\ell s}(x)\mathcal{B}_{\ell t}(x)=\delta_{st}$。以下对 x 的径向积分均采用这一约定。定义

$$E_R=\frac{\hbar^2}{2MR^2},\quad a=\frac{R}{L},\quad b=\frac{\Omega_gR^2}{L},\qquad X_{st}^{(\ell)}=\int_0^R r\,\mathrm{d}r\,B_{\ell s}(r)\frac{r^2}{R^2}B_{\ell t}(r). \tag{22}$$

精确的伽辽金矩阵为

$$\frac{\langle s,p|H_m|t,n\rangle}{E_R}=\delta_{st}\delta_{pn}\left[j_{\ell s}^2+(a\pi n)^2\right]+b^2(\pi n)^2X_{st}^{(\ell)}\delta_{pn}+2\mathrm{i}mb\,\delta_{st}D_{pn}. \tag{23}$$

该矩阵是厄米矩阵，因为其唯一的虚部为 $\mathrm{i}D$，其中 $D^{\mathsf{T}}=-D$。截断为 N_r 个贝塞尔函数和 N_z 个轴向模态可得到变分上界，并且∂_z 绝不替换为 $\pm\mathrm{i}k_n$。

C. 精确的 $m=0$ 扇区与径向边界

当 $m=0$时，式（16）中的交叉项消失，轴向模态精确分离。将物理轴向驻波数记为 n_z，其中 $k_{n_z}=n_z\pi/L$，无限圆盘能量即为福克–达尔文能级 [42, 43] 加上轴向动能后的结果，

$$E^{R=\infty}_{n_r,0,n_z}=\frac{\hbar^2k_{n_z}^2}{2M}+\frac{\hbar^2|\Omega_g|k_{n_z}}{M}(2n_r+1),\quad n_r=0,1,\dots. \tag{24}$$

归一化径向本征态是具有 $\beta=|\Omega_g|k_{n_z}$ 的二维振子的本征态。在参数为 $L=100\,\mathrm{nm}$、$\Omega_g=5\times10^6\,\mathrm{m}^{-1}$ 和 $M=0.023m_e$ 时，该扇区中相邻径向能级之间的精确间距为

$$\Delta E_{\mathrm{rad}}=\frac{2\hbar^2|\Omega_g|k_1}{M}=1.040818\,\mathrm{meV}. \tag{25}$$

在狄利克雷轴向系统中，$R=\infty$ 这是同一m各能级之间的$m=0$ 径向激发能隙；不涉及 $m\leftrightarrow-m$ 能级劈裂。

若保留有限半径的径向壁 R，令 $\beta=|\Omega_g|k_{n_z}$；$m=0$ 的正则径向解为

$$F(r)=e^{-\beta r^2/2}\,{}_1F_1\!\left(\frac{1}{2}-\frac{E-\hbar^2k_{n_z}^2/(2M)}{2\hbar\omega_{n_z}};\,1;\,\beta r^2\right),\qquad \omega_{n_z}=\frac{\hbar\beta}{M}. \tag{26}$$

其中，狄利克雷方程 $F(R)=0$ 决定能量。当 $\Omega_g=0$ 时，该结果趋于贝塞尔势阱谱 $E_R[j_{0s}^2+(a\pi n)^2]$。因此，有限半径的 $m=0$ 扇区为这两个极限以及数值代码提供了精确检验。

IV. 弱扭转、规范适配表示和径向约束

对于小扭转，可以对腔体谱进行解析追踪。第二阶位移及其随长宽比发生的变号将在第 IVA 节中推导。第 IVB 节引入一种建立在依赖半径的轴向相位之上的精确表示；我们也将在数值计算中使用该表示。第 IVC 节则将有限圆柱与无限 Landau 问题联系起来。

A. 弱扭转理论、贝塞尔矩与符号反转

对于有限圆柱，写作 $H_m=H_m^{(0)}+\Omega_gH_m^{(1)}+\Omega_g^2H_m^{(2)}$，其中

$$H_m^{(1)}=-\frac{\hbar m}{M}p_z,\quad p_z=-\mathrm{i}\hbar\partial_z,\qquad H_m^{(2)}=\frac{r^2p_z^2}{2M}. \tag{27}$$

在零扭转时，$|s,\ m,\ n\rangle=B_{|m|s}\chi_ne^{\mathrm{i}m\phi}/\sqrt{2\pi}$和 $E^{(0)}_{smn}=E_R[j_{|m|s}^2+(a\pi n)^2]$。$H_m^{(1)}$的对角期望值为零。由于 $H_m^{(1)}$不会改变径向指标，其虚轴向贡献为

$$\sum_{p\neq n}\frac{|\langle p|p_z|n\rangle|^2}{\varepsilon_n-\varepsilon_p}=-\frac{M}{2},\qquad \varepsilon_n=\frac{\hbar^2k_n^2}{2M}. \tag{28}$$

为证明这一点，注意相位 $e^{\mathrm{i}\eta z/\hbar}$ 在狄利克雷定义域上将 $(p_z-\eta)^2/(2M)$酉映射到 $p_z^2/(2M)$，因此 $-\eta p_z/M$ 的二阶贡献必须抵消常数 $\eta^2/(2M)$。

贝塞尔径向矩也有闭式表达：

$$\frac{\langle s,m|r^2|s,m\rangle}{R^2}=C_{\ell s}=\frac{1}{3}\left[1+\frac{2(\ell^2-1)}{j_{\ell s}^2}\right],\qquad \ell=|m|. \tag{29}$$

结合公式（28）和（29），对于 Ω 附近的孤立能级，有 $_g = 0$,

$$E_{smn}(\Omega_g) = E^{(0)}_{smn} + \frac{\hbar^2\Omega_g^2}{2M}\left[\left(\frac{n\pi R}{L}\right)^2 \times C_{|m|s} - m^2\right] + O(\Omega_g^4). \tag{30}$$

该修正关于 m为偶函数，并使时间反演对保持简并。有限半径磁化率为

$$\chi^{(R)}_{smn} := \left.\frac{\partial^2 E_{smn}}{\partial\Omega_g^2}\right|_0 = \frac{\hbar^2}{M}\left[(n\pi R/L)^2 C_{|m|s} - m^2\right]. \tag{31}$$

对于 $|m| = 1$，每个径向根均满足 $C_{1s} = 1/3$，因此

$$\left(\frac{R}{L}\right)_{\rm crit} = \frac{\sqrt{3}}{\pi n} \qquad (|m| = 1). \tag{32}$$

对于最低轴向模态 $n = 1$，该比值为 0.551328895 ...：当 $R/L < \sqrt{3}/\pi$ 时，二次能量位移为负；高于该值时则为正。更一般地，$m \neq 0$ 对应的二次响应零点为

$$\left(\frac{R}{L}\right)_{\rm crit} = \frac{|m|}{\pi n\sqrt{C_{|m|s}}}. \tag{33}$$

因此，长宽比决定了扭转响应的符号，而在文献 [87]中没有与之对应的现象。在欧几里得波导中，非圆形横截面的扭转会产生排斥作用 [25, 26]；而在此处，$m \neq 0$ 能级的主导位移符号取决于长宽比。该位移作用于整个 $\pm m$ 二重态，而该二重态仍保持简并。

同样的结果也可由精确的酉变换得到，该变换还为局部电流提供了收敛更快的变分基。我们将在第IVB节构造该变换。

B. 精确的规范适配狄利克雷表示

第 IVC 节中式（41）的配方可在算子定义域上实现为一个幺正映射。定义实数的、依赖半径的轴向相位

$$\begin{aligned}\alpha_m(r) &= \frac{m\Omega_g}{1+\Omega_g^2 r^2},\\ u_m(r,z) &= e^{\mathrm{i}\alpha_m(r)z} v_m(r,z),\\ \alpha'_m(r) &= -\frac{2m\Omega_g^3 r}{(1+\Omega_g^2 r^2)^2}.\end{aligned} \tag{34}$$

该相位在有限圆柱上是单值的，并在 $r = R$ 和 $z = \pm L/2$ 处保持狄利克雷迹。代入其形式为（6），它将固定的m 动能型转化为

$$\begin{aligned}Q_m[v] = \frac{\hbar^2}{2M}\int_0^R r\,\mathrm{d}r\int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}z\Big\{ &\left|\left(\partial_r + \mathrm{i}z\alpha'_m(r)\right)v\right|^2\\ &+ (1+\Omega_g^2 r^2)|\partial_z v|^2\\ &+ \frac{m^2}{r^2(1+\Omega_g^2 r^2)}|v|^2\Big\}.\end{aligned} \tag{35}$$

这两种形式幺正等价，但扭转并未消失：径向导数会多出一项 $z\alpha'_m(r)$，其系数在固定 r 时为 Ω_g^3 的量级，而

$$\begin{aligned}\frac{m^2}{r^2(1+\Omega_g^2 r^2)} &= \frac{m^2}{r^2} - m^2\Omega_g^2 + O(\Omega_g^4),\\ (1+\Omega_g^2 r^2)|\partial_z v|^2 &= |\partial_z v|^2 + \Omega_g^2 r^2|\partial_z v|^2.\end{aligned} \tag{36}$$

对于有限的 R，式（35）–（36）给出了式（30）中 $O(\Omega_g^2)$ 的全部一阶修正，并说明了为何不会出现线性能级劈裂，且无需将狄利克雷特征值赋予 p_z。当 $R \to \infty$ 时，该展开并非一致。

数值实现时，令 $x = r/R$, $\zeta = (z + L/2)/L$, $a = R/L$, $b = \Omega_g R^2/L$，并定义

$$\begin{aligned}q_m(x) &= \frac{mb}{a^2 + b^2x^2},\\ U(x,\zeta) &= e^{\mathrm{i}q_m(x)(\zeta-1/2)}V(x,\zeta),\\ q'_m(x) &= -\frac{2mb^3x}{(a^2+b^2x^2)^2}.\end{aligned} \tag{37}$$

在单位 $E_R = \hbar^2/(2MR^2)$ 下，变换后的二次型为

$$\begin{aligned}\frac{Q_m[V]}{E_R} = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}\zeta\Big\{ &\left|\left[\partial_x + \mathrm{i}q'_m(x)(\zeta - \tfrac{1}{2})\right]V\right|^2\\ &+ (a^2+b^2x^2)|\partial_\zeta V|^2\\ &+ \frac{m^2a^2}{x^2(a^2+b^2x^2)}|V|^2\Big\}.\end{aligned} \tag{38}$$

贝塞尔–狄利克雷展开 V 给出了第二种厄米伽辽金方案，可精确包含径向规范项（附录A3）。

同一表示也使物理电流的表达式更为简洁。采用归一化尺度 $j_0 = \hbar/(2\pi MR^3L)$ 和$\rho = |V|^2$，可得

$$\begin{aligned}\frac{J_{\hat\phi}}{j_0} &= \frac{ma^2\rho}{x(a^2+b^2x^2)} - bx\ \mathrm{Im}(V^*\partial_\zeta V),\\ \frac{J^z}{j_0} &= \frac{a^2+b^2x^2}{a}\ \mathrm{Im}(V^*\partial_\zeta V),\\ \frac{J^r}{j_0} &= \mathrm{Im}(V^*\partial_x V) + q'_m(x)(\zeta - \tfrac{1}{2})\rho.\end{aligned} \tag{39}$$

J^z 中的 $-\Omega_g m\rho$ 项恰好抵消。这种抵消源于表示的改变，而物理电流保持不变。

根据 Hellmann–Feynman 定理 [89]，任意归一化的孤立有限圆柱能级都满足

$$\frac{\mathrm{d}E_{\alpha m}}{\mathrm{d}\Omega_g} = \frac{\hbar^2}{M}\Big[\Omega_g \int r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\, r^2 |\partial_z u_m|^2 - m\,\mathrm{Im}\int r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\, u_m^* \partial_z u_m\Big]. \tag{40}$$

我们将式（40）与原始伽辽金矩阵中采用中心有限差分得到的结果进行了比较，适用于 $m = 0$，1，2 以及若干非零扭转。无量纲导数 $\mathrm{d}(E/E_R)/\mathrm{d}b$. 的偏差小于 2×10^{-8}

C. 径向约束、奇异极限与几何交叉

无需采用单子带近似，即可看出式（6）的正定性和几何俘获。在 m这一扇区中，对任意固定半径，二次型的轴向部分都可配方为平方：

$$\begin{aligned} &|\partial_z u|^2 + \left|\frac{\mathrm{i}m}{r}u - \Omega_g r\partial_z u\right|^2 \\ &= (1+\Omega_g^2 r^2)\left|\partial_z u - \frac{\mathrm{i}m\Omega_g}{1+\Omega_g^2 r^2}u\right|^2 \\ &\quad + \frac{m^2}{r^2(1+\Omega_g^2 r^2)}|u|^2. \end{aligned} \tag{41}$$

在固定的 r 下，相位 $\exp\left[\mathrm{i}m\Omega_g z/(1+\Omega_g^2 r^2)\right]$ 保持轴向 Dirichlet 数据不变，而一维 Poincar´e 不等式给出如下结果，正如扭曲波导的 Hardy 型界 [25, 26],一样

$$\int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}z\left|\partial_z u - \frac{\mathrm{i}m\Omega_g}{1+\Omega_g^2 r^2}u\right|^2 \geq \frac{\pi^2}{L^2}\int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}z\,|u|^2. \tag{42}$$

对于 $\Omega_g \neq 0$，这给出了半径为 r 处轴向能量密度的约束下界 $(\hbar^2/2M)(\pi/L)^2(1+\Omega_g^2 r^2)$。由于相位依赖于 r，它无法在全局范围内消除耦合，除非引入径向导数。该下界解释了径向约束，而无需对 p_z 进行对角化。

对于 $R=\infty$，式（24）中的激发尺度与 $|\Omega_g|$ 成正比；而在有限 R 时，每个能级都从 $\Omega_g = 0$ 处的一个孤立贝塞尔本征值开始，并具有正则展开式（30）。参数

$$\xi_n = |\Omega_g| k_n R^2 = \pi n|b| \tag{43}$$

比较壁面半径与振子长度 $\ell_n = (|\Omega_g| k_n)^{-1/2}$，因为 $\xi_n = R^2/\ell_n^2$。图6 展示了这两种情形。在 Ω 处的导数$_g = 0$ 是在 $R\to\infty$ 之后取得的，与有限 $R\to\infty$ 导数的极限R 不同。

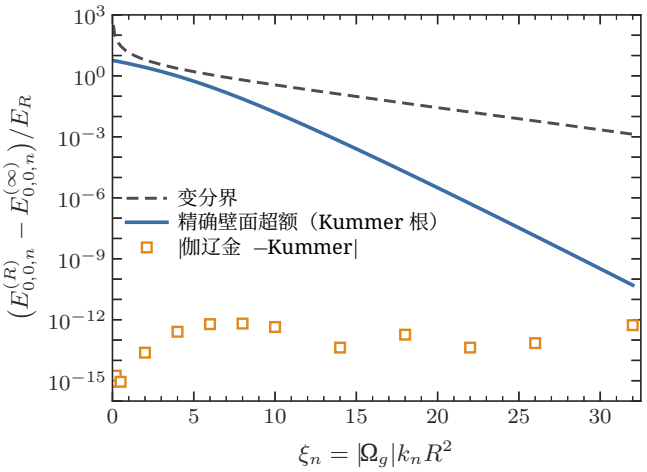

图 4. $m = 0$的径向壁修正。实线：由合流超几何解的零点得到的有限R 能量与无界振子值之差。虚线：界（44）。方块：伽辽金本征值与超几何本征值之差，其大小处于舍入误差范围内（在 $\xi_n = 1$ 处二者都给出 $\delta = 6$ 精确值，故省略该点）。

对于最低 $m = 0$ 能级，变分界刻画了其趋近无界极限的过程。令 $E^{(R)}_{0\,0\,n}$ 表示半径为 R 和$E^{(\infty)}_{0\,0}$ 时的径向基态能量，n 表示振子值（24）。区域单调性和高斯基态给出

$$\begin{aligned} 0 &\leq E^{(R)}_{0,0,n} - E^{(\infty)}_{0,0,n} \\ &\leq 4E_R \frac{e^{-\xi_n/4}}{1-e^{-\xi_n/4}}, \\ \xi_n &= |\Omega_g| k_n R^2 > 0. \end{aligned} \tag{44}$$

为得到该结果，将高斯函数乘以一个径向截断函数：当 $r \leq R/2$ 时其值为 1，并在线性下降至零$r = R$。振子型式的基态表示使超出部分与 $|\partial_r \chi_R|^2$成正比，而 $R/2$ 之外的高斯权重为 $e^{-\xi_n/4}$（附录 A4）。该界在 ξ_n 中呈指数衰减，但并非最优。对于固定的 $\Omega_g \neq 0$，有限壁本征值在 $R\to\infty$趋近于振子值；然而，在能量展开中，$\Omega_g \to 0$ 与$R\to\infty$ 的极限并不交换。

有限的R 本征值为 $m = 0$，也可表示为下式的第一个零点 ${}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \delta/(4\xi_n); 1; \xi_n\right)$，其中 $\delta = (E - E_{z,\,n})/E_R$。对于 $0.05 \leq \xi_n \leq 32$，该根与贝塞尔伽辽金值的差异小于 3×10^{-12}，单位为 E_R。图4 展示了精确壁面超额、界以及两种计算结果之间的差异。

V. 光谱与概率流

现在我们不再使用微扰理论。谱的计算和检验见第 VA 节。度规中的概率流，以及时间反演如何配对

的电流 m 和 $-m$ 的推导见第 VB 节；第 VC 节则检验积分电流和局部电流的收敛情况。

A. 非微扰能谱和数值验证

我们对 Bessel×正弦基中的方程（ X_{st}）进行了对角化，并对 $|m| \geq 1$ 采用高斯–勒让德求积v_m。这是原始算符的厄米r-z性离散化，在基内保留了所有子带耦合。作为对 $=\sqrt{r}\,u_m$的交叉检验，我们还通过带狄利克雷条件的有限差分，求解了r（z，v_m）的二维方程。

为作数值说明，我们取

$$R = 200\,\mathrm{nm}, \quad L = 100\,\mathrm{nm}, \\ M = 0.023 m_e, \quad \Omega_g = 5.0 \times 10^6\,\mathrm{m}^{-1}. \tag{45}$$

因此 $a = b = 2$ 和 $E_R = 0.041412849$毫电子伏。它们确定了有效度规模型的尺度，但与卷曲半导体的原子结构无关。它们分别是参考文献 [87] 中表 1 所给卷曲管范围的下限（$R = 0.2$–$0.5\,\mu$米， $L = 0.1$–$2\,\mu$米）。扭转本身要求半径大于长度。对于 $k = \pi/L$，传播扇区的谐振长度为 $\ell_{\mathrm{ho}} = (\pi\Omega_g/L)^{-1/2} = 79.8$ 纳米（第 II B 节）；只有当方程（43）中的 $\xi_1 = R^2/\ell_{\mathrm{ho}}^2$ 远大于 1 时，扭转产生的径向限域才会超过径向壁（第 IV C 节）。对于该 Ω_g 和 L，这要求 $R \gtrsim L$。这里 $\xi_1 = 2\pi$ 和 $R \simeq 2.5\,\ell_{\mathrm{ho}}$，因此腔体是一个具有 $R/L = 2$的圆盘，其厚度方向上的扭转为 $\Omega_g L = 0.5$弧度。对于具有相同 Ω_g 且长度大于半径的圆柱体，则需要更大的 $\Omega_g L$；例如，当 $L = 1\,\mu$米且 $R = 500$ 纳米时，$\Omega_g L = 5$， $\ell_{\mathrm{ho}} = 252$ 纳米，$\xi_1 = 3.9$，而 E_R 降至 $6.6\,\mu$电子伏。

对于 $m = 1$和 $b = 2$，原始贝塞尔–正弦基底在 $(N_r, N_z) = (24, 28)$ 时给出的结果为 2.69632647 毫电子伏，而规范适配基底在 (22, 26) 时便已给出 2.69632499 毫电子伏。两者相差 1.48×10^{-6} 毫电子伏，且都逐渐趋近于相同的变分极限。有限差分结果为 2.69610343 毫电子伏，采用 120×120个内部网格点时，随着网格细化，该结果从下方趋近于伽辽金值（采用 240×240个网格点时为 2.69626688 毫电子伏）；我们仅将其用作一致性检验。图 5 显示了时间反演双重态，图7显示了弱扭转系数的符号反转。图7中的圆点是在规范适配基底下计算的，该基底在 $N_z = 14$时已收敛。在临界比值附近，系数较小，原始基底在N_z下收敛缓慢:−在 $R/L = \sqrt{3}/\pi$ 和 $\Omega_g R = 0.035$时，量 $[E(\Omega_g) - E(0)]/[E_R(\Omega_g R)^2]$ 对于 $N_z = 14$ 为 7.2×10^{-4}，对于 $N_z = 150$为 3.98×10^{-4}；后者与规范适配基底下的结果一致，也是展开的高阶余项。

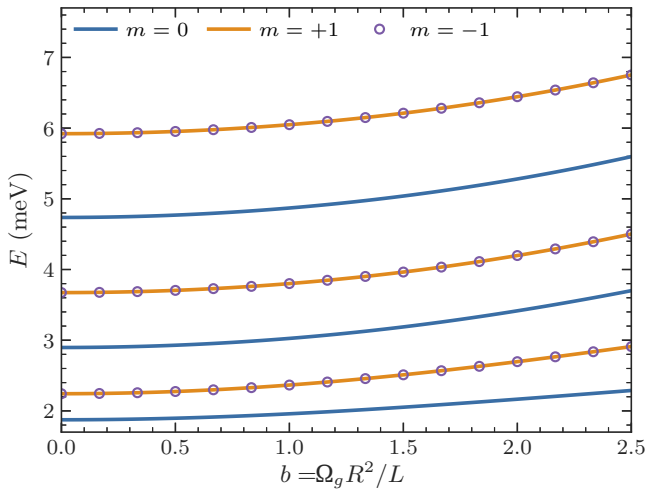

图5. 有限圆柱在扇区$m = 0$和 $m = +1$（线条）以及 $m = -1$（圆圈）中的最低三个能级，随 $b = \Omega_g R^2/L$变化，取 $a = 2$并令 R和 M为方程（45）中的值。所有$m = \pm 1$下，能级均重合。采用规范适配的Galerkin基，其中（N_r， N_z） =（12，16）。

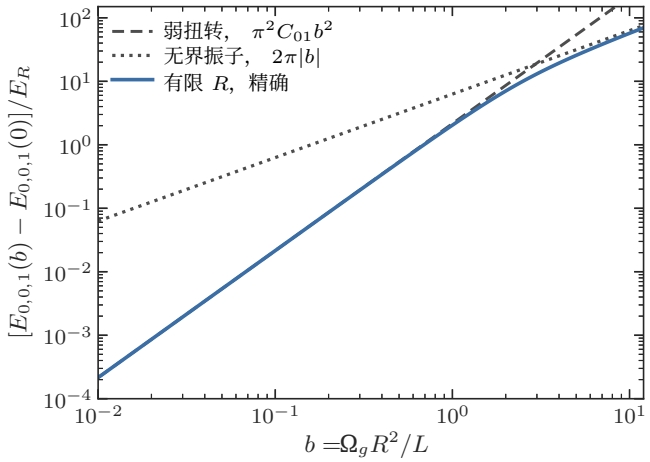

图6. 最低 $m = 0$ 能级的位移，以 E_R为单位，随有限 R 下的 b 变化（实线），并与弱扭转结果 $\pi^2 C_{01} b^2$ （虚线）以及无界径向振子的能量 $2\pi|b|$ （点线）进行比较。由于减去了零扭转贝塞尔能量 $j_{01}^2 E_R$，实线在 b较大时趋近于$2\pi|b| - j_{01}^2$。

B. 概率流与时间反演配对

标量电流由度规体积测度下的连续性方程得出，

$$J^i = \frac{\hbar}{M}\,\mathrm{Im}\big(\Psi^* g^{ij}\partial_j \Psi\big), \qquad \partial_t(r|\Psi|^2) + \partial_i(r J^i) = 0. \tag{46}$$

表 I. 对于 $a = b = 2$，每个轨道扇区中最低的六个能量（毫电子伏），由规范适配的Galerkin基在 $N_r = 22$, $N_z = 26$ m $30, 40$ 条件下计算得出。两个符号对应的结果在特征值求解器的精度范围内一致。将基扩展至 ( ) 后，显示的数字均不变；未变换的基也收敛到相同数值。

m	1	2	3	4	5	6
0	2.165416	3.415503	5.280499	7.580557	7.939137	9.670822
+1	2.696325	4.197594	6.444278	8.586437	9.505923	10.709769
−1	2.696325	4.197594	6.444278	8.586437	9.505923	10.709769
+2	3.226859	5.041325	7.674892	9.533008	11.135985	11.735803
−2	3.226859	5.041325	7.674892	9.533008	11.135985	11.735803

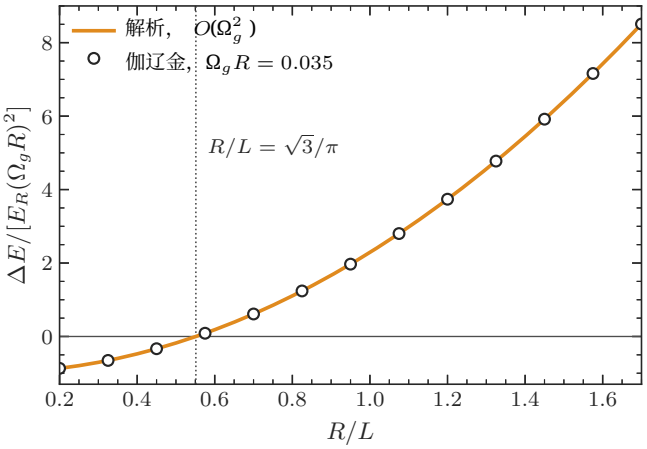

图7. $|m| = 1$, $s = n = 1$ 能级的弱扭转系数随 R/L变化：解析 $O(\Omega_g^2)$结果（实线）以及规范适配基中 $\Omega_g R = 0.035$ 时的伽辽金能量差（圆圈）。该系数在 $R/L = \sqrt{3}/\pi$处改变符号；$m = \pm 1$ 对保持简并。

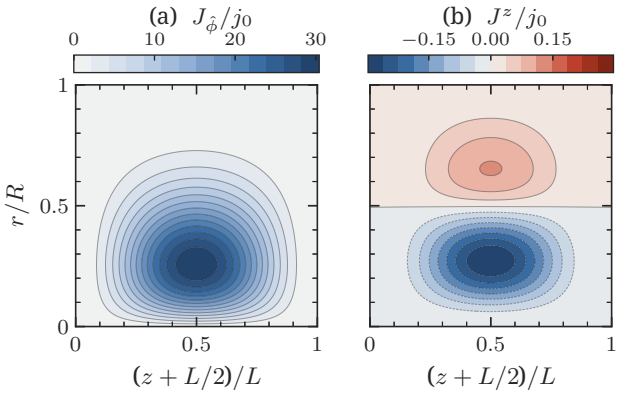

图8. 在 $a = b = 2$处最低的 $m = +1$ 本征态中的概率流，采用适配规范的基底（$N_r = 22$, $N_z = 26$）计算：(a) 正交归一方位角分量 $J_{\hat\phi}$；(b) 坐标轴向分量 J^z。二者的单位均为 $j_0 = \hbar/(2\pi M R^3 L)$，对应归一化 $\Psi = e^{im\phi}U(r/R, (z + L/2)/L)/(R\sqrt{2\pi L})$，因此是无量纲的概率流。其 $m = -1$ 伙伴态具有方向相反的流动模式。

在正交归一标架（4）中，其物理分量为

$$J_{\hat r} = \frac{\hbar}{M}\,\mathrm{Im}(\Psi^* \partial_r \Psi), \tag{47}$$

$$J_{\hat\phi} = \frac{\hbar}{M}\,\mathrm{Im}\left[\Psi^* \left(r^{-1}\partial_\phi - \Omega_g r \partial_z\right)\Psi\right], \tag{48}$$

$$J_{\hat z} = \frac{\hbar}{M}\,\mathrm{Im}(\Psi^* \partial_z \Psi), \tag{49}$$

在 $J^\phi = J_{\hat\phi}/r$和 $J^z = J_{\hat z} - \Omega_g r J_{\hat\phi}$条件下。具有$m \neq 0$ 的本征态可以携带局域方位环流，尽管哈密顿量具有时间反演不变性，而其伙伴态携带相反电流：

$$\mathbf{J}[\Psi_{-m}] = -\mathbf{J}[\Psi_m]. \tag{50}$$

在两种伙伴态占比相等的混合态中，$\mathbf{J}_{\mathrm{ensemble}} = 0$。由预先制备的本征态所携带的电流，与平衡态中的持久电流不同；标量哈密顿量不会产生后者。壁面施加了 $\Psi = 0$，因此在 $z = \pm L/2$处有 $J^z = 0$，但内部可以存在轴向和方位流动模式。具有确定 m 的定态本征态也满足 $\partial_\phi \mathbf{J} = 0$。对横向圆盘上的连续性方程积分，其中

结合轴处的正则性和径向狄利克雷条件，可得

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_0^R r\,\mathrm{d}r\, J^z(r,z) = 0, \\ &\int_0^R r\,\mathrm{d}r\, J^z(r,z) = 0 \quad \text{for every } z. \end{aligned} \tag{51}$$

第二个等式由壁面处通量为零得出。它涉及穿过 $z =$ const表面的坐标通量 J^z；局部标架分量 $J_{\hat z}$ 不受此条件约束。同一横截面内某处的局部 J^z 可以由其他位置方向相反的流动来补偿。

C. 积分电流与局部电流的收敛性

能量收敛并不意味着近似本征态能以同样的精度守恒电流，因为轴向导数对正弦展开中缓慢衰减的尾部十分敏感。表 II比较了原始基组和51中的通量恒等式（

表 II. 最低 $m = 1$ 能量及横截面通量的残差，$\max_\zeta |\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\, J^z/j_0|$（$\zeta$的 4001 个取值中的最大值），分别对应原始基组（std）和规范适配基组。规范适配截断满足通量恒等式，精度接近机器精度。

N_r	N_z	E_{std}（毫电子伏）	E_{gauge}（毫电子伏）	通量$_{\mathrm{std}}$	通量$_{\mathrm{gauge}}$
10	12	2.696341586	2.696325027	1.47×10^{-2}	6.6×10^{-11}
14	18	2.696330279	2.696325000	6.92×10^{-3}	1.4×10^{-11}
18	22	2.696327967	2.696324994	4.73×10^{-3}	6.3×10^{-12}
22	26	2.696326828	2.696324992	3.44×10^{-3}	3.3×10^{-12}

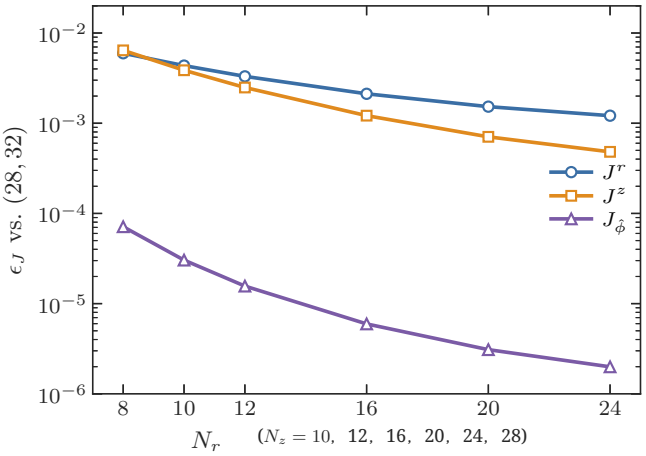

图9. 三个电流分量相对于（28 ϵ_J，式（52），32）规范适配参考的相对内部误差。方位分量的收敛速度远快于 J^r 和 J^z。测量中不包括壁面附近的薄层。

规范适配基组在 $m = +1$ at $R/L = b = 2$ 下的情况，单位为 j_0。

在规范适配计算中，固定内部网格上的$|J^z|/j_0$ 最大值从（10，12）处的0.29723变为（22，26）处的0.29669。现在我们考察逐点收敛性。

式（51）只约束积分通量，而要可靠地绘制局部电流分布图，则需要径向导数和轴向导数均已收敛。因此，我们将规范适配 $m = 1$态在 $a = b = 2$ 下、采用若干组基（N_r，N_z）计算的结果，与更大的参考基（28，32）进行比较，并在公共内部网格上计算三个电流分量，定义加权相对误差

$$\epsilon_J(N_r,N_z) = \left[\frac{\int_{\mathcal{I}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\zeta\,|J_{N_r,N_z} - J_{28,32}|^2}{\int_{\mathcal{I}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\zeta\,|J_{28,32}|^2}\right]^{1/2}, \qquad (52)$$
$$\mathcal{I} = [0.035, 0.965]\times[0.025, 0.975].$$

排除了紧邻壁面的窄条区域，因为在狄利克雷边界上很难解析导数。由于参考值本身也是有限基的结果，ϵ_J 衡量的是数值稳定性，并不限制绝对误差。

在 (24，28) 处，J^r 的内部误差为 0.121%，$J_{\hat\phi}$ 的内部误差为 0.00020%，J^z 的内部误差为 0.048%。我们尚未考察壁面附近的最大误差，也未考察 $R\to\infty$ 的电流分布。

VI. 偶极光谱学

第 IIIA 节的配对 m与 $-m$之间不存在能级劈裂，因此需要在别处寻找扭转的影响，而光学跃迁正是自然的切入点。我们在第 VIA节推导出一个精确的纵向求和规则。在第 VIB 节，我们在同一 m扇区内发现了一个避免交叉，其能隙与扭转的三次方成正比；在第 VIC节，我们给出圆偏振选择定则，以及由扭转激活的跃迁。

A. 轴向偶极响应与精确几何求和规则

在标量有效质量模型中，令 X^i 表示乘以笛卡尔坐标 $X^i \in \{x, y, z\}$。对于狄利克雷态，托马斯–赖歇–库恩求和规则的双重对易子恒等式 [90–92] 为

$$[X^i,[H,X^j]] = \frac{\hbar^2}{M} g^{ij}, \qquad (53)$$

其中 g^{ij} 是用这些坐标表示的逆度规。特别是，式（1）的笛卡尔形式，$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + [\mathrm{d}z + \Omega g(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)]^2$, 给出 $g^{xx} = g^{yy} = 1$ 和 $g^{zz} = 1 + \Omega_g^2 r^2$。束缚态谱的完备性意味着纵向偶极求和规则

$$S_z(i) := \frac{2M}{\hbar^2}\sum_f (E_f - E_i)|\langle f|z|i\rangle|^2 = 1 + \Omega_g^2\langle i|r^2|i\rangle. \qquad (54)$$

同样 $S_x(i) = S_y(i) = 1$。方程（54）是标量度规哈密顿量的一个恒等式。只有在同时实现这一动能算符和坐标偶极耦合的系统中，才能对其进行检验。

轴向坐标 z 独立于 ϕ，因此轴向偏振严格满足 $\Delta m = 0$。在零扭转时，其矩阵元连接相反的狄利克雷宇称：

$$\langle\chi_p|z|\chi_n\rangle = \begin{cases} -\dfrac{8Lpn}{\pi^2(p^2-n^2)^2}, & p\neq n,\quad p+n \text{ odd},\\ 0, & p+n \text{ even}, \end{cases} \qquad (55)$$

，相对于 z 盒中心测量。式（23）中的扭转诱导混合会在这些本征态之间重新分配振子强度。圆偏振偶极 $x \pm \mathrm{i}\,y = re^{\pm \mathrm{i}\phi}$满足 $\Delta m = \pm 1$ 并且在零扭转时保持轴向指标不变。检验这些关系不需要任何轨道劈裂。

表 III. 电流分量的相对内部误差，式（52），相对于规范适配参考（28，32），以及最低 $m=1$ 能量。该 z 项指坐标电流 J^z。均匀 121×121 网格，取值范围为 $\mathcal{I}$。

(N_r,N_z)	ϵ_{J^r}	$\epsilon_{J_{\hat{\phi}}}$	ϵ_{J^z}	E (毫电子伏)
（8，10）	5.966×10^{-3}	7.12×10^{-5}	6.423×10^{-3}	2.696325098
(12,16)	3.308×10^{-3}	1.56×10^{-5}	2.489×10^{-3}	2.696325007
(20,24)	1.527×10^{-3}	3.09×10^{-6}	7.066×10^{-4}	2.696324993
(24,28)	1.212×10^{-3}	1.99×10^{-6}	4.816×10^{-4}	2.696324992

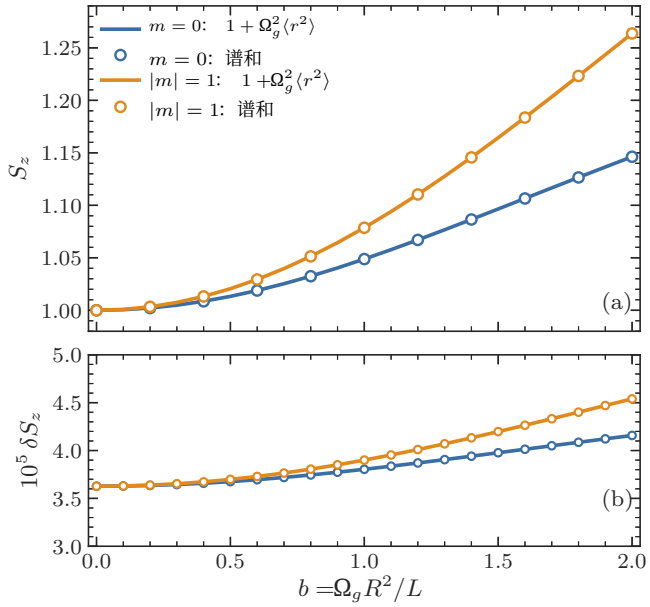

图 10。（a）在 $a=2$ 处，$m=0$ 和 $|m|=1$ 扇区中最低态的纵向偶极求和规则：双重对易子值 $1+\Omega_g^2\langle r^2\rangle$（线条），以及在 $(N_r,\ N_z)$ 基（14，30）上对所有态求得的谱和（圆圈）。（b）低于 5×10^{-5} 的亏损$\delta S_z=1+\Omega_g^2\langle r^2\rangle-S_z$，由截断的高能尾部造成。

B. 同轨道反交叉与三次几何能隙

狄利克雷哈密顿量在 m 中呈块对角形式，但在轴向指标上并非如此，因此具有相同对称性的能级之间 [86] 可以在固定的 m扇区内发生避免交叉，同时仍然满足 $E_m=E_{-m}$。非零 D_{pn} 本身不会在具有不同径向指标的态之间产生一阶能隙：原始基底的 b 阶项在径向指标上是对角的，因此当径向指标不同时，其矩阵元为零，即使轴向宇称相反也是如此。此时需要进行更高阶的简并展开。

考虑具有无量纲参数 $a=R/L$ 和 $b=\Omega_g R^2/L$（见式（22））的正扭转有限圆柱。在未扰动的 $|m|=1$ 谱中，两个态 $A=(s,\ n)=(1,\ 2)$ 和 $B=(2,\ 1)$ 在

$$a_0=\left[\frac{j_{1,2}^2-j_{1,1}^2}{3\pi^2}\right]^{1/2}=1.080011976\ldots,\qquad E_A^{(0)}=E_B^{(0)}. \tag{56}$$

规范适配形式（35）直接展示了它们耦合的阶数。当 $x=r/R$，$\zeta=(z+L/2)/L$，且$q_m(x)=mb/(a^2+b^2x^2)$ 时，其径向联络的展开为

$$q_m'(x)=-\frac{2mb^3}{a^4}x+O(b^5). \tag{57}$$

设 $\mathcal{B}_s(x)=\mathcal{B}_{1s}(x)$ 表示单位归一化的无量纲径向贝塞尔函数，并令 $s_n(\zeta)=\sqrt{2}\sin(n\pi\zeta)$ 以及 $Z_{pn}=\int_0^1 s_p(\zeta)\,(\zeta-1/2)\,s_n(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$。对于交叉态对，变换后的基底中首个非零的直接非对角元为

$$\frac{\langle A|H_m^{(\mathrm{gauge})}|B\rangle}{E_R}=\mathrm{i}b^3C_{AB}+O(b^5),$$
$$C_{AB}=-\frac{2m}{a_0^4}Z_{21}\int_0^1 x^2(\mathcal{B}_1'\mathcal{B}_2-\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2')\,\mathrm{d}x,\qquad Z_{21}=-\frac{16}{9\pi^2}. \tag{58}$$

涉及 $O(b^2)$ 径向项的间接贡献只有在三阶以上才会进入非对角元，因为该项保持 n 不变。对角位移将交叉点移至

$$a_*^2(b)=a_0^2-\frac{b^2}{3}+O(b^4), \tag{59}$$

其中我们对每个径向模态都使用了 $\langle x^2\rangle_{|m|=1,\ s}=1/3$。在固定 b 时，对该对能级关于 a 的能级间距取最小值，可得避免交叉 [86]，其三次能隙为

$$\frac{\Delta_{\mathrm{gap}}(b)}{E_R}=2|C_{AB}|\,|b|^3+O(|b|^5)=1.6487752187\ldots\,|b|^3+O(|b|^5). \tag{60}$$

该系数可由一维贝塞尔积分得到，无需进行对角化，并且各扇区 $m=\pm1$具有相同的能隙。对于 $m=0$，轴向模态会精确分离，不同 n的态保持不耦合，真正的

表 IV. $m=1$ 扇区中最低的避免交叉间隙，在固定 a 时取最小值 b（规范适配基，$(N_r,N_z)=(24,32)$）。当 $b\to 0$ 最小值移至 a_0 方程（56）的E_R 方程（45）的能量；固定 R时，保持 b 不变而改变 a 需要 $\Omega_g=b/(aR)$ 。

b	a_*	$\Delta_{\rm gap}$(毫电子伏)	$\Delta_{\rm gap}/[2E_R\lvert C_{AB}\rvert b^3]$
0.12	1.077792	0.00011794	0.99959
0.30	1.066229	0.00183816	0.99707
0.60	1.026254	0.01450435	0.98344
0.80	0.987246	0.03363582	0.96213
1.30	0.866195	0.12559338	0.83722

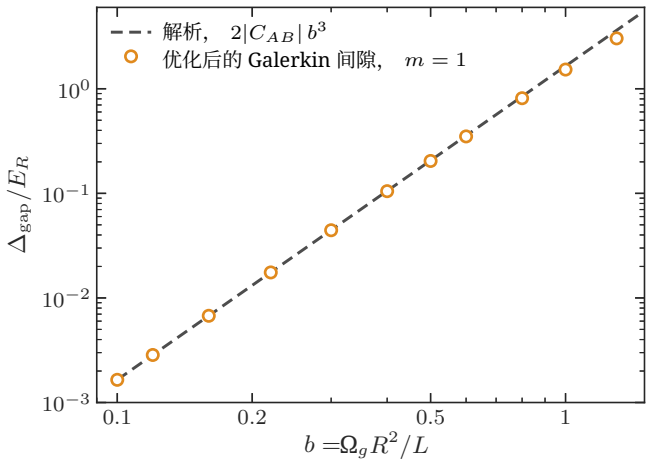

图 11. 伽辽金矩阵（圆圈）与三次定律（60）（虚线）给出的最小化 $m=1$ 间隙。相对差异为 4.1×10^{-4}，在 $b=0.12$ 处，并随 b 增大，因为更高阶项开始发挥作用。间隙以固定尺度 E_R为单位。

交叉在调节长宽比时仍可能存在。三次定律指的是这一孤立的径向–轴向交叉，以及上文所述的弱扭转扫描；其他共振则需要单独分析。

在一个孤立共振处，两个特征向量会交换其径向–轴向特性，而由其中一个分支承载的轴向偶极强度则转移到另一个分支。图 12展示了从最低 $m=1$ 态到第二和第三 $m=1$能级的能量和振子强度，这些结果由完整的规范适配特征向量计算得出，未采用二能级约化。在此例中， $b=1.3$，理想标量腔体的最小间隙为 0.12559 毫电子伏。

C. 圆偏振选择定则与激活跃迁

旋转不变性给出了在任意扭转下均成立的方位角选择定则：

$$z:\quad \Delta m=0;\qquad d_\pm=x\pm \mathrm{i}y=re^{\pm\mathrm{i}\phi}:\quad \Delta m=\pm1. \tag{61}$$

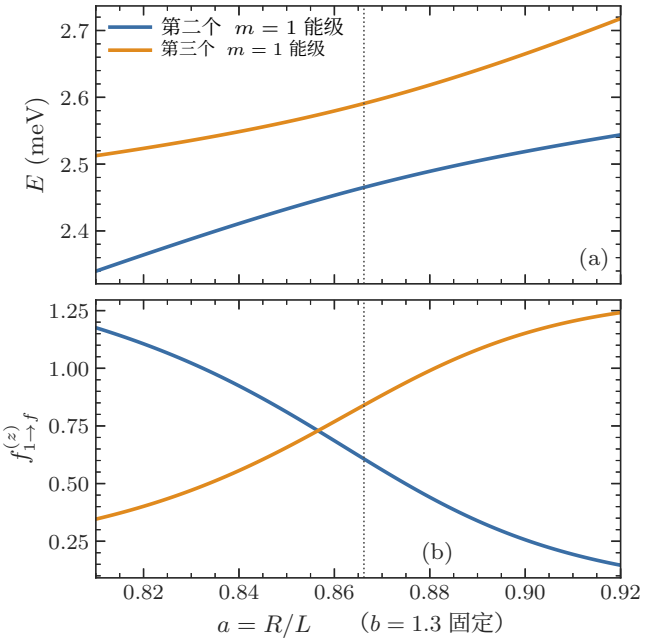

图 12. 在固定 $m=1$ 扇区中，随着长宽比 $b=1.3$ 变化时的避免交叉（ $a=R/L$ $\Omega_g=b/(aR)$ ）。(a) 第二和第三能级。(b) 从最低 $f^{(z)}=(E_f-E_i)|\langle f|z|i\rangle|^2/(E_R R^2)$态跃迁到这些能级的纵向振子强度，见式（62）。点线标示能隙最小值，$a_*=0.866195$。

在 $b=0$ 处，横向算符 $d_\pm$ 也守恒轴向指标 n，而中心偶极 z 连接轴向宇称相反的态。当 b 有限时，本征态会混合轴向与径向模式，这些附加定则便不再成立。我们用无量纲强度来表征这些跃迁：

$$\begin{aligned} f^{(z)}_{if}&=\frac{2M(E_f-E_i)}{\hbar^2}|\langle f|z|i\rangle|^2,\\ f^{(\pm)}_{if}&=\frac{2M(E_f-E_i)}{\hbar^2}|\langle f|d_\pm|i\rangle|^2. \end{aligned} \tag{62}$$

这里 $d_\pm$ 是未归一化的圆坐标；采用单位圆偏振矢量时，由于矢量带有因子 $1/\sqrt{2}$，振子强度减半。跃迁到较高能级时，振子强度非负。

取非简并的 $m=0$ 基态作为初态。在零扭转时， d_+ 激发态 $m=1$ （s， n） =(1， 1)，但不激发态 s， n） =(1， 2)。在规范适配表示中，矩阵元包含相对相位

$$\begin{aligned} &\langle f,m+1|d_+|i,m\rangle\\ &\sim\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}\zeta\, v_f^*(x,\zeta)v_i(x,\zeta)\\ &\quad\times\exp\left[-\frac{\mathrm{i}b(\zeta-1/2)}{a^2+b^2x^2}\right]. \end{aligned} \tag{63}$$

其中 ∼仅省略了归一化因子。在弱扭转下，相位的线性项耦合相反的轴向宇称

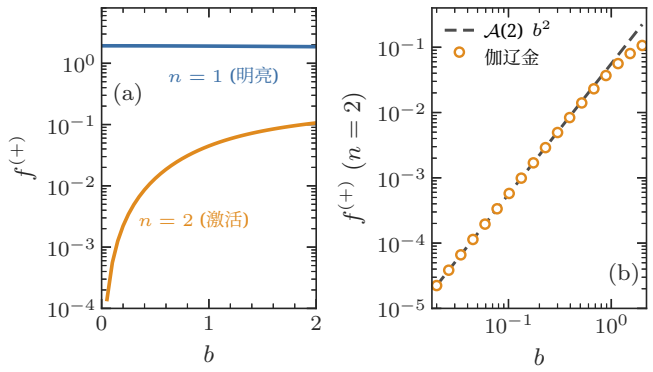

图 13. (a) 从基态到在零扭转时与（s，n）=(1，1)（明亮）和（1，2)（激活）相连的 $m = 1$ 能级的圆偏振偶极强度 $f^{(+)}$，在 $a = 2$ 处。(b) 在小 b 下，激活强度（圆圈）遵循 $\mathcal{A}(2)b^2$（虚线）。采用（N_r，N_z）=(14，20)的贝塞尔–正弦基。

通过 Z_{pn}，得到的振幅与 b成正比，并且

$$f^{(+)}_{0\to(1,2)}(b) = \mathcal{A}(a)\, b^2 + O(b^4),$$
$$\mathcal{A}(2) = 0.0559408010\ldots. \tag{64}$$

系数 $\mathcal{A}$（a）可由贝塞尔–正弦基中的常规微扰理论表示为一个径向重叠（附录B 4）；对于 $a = 2$，其值为 0。0559408010…，采用方程（62）的约定。激活强度无法区分 $m = +1$ 和 $m = -1$：由 d_- 激发的谱线与 d_+ 谱线简并，并且对于 $m = 0$ 初态具有相同的强度。

对于参数（45）（$a = b = 2$），无量纲圆偏振强度为 $f_+^{\text{bright}} = 1.86328$和 $f_{\text{激活+}}$ =0。10637，对应的激发能分别为 0。53091 毫电子伏和 6。42102 毫电子伏。它们的比值约为 5。71%，在 $b = 0$ 处消失；在 $b = 0.15$ 和 0。30 处，激活强度分别为 0。001252 和 0。004932，与二次起始规律相符。

圆偏振偶极还满足第二个精确求和规则。对于 $m = 0$ 初态，旋转不变性和时间反演使这些求和结果 $m_f = +1$ 和 $m_f = -1$ 相等，结合 $[x,[H,x]] = \hbar^2/M$、$[y,[H,y]] = \hbar^2/M$和$[x,[H,y]] = 0$ 可得

$$S_+(i) = \frac{2M}{\hbar^2} \sum_{f:\, m_f=+1} (E_f - E_i) \times |\langle f|x + \mathrm{i}y|i, m_i = 0\rangle|^2 = 2,$$
$$S_-(i) = 2. \tag{65}$$

因子 2 源于 $x + \mathrm{i}y$ 约定。我们在未变换的贝塞尔–正弦基中，使用完整的截断本征系统核验了式（65）。对于（N_r, N_z）=(16,24) 圆周求和结果为 1。在 $b = 0$ 处为 999932，在。在 $b = 2$处为 999986；亏损来自截断的径向基。两种基在激活谱线上也一致：在 $b = 2$ 处为 0。10637098（未变换），在（14。22）处为 0.10637081（规范适配）；因此，该效应既不依赖相位约定，也不依赖截断。

展宽后的模型谱可写为

$$\mathscr{S}_+(\varepsilon) = \sum_f f_{if}^{(+)} \frac{\gamma^2}{(\varepsilon - E_f + E_i)^2 + \gamma^2}. \tag{66}$$

例如，当 $\gamma = 0.055$ 毫电子伏时，激活谱线可以分辨出来。宽度 γ 是人为设定的，并非源自声子、无序或辐射计算；方程（66）无法预测绝对吸收。

VII. 物理实现与推广

这里我们探讨真实结构需要满足哪些条件才能符合该模型，以及放宽模型假设后会发生哪些变化。第VIIA 节给出了实现物理实现的条件，以及可用于探测第VI节所述效应的测量方法。第VIIB 节讨论其他轴向边界条件、沿轴变化的扭转以及各向异性横截面。

A. 物理实现的条件与实验测试

标量动能模型并不描述机械扭转的圆柱体或薄的卷曲壳层。薄半导体层中的电子受表面曲率、应变、自旋轨道项和能带偏移支配，并不一定会经历本文所使用的三维逆度量。要实现该模型，必须改为重现式（ H 5）本身的有效动能算符。

对于常数 Ω_g，将度规写成笛卡尔坐标 [47, 48] 下的 $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + [\mathrm{d}z + \Omega_g(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)]^2$。其逆矩阵和行列式分别为

$$g^{ij}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Omega_g y \\ 0 & 1 & -\Omega_g x \\ \Omega_g y & -\Omega_g x & 1 + \Omega_g^2(x^2 + y^2) \end{pmatrix}, \qquad \det g^{ij} = 1. \tag{67}$$

因此，具有散度形式的标量有效动能 [79–82]

$$H_{\text{eff}} = -\frac{\hbar^2}{2} \sum_{i,j} \partial_i \big[(M^{-1})^{ij}(\mathbf{x})\partial_j\big], \qquad (M^{-1})^{ij} = M^{-1} g^{ij}(\mathbf{x}). \tag{68}$$

采用相匹配的边界条件，可重现笛卡尔坐标下的拉普拉斯–贝尔特拉米模型，因为 $\sqrt{g} = 1$。逆质量矩阵是对称正定的。要重现该矩阵，包括混合的 xz和 yz 项以及算符排序 [79, 80]，，要求远高于仅仅构造一种螺旋形状。对于电子纳米卷， $k{\cdot}p$ 或原子级计算必须确定这一张量 [81] 并估算

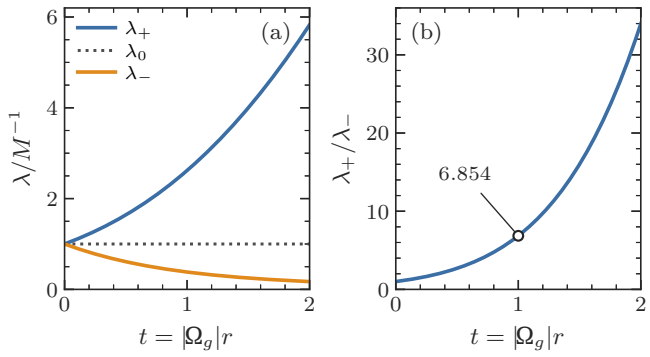

图14。（a）重现螺旋运动算符所需的逆质量张量主值，以 M^{-1} 为单位；（b）其比值

$$\lambda_+/\lambda_- \qquad t = \text{随 } \Omega_g r$$

的变化。这些是模拟模拟器必须实现的数值；它们不是材料参数。

额外的曲率、应变、自旋–轨道和界面项；我们并未尝试进行这样的推导。

无需借助坐标即可看出，这一要求并非显而易见。该一形式

$$\beta = \mathrm{d}z + \Omega_g(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x), \qquad \mathrm{d}\beta = 2\Omega_g\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \tag{69}$$

在均匀扭转非零时并非闭合，因此也不是恰当形式。结合 $\mathcal{R} = -2\Omega_g^2 \neq 0$，这意味着对均匀各向同性质量张量作任何坐标变换，都无法得到标量度量。在局部正交柱坐标基底中，逆质量的主值以 M^{-1} 为单位，分别为

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1, \\ \lambda_\pm &= 1 + \frac{t^2}{2} \pm \frac{t}{2}\sqrt{t^2+4}, \qquad t = |\Omega_g| r, \\ \lambda_+\lambda_- &= 1. \end{aligned} \tag{70}$$

对于 $|\Omega_g| R = 1$，壁面处极端主值之比为 $\lambda_+/\lambda_- \simeq 6.8541$，且主轴会绕圆柱体旋转。方程（45）中的半导体参数仅用于说明有效质量尺度；它们并非根据弯曲纳米卷的能带结构推导而来。

有限势垒也不同于狄利克雷模型。对于包络哈密顿量 $H = -\frac{\hbar^2}{2}\partial_i[A^{ij}(\mathbf{x})\partial_j] + V$，在这种散度型模型的理想界面处，电流守恒要求包络函数及其$n_i A^{ij}\partial_j\psi$连续。对于螺旋张量，轴向余法向导数为 $(1+\Omega_g^2 r^2)\partial_z - \Omega_g\partial_\phi$。此规则适用于本文讨论的单带算符；原子尺度突变的多带异质结则需要另行处理[82, 83]。自旋轨道项也可能混合轨道扇区；在时间反演不变自旋模型中，受保护的配对是克рамers对，不一定与本文采用的固定自旋 $\pm m$ 态相同。这些项的大小会影响下文的可观测量。采用参考文献 [87], 中的拉什巴参数 $\alpha_R \approx 3\times10^{-12}\,\mathrm{eV\ m}$，并且同时考虑到 α_R 砷化铟量子阱中的拉什巴参数取决于栅极电压和量子阱设计 [93], 能级劈裂 $2\alpha_R k$ 为 0。075 毫电子伏，对应 $k = 1/\ell_{\mathrm{ho}}$；对于 。19 毫电子伏，对应 $k = \pi/L$。这超过了 $E_R = 0.041$ 毫电子伏，且与表 IV中的所有反交叉能隙相当或更大，因此在砷化铟结构中确认第 VIB 节所述的反交叉之前，需要采用自旋处理。

实验可以检验的预测包括$m \leftrightarrow -m$ 配对、磁化率随长宽比变化时的零点、通过重新调节长宽比获得的三次反交叉，以及轴向和横向偶极强度的重新分配。在远红外区域，横向受限电子的带内跃迁已通过磁光谱学得到分辨 [84]。表V 列出了参数（45）对应的能量。绝对吸收、线宽、无序、接触泄漏和制造公差需要借助微观模型才能确定。可编程晶格或电网络可以近似实现该算符的离散版本，但映射到矩形网格并不会自动保留圆柱体的角动量选择定则；这将留待未来研究。

参考文献 [87] 提出了三个实验系统，并给出了表 1 中的参数范围。表VI以控制修正模型的物理量重新表述了这些参数。对于电子纳米卷，能标可达到亚毫电子伏范围，但实现它还需要式（67）中的逆质量张量以及螺旋形状。对于光子波导，傍轴方程（78）确定了一个谐振长度 $\ell = (\kappa|\Omega_g|)^{-1/2}$，以及 $|\Omega_g| L$ 为 50–2000 弧度的旋转角。对于超冷原子，我们不知道有哪种方案能够将该度规施加于原子运动；如果找到这样的方案，则对于 E_R/h为 $R = 30$–$50\,\mu$m 的情况，腔尺度对两种原子 ^{87}Rb 和 ^{6}Li 均会低于 1 Hz。

文献 [87] 中提出的探测方案也必须重新解读。通过隧穿、远红外吸收或光致发光对离散能级进行光谱学测量，无法在封闭腔体中观测到 $\pm m$ 二重态，因为定理 III.1排除了这种情况；但可以观测到表 V中的谱线和反交叉。对持久电流进行磁力测量，在平衡态下不会产生信号，因为系综电流为零；要产生信号，必须制备一个具有确定 m的态，其符号由方程（50）确定。在传播扇区中，环流的符号与 $-\Omega_g k$的符号相同，见方程（12），因此它会随轴向流反向。在光子结构中，根据方程（78），中心输入的轨道角动量谱守恒；可测量的特征是光束呼吸，以及第 VIIIA节讨论的非轴对称图样旋转，后者受该节所述参考系依赖性的影响。

B. 轴向边界拓扑、相与非均匀扭转

上述结果假设采用狄利克雷壁、恒定扭转和圆形横截面。以下三种情况

表V。跃迁和反交叉能量及频率 E/h 对于公式（45）的有效质量尺度。反交叉值来自表a、 b）中的扫描结果IV ，所涉及的腔体不同于两个圆偏振跃迁所对应的腔体。

跃迁	能量（毫电子伏）	频率（太赫兹）
明亮圆偏振态 $m=0\to+1$, $a=b=2$	0.53091	0.12837
激活圆偏振态 $m=0\to+1$, $a=b=2$	6.42102	1.55260
反交叉 $b=0.8$ 在优化的 a处	0.03364	0.00813
反交叉 $b=1.3$ 于优化的 a	0.12559	0.03037

表 VI. 参考文献中表 $\hbar^2/\,2MR^2$ $M=0.023m_e$ 1 $\hbar\omega_c$ [87], E_R = 的实验系统与参数范围，针对修正模型重新表述。（），对于纳米卷，为腔尺度以及行波态的回旋能，其中 $k=\pi/L$； $\ell=(\kappa|\Omega_g|)^{-1/2}$ 为式（78）在 $\lambda_0=1.55\,\mu$m 与 $n_0=1.45$ 下的谐振长度。对于光子情形， L 为传播长度，不涉及封闭腔体。

系统	R	L	Ω_g (m^{-1})	$b=\Omega_gR^2/L$	$\lvert\Omega_g\rvert R$ 修正模型中的尺度
纳米卷	0.2–0.5 μ米	0.1–2 μ米	10^6–10^7	0.02–25	0.2–5 $E_R=6.6$–$41\,\mu$eV； $\hbar\omega_c=0.010$–2.1 毫电子伏
光子学	20–50 μ米	5–20 毫米	10^4–10^5	—	0.2–5 $\ell=1.3$–$4.1\,\mu$米；转速 $\lvert\Omega_g\rvert L=50$–2000 弧度
冷原子	30–50 μ米	0.5–1 毫米	10^5–10^6	0.09–5	3–50 目前尚无已知实现； $E_R/h=0.02$–0.07 赫兹（^{87}Rb），0.3–0.9 赫兹（^{6}Li）

每次放宽一个假设。

1. *Periodic and phase-twisted conditions*

对于周期轴， $\chi_j(z)=L^{-1/2}e^{\mathrm{i}k_jz}$ with $k_j=2\pi j/L$ and $j\in\mathbb{Z}$，第 II B 节中的行波解仍适用。在非零 k_j 固定时， $+m$ 和 $-m$的能量不同，但时间反演伙伴（$-m,-k_j$）也属于该谱。扭曲边界条件 $\Psi(z+L)=e^{\mathrm{i}\theta}\Psi(z)$ 会使 $k_j=(2\pi j+\theta)/L$发生偏移，而时间反演会将其映射为相位为 $-\theta$ 的问题。除非同时反转外加磁通，否则只有 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 在模 2π意义下保持不变。一般相位是一个额外的物理要素，并非由度规所决定。这消除了行波的 m 不对称性与硬壁腔中的配对之间表面上的矛盾。

2. *Axially dependent metric twist*

该模型可推广到一形式中的实光滑函数 $\Omega_g(z)$，如式（1）所示。行列式仍为 $g=r^2$，而拉普拉斯–贝尔特拉米算子变为

$$\begin{aligned}\Delta_{\Omega_g(z)}=&\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r)+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2\\&+(1+\Omega_g(z)^2r^2)\partial_z^2\\&+2\Omega_g(z)\Omega_g'(z)r^2\partial_z\\&-2\Omega_g(z)\partial_\phi\partial_z-\Omega_g'(z)\partial_\phi.\end{aligned}\tag{71}$$

含有 ∂_ϕ 的项包含对称排序的轴向导数 $2\Omega_g\partial_z+\Omega_g'$，其在任意实硬壁模态 χ_n 中的对角元均为零：

$$\int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}z\,\chi_n(2\Omega_g\partial_z+\Omega_g')\chi_n=\left[\Omega_g(z)\chi_n^2(z)\right]_{-L/2}^{L/2}=0.\tag{72}$$

该算符仍为实算符，因此定理III.1 对于旋转对称边界仍然成立。由于轴向系数现在同时依赖于 $m=0$ 扇区（第IIIC节），该扇区的能级间距不再保持，因为轴向系数现在同时依赖于 r 和 z。出于同样的原因，均匀扭转公式也无法通过代入轴向平均扭转 Ω_g来推广，正如文献 [87]中所做的那样。

在数值处理中，我们设定 $\zeta=(z+L/2)/L$、$b(\zeta)=R^2\Omega_g(z)/L$，以及 $s_n(\zeta)=\sqrt{2}\sin(n\pi\zeta)$。无量纲轴向矩阵为

$$\begin{aligned}V_{pn}&=\int_0^1\mathrm{d}\zeta\,b(\zeta)^2s_p'(\zeta)s_n'(\zeta),\\C_{pn}&=\int_0^1\mathrm{d}\zeta\,s_p(\zeta)\left[2b(\zeta)s_n'(\zeta)+b'(\zeta)s_n(\zeta)\right],\end{aligned}\tag{73}$$

其中 $V_{pn}=V_{np}$ 和 $C_{pn}=-C_{np}$。完整的伽辽金算符为

$$\begin{aligned}\frac{H_m[\Omega_g(z)]}{E_R}&=\mathrm{diag}(j_{|m|s}^2)\otimes I_z\\&+I_r\otimes\mathrm{diag}[(a\pi n)^2]\\&+X^{(|m|)}\otimes V+\mathrm{i}mI_r\otimes C.\end{aligned}\tag{74}$$

方程（74）保留了所有 $\Omega_g'(z)$ 和 $\Omega_g(z)^2$ 在基中的贡献，并在恒定扭转下化简为方程（23）。例如，我们取

$$\Omega_g(z)=\Omega_{g,0}\left[1+\eta\cos\left(\frac{2\pi(z+L/2)}{L}\right)\right],\quad|\eta|\le0.65.\tag{75}$$

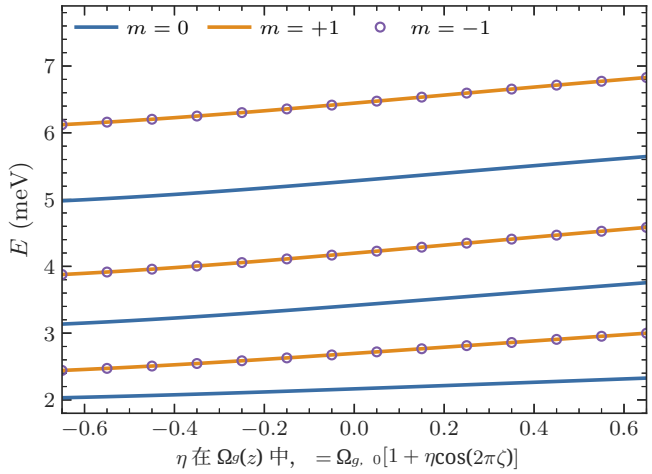

图15。非均匀扭转（75）下的最低三个能级，在$a = b_0 = 2$、扇区 $m = 0$和 $m = +1$（线）以及$m = -1$（圆点）中，根据公式（74），其中（N_r，N_z）=（12、18）。矩阵包含 b（ζ）^{2} 以及对称排序导数$2b\partial_\zeta + b'$。

在 $a = b_0 = 2$处，当 $b_0 = \Omega_{g,0}R^2/L$ 时，最低的 m =0 能量从 $\eta = -0.65$ 处的 2.03225 毫电子伏变为 $\eta = +0.65$处的 2.32663 毫电子伏，而 $|m| = 1$ 对从 2.44127 毫电子伏变为 2.99904 毫电子伏，同时仍保持简并。这些数值是在 (N_r, N_z) = (12, 18) 下获得的；将基扩大到 (24, 48) 后，这些数值的变化小于1×10^{-5} 毫电子伏。图 15 显示了能级随η的变化。

3. *Anisotropic cross section*

文献 [87] 还考察了横向各向异性，$r^2\mathrm{d}\phi^2 \to r^2[1 + \delta a(\phi,\ z)]\mathrm{d}\phi^2$。这样的项使算符保持实数形式，因此谱仍具有时间反演不变性，但它破坏了旋转不变性，m 不再守恒。分量 $\delta a \propto \cos 2\phi$ 直接将 $m = +1$耦合到 $m = -1$，因此 $|m| = 1$二重态在 δa的一阶处发生分裂；更高的二重态则在更高阶或通过其他傅里叶分量发生分裂。由于算符为实数，分裂本征态可以选为实函数，其形式为 $\cos\phi$ 和 $\sin\phi$ 乘以实函数，并且不携带电流。各向异性可以使封闭腔体的 $\pm m$ 对发生分裂，而不会产生手性电流。

VIII. 讨论

我们以光学类比和先前的文章作结。傍轴光学模型在第VIIIA节中加以考察。第VIIIB 节总结了谱区间以及各区间中可测量的内容，第VIIIC 节将本文结果与参考文献 [87]。

A. 光学模型的一致性

参考文献 [87] 的光学部分针对标量傍轴包络使用了有效算符

$$H_{\mathrm{opt}} = -\frac{1}{2\kappa}\nabla_\perp^2 - \frac{\Omega_g^2 r^2}{2\kappa}\partial_\phi^2, \qquad \kappa = k_0 n_0. \tag{76}$$

由于 $[\Omega_g]$ =length^{-1} 是方程（76）中的第二个系数，其量纲为长度，而 $\mathrm{i}\partial_z\psi = H_{\mathrm{opt}}\psi$ 要求量纲为长度的倒数。按目前的印刷形式，方程（76）在量纲上并不一致，除非另行指定一个尺度。

除此之外，任何这种形式的旋转不变算子都会守恒光束的轨道角动量 [71]，

$$[H_{\mathrm{opt}}, -\mathrm{i}\partial_\phi] = 0. \tag{77}$$

中心高斯分布只包含 $m = 0$，并且在任何旋转对称演化下都保持在该扇区内，包括使用旋转对称吸收掩模的情况。在整个此类演化过程中，$\partial_\phi^2\psi = 0$，因此方程（76）的扭转项作用于其上为零。由此，针对中心高斯输入所报告的大量 $m \neq 0$ 输出权重不可能来自所述算符和边界数据，而光学图形也没有为封闭圆柱所提出的谱提供支持。参考文献 [87]中所引用的模拟参数在其第 5 节正文与图 6 和图 9 的图注之间也存在差异（束腰、窗口、网格和传播长度），并且其中第 5 节所述运行的扭转率并未给出。

一致的弯曲空间标量波模型则从（$\Delta_g + \kappa^2$）$\Phi = 0$出发，并采用式（5）的空间算符。即便如此，$[\Delta_g, \partial_\phi] = 0$对于恒定的 Ω_g，因此轴对称系数无法赋予轴对称输入角动量。

写成 $\Phi = \psi\, e^{\mathrm{i}\kappa z}$，并忽略 $\partial_z^2\psi$、$\partial_\phi\partial_z\psi$ 和 $\Omega_g^2 r^2\partial_z\psi$；这假设包络函数缓慢变化，且光束横截面上 $|\Omega_g|r \ll 1$，从而得到参考文献 [77], 中傍轴方程的轨道部分

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\partial_z\psi &= -\frac{1}{2\kappa}\nabla_\perp^2\psi + \frac{\kappa\Omega_g^2 r^2}{2}\psi - \Omega_g\hat{L}_z\psi,\\ \hat{L}_z &= -\mathrm{i}\partial_\phi.\end{aligned} \tag{78}$$

每一项的量纲都是长度的倒数。右端等于 $(2\kappa)^{-1}(-\mathrm{i}\nabla_\perp - \mathrm{A})^2\psi$，其中 A =$\kappa\Omega_g(-y, x)$；这就是第 II B 节中的朗道问题，只是将 k 替换为 κ；一种相关的类泡利方程描述了随扭转旋转的参考系中的扭转光子晶体光纤 [94]。在该度规下，从最小耦合的麦克斯韦理论出发，在最低傍轴阶可得到相同的轨道算符，只需以真空波数替代 κ，此外还有与之对易的螺旋度项 $-\Omega_g\sigma_3$；刚性旋转 $-\Omega_g z$ 和式（79）的呼吸定律则由参考文献 [77]中的矢量ˆ方程推导得出。式（76）中没有的项 $-\Omega_g L_z$与生成元的其余部分对易，并且

使横向图样刚性地旋转角度 $-\Omega_g z$，而二次项则将光束限制在长度为 $\ell = (\kappa|\Omega_g|)^{-1/2}$的谐势阱中。由于生成元与 $\hat{} L_z$对易，式（78）并未改变由式（77）得出的结论。采用参考文献 [87] 中的图6参数（$\lambda_0 = 1.55\,\mu$m、$n_0 = 1.45$、$\Omega_g = 5.0 \times 10^4\,\mathrm{m}^{-1}$、传播长度 0.8 mm），$\ell \simeq 1.8\,\mu$m 小于输入束腰 $w_0 = 5\,\mu$m，且 $|\Omega_g|z$ 可达 40 rad，因此这两项在此处都不能视为小修正。由于 ϕ 是螺旋坐标的方位角，该旋转是相对于几何适配坐标系定义的。参考文献 [77] 讨论了矢量问题中的这种参考系依赖性，并指出实验室测量还需要在界面处进行匹配。

本研究重新检查了生成参考文献 [87]中光学图形的脚本，并独立重新实现了其中的算法（附录D2）。其中的图6和图7展示了未经任何传播而直接写下的模型场：$\psi = e^{-r^2/2\sigma^2} e^{24\mathrm{i}\phi}$，其中 $\sigma = 4\,\mu$m；以及环形场 $\psi = e^{-(r-R_0)^2/2w^2} e^{16\mathrm{i}\phi}$，其中 $R_0 = 15\,\mu$m和$w = 1.6\,\mu$m。在这两幅图中，两个面板都显示相同的强度，只是颜色标度不同，尽管图注描述的是输入高斯场和传播0.8 mm后的场。其中的图8给出了合成场的频谱，这些合成场是角谐波的叠加，其高斯权重以 $m = 22$ （体内）和 $m = 18$ （边缘）为中心，并带有随机相位，因此图中所示的 $\langle m \rangle$ 值是在输入中固定的。其中的图9中的玫瑰图源自自由衍射，并在每一步将网格刚性旋转$\Omega_g \Delta z$，在一个周期性窗口上计算；该窗口大小为 $80\,\mu$m，包含 800×800 个网格点，范围为5 mm（图注给出 500×500 个网格点和 10 mm）；文中未使用 V_{tw} 一词。参考文献 [87] 中的图6–9均不是其方程（25）–（27）的解。

同一组包含体态与边缘态情形的分步传播，其输出并未发表。它们采用参考文献 [87], 图6所述的网格，在距轴17至 $19\,\mu$m之间设置吸收层；对于边缘态情形，则采用半径为 $R_{\mathrm{edge}} = 12\,\mu$m、锥形过渡为 $1.6\,\mu$m的吸收内圆盘，该半径在该文中并未给出。它们的扭转步是使用所印 V_{tw}的前向欧拉更新，相对于自由衍射，场的改变小于 10^{-10} 。这对于中心输入$\psi = \exp(-r^2/w_0^2)$是预期之内的：对任意轴对称场 $\partial_\phi^2 \psi = 0$，因此式(76)中所印的 V_{tw} 在该输入及其自由演化上为零，所述方程对Ω_g的每一个取值都约化为自由傍轴衍射。瑞利长度在 $w_0 = 5\,\mu$m时为 $z_R = \kappa w_0^2/2 = 73.5\,\mu$m，在 $w_0 = 9\,\mu$m时为 $238\,\mu$m。在所述传播长度之后，自由光束半径对参考文献 [87] 的图6为 $54.7\,\mu$m（半窗 $20\,\mu$m），对其第5节的计算为 $378\,\mu$m（半窗 $125\,\mu$m），对其图9为 $681\,\mu$m（半窗 $40\,\mu$m；在脚本的5 mm之后为 $340\,\mu$m）。在体态分步传播计算中，输出是吸收器与周期网格所留下的部分；在边缘态计算中，内圆盘留下输入功率的 3×10^{-13}。吸收圆盘在不发生反射的情况下移除功率，无法产生朗道问题的边缘态，而这需要反射边界。玫瑰图脚本没有吸收器，因此衍射光束会绕回周期窗口；在$\Omega_g = 0$ 时，绕回强度的角平均在 10^{-6} 量级呈四重星形，即该处图9（a）分图的形状 [图17(a)]。在$\Omega_g = 100$、200和300 m^{-1} 时，该脚本给出该图（b）–（d）分图的形状 [图17(b)–(d)]。自由衍射与旋转对易，因此在连续体中，该方案给出旋转角度为$\Omega_g z$的自由光束；对于轴对称输入，这就是自由光束本身，四幅图本应重合。在网格上，$\Omega_g \neq 0$ 的图与$\Omega_g = 0$ 的图相差26%、34%和73%（相对均方根差），并与采用相同插值、按总角度$\Omega_g z$ 一次性旋转后的自由光束相差47–65%。若旋转角不是 $\pi/2$ 的整数倍，就不能把方形网格上的周期场映射到另一个这样的场上，因此一旦光束绕回窗口，在5000步的每一步重复进行的插值旋转便不再相当于光束的旋转。参考文献 [87] 图9中的图案序列来自这一过程。即使对于严格轴对称的场，方形窗口角向分箱上的平均也依赖于角度，因为每个分箱的径向范围依赖于角度，并且其中包含方形的4、8、12……次谐波[图16(c)]。此类图中的四重与八重图案并不表明场的角向成分发生了变化。中心输入的轨道角动量谱在任何轴对称算符和掩模作用下都保持为 $S_m = \delta_{m0}$，而镜面对称离散化给出 $\langle m \rangle = 0$。

根据式（78），相同的输入会呈现不同的行为。轴对称高斯仍保持高斯形状，并在谐势阱中呼吸振荡，

$$w(z)^2 = w_0^2 \cos^2(\Omega_g z) + \frac{4\ell^4}{w_0^2} \sin^2(\Omega_g z), \qquad (79)$$

周期为 $\pi/|\Omega_g|$。对于文献 [87] 图6中的参数，w 在 5 和 $1.36\,\mu$m 之间振荡，周期为 $62.8\,\mu$m，并始终远离窗口 [图16(a)]的边界。基于精确因式分解 $(-\mathrm{i}\nabla_\perp - \mathbf{A})^2 = (p_x + \kappa\Omega_g y)^2 + (p_y - \kappa\Omega_g x)^2$ 并取 $p_j = -\mathrm{i}\partial_j$，对完整算符进行分步积分，在步长为 $0.2\,\mu$m 时对公式 (79) 的复现精度优于 $5 \times 10^{-4} w_0$ （采用已发表的 $1\,\mu$m 步长时精度也达到 $1.2 \times 10^{-2} w_0$），且保持 $1 - S_0 < 10^{-8}$。使用原始脚本中的掩模，公式 (78) 在 $z = 0.8$ mm 处给出 $w = 3.49\,\mu$m，与公式 (79) 一致；在体区情形下，外部吸收器不移除任何功率；在边缘情形下，受限光束位于吸收圆盘内部，最终仅剩 10^{-23} 的功率。一个宽度为 $\sqrt{2}\,\ell$、中心位于 x_0 的离轴相干态保持其宽度，其质心沿圆 $(x_0/2)(1 + \cos 2\Omega_g z, -\sin 2\Omega_g z)$ 运动，精度达到 $7 \times 10^{-4} x_0$；这就是朗道问题的回旋轨道 [图16(b)]。对于文献 [87] 图9中的参数以及 $\Omega_g = 100$、200、300 和 m^{-1}，$\ell = 41.2$、29.2 和 23.8 μm，最大光束半径 $2\ell^2/w_0$ 分别为 681、340 和 227 μm；经过 10 mm 后，半径分别为 573、309 和 32 μm。因此，对于这些计算，即使采用一致的帐篷方程，$80\,\mu$m 的窗口也太小了，甚至连一致的——

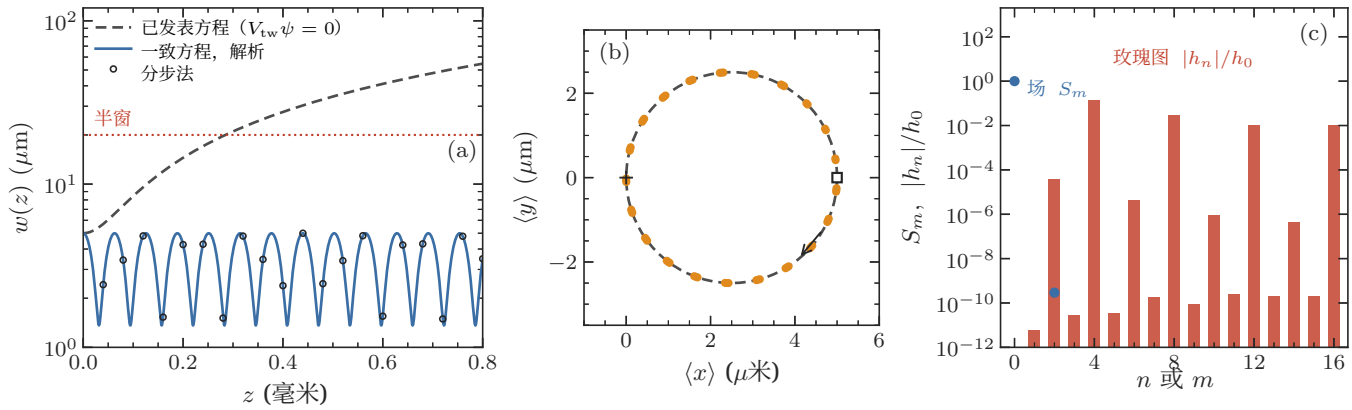

图16。对于参考文献 [87] 的图6所用参数的傍轴传播（$\lambda_0 = 1.55\,\mu$米、 $n_0 = 1.45$、$\Omega_g = 5\times10^4$ 米$^{-1}$、 $40\,\mu$米窗口、 600×600 网格）。（a）具有 $w_0 = 5\,\mu$米的中心高斯分布的光束半径：已发表的方程，对于此输入可化为自由衍射（虚线）；方程（79）（实线）；以及方程（78）的分步积分（圆圈）；点线表示半窗。（b）离轴相干态（$x_0 = 5\,\mu$米，宽度 $\sqrt{2\ell}$）在第一轨道上的质心（点）以及圆（$x_0/2$）（$1+\cos 2\Omega_g z$， $-\sin 2\Omega_g z$）（虚线）；方形标记起点，叉号表示轴。（c）对于（a）的输出场，其轨道角动量谱 S_m（点； $S_0 = 1-3\times10^{-9}$）以及在方形窗口的720个角向分箱上计算得到的玫瑰图谱波 $|h_n|/h_0$（条形）。

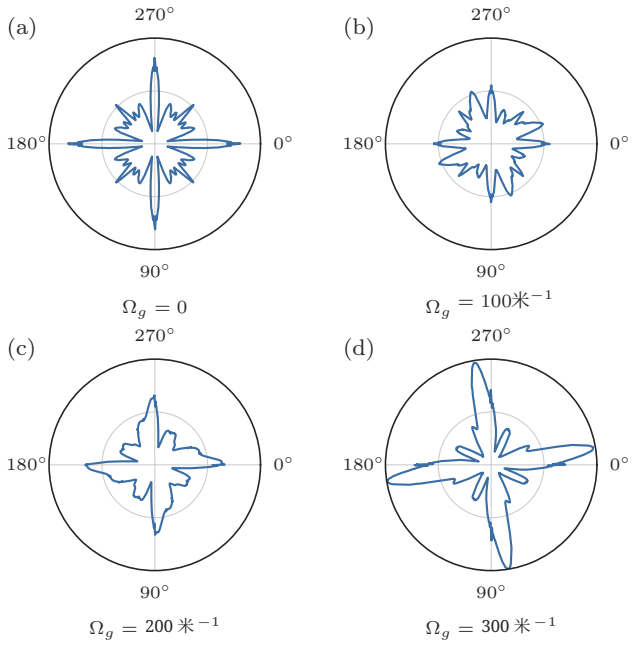

图17。在720个分箱上计算的输出强度角平均，采用参考文献 [87] 图9脚本中的程序：在5 mm范围内进行自由衍射，每一步将网格刚性旋转$\Omega_g\Delta z$，步长为 $\Delta z = 1\,\mu$m，使用具有 800×800 个点（$w_0 = 5\,\mu$m、 $\lambda_0 = 1.55\,\mu$m、 $n_0 = 1.45$）的周期性 $80\,\mu$m窗口。所有面板均以四者中的最大值进行归一化。对于这一轴对称输入，无论Ω_g取何值，连续体结果都是自由光束，其角平均与 ϕ无关。

性方程也不例外。对于轴对称高斯，文献 [87] 中的诊断量 $\eta_{\rm edge}$ 和 Λ 可由 $w(z)$ 推出，例如，在没有吸收器时为 $\Lambda = \exp\left[-2(0.8R)^2/w^2\right]$，且不携带任何超出式（79）之外的信息。

描述麦克斯韦传播还需要一个本构张量 [59, 62], ，用于处理偏振，并需要受控的前向传播近似，而这些都无法从量子哈密顿量中推导出来。因此，我们不再重复使用参考文献 [87], 中的光学图形，也不对光子手性作任何断言。

B. 谱区间与可观测后果

必须区分三种谱情形：具有选定轴向动量 k 的通道、同时包含 $\pm k$ 的周期性通道，以及具有驻波混合的狄利克雷腔。第一种在固定 k 下呈现 m 不对称性，第二种整体上通过时间反演成对，第三种则在每个 $|m|$ 扇区内严格成对。子带混合、能级移动和电流分布都与这种配对相容。

腔体模型的可观测后果包括有限半径磁化率（31）及其零点（33）、子带间跃迁规则（20）、三次能隙（60），以及偶极恒等式（54）和（65）；硬壁手性双重态不在其中。在可调系统中，可以测量随 R/L 变化的轨道分辨能量，利用 $\Delta m = 0$ 探测轴向跃迁，并利用 $\Delta m = \pm1$探测圆偏振跃迁，同时检验谱和是否遵循 $1+\Omega_g^2\langle r^2\rangle$。在半导体中，首先必须从应变、能带结构和限域推导出度规有效质量模型；此外，自旋–轨道耦合、塞曼场、接触自能和有限势垒还会引入可能改变这些结论的项。

同一 m 扇区内的反交叉及其伴随的偶极强度转移（第VI B 节和VIC节）从不会使时间反演对分裂。我们尚未讨论

开放引线散射、热占据、微观实现、现实的电磁模型或电网络实现。

C. 与2026年《光学与量子电子学》文章的关系

参考文献 [87]中的陈述、方程和图列于表VIII（附录C），并注明其在本文分析中的状态。凡是修正模型中有对应内容的定量陈述，均在表中所引章节重新推导。该表涵盖算子定义域错误，以及独立的量纲和归一化问题；已发表的光学图形是如何生成的，则在第VIIIA节中予以说明。参考文献 [77] 的第VII A节已经指出，参考文献 [87] 的硬壁版本需要对边界进行单独处理，$E(m) = E(-m)$ 对于有限圆柱也是如此，并且其光学部分必须重新分析。本文提供了这种处理。一位作者（E.O.S.）即参考文献 [87], 的唯一作者，已请求该期刊撤回该文。

IX. 结论

我们处理了包含轴向狄利克雷定义域的螺旋度规标量哈密顿量。轴向导数耦合真实的驻波子带，不能用固定的轴向波数替代。时间反演与旋转对称性共同排除了先前针对封闭腔体提出的 $+m$ 与 $-m$ 之间的能级劈裂。在无界轴或周期轴上的行波保留其固定-k 描述；这是一个有效场与$\Omega_g k$成正比的朗道问题，其中 m 不对称性就是顺磁项。

在有限径向约束下，首阶扭转修正会在临界长宽比处变号；而当半径无限大时，响应与 $|\Omega_g|$ 成线性关系。规范适配的变分形式与原始基底给出一致的谱和电流。在任何定态本征态中，每个横截面上的总轴向通量均为零，但局部环流可以存在。纵向和横向偶极求和规则可检验完整的子带间谱。

主要预言是：在一个 m 扇区内存在孤立的避免交叉，当重新调节长宽比时，其能隙随扭转的三次方增长；以及一条圆偶极谱线，其强度从扭转的二阶开始。这两种效应都不会破坏时间反演扇区的配对。我们还给出了单带标量实现所需的逆质量张量。卷曲半导体能否提供该张量仍是一个未决问题；有限势垒、自旋–轨道耦合和实际线宽会引入必须分别加以论证的项。来自中心输入的角动量生成之报道（针对已发表的傍轴模型）并不能由其自身方程得出，且原始脚本表明，光学图形并非通过求解这些方程获得。一致的傍轴方程，即式（78），是一个带有附加刚性旋转的朗道问题，并且也守恒 L_z。文献 [87]中凡在修正模型里有对应项的每一定量陈述，均在此重新推导（附录C）：有效势最低点与能量尺度对行波态仍然成立，而电流分布、光学图样以及对所提议系统的估计则会改变。修正的标量边值理论给出了可直接检验的预言；实际器件的微观描述或矢量麦克斯韦描述仍然缺失。

附录 A：解析恒等式与规范适配矩阵

这里汇总正文中使用的解析结果，包括贝塞尔归一化与径向矩、带有量纲检查的子带求和、规范适配矩阵的推导，以及第IVC节变分界的证明。

1. 贝塞尔归一化与径向矩

恒等式

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\, J_\ell(j_{\ell s}x)^2 = \tfrac{1}{2}J_{\ell+1}(j_{\ell s})^2 \tag{A1}$$

对式（21）进行归一化。反复使用贝塞尔微分方程、分部积分以及 $J_\ell(j_{\ell s}) = 0$可得

$$\frac{\int_0^1 x^3 J_\ell(j_{\ell s}x)^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 x J_\ell(j_{\ell s}x)^2\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{3}\left[1+\frac{2(\ell^2-1)}{j_{\ell s}^2}\right]. \tag{A2}$$

对于若干个 ℓ 和s，对该比值进行高斯–勒让德求积所得结果与闭式表达式达到机器精度的一致。

电流密度取决于归一化约定，我们规定如下。如果 $F(r)$ 通过 $\int_0^\infty r\,\mathrm{d}r\,|F|^2 = 1$ 进行归一化，则相应的波函数$F(r)e^{im\phi}/\sqrt{2\pi}$ 在二维空间中具有单位范数。对于 $n_r = 0$ 和 $\ell = |m|$，归一化后的完整横向波函数可写为

$$\begin{aligned}\psi_{0m}(r,\phi) &= \frac{e^{\mathrm{i}m\phi}}{\sqrt{\pi\ell_{\mathrm{ho}}^2\Gamma(\ell+1)}} \\ &\quad\times\left(\frac{r}{\ell_{\mathrm{ho}}}\right)^{\ell} e^{-r^2/(2\ell_{\mathrm{ho}}^2)}, \\ \ell_{\mathrm{ho}} &= \beta^{-1/2}.\end{aligned} \tag{A3}$$

式（9）中的归一化系数由下式得出

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{|m|}\left[L_{n_r}^{|m|}(x)\right]^2\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(n_r+|m|+1)}{n_r!}. \tag{A4}$$

等价地，取 $u(r)=\sqrt{r}\,F(r)$，可得

$$\int_0^\infty |u(r)|^2\mathrm{d}r=\int_0^\infty r|F(r)|^2\mathrm{d}r=1. \tag{A5}$$

参考文献 [87]，的n_r式（15）中印出的系数将 ! 放在分母中，则平方范数应为 $1/(n_r!)^2$。差异仅出现在 $n_r\ge 2$，因为当 $n_r=0$ 时，两个阶乘都等于 *1*，1. 已发表的应用采用了径向基态 $n_r=0$，这一错误不会影响该基态；但一般公式仍须修正。轴向域问题则是另一回事，它从 $n_r=0$ 起就会影响腔体解释。

变换 $u(r)=\sqrt{r}\,F(r)$ 保持系数 $\mathcal{N}_{n_r,m}$ 不变，同时将径向测度$r\mathrm{d}r$ 替换为 $\mathrm{d}r$。在计算电流密度时，这一区别和方位角因子$1/\sqrt{2\pi}$ 都很重要。若不额外乘上角向因子，参考文献 [87] 的式（20）中的态在平面上的范数为 2，也就是说，它与单位归一化态相差一个因子 $\sqrt{2}$。

2. 子带求和与量纲检查

根据 χ_n 公式（19），$\langle p|p_z|n\rangle=-\mathrm{i}\hbar D_{pn}/L$。公式（28）等价于无量纲级数

$$\sum_{p\neq n}\frac{D_{pn}^2}{\pi^2(n^2-p^2)}=-\frac{1}{4}. \tag{A6}$$

对 n =1、.....、4 的前 3000 项进行数值求和，以低于 5×10^{-10}的误差验证了所述常数。轴向/行波交叉项的 $[\hbar^2\Omega_g mk/M]$ = 量纲分析表明其具有能量量纲，而 $[\hbar\Omega_g mk]$ =能量/长度，因此在标准国际单位制中不可能是完整的能量系数。同样，光学前向生成元 $\mathrm{i}\partial_z$ 的单位为长度$^{-1}$；如果 Ω_g 保留公式（1）中的量纲，公式（76）的前因子单位为长度。

3. 规范适配变分矩阵的推导

式（41）与式（35）的等价性源于将幺正映射 $u_m=e^{\mathrm{i}\alpha_m z}v_m$ 应用于二次型；这一过程不涉及在狄利克雷域上对 p_z 进行任何操作。对于无量纲基$V=\sum_{s,n}c_{sn}\mathcal{B}_{|m|s}(x)s_n(\zeta)$，其中 $s_n(\zeta)=\sqrt{2}\sin(n\pi\zeta)$，定义轴向矩阵

$$\begin{aligned}Z_{pn}&=\int_0^1 s_p(\zeta)(\zeta-\tfrac12)s_n(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,\\ Z^{(2)}_{pn}&=\int_0^1 s_p(\zeta)(\zeta-\tfrac12)^2 s_n(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.\end{aligned} \tag{A7}$$

令 $\mathcal{B}_s=\mathcal{B}_{|m|s}$、$q=q_m$ 及撇号表示 ∂_x。定义径向对称矩阵

$$\begin{aligned}K_{st}&=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\left[\mathcal{B}_s'\mathcal{B}_t'+\frac{m^2a^2}{x^2(a^2+b^2x^2)}\mathcal{B}_s\mathcal{B}_t\right],\\ S_{st}&=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\,(a^2+b^2x^2)\mathcal{B}_s\mathcal{B}_t,\\ T_{st}&=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\,(q')^2\mathcal{B}_s\mathcal{B}_t,\end{aligned} \tag{A8}$$

以及实反对称矩阵

$$A_{st}=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\,q'(\mathcal{B}_s'\mathcal{B}_t-\mathcal{B}_s\mathcal{B}_t'),\qquad A_{st}=-A_{ts}. \tag{A9}$$

于是，规范适配的伽辽金矩阵为

$$\begin{aligned}\frac{H_m^{(\mathrm{gauge})}}{E_R}&=(K\otimes I_z)+(S\otimes\mathrm{diag}[(\pi n)^2])\\ &\quad+(T\otimes Z^{(2)})+\mathrm{i}(A\otimes Z).\end{aligned} \tag{A10}$$

最后一项是厄米的，因为 A 是反对称的，而 Z 是对称的。在 $b=0$，$q'=0$，$K_{st}=j_{|m|s}^2\delta_{st}$，且公式（A10）给出精确的贝塞尔–正弦谱。这两个基张成不同的有限维变分子空间，具有不同的收敛速率，但表示相同的自伴连续统哈密顿量。

4. 有限壁变分界的证明

令 $F_\infty(r)=\sqrt{2\beta}\,e^{-\beta r^2/2}$ 表示归一化径向基态，其中 $\beta=|\Omega_g|k_n$ 和 $\int_0^\infty r\,\mathrm{d}r\,|F_\infty|^2=1$。令 $\chi_R(r)$ 在 $r\le R/2$ 时取 1，在 $[R/2,R]$ 上线性递减至 0，并在 $r\ge R$ 时为 0。区域单调性给出 $E_{0\,0\,n,\,,\,,\,n}^{(R)}\ge E_{0\,0\,n,\,,\,,}^{(\infty)}$，而该形式的基态表示给出

$$\frac{Q[\chi_R F_\infty]}{\|\chi_R F_\infty\|^2}-E_{0,0,n}^{(\infty)}=\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\int_0^R r\,\mathrm{d}r\,|\chi_R'|^2|F_\infty|^2}{\int_0^R r\,\mathrm{d}r\,\chi_R^2|F_\infty|^2}. \tag{A11}$$

截断函数导数满足 $|\chi_R'|\le 2/R$。超过半径一半处的高斯尾部等于 $e^{-\beta R^2/4}$。因此，分子不大于 $(4/R^2)e^{-\xi_n/4}$，分母至少为 $1-e^{-\xi_n/4}$。由此，极小极大原理给出式（44）。

附录 B：数值方法与偶极检验

下面将介绍数值方法，以及第VI节偶极结果背后的检验。

1. 数值实现与验证

无量纲伽勒金矩阵组装如下

$$\frac{H_m}{E_R} = \mathrm{diag}(j_{\ell s}^2) \otimes I_z + I_r \otimes \mathrm{diag}[(\pi a n)^2] + b^2 X \otimes \mathrm{diag}[(\pi n)^2] + 2imb\, I_r \otimes D. \tag{B1}$$

对径向求积和 D 进行了正交性、对称性/反对称性及厄米性测试。 m和 $-m$ 矩阵互为复共轭。在有限差分实现中，变换 $v = \sqrt{r}\,u$得到径向表达式 $-\partial_r^2 +(m^2 - 1/4)/r^2$。我们用反对称中心一阶差分离散化 ∂_z ，用对称中心二阶差分离散化 $-\partial_z^2$ ，并通过 Dirichlet 数据消去两个端点。鉴于 $m = 0$在轴处具有临界逆平方行为，有限差分检验仅限于 $|m| \geq 1$ 。

能量收敛的截断不一定能使局部电流达到同等精度。电流分布图在规范适配表示中计算，并通过通量恒等式（表 II）以及第 VC节中的逐点比较进行检验。利用 z-偶极求和规则，通过 14×30基的完整本征系统进行计算，对所有从基态出发的跃迁求和；截断遗漏了一个为正的高能尾部，这解释了相对于对易子值的小幅亏损。

2. 三次二能级约化与轴向宇称

精确的规范适配矩阵见式（A10）。对于固定的a 和较小的 b，其径向矩阵展开为

$$K_{st} = j_{|m|s}^2 \delta_{st} - \frac{m^2 b^2}{a^2}\delta_{st} + O(b^4), \tag{B2}$$

$$S_{st} = a^2 \delta_{st} + b^2 X_{st}, \tag{B3}$$

$$A_{st} = -\frac{2mb^3}{a^4}\int_0^1 x^2 (\mathcal{B}_s' \mathcal{B}_t - \mathcal{B}_s \mathcal{B}_t')\,\mathrm{d}x + O(b^5), \tag{B4}$$

$$T_{st} = O(b^6). \tag{B5}$$

这些展开说明了为什么在 $b = 0$ 处交叉的态 (1，2) 和 (2，1) 无法在 b^2 阶发生耦合： S_{st} 保持轴向标签不变，而 $A_{st} Z_{pn}$ 同时改变径向和轴向标签。投影哈密顿量的首个非零非对角项是三次项。我们通过高斯–勒让德求积计算了其系数，并将其与完整优化伽辽金间隙在小 b 时的行为进行了比较。 b^2 阶的项会使两个对角能量分别移动 $b^2\pi^2 n^2 C_{1,\ s} - m^2 b^2/a^2$。由于 $C_{1,\ s} = 1/3$，二者之差产生 $a_*^2 = a_0^2 - b^2/3 + O(b^4)$，而共同的 $-m^2 b^2/a^2$ 则相互抵消。只有在将这种对角失谐最小化之后，有效二能级能隙才是 $2|C_{AB}||b|^3 + O(|b|^5)$。该约化适用于较小的 b 和孤立的相邻能级；它并不涉及高能谱或多个同时发生的简并。

3. 圆振子求和与原始基底中的偶极矩阵

对于完整的标量度规哈密顿量以及一个 $m = 0$ 本征态 $|i\rangle$，定义 $D_+ = x + \mathrm{i}y$ 和 $D_- = x - \mathrm{i}y$。完备性、 $g^{xx} = g^{yy} = 1$ 和 $g^{xy} = 0$ 意味着

$$\sum_f (E_f - E_i)\big(|\langle f|x|i\rangle|^2 + |\langle f|y|i\rangle|^2\big) = \frac{\hbar^2}{M}. \tag{B6}$$

旋转对称性将两个横向圆偏振通道划分为 $m_f = \pm 1$。对于非简并的$m_i = 0$ 基态，时间反演使两个能量加权和相等。在未归一化的 $D_\pm$ 约定下，每个求和均为 $\hbar^2/M$，从而得到式（65）。在原始的未变换贝塞尔–正弦基中，相邻 m 扇区之间的圆偏振偶极矩阵尤其简单：

$$\frac{\langle s', p, m+1|D_+|s, n, m\rangle}{R} = \delta_{pn}\int_0^1 x^2 \mathcal{B}_{|m+1|,s'}(x)\mathcal{B}_{|m|,s}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{B7}$$

此表达式不涉及规范适配形式。我们使用它计算所有跃迁权重和截断和 S_+，并用来交叉核对通过数值求积计算的式（63）中的规范适配振幅。在 $b = 2$ 处，激活强度为0。1063709848，在原始（14,22）基中为0。1063708147，在规范适配基中为0。二者的差异与其截断误差一致。对于 (N_r, N_z) = （16,24），原始基底求和在 $S_+ = 1.999985672$ 处为 $b = 2$，与精确值相比亏损 1.43×10^{-5}。该求和对任何遗漏的高能径向跃迁都很敏感。

4. 微扰强度与其他检查

令 $\mathcal{B}_{\ell s}(x) = RB_{\ell s}(Rx)$，其中 $x = r/R$ 和 $\int_0^1 x\mathrm{d}x\,\mathcal{B}_{\ell s}^2 = 1$。考虑 $|m_i = 0$、$s = 1$、$n = 1\rangle$基态以及与 $m_f = 1$ 连续相连的本征态，该连接在零扭转 $|m_f = 1$、$s = 1$处$n = 2\rangle$ 成立。在 $b = 0$ 处，圆偏振偶极子守恒轴向指标，因此该跃迁消失。方程（mbD_{pn} 23）中的线性微扰 2i $n = 1$仅作用于轴向子空间。因此，只有末态中的 混合成分对一阶跃迁振幅有贡献。非简并微扰理论给出

$$\frac{\langle f|d_+|i\rangle}{R} = -\frac{2\mathrm{i}bD_{12}}{3\pi^2 a^2}\mathcal{I}_{10} + O(b^3),$$
$$D_{12} = -\frac{8}{3}, \tag{B8}$$
$$\mathcal{I}_{10} = \int_0^1 x^2 \mathcal{B}_{1,1}(x)\mathcal{B}_{0,1}(x)\,\mathrm{d}x.$$

公式（B8）中的整体相位取决于基的约定，但其大小并不取决于此。未受扰动的

表 VII。未变换的贝塞尔–正弦基中$a = 2$处激活的圆周跃迁的强度，$(N_r, N_z) = (14, 20)$。最后一列在 $b \to 0$时趋近于 $\mathcal{A}(2) = 0.0559408010\ldots$。使用未归一化的偶极 $d_+ = x + \mathrm{i}y$。

b	$f_+^{\mathrm{activated}}$	f_+/b^2
0.025	0.0000349580	0.05593276
0.050	0.0001397716	0.05590865
0.100	0.0005581232	0.05581232
0.150	0.0012521748	0.05565221
0.300	0.0049317405	0.05479712

跃迁间隙，以 E_R 为单位，为

$$\Delta_{12}(a) = j_{1,1}^2 - j_{0,1}^2 + 3\pi^2 a^2. \tag{B9}$$

因此， leading strength 为

$$\mathcal{A}(a) = \Delta_{12}(a) \left(\frac{2 D_{12} \mathcal{I}_{10}}{3\pi^2 a^2} \right)^2. \tag{B10}$$

高斯–勒让德求积给出 $\mathcal{I}_{10} = 0.4654514086\ldots$和 $\mathcal{A}(2) = 0.0559408010\ldots$。在线性的原始实贝塞尔–正弦基中，跃迁振幅是纯虚数。由于在固定 m 时，相反扭转哈密顿量通过复共轭相关联，跃迁强度的平方关于 b 为偶函数；因此，其下一阶修正为 $O(b^4)$。

在未经变换的基底中直接对角化得到优化后的间隙 $\Delta_{\mathrm{gap}}/E_R = 0.00284790328$ 在 b =0。12 和 0。04438638433，使用 $b = 0.30$ 的 (10,16) 基。它们与 $1.6487752187\, b^3$ 的比值分别为 0。999586 和 0。997067。对于 $a = b = 2$处的横向求和，(14,20) 基给出 $S_+ = 1.99997918$，趋近于式（65）中的精确值 2。在此基底中，各矩阵严格满足 $H_{-m} = H_m^*$，这是对时间反演对称性的直接检验。

纵向求和（54）在同一基下，使用轴向坐标矩阵（55）进行计算。对于$a = b = 2$，在（14、26）基中，$(S_z, 1 + \Omega_g^2 \langle r^2 \rangle)$ 对为 (1.14622537，1.14628829)，对于 $m = 0$则为 (1.26368838，1.26375705) $m = 1$。这些微小亏损源于有限谱截断。这些检查在所报告的参数下检验了主要光谱学结果，但并未给出每个绘图量的误差界。

原始矩阵的第三个独立编写的实现通过直接求积给出 $2|C_{AB}| = 1.6487752187433$ 和$\mathcal{A}(2) = 0.0559408010177$ 。在 (N_r, N_z) =(12，16) 时，对于 $a = b = 2$，它给出的激活强度为 0.1063711740，截断 $m_f = +1$ 求和为 1.9999681477。在 $b = 0.025$ 和 0.05 时，比值 f_+/b^2 分别为 0.0559327604 和 0.0559086469；随着 $b \to 0$，它们趋近于微扰系数。 $H_{-m} = H_m^*$的残差在浮点精度下为零。

附录C：2026年《光学与量子电子学》文章中各项陈述的状态

对于参考文献 [87],中的每一条陈述、方程和图，表 VIII 给出了它们在本文分析中的状态，以及本文中重新推导或讨论它们的章节。

附录 D：范围、约定与可复现性

本文说明模型的范围和单位约定，并描述计算的执行与核验方式。

1. 实验模型范围与量纲约定

对于任意显示的能量 ΔE （单位为毫电子伏），其到频率的换算为 $\nu = \Delta E/h$，即 1 毫电子伏 $/h \simeq 0.241799$ 太赫兹。当图中扫描 a 、而 R 和 M 保持不变时，径向单位 $E_R = \hbar^2/(2MR^2)$ 保持不变。在固定 b 的同时改变 a，会改变物理 $L = R/a$，并必然按照 $\Omega_g = b/(aR)$ 改变物理扭转；固定 Ω_g 的实验则沿着不同的路径 $b = \Omega_g R\, a$。若要得到绝对电子吸收，还需要态电荷、介电环境、外场耦合、占据因子、自旋轨道修正和线宽。本标量模型不包含其中任何一项。

2. 计算过程和可复现性

计算分别采用组装的贝塞尔–正弦矩阵和规范适配伽辽金矩阵、有限差分检验，以及对轴向和圆偏振偶极求和规则的直接计算。小扭转公式通过贝塞尔恒等式和直接特征值极小化进行了检验。在内部网格上，将计算电流与更大基组的参考态进行了比较，并依据精确的守恒论证检验了其积分轴向通量。非均匀扭转矩阵以厄米形式构造，并保留了导数排序项。用于绘制文献 [87] 图的脚本虽已读取但未执行；其中的算法（有效势、模型场、带掩模的分步传播、合成光谱和玫瑰图）均依据脚本中的参数重新实现并运行，所得输出与已发表及未发表的图像进行了比较。文中说明了所展示的无量纲参数、边界条件、基组约定和数值截断，包括表III 和IV。所有计算、图和验证测试所用的脚本均作为辅助文件提供（见“数据可用性”）。未使用实验测量。

人工智能工具使用声明

本研究使用了两个大型语言模型。GPT-6 Pro（ OpenAI）用于审阅 Python

表 VIII。参考文献中陈述的科学状态 [87] 在所指定的标量模型内。

早先的陈述	当前结论
螺旋度量与拉普拉斯–贝尔特拉米算符	对于常数 Ω_g 正确；这是一个定义良好的非平坦黎曼背景。
图 1：旋转后的横向平面 $\Omega_g \Delta z$	该图描述了螺旋坐标下的平直空间。在公式（1）中，与 ∂_z 正交的曲线 $z = -\Omega_g r^2 \mathrm{d}\phi$ 满足，见图 1。
行波类朗道振子	适用于守恒的轴向波数 $k \neq 0$，能量量纲已修正。
图2：$r_0 = 74.3$纳米，$V_{\min} = 1.564$毫电子伏，$\omega = 7.902 \times 10^{11}$ 秒$^{-1}$	行波态的约化函数 u 的修正，$k = \pi/L$，方程（13）；使用CODATA常数 $V_{\min} = 1.565$ 毫电子伏和 $\omega = 7.906 \times 10^{11}$ 秒$^{-1}$；打印值由原始脚本中四舍五入的常数 $\hbar = 1.054 \times 10^{-34}$ 焦耳·秒和 $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ 千克得出。不是腔体的能级。
$k = n\pi/L$ 和 $\partial_z = \pm \mathrm{i}k$ 在狄利克雷壁面	对于封闭有限轴向盒无效。导数是非对角的，公式（20）。
封闭腔体能级的线性 $m\Omega_g n/L$ 劈裂能级	对于旋转对称系统，无自旋时间反演会将其严格排除狄利克雷定义域。
$2\hbar\omega \simeq 1.04$ 毫电子伏，作为 $\pm m$ 分裂	不是腔体的 $\pm m$ 能级劈裂。同一能量就是 $m = 0$ 径向间距对于 $R = \infty$，方程（25），即行进问题的回旋能 $\hbar\omega_c$。
由几何选定的平衡电荷电流	标量哈密顿量并不意味着这一点；制备的 $\pm m$ 配对态携带相反的电流。
公式（9）至（15）中的径向方程与归一化 公式（9）至（15）	$-1/4$ 离心项属于约化径向函数 $u = \sqrt{r}\,F$，而不是公式（9）中的径向因子 F。径向范数必须使用正确的测度；公式（15）中印出的 $n_r!$ 分母必须替换为分子。差异仅从 $n_r \geq 2$ 开始，不会改变报告的 $n_r = 0$ 特殊情形归一化。
公式（16）印出的最后一项	在国际单位制中，行波项为 $-\hbar^2\Omega_g m k/M$；印出的 $-\hbar\Omega_g m n\pi/L$ 量纲有误。这两个表达式都不会在 $\pm m$ 中产生分裂狄利克雷腔体中。
公式（17）的径向态，其中有 $e^{\mathrm{i}m\phi}$	对于 $m \neq 0$，$m = 0$ 高斯函数乘以 $e^{\mathrm{i}m\phi}$ 并非本征态，且 $\lvert\Psi\rvert^2/r$ 在轴上发散；$n_r = 0$ 这些态是公式（9）中的态。
公式（21）的方位电流	弯曲度规中的电流除包含 $g^{\phi z}\partial_z$ 项外，还包含平直空间中的 m/r 项。由此，每个传播态的符号取决于 $-\Omega_g k$，而不是 m，见式（12）。成对态携带相反的电流，而度规本身不会选定任何平衡电流。
$\ell_{\mathrm{ho}}/\sqrt{2} = 56.4$ 纳米处的电流最大值（图3–5）	加入度规项后，密度峰值出现在 $\ell_{\mathrm{ho}} = 79.8$ nm 处，此时局部电流改变符号；极值出现在 37。4 和 120。5 nm，式（14）和图 3。图 4 和图 5 的原始脚本也使用 $u = \sqrt{r}\,F$ 构建密度而非 F，这使 $m = 1$ 环形场移动到 $\sqrt{3/2}\,\ell_{\mathrm{ho}} \simeq 98$ nm 处。
图 6、7、9：体态、边缘和玫瑰图案；纹；η_{edge}，Λ	图6和图7展示了相位为 $e^{24\mathrm{i}\phi}$ 和 $e^{16\mathrm{i}\phi}$ 的模型场，绘制时未进行传播。图9将自由衍射与刚性旋转结合起来，作用于一个周期窗口；其四个面板见图17，由以下因素产生：光束绕行该窗口，以及插值旋转网格。对于中心高斯分布，打印出的 V_{tw} 为零。根据方程（78）光束会呼吸，方程（79），以及原始的吸收内圆盘脚本（$R_{\mathrm{edge}} = 12\,\mu$m）会移除受限光束，而不是产生一个边缘态。
中心高斯函数的光学轨道角动量再分配光束（图8）	使用印刷的旋转不变算子是不可能的，使用一致的傍轴方程也不可能，（78），该方程还守恒 $\hat{}\,L_z$；$S_m = \delta_{m0}$，图16（c）。已发表的谱是采用高斯权重的合成场以 $m = 22$ 和 $m = 18$为中心。
容差：$\Omega_g(z)$ 和椭圆率（第 2 节和 7.1）	$\Omega_g(z)$：第 VII B，其中轴向平均并不足够。$\cos 2\phi$ 各向异性将 $\lvert m\rvert = 1$ 对在一阶分裂为无电流的实驻波。
Rashba比较（第 7.2 节）	$2\alpha_R k \approx 0.075$–$0.19$ 毫电子伏，与反交叉能隙相当或更大表 IV中；没有可供比较的 1.04 毫电子伏二重态。
所提出的系统与探测（第 7 节，表 1）	在表 VI 和第 VIIA 节中重述：没有 $\pm m$ 二重态，也不存在平衡态电流；冷原子腔尺度低于 1 Hz。

脚本，用于检查解析和数值计算，并修改稿件的英语。Claude Opus 5.5 (Anthropic) 被用于编写用于数值计算、验证测试和图的 Python脚本，包括对文献 [87]（第 VIIIA节）光学图形背后程序的独立重新实现；用于审查数学计算；以及起草和编辑部分文本。数值结果通过可复现测试脚本进行了检查，这些脚本已按下文所述提供。上述两种工具均未列为作者。作者审查并编辑了这些工具生成的全部输出，并对本文内容承担全部责任。

数据可用性

本文生成数值结果、表格和图的 Python脚本、文献 [87]，中光学图形背后程序的独立重新实现，以及验证测试及其输出日志，均作为辅助文件随本文的 arXiv 版本提供。本文未使用实验数据。

致谢

本研究得到巴西国家科学技术发展委员会（CNPq）（资助编号 305427/2026-1）、马拉尼昂州科学技术研究与发展支持基金会（FAPEMA）（资助编号 UNIVERSAL-06395/22）以及高等教育人才培养协调机构（CAPES）——巴西（代码 001）的支持。

[1] R. C. T. da Costa, 《物理评论 A》23, 1982（1981）。[2] R. A. Crudo 和 J. G. O'Brien, 《物理评论 A》80, 033824（2009）。[3] B. S. DeWitt, 《现代物理评论》29, 377（1957）。[4] H. Jensen 和 H. Koppe, 《物理学年鉴》（纽约）63, 586（1971）。[5] R. C. T. da Costa, 《物理评论 A》25, 2893（1982）。[6] L. Kaplan、N. T. Maitra 和 E. J. Heller, 《物理评论 A》 56, 2592 （1997）。[7] P. C. Schuster 和 R. L. Jaffe, 《物理学年鉴》（纽约）307, 132（2003）。[8] G. Ferrari 和 G. Cuoghi, 《物理评论快报》100, 230403（2008）。[9] M. Encinosa 和 B. Etemadi, 《物理评论 A》58, 77（1998）。[10] H. Shima、H. Yoshioka 和 J. Onoe, 《物理评论 B》79, 201401（2009）。[11] J. Onoe、T. Ito、H. Shima、H. Yoshioka 和 S. Kimura, 《欧洲物理快报》98, 27001（2012）。[12] V. Y. Prinz、V. A. Seleznev、A. K. Gutakovsky、A. V. Chehovskiy、V. V. Preobrazhenskii、M. A. Putyato 和 T. A. Gavrilova, 《物理学E》6, 828（2000）。[13] O. G. Schmidt 和 K. Eberl, 《自然》（伦敦）410, 168（2001）。[14] N. Shaji、H. Qin、R. H. Blick、L. J. Klein、C. Deneke 和 O. G. Schmidt, 《应用物理快报》90, 042101（2007）。[15] A. B. Vorob'ev、K.-J. Friedland、H. Kostial、R. Hey、U. Jahn、E. Wiebicke、J. S. Yukecheva 和 V. Y. Prinz, 《物理评论 B》75, 205309（2007）。[16] M. V. Entin 和 L. I. Magarill, 《物理评论 B》 64, 085330 （2001）。[17] M. V. Entin 和 L. I. Magarill, 《物理评论 B》66, 205308（2002）。[18] L. I. Magarill 和 M. V. Entin, 《苏联物理学—实验与理论物理》96, 766（2003）。[19] L. I. Magarill、A. V. Chaplik 和 M. V. Entin, 《物理学进展》48, 953（2005）。[20] P. Exner 和 P. ˇSeba, 《数学物理学杂志》30, 2574（1989）。[21] J. Goldstone 和 R. L. Jaffe, 《物理评论 B》 45, 14100 （1992）。[22] P. Duclos 和 P. Exner, 《数学物理评论》7, 73 (1995)。[23] W. Bulla、F. Gesztesy、W. Renger 和 B. Simon, 《美国数学会会刊》125, 1487 (1997)。[24] I. J. Clark 和 A. J. Bracken, 《物理学杂志 A》29, 4527 (1996)。[25] T. Ekholm、H. Kovaˇr´ık 和 D. Krejˇciˇr´ık, 《有理力学与分析档案》188, 245 (2008)。[26] D. Krejˇciˇr´ık 和 E. Zuazua, 《纯粹与应用数学杂志》94, 277 (2010)。[27] P. Exner 和 H. Kovaˇr´ık, 《数学物理通讯》73, 183 (2005)。[28] P. Briet、H. Kovaˇr´ık、G. Raikov 和 E. Soccorsi, 《偏微分方程通讯》34, 818 (2009)。[29] P. Exner 和 H. Kovaˇr´ık, *Quantum Waveguides*（Springer，Cham, 2015）。[30] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter Vol. II: Stresses and Defects*, （世界科学出版社，新加坡，1989）。[31] M. O. Katanaev 和 I. V. Volovich, 《物理学年鉴》（纽约）216, 1 (1992)。[32] R. A. Puntigam 和 H. H. Soleng, 《经典与量子引力》14, 1129 (1997)。[33] F. Moraes, 《巴西物理学杂志》30, 304 (2000)。[34] R. Bausch、R. Schmitz 和 L. A. Turski, 《物理评论快报》80, 2257 (1998)。[35] R. Bausch、R. Schmitz 和 L. A. Turski, 《物理学年鉴》（莱比锡）8, 181 (1999)。[36] C. Furtado、V. B. Bezerra 和 F. Moraes, 《欧洲物理快报》52, 1 (2000)。[37] C. Furtado 和 F. Moraes, 《欧洲物理快报》45, 279 (1999)。[38] G. d. A. Marques、C. Furtado、V. B. Bezerra 和 F. Moraes, 《物理学杂志 A》34, 5945 (2001)。[39] A. L. Silva Netto 和 C. Furtado, 《物理学杂志：凝聚态物质》20, 125209 (2008)。[40] A. L. Silva Netto、A. M. d. M. Carvalho、G. Q. Garcia 和 C. Furtado, 《欧洲物理快报》154, ae59b0 (2026)。[41] L. Landau, 《物理学杂志》64, 629 (1930)。[42] V. Fock, 《物理学杂志》47, 446 (1928)。[43] C. G. Darwin, 《剑桥哲学学会会刊》27, 86 (1931)。[44] G. V. Dunne, 《物理学年鉴》（纽约）215, 233 (1992)。

[45] Y. Aharonov 和 D. Bohm, 《物理评论》115, 485 (1959)。[46] W. P. Thurston, 《美国数学会通报》6, 357 (1982)。[47] P. Scott, 《伦敦数学会通报》15, 401 (1983)。[48] C. S. Gordon 和 E. N. Wilson, 《密歇根数学杂志》33, 253 1986( )。[49] D. Andriot 和 D. Tsimpis, 《高能物理学杂志》2018 (09), 096。[50] Y.-J. Lin、R. L. Compton、K. Jim´enez-Garc´ıa、J. V. Porto 和 I. B. Spielman, 《自然》（伦敦）462, 628 (2009)。[51] J. Dalibard、F. Gerbier、G. Juzeli¯unas 和 P. ¨Ohberg, 《现代物理评论》83, 1523 (2011)。[52] N. Goldman、G. Juzeli¯unas、P. ¨Ohberg 和 I. B. Spielman, 《物理学进展报告》77, 126401 (2014)。[53] F. Guinea、M. I. Katsnelson 和 A. K. Geim, 《自然·物理》6, 30 (2010)。[54] M. A. H. Vozmediano、M. I. Katsnelson 和 F. Guinea, 《物理学报告》496, 109 (2010)。[55] N. Levy、S. A. Burke、K. L. Meaker、M. Panlasigui、A. Zettl、F. Guinea、A. H. Castro Neto 和 M. F. Crom-mie, 《科学》329, 544 (2010)。[56] F. de Juan、M. Sturla 和 M. A. H. Vozmediano, 《物理评论快报》108, 227205 (2012)。[57] M. C. Rechtsman、J. M. Zeuner、A. T¨ unnermann、S. Nolte、M. Segev 和 A. Szameit, 《自然·光子学》7, 153 (2013)。[58] N. Schine、A. Ryou、A. Gromov、A. Sommer 和 J. Simon, 《自然》（伦敦）534, 671 (2016)。[59] J. Pleba´nski, 《物理评论》118, 1396 (1960)。[60] U. Leonhardt, 《科学》312, 1777 (2006)。[61] J. B. Pendry、D. Schurig 和 D. R. Smith, 《科学》312, 1780 2006( )。[62] U. Leonhardt 和 T. G. Philbin, 《新物理学杂志》8, 247 (2006)。[63] S. Batz 和 U. Peschel, 《物理评论 A》78, 043821 (2008)。[64] V. H. Schultheiss、S. Batz、A. Szameit、F. Dreisow、S. Nolte、A. T¨unnermann、S. Longhi 和 U. Peschel, 《物理评论快报》105, 143901 (2010)。[65] V. H. Schultheiss、S. Batz 和 U. Peschel, 《自然·光子学》10, 106 (2016)。[66] R. Bekenstein、Y. Kabessa、Y. Sharabi、O. Tal、N. En-gheta、G. Eisenstein、A. J. Agranat 和 M. Segev, 《自然·光子学》11, 664 (2017)。[67] A. Patsyk、M. A. Bandres、R. Bekenstein 和 M. Segev, 《物理评论X》8, 011001 (2018)。[68] A. Szameit、F. Dreisow、M. Heinrich、R. Keil、S. Nolte、A. T¨ unnermann 和 S. Longhi, 《物理评论快报》104, 150403（2010）。[69] SLonghi, 《激光与光子学评论》3, 243 (2009)。[70] A. Szameit 和 S. Nolte, 《物理学杂志 B》43, 163001 (2010)。[71] L. Allen、M. W. Beijersbergen、R. J. C. Spreeuw 和 J. P. Woerdman, 《物理评论 A》45, 8185 (1992)。[72] G. K. L. Wong、M. S. Kang、H. W. Lee、F. Biancalana、C. Conti、T. Weiss 和 P. S. J. Russell, 《科学》337, 446 (2012)。[73] X. M. Xi、T. Weiss、G. K. L. Wong、F. Biancalana、S. M. Barnett、M. J. Padgett 和 P. S. J. Russell, 《物理评论快报》110, 143903 (2013)。[74] X. M. Xi、G. K. L. Wong、M. H. Frosz、F. Babic、G. Ahmed、X. Jiang、T. G. Euser 和 P. S. J. Russell, 《光学》1, 165 (2014)。[75] R. Beravat、G. K. L. Wong、M. H. Frosz、X. M. Xi 和 P. S. J. Russell, 《科学进展》2, e1601421 (2016)。[76] P. S. J. Russell、R. Beravat 和 G. K. L. Wong, 《英国皇家学会哲学汇刊 A辑》375, 20150440 (2017)。[77] E. O. Silva, 《重新审视螺旋位错几何中的结构光传播：朗道动力学与梯度诱导偏振纹理》（2026）, arXiv:2611.22789 [物理学·光学]。[78] E. O. Silva, 《物理评论 A》10.1103/h118-4r9d（2026）, 已接收; arXiv:2605.29369。[79] D. J. BenDaniel 和 C. B. Duke, 《物理评论》152, 683 (1966)。[80] R. A. Morrow 和 K. R. Brownstein, 《物理评论 B》30, 678 1984( )。[81] M. G. Burt, 《物理学杂志：凝聚态物质》4, 6651 (1992)。[82] B. A. Foreman, 《物理评论 B》52, 12241 (1995)。[83] M.-E. Pistol, 《物理评论 B》60, 14269 (1999)。[84] C. Sikorski 和 U. Merkt, 《物理评论快报》62, 2164 (1989)。[85] W. Kohn, 《物理评论》123, 1242 (1961)。[86] J. von Neumann 和 E. Wigner, 《物理学杂志》30, 467 (1929)。[87] E. O. Silva, Opt. Quantum Electron. 58, 113 (2026)。[88] E. Wigner, Nachr. Ges. Wiss. G¨ottingen, Math.-Phys. Kl. , 546 (1932)。[89] R. P. Feynman, 《物理评论》56, 340 (1939)。[90] W. Thomas, 《自然科学》13, 627 (1925)。[91] F. Reiche 和 W. Thomas, 《物理学杂志》34, 510 (1925)。[92] W. Kuhn, 《物理学杂志》33, 408 (1925)。[93] D. Grundler, 《物理评论快报》 84, 6074 (2000)。[94] T. Weiss、G. K. L. Wong、F. Biancalana、S. M. Barnett、X. M. Xi 和 P. S. J. Russell, 《美国光学学会杂志 B辑》30, 2921 2013( )。