arXiv:2611.32627v1 [math.RT] 24 Nov 2026

# Lafforgue变换

罗志林

摘要。在本文中，我们综述了*Lafforgue*变换，这是一种自然的表示论映射，将局部域上约化群的 Kazhdan 余中心映射到 Bernstein 中心。其动机源于我们对 Braverman-Kazhdan 猜想的研究。这一猜想性框架旨在通过对可能具有奇异性的簇进行调和分析，建立一般自守 $L$-函数的亚纯延拓与函数方程。对于 $G = \mathrm{SL}_2$ 和 $\mathrm{GL}_2$, , 我们解释了 Lafforgue变换的稳定部分及其特 distinguished截面如何在 Steinberg-Hitchin 基底上实现为积分变换；这些公式具有动机性质，并且对每个局部域均成立。

目录

简介 1
1. Bernstein中心 4 2. Kazhdan 余中心 8 3. Lafforgue变换 16 参考文献 22

## 简介

Langlands纲领的中心主题之一是研究自守 $L$-函数。这些函数大大推广了黎曼ζ函数，以极其统一的方式编码了算术、几何和表示论信息。它们最初通过欧拉乘积定义，并且仅在一个半平面内收敛。朗兰兹函子性原理的主要含义之一是，这些 $L$-函数应当能够解析延拓到整个复平面，并满足函数方程 [Lan70]。

证明此类解析性质的一种基本方法是对代数簇进行调和分析。其经典范例是黎曼关于

ζ函数的解析延拓与函数方程的证明，其中高斯函数的泊松求和公式起着决定性作用。这一思想由 J. Tate 在其博士论文中系统发展 [Tat50]，后来 R. Godement 和 H. Jacquet 又通过局部与整体ζ积分理论，将其用于一般线性群的标准 $L$-函数 [GJ72] 。设 $\mathrm{M}_n$ 为矩阵簇。它包含可逆矩阵群 $\mathrm{GL}_n$ ，后者是一个开稠密子簇。对于一个整体域 $k$及其阿代尔环 $\mathbb{A}_k$，令

$$\mathcal{Z}(s,\phi,\varphi_\pi)=\int_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_k)}\phi(g)\varphi_\pi(g)|\det g|_{\mathbb{A}}^{s+(n-1)/2}\,\mathrm{d}g, \tag{1}$$

其中， $\phi\in\mathcal{S}(\mathrm{M}_n(\mathbb{A}_k))$ 是一个施瓦茨-布鲁阿函数， $\varphi_\pi$ 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_k)$ 的尖点自守表示 $\pi$ 的矩阵系数。$\mathrm{M}_n(\mathbb{A}_k)$ 上的经典傅里叶变换 $\mathcal{F}_\psi$ ，其中 $\psi=\otimes_{\nu\in|k|}\psi_\nu$： $k\backslash\mathbb{A}_k\to\mathbb{C}^\times$ 是一个非平凡加性特征，结合泊松求和公式，蕴含了（1）的亚纯延拓和函数方程。随后，标准 $L$-函数 $L(s,\pi)$ 可从这些 zeta 积分中恢复为温和分布族 $\{\mathcal{Z}(s,\cdot,\varphi_\pi)\mid\varphi_\pi\in\mathcal{C}(\pi)\}$ 在 $\mathrm{M}_n(\mathbb{A}_k)$ 上的极点。

在过去几十年中，人们发现了各种 Rankin-Selberg积分，为特殊类别的自守 $L$-函数构造了表示，其中涉及成对的 $(G,\rho)$。约在 2000 年，A. Braverman 和 D. Kazhdan 为一般的 $(G,\rho)$ 提出了这类理论的猜想性框架。L. Lafforgue [Laf16] 对其提案进行了阐述，B.-C. Ngô [Ngô20]则将其表述得更加精确。粗略地说，对于一对 $(G,\rho)$，人们预期存在一个 Schwartz空间 $\mathcal{S}^\rho\big(G(\mathbb{A}_k)\big)\simeq\bigotimes'_{\nu\in|k|}\mathcal{S}^\rho\big(G(k_\nu)\big)$ ，以及一个关于 $G(\mathbb{A}_k)\times G(\mathbb{A}_k)$-等变的傅里叶算子 $\mathcal{F}^\rho_\psi\simeq\bigotimes_{\nu\in|k|}\mathcal{F}^\rho_{\psi_\nu}$。对于这对 $\big(\mathcal{S}^\rho\big(G(\mathbb{A}_k)\big),\mathcal{F}^\rho_\psi\big)$ ，所预期的泊松求和公式应当蕴含与 $(G,\rho)$ 相关的一般自守 $L$-函数的亚纯延拓和函数方程。

这一方案的关键要素之一是傅里叶算子$\mathcal{F}^\rho_\psi$。在一个满足 $\nu\in|k|$ 的局部域 $k_\nu$ 上，傅里叶算子 $\mathcal{F}^\rho_{\psi_\nu}$ 预期由与定义在 $G(k_\nu)$ 上的稳定不变分布 $\mathcal{J}^\rho_{\psi_\nu}$ 作卷积给出；该分布由一个在一般位置上光滑的局部可积函数表示。经过适度修改后， $\mathcal{J}^\rho_{\psi_\nu}$ 预期属于 $G(k_\nu)$ 的稳定 Bernstein 中心，其含义是：对于 $G(k_\nu)$ 的任意不可约容许表示 $\pi_\nu$ ，经正则化后，有

$$\pi_\nu(\mathcal{J}^\rho_{\psi_\nu})=\gamma(\cdot,\pi_\nu,\rho,\psi_\nu)\mathrm{Id}_{\pi_\nu}$$

其中右侧是 Langlands局部伽马因子。由于 $\mathcal{J}^\rho_{\psi_\nu}$ 稳定不变，它下降为 $G$ 的 Steinberg-Hitchin 底空间上的一个函数；对于 $G=\mathrm{SL}_2$, ，这个底空间是带有迹坐标的仿射直线。

我们对 $\mathcal{J}^\rho_{\psi_\nu}$ 的理解仍然有限。对于 $(\mathrm{GL}_n,\ \rho=\mathrm{std})$，也就是在 Godement-Jacquet 理论中， $\mathcal{J}^\rho_{\psi_\nu}=\psi_\nu\big(\mathrm{tr}(\cdot)\big)$ 是标准傅里叶核。

当 $G$ 是环面时，核 $\mathcal{J}^{\rho}_{\psi_\nu}$ 由 $G(k_\nu)$上的一个光滑函数表示； [BK00], 曾提及这一点， [Ngô20],使之更加精确，并在 [LN]中作了详细处理。作者计算了特征为零的局部域上任意 $(G,\rho)$对应的分布 $\mathcal{J}^{\rho}_{\psi_\nu}$ 的球面部分，并证明它可以代入 Arthur-Selberg迹公式[Luo19a]。在 [JLZ22], 中，D. Jiang、L. Zhang 和作者给出了 $(\mathbb{G}_m \times \mathrm{Sp}_{2n}, \rho = \mathrm{std})$对应的核的显式表达式。不过，对于一般的 $(G,\rho)$， $\mathcal{J}^{\rho}_{\psi_\nu}$ 的构造仍然令人费解。

受 Godement-Jacquet 的启发，Ngô 推测，分布$\mathcal{J}^{\rho}_{\psi_\nu}$应当由朴素核 $\{\mathcal{J}^{\rho}_{\psi_\nu,T}\}_{T\subset G}$拼接而成，其中 $T$遍历 $G$ 中在稳定共轭意义下的极大环面。然而，正如 Laf- forgue [Laf14a], 所指出的，朴素的拼接构造无法为 $\rho = \mathrm{Sym}^2$ of $G = \mathbb{G}_m \times \mathrm{SL}_2$ 提供正确的核，因为它作用于主系列表示时无法给出正确的伽马因子。对于 $G = \mathrm{SL}_2$ 或 $\mathrm{GL}_2$，Lafforgue 提出了一种修正朴素拼接构造的方法，使所得分布作用于主系列表示时，表现为乘以正确的 Langlands局部伽马因子。然而，所得分布作用于超尖点表示时是否给出正确的伽马因子，尚不清楚。通过与[JLZ22],的结果比较，可以证明 Lafforgue 的方法对于 $\rho = \mathrm{Sym}^2$ of $G = \mathbb{G}_m \times \mathrm{SL}_2$,有效，但对于超尖点表示和高次对称幂则失效。

在 [LN], 中，我们基于 Langlands 稳定传递 $\mathcal{J}^{\rho}_{\psi_\nu}$构建了 [Lan13] 以及所谓的 *Lafforgue*变换，发展出一个用于构造的通用框架。这些变换适用于一般的约化代数群，并且可以在 $G = \mathrm{SL}_2$ 和 $\mathrm{GL}_2$的 Steinberg-Hitchin 基底上实现为显式解析公式。

在这些组成部分中，Lafforgue变换是本文的核心对象。它是一个自然的表示论映射

$$\mathrm{Laf} : \mathcal{C}_{G(k_\nu)} \longrightarrow \mathcal{Z}_{G(k_\nu)} \tag{2}$$

从 Kazhdan 余中心到 $G(k_\nu)$ 的 Bernstein 中心。在这里，Bernstein 中心可以视为 $G(k_\nu)$ 的光滑表示上的乘子代数，而 Kazhdan 余中心可以视为 Hecke代数通常余中心的完备化，或者等价地视为 Hecke代数的轨道积分空间。具体而言，对于 $c \in \mathcal{C}_{G(k_\nu)}$以及 $[M(k_\nu)\ \sigma_\nu]$这一尖点数据，Lafforgue变换由以下公式刻画

$$\mathrm{Laf}(c)\big([M(k_\nu),\sigma_\nu]\big) = \mathrm{Tr}\big(\mathrm{Ind}(\sigma_\nu), c\big), \tag{3}$$

其中，右侧是由 $c \in \mathcal{C}_{G(k_\nu)}$ 在完全诱导表示 $\mathrm{Ind}(\sigma_\nu)$ 上表示的轨道积分的迹评价。

对于 $G = \mathrm{SL}_2$ 或 $\mathrm{GL}_2$, ，这一表示论映射会变成一个具体的解析公式。限制到稳定有限部分后，存在一个特 distinguished截面

$$\mathrm{LafSec} : \mathcal{Z}^{\mathrm{st,fin}}_{G(k_\nu)} \to \mathcal{C}^{\mathrm{st,fin}}_{G(k_\nu)}$$

它属于 Lafforgue变换，并且可在 Steinberg-Hitchin 基底上实现为一个显式积分变换。对于 $z \in \mathcal{Z}^{\mathrm{st}}, G\overset{\mathrm{fin}}{k_\nu}()$，它由稳定函数 $\mathcal{J}_{G(k_\nu)} = \mathcal{J}_{\mathfrak{c}_\nu} \circ \mathfrak{c}_\nu$表示，其中 $\mathfrak{c}_\nu$： $G(k_\nu) \to \mathfrak{c}(k_\nu)$ 是 Chevalley 商；对于 $G = \mathrm{SL}_2$，它由迹给出，而对于 $G = \mathrm{GL}_2,$，则由迹和行列式给出；相应元素在 Kazhdan 余中心中表示为

$$\mathrm{LafSec}(z) = \mathcal{F}_{\psi_\nu}\left(\frac{\mathcal{F}_{\psi_\nu^{-1}}(\mathcal{J}_{\mathfrak{c}_\nu})}{|\cdot|_\nu}\right)$$

其中傅里叶变换是在 Steinberg-Hitchin 基底的迹变量上进行的。这个公式是 [LN]的主要内容之一。它表明，尽管 Lafforgue变换是通过表示论定义的，但在秩一情形下，其稳定截面由一个显式的解析公式所支配；该公式具有动机性质，且适用于每一个局部域，包括剩余特征为二的域。对于一般约化群，Ngô 与作者已提出关于稳定 Lafforgue 变换及其在 Steinberg-Hitchin 基底上的截面的猜想的解析公式；参见正在准备中的工作 [LN2]。

另一个要素是 Langlands 稳定传递，它提供了一个从 $G(k_\nu)$ 的 Kazhdan 余中心到其极大环面的 Kazhdan 余中心的典范映射。再次地，在秩一情形下，Langlands 稳定传递可由迹变量中的一个简单解析公式实现，并且与 Gelfand-Graev 特征标公式密切相关 [GG63]。特别是，将 LafSec 与 Langlands 稳定传递复合后作用于猜想的傅里叶核 $\mathcal{J}^{\rho}_{\psi_\nu}$，便得到 Ngô 拼接构造所预言的朴素核。

本报告的目的是介绍Lafforgue变换。我们首先回顾Bernstein 中心、Kazhdan 余中心及其稳定变体。然后我们定义Lafforgue变换并解释其基本性质。最后，在 $G = \mathrm{SL}_2$ 与 $G = \mathrm{GL}_2,$ 的情形中，我们说明其稳定部分与特 distinguished截面如何可以写成Steinberg-Hitchin 基底上的显式积分变换。

**致谢**。 作者谨此感谢世界华人数学家大会的组织者邀请他在会议上发言。

## 1. Bernstein 中心

在本节中，我们回顾Bernstein 中心的定义，以及它的阿基米德变体与稳定变体。

**1.1. 非阿基米德情形**。 设 $G$ 为非阿基米德局部域 $F$上的约化群。遵循 [Ber84a], , Bernstein 中心 $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_G$具有如下等价定义：

(1) 它是 $G(F)$ 的光滑表示范畴上恒等函子的端omorphism环；

(2) 它是有限层级上 Hecke代数 中心的射影极限 $\mathcal{H}_K = e_K \mathcal{H} e_K$，其中 $e_K$ 遍历 $K$ 中 $G(F)$ 的开紧子群的特征测度；(3) 它是 $G(F)$ 上本质上具有紧支集的不变分布 $\mathcal{J}$ 所构成的环，即对于 $K$ 中 $G(F)$ 的任意开紧子群 $\mathcal{J} e_K = e_K \mathcal{J} \in \mathcal{H}$；(4) 它是 Bernstein簇 $\Omega = \Omega_G$ 上的正则函数环，其点参数化了 $G(F)$-共轭类的二元组 $(M, \sigma)$，其中 $M$ 是 $G$ 的 Levi 子群，而 $\sigma$ 是 $M(F)$ 的不可约超尖表示。

Bernstein簇 Ω 是无穷多个有限维代数簇的不交并。它有无穷多个连通分支，由这类对的惯性等价类参数化。令 $\mathcal{Z}^{\mathrm{fin}}$ 为 $\mathcal{Z}$ 的非幺子代数，其元素是在 Ω 上支撑于有限多个连通分支上的正则函数。它也是 $\mathcal{Z}$中的一个理想。

对于 $\pi_0(\Omega)$ 的每个有限子集 $I$（其中 $\pi_0(\Omega)$ 表示 Ω 的连通分支集合），令 $\epsilon_I \in \mathcal{Z}$ 为 Ω 上的正则函数，其支撑于 $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$，并且在这些连通分支上取值为一。我们滥用记号，仍将相应的分布记为 $\epsilon_I$，它属于 $G(F)$。对于 $\pi_0(\Omega)$ 的两个有限子集 $I \subset J$，恒等映射 $\epsilon_I = \epsilon_I \epsilon_J$ 诱导出一个幺代数同态 $\mathcal{Z}\epsilon_J \to \mathcal{Z}\epsilon_I$，其定义为 $\mathcal{J} \mapsto \mathcal{J}\epsilon_I$。此外还有一个非幺代数同态 $\mathcal{Z}\epsilon_I \to \mathcal{Z}\epsilon_J$。Bernstein 中心也可以表示为 $\mathcal{Z}\epsilon_I$的射影极限，而 $\mathcal{Z}^{\mathrm{fin}}$ 可以表示为 $\mathcal{Z}\epsilon_I$的归纳极限。给定 Bernstein 中心 $\mathcal{Z}$中的一个分布 $\mathcal{J}$，令 $\gamma(\mathcal{J}, [\pi])$ 表示相应正则函数在 Ω 上、于 $\pi$的超尖支撑 $[\pi]$ 处的取值。对于下述函数值公式，假设 $\mathcal{J} \in \mathcal{Z}^{\mathrm{fin}}$，从而其谱乘子支撑于有限多个 Bernstein 分支上。$\mathcal{J}$ 与函数 $\gamma(\mathcal{J}, [\cdot])$ 之间的关系由 Plancherel公式给出

$$\mathcal{J}(g) = \int_{\pi \in \Pi_G^{\mathrm{temp}}} \gamma(\mathcal{J}, [\pi]) \Theta_\pi(g) \, \mathrm{d}\pi \tag{4}$$

其中，$\Pi_G^{\mathrm{temp}}$ 是 $G(F)$的温和对偶，$\mathrm{d}\pi$ 是Plancherel测度，而$\Theta_\pi$ 是 $\pi$的分布特征标。对于一般元素 $\mathcal{J} \in \mathcal{Z}$，Plancherel反演需在与测试函数配对后按分布意义理解。

**1.2. 阿基米德变体。** 设 $G$ 是定义在阿基米德局部域 $F$上的约化代数群。通过标量限制，不妨设 $F = \mathbb{R}$。我们研究 Casselman-Wallach表示范畴，即具有中等增长的容许光滑Fréchet表示范畴。根据 [BK14，命题 2，20]，该范畴等价于连续非退化 $\mathcal{S}$-模的范畴，其中 $\mathcal{S} = \mathcal{S}\big(G(F)\big)$ 是定义在 $G(F)$上的速降函数的 Schwartz 代数。

Bernstein 中心的阿基米德类比的一个自然候选是 $\mathcal{S}$ 的乘子代数，即连续自同态环 $\mathrm{End}_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}(\mathcal{S})$；它同时也是 $G(F)$ 上不变线性泛函的代数，这些泛函通过卷积将 $\mathcal{S}$ 送到 $\mathcal{S}$ 。$\mathrm{End}_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}(\mathcal{S})$ 的谱刻画依赖于关于 $\mathcal{S}$ 的迹 Paley-Wiener 定理；就此处所需的形式而言，似乎只有对 $G=\mathrm{SL}_2$ 已知（见 [LN，注 3.41]，以及上文的讨论，其中给出了总结）。遵循 [BPLZZ21，第 §2]，节，我们利用与 (4) 平行的谱刻画引入 $\mathrm{End}_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}(\mathcal{S})$ 的一个子代数，这对许多目的而言已足够。

设 $G_{\mathbb{C}}=G\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$。我们介绍与 $G_{\mathbb{C}}$ 相关的以下数据。

- 设 $(\mathbb{X}^*,\ \Phi,\ \mathbb{X}_*,\ \Phi^\vee)$ 是 $G_{\mathbb{C}}$ 的根数据，即，$\mathbb{X}^*$ 和 $\mathbb{X}_*$ 分别是 $G_{\mathbb{C}}$ 的抽象 Cartan 子群的权格和余权格，$\Phi$ 和 $\Phi^\vee$ 分别是 $G_{\mathbb{C}}$ 的根和余根；
- 设 W 为 $(\mathbb{X}^*,\ \Phi,\ \mathbb{X}_*,\ \Phi^\vee)$ 的 Weyl群；
- 设

$$\mathscr{A}_G=\mathrm{Aut}(\mathbb{X}^*,\Phi,\mathbb{X}_*,\Phi^\vee)^\heartsuit$$

为 $(\mathbb{X}^*,\ \Phi,\ \mathbb{X}_*,\ \Phi^\vee)$ 中阶数至多为 2 的自同构的有限集；它在 W 的作用下保持不变；

- 设 $\mathfrak{h}^*=\mathbb{X}^*\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$；
- 对于 $\vartheta\in\mathscr{A}_G$，令 $\mathfrak{h}^*_\vartheta$（分别为 $\mathfrak{h}^{*-}_\vartheta$）表示 $\vartheta$ 在 $\mathfrak{h}^*$ 上的作用的 $+1$-特征子空间（分别为 $-1$-特征子空间）。令 $\mathbb{Y}^*_\vartheta$ 为 $\rho+\mathbb{X}^*\subset\mathfrak{h}^*$ 在 $\mathfrak{h}^{*-}_\vartheta$ 上的投影，其中 $\rho$ 是相对于 $\Phi$ 的一组基，$\Phi$ 中正根之和的一半。

$\mathbb{Y}^*_\vartheta$ 是 $\mathfrak{h}^{*-}_\vartheta$ 的一个离散子群的平移。虽然 $\mathbb{Y}^*_\vartheta$ 不一定是子群，但下文中我们有时将 $\mathbb{H}\oplus\mathbb{Y}^*_\vartheta$ 写作 $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}}$的子集，其中元素形如 $\alpha+\varpi$，且 $\alpha\in\mathbb{H}$ 和 $\varpi\in\mathbb{Y}^*_\vartheta$。

参见[**BPLZZ21**，第§2], 对于一个 $\theta\subset\mathscr{A}_G$ 在W的共轭作用下稳定的子集，我们引入以下定义在 $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}}$上的全纯函数空间。

定义1.2.1。考虑以下定义在 $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}}$上的全纯函数空间。

（1）令 $\mathcal{M}_\theta(\mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}})$ 为满足以下条件的 $\mu$ $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}}$ 上的全纯函数空间：对于任意 $\vartheta\in\theta$ 和任意 $M>0$，存在$r_{\vartheta,\ M}\in\mathbb{R}$ 使得

$$\sup_{\substack{\alpha\in\mathfrak{h}^*_{\vartheta,\mathbb{C}},||\mathrm{Re}\alpha||<M\\ \varpi\in\mathbb{Y}^*_\vartheta}}|\mu(\alpha+\varpi)|\cdot(1+||\alpha+\varpi||)^{r_{\vartheta,M}}<\infty \tag{5}$$

对于某个（因而对于每个） $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}}$上的欧几里得范数 $||\cdot||$ 成立；

(2) 令 $\mathcal{N}_\theta(\mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}})$ 为 $\mu$ 上的全纯函数空间，满足：对于每个 $\vartheta\in\theta$、每个 $M>0$以及每个 $r\in\mathbb{R}$,

$$\sup_{\substack{\alpha\in\mathfrak{h}^*_{\vartheta,\mathbb{C}},||\mathrm{Re}\alpha||<M\\ \varpi\in\mathbb{Y}^*_\vartheta}}|\mu(\alpha+\varpi)|\cdot(1+||\alpha+\varpi||)^{r}<\infty \tag{6}$$

该式对于 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$上的某个（因而也对每个）欧几里得范数 $||\cdot||$ 都成立；

(3) 将 $\mathcal{M}_\theta^\natural(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)$ 定义为 $\mathcal{M}_{\theta\cup\{1\}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)$ 的子空间，由满足以下条件的函数 $\mu$ 组成：对于每个 $\vartheta\in\theta$，除有限多个元素 $\varpi\in\mathbb{Y}_\vartheta^*$外，对所有 $\mu|_{\mathfrak{h}_{\vartheta,\mathbb{C}}^*+\varpi}=0$ 均成立。

当 $\theta=\{1\}$ 时，我们在上述记法的下标中省略它。

注 1.2.2。 我们对这个定义作如下说明。

*(1)* 在 $\mathcal{M}_\theta(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)$（分别为 $\mathcal{N}_\theta(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)$）的定义中，对于每个 $\vartheta\in\theta$ 和每个 $\varpi\in\mathbb{Y}_\vartheta^*$，函数 $\alpha\mapsto\mu(\alpha+\varpi)$ 在 $\mathfrak{h}_{\vartheta,\mathbb{C}}^*$ 上具有适度垂直增长（分别在垂直条带上快速衰减）。若将增长条件限制在 $i\mathfrak{h}_\vartheta^*\oplus\mathbb{Y}_\vartheta^*$，上，则表示 $\mu$ 具有多项式增长；*(2)* 空间 $\mathcal{M}_\theta(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)$、 $\mathcal{N}_\theta(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)$ 和 $\mathcal{M}_\theta^\natural(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)$ 均在乘法以及 $W$ 的作用下封闭；*(3)* 若全纯函数 $\mu$ 在 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ 上具有适度垂直增长，则 $\mu\cdot\mathcal{M}_\theta^\natural(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)\subset\mathcal{M}_\theta^\natural(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)$。特别地，我们有 $\mathcal{M}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)\cdot\mathcal{M}_\theta^\natural(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)\subset\mathcal{M}_\theta^\natural(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)$。注意， $\mathcal{M}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)=\mathcal{M}_{\{1\}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)$。

令 $\theta_G$ 为 $\mathscr{A}_G$ 的子集，由形如 $w\vartheta$ 的元素组成，其中 $w\in\mathrm{W}$ 且 $\vartheta\in\mathscr{A}_G$ 诱导出 $G_{\mathbb{C}}$ 的实形式 $G$。则 $\theta_G$ 在 W 的作用下保持不变。

我们引入以下定义。

定义 1.2.3。令 $\mathcal{Z}=\mathcal{M}_{\theta_G\cup\{1\}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)^{\mathrm{W}}$，以及 $\mathcal{Z}^{\mathrm{fin}}=\mathcal{M}_{\theta_G\cup\{1\}}^\natural(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)^{\mathrm{W}}$。

$\mathcal{Z}$ 将在阿基米德情形中扮演 Bernstein 中心的角色 .

根据 [BPLZZ21，定理 2。13]，的任意元素都在$\mathrm{End}_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}(\mathcal{S})$中产生一个乘子。此外，这一对应给出了复代数的一个同态 $\mathcal{Z}\to\mathrm{End}_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}(\mathcal{S})$。根据关于 $G(F)$ 上光滑紧支撑函数的矩阵 Paley-Wiener 定理， [Del05]，任意乘子唯一确定一个不变分布于 $G(F)$上，从而给出阿基米德情形中（4）的类似结论。

注记 1.2.4。 在 [LN]，中，我们定义了 $\mathcal{Z}=\mathcal{N}_{\theta_G\cup\{1\}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)^{\mathrm{W}}$，这对于 loc.cit. 的目的而言已经足够。在本报告中，对于一般性讨论，我们使用 $\mathcal{M}_{\theta_G\cup\{1\}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)^{\mathrm{W}}$。

1.3. 稳定 Bernstein 中心。设 $G$ 是局部域 $F$ 上的约化群。按照 [BKV13]，，令 $\mathcal{Z}^{\mathrm{st}}$ 为 $\mathcal{Z}$ 的子集，其中的元素是在 $G(F)$ 上、按照 [Lan79]，的意义定义的稳定分布；如果对于任意测试函数 $h\in\mathcal{H}$，当 $h$ 的稳定轨道积分恒等为零时， $\mathcal{J}(h)=0$，则称一个不变分布为稳定分布。令 $\mathcal{Z}^{\mathrm{st}}$，$^{\mathrm{fin}}=\mathcal{Z}^{\mathrm{st}}\cap\mathcal{Z}^{\mathrm{fin}}$。 [BKV13] 的稳定中心猜想断言， $\mathcal{Z}^{\mathrm{st}}$ 是 $\mathcal{Z}$ 的子代数，至少当 $F$ 为非阿基米德时如此。

稳定 Bernstein 中心有几种相关定义。我们将在下文回顾这些定义。

（1）令 $\mathfrak{I}_{\mathrm{st}} \subset \mathcal{H}$ 表示稳定轨道积分恒等为零的测试函数所构成的子空间。按照 [SS13]，我们定义 $\mathcal{Z}^{\mathrm{st},\prime}$ 为由 $\mathcal{Z}$ 中满足稳定化$\mathfrak{I}_{\mathrm{st}}$条件的分布构成的子代数，即

$$\mathcal{Z}^{\mathrm{st},\prime} = \{z \in \mathcal{Z} \mid z * \mathfrak{I}_{\mathrm{st}} \subset \mathfrak{I}_{\mathrm{st}}\}.$$

与 $\mathcal{Z}^{\mathrm{st}}$ 的定义相比，$\mathcal{Z}^{\mathrm{st},\prime}$ 的定义具有这样的优点：它立即就是 $\mathcal{Z}$的一个子代数。

（2）一般而言，如 [LN，命题 3.5.3]，$\mathcal{Z}^{\mathrm{st},\prime} \subset \mathcal{Z}^{\mathrm{st}}$ 以及当$G$ =在奇剩余特征的非阿基米德局部域上时$_2$ SL，$\mathcal{Z}^{\mathrm{st}} = \mathcal{Z}^{\mathrm{st},\prime}$。

（3）设 $\Omega^{\mathrm{st}} = \Omega^{\mathrm{st}}_G$ 为 $G$ [Hai14，§5][SS13，§6]的无穷小特征簇。假设 $G$ 及其 Levi子群的局部朗兰兹猜想已知，则存在一个有限纤维映射 $p : \Omega \to \Omega^{\mathrm{st}}$，将 Ω 中的尖点数据映射到相应的 $G$-共轭类，即半单局部 $L$-参数。我们定义 $\mathcal{Z}^{\mathrm{st},\prime\prime}$ 为 $\mathcal{Z}$ 的子代数，它由 Ω 上的正则函数组成，并且这些函数沿着 $p$是 $\Omega^{\mathrm{st}}$ 上正则函数的拉回。

一般而言，$\mathcal{Z}^{\mathrm{st}}$、$\mathcal{Z}^{\mathrm{st},\prime}$和 $\mathcal{Z}^{\mathrm{st}}$之间的关系并不明确〃。当$G$ =$\mathrm{SL}_2$ 定义在具有奇剩余特征的非阿基米德局部域上时，可以证明这三个概念相一致 [LN，命题 3.5。3]。

## 2. Kazhdan 余中心

本节回顾 [LN，§3]中引入的 Kazhdan 余中心概念。

**2.1. 测度的规范化**。我们遵循 [FLN10a] 和 [LN，§3，1] 来定义 $G(F)$的（稳定）共轭类空间上的测度。

我们首先考虑 $G$ 分裂、半单且单连通的情形，这一情形在 [LN，§31]中进行了处理。根据 [Ste74]，$G$ 通过共轭作用于自身得到的不变理论商如下所示

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_G = G /\!\!/ G = \mathrm{Spec}(F[G]^G) = \mathbb{A}^r$$

其坐标 $c_1$，…，$c_r$ 由 $c_i(g) = \mathrm{tr}(\rho_{\omega_i}(g))$给出，其中$\rho_{\omega_i}$是 $G$的基本表示。遵循 [FLN10a]，，我们称 $\mathfrak{c}$ 为 $G$的 Steinberg-Hitchin 基底。根据 Chevalley限制定理，存在一个同构

$$\mathfrak{c} = T /\!\!/ \mathrm{W} = \mathrm{Spec}(F[T]^{\mathrm{W}})$$

其中，$T$ 是最大分裂环面，W 是相应的 Weyl群。我们将 Weyl判别式 $D \in F[\mathfrak{c}]$ 定义为$T$ 上的 W-不变函数，其定义为

$$D(t) = \prod_{\alpha \in \Phi} (1 - \alpha(t))$$

其中，$\Phi = \Phi(G, T)$ 是根的集合。Weyl判别式的绝对值 $|D(t)|$ $D(t)$ 可按如下方式构造平方根。取

$\mathbb{Z}$ 的一组基 $\chi_1,\dots,\chi_r$，它属于 $T$ 的有理特征群 $\mathbb{X}^*(T)$。于是我们在 $T$ 上得到一个不变的 $r$-形式，其定义为

$$\frac{\mathrm{d}\chi_1}{\chi_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\mathrm{d}\chi_r}{\chi_r} \tag{7}$$

它在相差一个符号的意义下，不依赖于 $\mathbb{Z}$ 的 $\chi_1$ 基底,…, $\chi_r$的选择。沿态射$\pi_T$：$T\to\mathfrak{c}=T/\!/W$ 拉回 $r$-形式 $\mathrm{d}c_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}c_r$，得到

$$\pi_T^*\,\mathrm{d}c_1\wedge\cdots\wedge\,\mathrm{d}c_r=\Delta_T(t)\frac{\mathrm{d}\chi_1}{\chi_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\mathrm{d}\chi_r}{\chi_r} \tag{8}$$

其中 $\Delta_T(t)$ 是 $T$ 上一个定义良好的代数函数（相差一个符号）。其绝对值

$$\Delta(t)=|\Delta_T(t)|$$

是一个实值函数，在 Weyl 群 W的作用下保持不变。根据 [**FLN10a**，命题 3。29]，

$$|D(t)|=\Delta(t)^2.$$

$r$ 维仿射空间 $\mathfrak{c}$ 上的 $r$-形式 $\mathrm{d}c_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}c_r$ 确定了一个测度

$$\omega_{\mathfrak{c}}=|\,\mathrm{d}c_1\wedge\cdots\wedge\,\mathrm{d}c_r| \tag{9}$$

在 $\mathfrak{c}(F)=F^r$上。由（8）可知，$\Delta^{-1}\pi_T^*\omega_{\mathfrak{c}}$是$T(F)$上的不变测度，且与不变 $r$-形式（7）所对应的测度一致。如果 $T$ 是 $G$ 的极大环面，但不一定是分裂的，则有限映射$\pi_T$：$T\to\mathfrak{c}$ 仍然存在，而公式 $\Delta^{-1}\pi_T^*\omega_{\mathfrak{c}}$ 再次定义了 $T(F)$上的不变测度。我们将相应的测度记为

$$\omega_T=\Delta^{-1}\pi_T^*\omega_{\mathfrak{c}}.$$

接下来我们考虑拟分裂、半单、单连通的情形。约化群 $G$ 的一个准分裂形式由一个 1-余循环$\varphi$ 确定：$\sigma\in\Gamma_F\mapsto\varphi(\sigma)$取值于 $G$的 Dynkin 图的自同构群，其中 $\Gamma_F$ 是 $F$的绝对伽罗瓦群。因此，$\Gamma_F$作用于基本表示的集合

$$\sigma:\rho_{\omega_i}\mapsto\rho_{\sigma(\omega_i)},\quad \rho_{\sigma(\omega_i)}(g)=\rho_{\omega_i}(\varphi(\sigma)g),$$

并由此作用于迹特征标 $c_i=\mathrm{tr}(\rho_{\omega_i})$。注意，

$$\rho_{\sigma(\tau(\omega_i))}(g)=\rho_{\tau(\omega_i)}(\varphi(\sigma)g)=\rho_{\omega_i}(\varphi(\tau)\varphi(\sigma)g)=\rho_{\omega_i}(\varphi(\tau\sigma)g)=\rho_{(\tau\sigma)(\omega_i)}(g).$$

令 $G_\varphi$ 为由余循环 $\varphi$：$\sigma\in\Gamma_F\mapsto$ $\varphi(\sigma)$确定的拟分裂群。$\Gamma_F$在 $G_\varphi(F^{\text{分离}})$上的作用（作为集合，该集合就是 $G(F^{\mathrm{sep}})$）由下式给出

$$\sigma_\varphi:g\mapsto\varphi(\sigma)(\sigma(g))=\sigma(\varphi(\sigma)g).$$

这里，$F_{\mathrm{sep}}$是 $F$ 的可分闭包。设 $\{h_\sigma\}$ 是一个余循环，关于此作用取值于 $G_\varphi(F^{\mathrm{sep}})$ 的中心 $=G(F^{\mathrm{sep}})$。那么

$_\rho_{\omega_i}(h_\sigma) \in F^{\mathrm{sep}}$ 作为标量 $\epsilon_i(\sigma)$ 作用。此外， $\sigma(\epsilon_{\sigma(\omega_i)}(\tau))\epsilon_i(\sigma) = \epsilon_i(\tau\sigma)$，因为

$$\begin{aligned}\sigma(\rho_{\sigma(\omega_i)}(h_\tau))\rho_{\omega_i}(h_\sigma) &= \rho_{\sigma(\omega_i)}(\sigma(h_\tau))\rho_{\omega_i}(h_\sigma)\\ &= \rho_{\omega_i}(\varphi(\sigma)(\sigma(h_\tau))h_\sigma)\\ &= \rho_{\omega_i}(h_{\tau\sigma}).\end{aligned}$$

因此，我们利用余循环对 $F$ 上坐标为 $c_1,\ldots,c_r$ 的线性空间进行扭曲

$$\sigma : (c_1,\ldots,c_r) \mapsto (c'_1,\ldots,c'_r), \quad c'_i = \epsilon_i(\sigma)c_{\sigma(\omega_i)}.$$

取 $\{h_\sigma\}$ 为平凡余循环，对于拟分裂形式 $G_\varphi$的任意内形式，我们得到 $G$ 的半单、单连通、分裂外形式的 Steinberg-Hitchin 基底的一个扭曲形式，它是 $F$ 上的一个向量空间，带有从（9）继承的测度。

一般而言，根据 [Kot82], ，任意约化群 $G$ 都容许一个 $z$-扩张$\alpha$： $G_z \to G$ 其满足以下性质：

- $G_z$ 是 $F$ 上的连通约化群，其导出群单连通；
- $\alpha$ 是满射；
- 的核 $\alpha$ 是 $G_z$ 中心的，并且同构于形如 $\mathrm{Res}_{L/F}\mathbb{G}_m$ 的乘积（其中每个 $L$ 都是一个分裂 $G$ 的 $F$ 的有限扩张）。

沿着 $\alpha$ 拉回后，我们将问题归结为 $G_{\mathrm{der}}$ 单连通的情形。令 $Z$ 为 $G$ 的中心的单位连通分支。存在一个正合列

$$1 \to A \to Z \times G_{\mathrm{der}} \to G \to 1, \quad A = G_{\mathrm{der}} \cap Z. \tag{10}$$

仿照 [FLN10a], ，为简化叙述，我们假设 $A$ 在 $F$上是 ¯。根据 [BT65，第 2.2], 命题，对于 $g \in G(F\mathrm{sep})$ 中像落在 $G(F)$ 内的元素，我们¯ ¯可以将其写成乘积 $g = g_1g_2$，其中 $g_1 \in G_{\mathrm{der}}(F^{\mathrm{sep}})$ 和 $g_2 \in Z(F\mathrm{sep})$。由于 $g \in G(F)$, 对于任意 $\sigma \in \Gamma_F$，都有 $\sigma(g_1)^{-1}g_1 = \sigma(g_2)g_2^{-1} \in A(\bar{F}^{\mathrm{sep}})$。¯由于 $g_1$ 在 $A(F^{\mathrm{sep}})$ 中的元素意义下唯一确定，因此余循环 $\{\sigma(g_1)^{-1}g_1\}$ 在 $H^1(F,A)$ 中只有其像$\eta(g)$是有定义的。令 $\mathfrak{H}$ 为以此方式得到的 $H^1(F,A)$ 的子集。 $G$ 的 Steinberg-Hitchin 基底定义为

$$\mathfrak{c} = \bigsqcup_{\eta\in\mathfrak{H}} \mathfrak{c}_{G_{\mathrm{der}},\eta}(F) \times Z_\eta(F)/A(F) \tag{11}$$

其中，$\mathfrak{c}_{G_{\mathrm{der}},\eta}$ 是底层斯坦伯格-希钦底空间$G_{\mathrm{der}}$ 的一个扭曲线性空间， $A(F)$ 在其上作为 $G_{\mathrm{der}}(F)$的中心的一个子群作用；$Z_\eta$是由 $\eta$定义的一个 $Z$-托orsor， $A(F)$在其上作为 $Z(F)$的一个子群作用。空间（11）还配备了一个自然测度：其中，$\mathfrak{c}_{G_{\mathrm{der}},\eta}(F)$上的测度继承自（9）， $Z_\eta(F)$上的测度是分裂环面上的测度，而$\mathfrak{c}_{G_{\mathrm{der}},\eta}(F) \times Z_\eta(F)/A(F)$上的测度则取商测度。

对于 $G$ 半单且单连通的情形，令 $\mathfrak{c}'$ 为 Weyl判别式所定义的除子之补集。其在 $G$ 中的逆像 $G'$ 由 $G$的（强）正则半单元素组成。对于一般的约化群$G$，令 $\mathfrak{c}'$ 为

$$\bigsqcup_{\eta\in\mathfrak{H}} \mathfrak{c}'_{G_{\mathrm{der}},\eta}(F)\times Z_\eta(F)/A(F)$$

在 $G$ 中的逆像 $G'$ 由 $G$ 的强正则半单元素组成。该映射

$$\mathbf{c}: G'(F)\to \mathfrak{c}'(F) \tag{12}$$

具有由稳定共轭类给出的非空纤维。若 $G$ 为拟分裂群，则根据 [Kot82, 第 4.1]，节，并利用前面对单连通导出群的约化，该映射是满射；不要求分裂性。对于一般的 $G$，满射性未必成立。在这种情况下，在下面关于共轭类的讨论中，我们用 $\mathfrak{c}'(F)$ 表示开像 $\mathfrak{c}(G'(F))$。因此，$\mathfrak{c}'(F)$ 可视为稳定强正则半单共轭类的集合。该集合具有一个由 $\mathfrak{c}(F)$ 诱导的规范 $F$-解析簇结构，并带有由 $\omega_{\mathfrak{c}}$ 诱导的测度。令 $C'(F)$ 表示 $G'(F)$ 中强正则半单共轭类的集合。商映射的纤维

$$\mathbf{d}: G'(F)\to C'(F) \tag{13}$$

是强正则半单共轭类。我们考虑映射

$$\mathbf{e}: C'(F)\to \mathfrak{c}'(F)$$

从 $G'(F)$ 的强正则半单共轭类集合到稳定强正则半单共轭类集合。该映射是有限对一的，因为每个稳定强正则半单共轭类只包含有限个共轭类。它还是一个覆盖：对于每个$x\in C'(F)$，都存在 $x$ 的开邻域 $U$ 以及 $\mathbf{e}(x)$的开邻域 $V$，使得 $\mathbf{e}$ 诱导出一个同胚 $U\to V$。$\omega_{\mathfrak{c}}$ 上的典范测度 $\mathfrak{c}'(F)$ 导出 $C'(F)$上的典范测度 $\omega_C$。我们还注意到，映射 (13) 是一个 $F$-解析浸没。由于 $\mathfrak{c}'(F)$ 被赋予了$F$-解析流形结构，其覆盖 $C'(F)$ 也同样是一个 $F$-解析流形。$\mathfrak{c}(F)$上的测度 $\omega_{\mathfrak{c}}$ 拉回为 $C'(F)$上的一个测度。通过规定 $C(F)$ 中 $C(F)$ 的补集具有零测度，该测度可扩展到 $G(F)$ 的共轭类集合 $C(F)$ 上。

**2.2. 稳定轨道积分和轨道积分的规范化**。令 $\mathcal{H}$ 为 $G(F)$ 上光滑紧支撑函数代数，其中 $G$ 是定义在 $F$ 上的约化群。当 $F$ 为阿基米德时，使用 $\mathcal{S}$ 也很方便；它是 $G(F)$ 上速降函数的 Schwartz 代数。下文我们重点讨论 $\mathcal{H}$ 中的函数；当 $F$ 为阿基米德时，相关讨论同样适用于 $\mathcal{S}$ 中的函数。

对于每个 $h \in \mathcal{H}$，考虑推前测度 $\mathbf{c}_!(h\mathrm{d}g)$，其定义满足：对于任意连续函数 $f: \mathfrak{c}(F) \to \mathbb{C}$，均有以下恒等式成立；其中 $\mathrm{d}g$ 是 $G(F)$ 上的 Haar 测度：

$$\langle \mathbf{c}_!(h\,\mathrm{d}g), f\rangle = \langle h\,\mathrm{d}g, \mathbf{c}^* f\rangle.$$

这里 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 是紧支撑测度与连续函数之间的标准配对，而$\mathbf{c}^* f = f \circ \mathbf{c}$ 是沿$\mathbf{c}$对 $f$ 的拉回。基于Harish-Chandra的工作，存在一个关于 $\omega_{\mathfrak{c}}$ 局部可积的函数 $\mathrm{SO}(h)$，使得

$$\mathbf{c}_!(h\,\mathrm{d}g) = \mathrm{SO}(h)\omega_{\mathfrak{c}}.$$

限制在强正则半单轨道上时，

$$\mathrm{SO}(h) : \mathfrak{c}'(F) \to \mathbb{C}$$

是一个称为 $h$的稳定轨道积分的光滑函数。这是[FLN10a，（3.31）]中采用的稳定轨道积分的规范化。

我们可以对映射 $G'(F) \to C'(F)$应用相同的构造，从而定义一个函数

$$\mathrm{O}(h) : C'(F) \to \mathbb{C},$$

使得

$$\mathbf{d}_!(h\,\mathrm{d}g) = \mathrm{O}(h)\omega_C,$$

并称其为 $h$ 的轨道积分。这等价于要求对每个连续函数 $f$，都有：$C(F) \to \mathbb{C}$ 我们有

$$\langle \mathbf{d}_!(h\,\mathrm{d}g), f\rangle = \langle h\,\mathrm{d}g, \mathbf{d}^* f\rangle.$$

现在让我们将上述轨道积分和稳定轨道积分的规范化，与更常见的定义进行比较。在通常情形下，我们用以下公式定义元素 $\gamma \in G'(F)$ 的轨道积分：

$$\mathrm{O}_\gamma(h) = \int_{G(F)/G_\gamma(F)} h(g\gamma g^{-1})\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} \tag{14}$$

其中 $\mathrm{d}t$ 是 $T(F) = G_\gamma(F)$ 上的 Haar测度。令 $T' \subset T$ 为强正则半单轨道。限制到 $T$ 后，我们得到一个函数

$$\mathrm{O}_T(h) : T'(F) \to \mathbb{C} \tag{15}$$

使得对任意 $\gamma \in T'(F)$，$\mathrm{O}_T(h)(\gamma) = \mathrm{O}\gamma(h)$。注意，存在一个自然投影 $p_T: T'(F) \to C'(F)$，它是一个覆盖映射。根据 [LN，第 3.2], 节，函数 $\{\mathrm{O}_T(h)\}_{T\in\mathcal{T}}$ 可以粘合在一起，得到定义在 $C'(F)$ 上的函数 $\mathrm{O}^{\mathcal{T}}(h)$，其中 $\mathcal{T}$ 是 $G(F)$ 中极大环面的 $G(F)$-共轭类集合。以下命题利用韦尔积分公式在 [LN，推论 3.2.2] 中得到了证明。

推论 2.2.1。 我们有恒等式 $\mathrm{O}(h)(a) = \Delta(a)\mathrm{O}^{\mathcal{T}}(h)(a)$ 对于$a \in C'(F)$成立。

**2.3. 余中心与轨道积分。** 沿袭 Harish- Chandra 的工作 [HC70][Var77], 函数

$$\mathrm{O}(h) : C'(F) \to \mathbb{C}$$

对每个 $h \in \mathcal{H}$ 都是有界的。当 $F$ 为非阿基米德时，Kazhdan 定理 [Kaz86a] 表明，映射 $h \in \mathcal{H} \mapsto \mathrm{O}(h)$ 的核由交换子 $[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$ 给出。这在 $F$ 为非阿基米德时，诱导出余中心 $\mathcal{H}/[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$ 与像 $\mathrm{O}(\mathcal{H}) = \{\mathrm{O}(h) \mid h \in \mathcal{H}\}$ 之间的一个同构。类似地，映射 $h \in \mathcal{H} \mapsto \mathrm{SO}(h)$ 定义了一个从光滑紧支撑函数空间到稳定轨道积分空间的映射，我们将其记为 $\mathrm{SO}(\mathcal{H})$。我们称 $\mathrm{SO}(\mathcal{H})$ 为 $\mathcal{H}$ 的稳定余中心。当 $F$ 为阿基米德时，对于 Schwartz 代数 $\mathcal{S}$ 中函数的轨道积分空间（分别为稳定轨道积分空间），我们也引入记号 $\mathrm{O}(\mathcal{S})$（分别为 $\mathrm{SO}(\mathcal{S})$）。

对于 $\pi$ $G(F)$ 的光滑不可约容许表示，其分布特征标 $\Theta_\pi$ 按定义是 $G(F)$ 上满足以下条件的分布：

$$\mathrm{tr}(\pi(h)) = \int_{G(F)} h(g)\Theta_\pi(g), \quad h \in \mathcal{H}.$$

当 $\mathcal{S}$ 在 $F$ 为阿基米德时，迹分布延拓为[Wal88，§8。1]根据 Harish-Chandra 的工作，已知 $\Theta_\pi$ 是一个不变的局部可积函数，并且在正则半单轨道上光滑。我们滥用记号，将 $\Theta_\pi$ 写作 $G(F)$，表示

令 $\Theta_\pi^C$: $C'(F) \to \mathbb{C}$ 为 $G(F)$ 的强正则半单共轭类空间 $C'(F)$ 上的诱导函数。现在， $h \in \mathcal{H}$的迹可以写成对 $C(F)$ 的积分

$$\mathrm{tr}(\pi(h)) = \int_{C(F)} \mathrm{O}(h)(a)\Theta_\pi^C(a)\omega_C = \langle \mathrm{O}(h), \Theta_\pi^C \rangle \tag{16}$$

其中， $\omega_C$是上一小节引入的 $C(F)$ 上的测度，而 $\langle \cdot, \cdot \rangle$是关于测度$\omega_C$的 $C(F)$ 上函数的标准配对。

类似地，对于任意局部 $L$参数 $\varphi$ 的 $G(F)$ 及其对应的 $L$-簇$\Pi_\varphi$，令 $\Theta_\varphi$ 表示与 $\varphi$ [Lan79]相关联的稳定分布特征标。则$\Theta_\varphi$ 下降为 $\Theta_\varphi^{\mathfrak{c}}$ 上的一个函数 $\mathfrak{c}(F)$ ，并且以下恒等式成立

$$\int_{G(F)} h(g)\Theta_\varphi(g)\,\mathrm{d}g = \int_{\mathfrak{c}(F)} \mathrm{SO}(h)(c)\Theta_\varphi^{\mathfrak{c}}(c)\omega_{\mathfrak{c}} = \langle \mathrm{SO}(h), \Theta_\varphi^{\mathfrak{c}} \rangle. \tag{17}$$

最后，我们讨论 Kazhdan 余中心的构造，它可以被视为通常余中心的完备化。

我们首先假设 $F$ 是非阿基米德的。根据构造，Bernstein 中心 $\mathcal{Z}$ 作用于 Hecke代数 $\mathcal{H}$ ，并保持交换子 $[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$ 不变。因此，它作用于余中心 $\mathrm{O}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}/[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$。对于任意有限子集 $I \subset \pi_0(\Omega)$，令 $\mathcal{H}_I = \mathcal{H}\epsilon_I = \epsilon_I\mathcal{H}$，其中 $\mathcal{H}_I = \mathcal{H}\epsilon_I = \epsilon_I\mathcal{H}$ 是一个 $\mathcal{Z}_I = \mathcal{Z}\epsilon_I$-模。交换子 $[\mathcal{H}_I, \mathcal{H}_I]$ 是一个 $\mathcal{Z}_I$-子模，因此 $\mathcal{H}_I/[\mathcal{H}_I, \mathcal{H}_I]$ 是一个 $\mathcal{Z}_I$-模。若 $I'$ 是 $\pi_0(\Omega)$ 中包含 $I$ 的有限子集，则 $\epsilon_{I'}\epsilon_I = \epsilon_I$。因此我们得到

包含 $\mathcal{H}_I \to \mathcal{H}_{I'}$ 以及一个满射 $\mathcal{Z}$-线性映射 $\mathcal{H}_{I'} \to \mathcal{H}_I$ 定义为$f \mapsto \epsilon_I f$。关于该包含映射，我们有 $[\mathcal{H}_{I'}, \mathcal{H}_{I'}] \cap \mathcal{H}_I = [\mathcal{H}_I, \mathcal{H}_I]$[Kaz86a]，引理 3。2],而满射 $f \mapsto \epsilon_I f$将 $[\mathcal{H}_{I'}, \mathcal{H}_{I'}]$映到$[\mathcal{H}_I, \mathcal{H}_I]$。由该包含映射可得一个单射 $\mathcal{H}_I/[\mathcal{H}_I, \mathcal{H}_I] \to \mathcal{H}_{I'}/[\mathcal{H}_{I'}, \mathcal{H}_{I'}]$，由该满射可得一个满射 $\mathcal{H}_{I'}/[\mathcal{H}_{I'}, \mathcal{H}_{I'}] \to \mathcal{H}_I/[\mathcal{H}_I, \mathcal{H}_I]$。在有限子集 $\mathcal{H}_I/[\mathcal{H}_I, \mathcal{H}_I]$上取 $I$的归纳极限仍是通常的余中心 $\mathcal{H}/[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$。相应的射影极限是***Kazh- dan*** 余中心，记为 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_G$，它是通常余中心的完备化$\mathcal{H}/[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$。事实上，我们有

$$\mathcal{H}/[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = \mathcal{C}^{\mathrm{fin}}$$

其中， $\mathcal{C}^{\mathrm{fin}}$ 是由满足以下条件的元素 $f \in \mathcal{C}$ 构成的 $\mathcal{Z}$-子模：对于某个有限集 $I$ 中的 $\pi_0(\Omega)$， $\epsilon_I f = f$。

迹 Paley-Wiener 定理 [BDK86] 给出了 $\mathcal{C}^{\mathrm{fin}}$的谱描述。定义在向量空间 $\ell$ $R(G(F))$ 上、以 $\mathrm{Irr}(G(F))$ 为基的线性形式具有如下形式

$$\ell(\pi) = \langle \mathrm{O}(h), \Theta_\pi^C \rangle$$

当且仅当它满足以下两个条件时，才存在某个 $h \in \mathcal{H}$ ： 对于 $G$ 的每个 Levi 子群 $M$ 以及 $M(F)$的每个不可约容许表示$\sigma$，函数 $\chi \mapsto \ell(\mathrm{Ind}_P^G($ $\sigma \otimes \chi))$在 $M(F)$的非分歧特征标环面上是正则的，其中 $P$是一个以 $M$ 为 Levi 分量的抛物子群，且诱导取归一化形式；此外，存在一个开紧子群 $K \subset G(F)$，使得只要 $\pi^K = 0$，就有 $\ell(\pi) = 0$ 。这类线性形式称为良形式。Kazhdan 余中心 $\mathcal{C}$ 由有限个 Bernstein 分支上的相容良形式构成，无需满足全局有限性要求。应将这一刻画与 [Psa23b]的 Lafforgue 簇上的无约束正则函数区分开来：在可约诱导参数处，迹值必须满足不可约构成因子之间的加法关系。

**2.4. 阿基米德变体。** 设 $G$ 是 $F = \mathbb{R}$ 上的一个约化群。可以将阿基米德 Kazhdan 余中心定义为对 $G(F)$ 的 $K$-类型的所有有限子集取射影极限^。具体而言，设 $K$ 是 $G(F)$ 的一个固定极大紧子群的不可约有限维表示^的等价类集合。对于任意 $\sigma \in K$，令 $e_{\sigma}$^ 为附属于 $\sigma$ 的幂等元。对于 $K$ 的任意有限子集 $I$ ，令 $\epsilon_I = \sum_{\sigma \in I} e_\sigma$。沿用非阿基米德情形中的相同思路，我们将 Kazhdan 余中心^定义为对 $K$ 的有限子集 $I$ 取射影极限所得的层级 $I$余中心 $\mathcal{S}_I/[\mathcal{S}_I, \mathcal{S}_I]$，其中 $\mathcal{S}_I = \epsilon_I \mathcal{S} \epsilon_I$，且商$\mathcal{S}_I/[\mathcal{S}_I, \mathcal{S}_I]$和射影极限都在 Fréchet 空间范畴中取。

或者，也可以对 $K$有限 Schwartzalgebra $\mathcal{S}_{(K)}$ 使用 $K$迹 Paley-Wiener 定理，然后在其谱刻画中去掉有限性条件。这就给出了 Kazhdan 余中心的阿基米德类比的另一种定义或刻画。根据 [Del86,

定理 1。9], 设 $P = MAN$ 是 $G$ˆ的一个尖抛物子群，具有 Langlands 分解。令 $M_{\mathrm{l.s.d}}$ 为 $M(F)$ 的不可约表示集合，其中的表示是离散级数的非退化极限 [**KZ82**，ˆ §12]。对于 $\delta \in M_{\mathrm{l.s.d}}$ 和 $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$，其中 $\mathfrak{a}$ =Lie$A$，令 $\pi_{\delta,\lambda}$ 为由 $\delta \otimes e^{\lambda} \otimes 1_N$从 $P = MAN$诱导到 $G$的归一化表示。

设 $P_j = M_j A_j N_j (j = 1,\ldots, S$是 $G$ 中包含 $G$的尖抛物子群的集合。设 $\mathrm{W}(A_j)$ 是ˆ作用于 $A_j$ 上的$(M_j)_{\mathrm{l.s.d}}$ 及$\mathfrak{a}_{j,\mathbb{C}}^*$的 Weyl群。以下定理见 [**Del86**，定理 1。9]。

定理 2.4.1。设

$$F_j : \left(\hat{M}_j\right)_{\mathrm{l.s.d}} \times \mathfrak{a}_{j,\mathbb{C}}^* \to \mathbb{C}, \quad j = 1, \ldots, S.$$

以下两个条件等价：

*(1)* 存在 $\phi \in \mathcal{S}_{(K)}$ 使得 $F_j(\delta, \lambda) = tr\pi_{\delta,\lambda}(\phi)$ 对任意 $(\delta, \lambda)$ 2 ˆ$(M_j)$ $_{\mathrm{l.s.d}} \times \mathfrak{a}_{j,\mathbb{C}}^*$, $j = 1, \ldots, S$均成立。*(2)* 函数 $F_j$ 具有以下性质：*(a)* 对任意 $j$， $F_j$ 在 $\delta$中有限支撑。*(b)* 对任意 $\delta$， $F_j(\delta, \cdot) \in \mathcal{FC}^0(\mathfrak{a}_j)$，其中 $\mathcal{FC}^0(\mathfrak{a}_j)$ 由定义在 $\mathfrak{a}_j$ 上的整函数组成，$\mathbb{C}$ 在有界垂直带内具有中等增长。详情参见 [*Del86*，第696]页；*(c)* 对任意 $j$， $F_j(w\delta, w\lambda) = F_j(\delta, \lambda)$ 对任意 $w \in W(A_j)$ 均成立；*(d)* 假设 $P_i \subset P_j$。则 $M_i \subset M_j$ 且 $A_i \supset A_j$。记 $P_i \cap M_j = M_i A_i^j N_i^j$为 $M_j$的抛物子群 $P_i \cap M_j$的 *Langlands*分解。则 $A_i^j = A_i \cap M_j$且 $N_i^j = N_i \cap M_j$。分解 $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_j \oplus \mathfrak{a}_i^j$ 将 $\mathfrak{a}_j^*$ 视为 $\mathfrak{a}_i^*$的子空间。假设 $Ind_{P_i \cap M_j}^{M_j}(\delta_i \otimes e^0 \otimes 1)$ $= \bigoplus_{l=1}^{R} \delta_{j,l}$ 满足 ˆ ˆ$\delta_i \in (M_i)_{\mathrm{l.s.d}}$ 且 $\delta_{j,l} \in (M_j)_{\mathrm{l.s.d}}$。那么

$$\forall \lambda \in \mathfrak{a}_{j,\mathbb{C}}^* \subset \mathfrak{a}_{i,\mathbb{C}}^*, \quad F_i(\delta_i, \lambda) = \sum_{l=1}^{R} F_j(\delta_{j,l}, \lambda).$$

利用前述定理，我们可以去掉定理 2.4.1 第 (2)(a) 部分中的有限性假设，并在阿基米德情形下引入以下关于 Kazhdan 余中心的谱刻画。

定义 2.4.2。沿用定理*2.4.1*中的记号，*Kazhdan* 余中心 $\mathcal{C}$ 定义为由以下函数组成的集合

$$F_j : \left(\hat{M}_j\right)_{\mathrm{l.s.d}} \times \mathfrak{a}_{j,\mathbb{C}}^* \to \mathbb{C}, \quad j = 1, \ldots, S$$

满足以下性质：

*(1)* 对于任意 $\delta$、 $F_j$（$\delta$、 $\cdot$） $\in \mathcal{FC}^0$（$\mathfrak{a}_j$），其中 $\mathcal{FC}^0$（$\mathfrak{a}_j$）由定义在 $\mathfrak{a}_j$、$\mathbb{C}$ 上的整函数组成，并且在有界垂直带内具有中等增长。详情请参见 [*Del86*，第 696] 页；*(2)* 对于任意 $j$、 $F_j$（$w\delta$、 $w\lambda$） $= F_j$（$\delta$、 $\lambda$），对任意 $w \in W$（$A_j$）；

(3) 假设 $P_i \subset P_j$。则 $M_i \subset M_j$ 以及 $A_i \supset A_j$。记 $P_i \cap M_j = M_i A_i^j N_i^j$ 为 $M_j$的抛物子$P_i \cap M_j$ 的*Langlands*分解。则 $A_i^j = A_i \cap M_j$ 以及 $N_i^j = N_i \cap M_j$。分解 $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_j \oplus \mathfrak{a}_i^j$ 将 $\mathfrak{a}_j^*$ 与 $\mathfrak{a}_i^*$的一个子空间对应起来。假设 $\mathrm{Ind}_{P_i \cap M_j}^{M_j}(\delta_i \otimes e^0 \otimes 1) = \bigoplus_{l=1}^{R} \delta_{j,l}$，其中 $\delta_i \in (\hat{}M_i)_{\mathrm{l.s.d}}$以及 $\delta_{j,l} \in (\hat{}M_j)_{\mathrm{l.s.d}}$。则

$$\forall \lambda \in \mathfrak{a}_{j,\mathbb{C}}^* \subset \mathfrak{a}_{i,\mathbb{C}}^*, \quad F_i(\delta_i, \lambda) = \sum_{l=1}^{R} F_j(\delta_{j,l}, \lambda).$$

与 Bernstein 中心一样，我们可以引入 Kazhdan 余中心的有限（分别为稳定）变体 $\mathcal{C}^{\mathrm{fin}}$ （分别为 $\mathcal{C}^{\mathrm{st}}$）和 $\mathcal{C}^{\mathrm{st},\ \mathrm{fin}}$。详细内容留给读者。

## 3. Lafforgue变换

本节构造 Lafforgue变换，即从 Kazhdan 余中心到 Bernstein 中心的自然映射。这一构造本质上是表示论的：它将余中心的，或轨道的，数据转换为谱乘子。此处回顾的内容主要取自 [**LN**，§5]。我们陈述主要结果并解释其含义，证明参见 [**LN**]。

**3.1. 定义与初步性质。** 固定一个 $G$ 定义在非阿基米德局部域 $F$ 上的约化群。令

$$\mathrm{Irr} = \mathrm{Irr}_G = \mathrm{Irr}(G(F))$$

表示 $G(F)$ 的不可约光滑容许表示的集合。根据 Psaromiligkos [**Psa23b**], 的工作，该集合按块由相应的 ***Lafforgue*** 簇中的开简单模点轨迹参数化。尖点支撑映射

$$\mathrm{Irr}(G(F)) \longrightarrow \Omega(G(F))$$

是代数的且有限到一。Bernstein 中心 $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_G$ 可与 $\Omega(G(F))$ 上正则函数的环相识别。

另一方面，Kazhdan 余中心 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_G$的每个元素都会在 $\mathrm{Irr}(G(F))$ 上给出一个迹函数，其在上述诱导族中的正则性如下所述。事实上，对于 $c \in \mathcal{C}$ 和 $\pi \in \mathrm{Irr}(G(F))$，可以计算迹

$$\mathrm{Tr}(c, \pi).$$

当 $c$ 由一个测试函数表示时，这就是算子在 $\pi$上的通常迹，并且该迹只取决于测试函数在余中心中的像。

存在一个开稠密子簇

$$\Omega'(G) \subset \Omega(G)$$

由尖点数据组成，其向 $G(F)$ 的抛物诱导是不可约的。它的原像

$$\mathrm{Irr}'(G(F)) \subset \mathrm{Irr}(G(F))$$

同构于 $\Omega'(G)$。对于每个 $c \in \mathcal{C}$，其在 $\mathrm{Irr}'(G(F)) \simeq \Omega'(G)$ 上的迹函数都唯一延拓为整个 Bernstein簇上的正则函数：该延拓由完全抛物诱导表示上的迹给出，其正则性由迹 Paley-Wiener 定理推出。这给出了 Lafforgue 变换

$$\mathrm{Laf} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{Z}. \tag{18}$$

等价地，若 $[M,\sigma]$ 是一个尖点数据，其中 $M$ 是 $G$ 的 Levi 子群，且 $\sigma$ 是 $M(F)$ 的超尖点表示，则

$$\mathrm{Laf}(c)\big([M,\sigma]\big) = \mathrm{Tr}\big(c, \mathrm{Ind}(\sigma)\big), \tag{19}$$

其中 Ind 表示从 $M(F)$ 到 $G(F)$ 的归一化抛物诱导。

命题 3.1.1 ([LN,§5.1])。 *Lafforgue*变换

$$\mathrm{Laf} : \mathcal{C} \to \mathcal{Z}$$

是一个 $\mathcal{Z}$-线性满射。限制到有限部分后，它诱导出一个$\mathcal{Z}$-线性态射

$$\mathrm{Laf} : \mathcal{C}^{\mathrm{fin}} \to \mathcal{Z}^{\mathrm{fin}}.$$

此外，Laf 将 $\mathcal{C}^{\mathrm{st},\ \mathrm{fin}}$ 映射到 $\mathcal{Z}^{\mathrm{st},\ \mathrm{fin}}$。

最后的断言应作如下理解。$\mathcal{C}^{\mathrm{st},\ \mathrm{fin}}$ 中的元素由测试函数的稳定轨道积分表示。另一方面，$\mathcal{Z}^{\mathrm{fin}}$ 中的分布由 $G(F)$ 上的不变局部可积函数表示，参见 [MT02，定理 2.5]。因此，$\mathrm{Laf}(\mathcal{C}^{\mathrm{st},\ \mathrm{fin}})$ 中的元素由 $G(F)$ 上同时具有稳定不变性的局部可积函数表示，因而由 $G(F)$ 上的稳定不变函数表示。

**3.2. 与稳定传递的相容性。** Lafforgue变换应当与 Langlands 稳定传递相容。假设

$$\rho : {}^{L}H \to {}^{L}G$$

是一个 $L$-群的同态。Langlands 稳定传递应给出一个映射

$$\mathcal{T}^{\mathrm{st}}_{\rho} : \mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{G} \to \mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{H}$$

与稳定特征标的转移相对偶。在谱侧，预期存在一个同态

$$\mathcal{Z}^{\mathrm{st}}_{\rho} : \mathcal{Z}^{\mathrm{st}}_{G} \to \mathcal{Z}^{\mathrm{st}}_{H}$$

该同态由相应的 $L$-数据包函子性映射诱导而来。预期的相容性通过下图的交换性表示:

(20)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_G^{\mathrm{st}} & \xrightarrow{\mathcal{T}_\rho^{\mathrm{st}}} & \mathcal{C}_H^{\mathrm{st}} \\ {\scriptstyle \mathrm{Laf}_G^{\mathrm{st}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Laf}_H^{\mathrm{st}}} \\ \mathcal{Z}_G^{\mathrm{st}} & \xrightarrow[\mathcal{Z}_\rho^{\mathrm{st}}]{} & \mathcal{Z}_H^{\mathrm{st}}. \end{array}$$

这一预期解释了为什么 Lafforgue 变换在 Braverman-Kazhdan背景下是自然的。稳定传递自然地定义在稳定余中心上，而局部伽马因子则属于 Bernstein 中心一侧。因此，Lafforgue 变换是连接轨道侧与谱侧的机制。

**3.3. Lafforgue 变换的截面**。一般而言，Laf 并非单射，因此截面有许多种选择。

对于 [LN], 中的应用，人们会使用具有以下性质的一个特 distinguished截面。设 $G = \mathrm{SL}_2$ 或 $\mathrm{GL}_2$。设 $\mathcal{C}^{\perp,\mathrm{triv}}$ 为$\mathcal{C}$ 中由与 $G(F)$ 的一维特征正交的元素组成的子空间，即

$$\langle c, \chi \rangle = 0$$

对于 $G(F)$ 的每个一维特征 $\chi$。存在一个截面

$$\mathrm{LafSec} : \mathcal{Z} \to \mathcal{C}^{\perp,\mathrm{triv}} \subset \mathcal{C}$$

使得

$$\mathrm{LafSec}(z)\big(\mathrm{Ind}_M^G(\sigma)\big) = z\big([M,\sigma]\big)$$

对于每个尖点数据 $[M,\sigma]$。

限制在有限稳定部分时， $\mathcal{Z}^{\mathrm{st},\ \mathrm{fin}}$ 和 $\mathcal{C}^{\mathrm{st},\ \mathrm{fin}}$中的元素可以实现为 Steinberg-Hitchin 基底 $\mathfrak{c}(F)$上的函数。 [LN] 的主要结果之一是，对于 $G = \mathrm{SL}_2$ 或$\mathrm{GL}_2$, ，截面LafSec 和变换Laf 可以实现为 $\mathfrak{c}(F)$上的显式积分变换。

定理3.3.1 ([LN，定理 5.1。3])。设 $G$ =$\mathrm{SL}_2$ 或 $\mathrm{GL}_2$ 是剩余特征不等于二的局部域 $F$ 上的群。对于任意分布 $z \in_{\mathcal{Z}^{\mathrm{st},\ \mathrm{fin}}}$ 若其属于稳定 *Bernstein* 中心且支撑于有限个 *Bernstein* 分支，则存在一个稳定不变函数

$$\mathcal{J}_G = \mathcal{J}_{\mathfrak{c}} \circ \mathbf{c}$$

使得 $z = \mathcal{J}_G \mathrm{d}g$。那么，$\mathrm{LafSec}(z)$ 作为 ***Steinberg-Hitchin*** 基底上的函数，由以下公式给出

(21)
$$\mathrm{LafSec}(z) = \mathcal{F}_\psi\left(\frac{\mathcal{F}_{\psi^{-1}}(\mathcal{J}_{\mathfrak{c}})}{|\cdot|}\right),$$

其中，傅里叶变换和 $|\cdot|$ 都是在迹变量中进行的。

定理 3.3.1 在 $F$ 具有剩余特征二时仍然成立；这一推广将在即将发表的合作论文中阐述 [LN2]。

在 [LN],中所讨论的范围内，定理3.3.1 的证明依赖于稳定传递的 Gelfand-Graev公式以及二面体表示的下降公式；参见 [LN，§5–6]。对于本报告而言，重要的是，表示论截面LafSec 通过 Steinberg-Hitchin 底空间上的显式傅里叶型积分变换来实现，其公式具有动机性质，并且对每个局部域均有效。

在稳定有限部分上，逆变换形式上给出为

$$\mathrm{Laf}(c) = \mathcal{F}_{\psi}\big(|\cdot|\,\mathcal{F}_{\psi^{-1}}(c)\big), \tag{22}$$

只要 $c$ 属于相应的稳定有限余中心且该表达式有定义。关于这些公式的解析含义，见 [LN，§5。5]其中使用了 Moy 和 Tadic 的显式计算。

**3.4. 超尖点幂等元**。我们回顾LafSec 对 $G = \mathrm{SL}_2$，的超尖点幂等元所产生的作用，参见 [LN，§5。2]。设 $\pi$ 是 $G(F)$的一个超尖点表示。它给出了 Bernstein簇中的一个孤立点，我们将 $e_\pi \in \mathfrak{Z}$ 记为定义在Ω上的幂等函数，该函数在 $\pi$ 处取值为一，在其他连通分支上取值为零。

定理 3.4.1（[LN，定理 5.2。1]）。设 $G$ =$\mathrm{SL}_2$，并设 $\pi$ 是 $G$（$F$） 的超尖表示。

（1） 幂等元 $e_\pi$ 表示为

$$e_\pi = \Theta_\pi d_\pi \,\mathrm{d}g,$$

其中， $\Theta_\pi$ 是 $\pi$ 的分布特征标，而 $d_\pi$ 是形式次数。形式次数取决于 *Haar*测度的选择，但乘积 $d_\pi \mathrm{d}g$ 与该选择无关。

（2）作为正则半单共轭类集合上的函数，有

$$\mathrm{LafSec}(e_\pi) = \Delta\, v\, \mathbf{1}_{\mathrm{ell}}\, \Theta_\pi.$$

其中， $\Delta$ 是 *Weyl* 判别式绝对值的平方根， $\mathbf{1}_{\mathrm{ell}}$ 是椭圆正则半单轨道集的特征函数，而 $v$ 是椭圆正则半单轨道集上体积函数的倒数。

因此，Lafforgue 截面将超尖 Bernstein 幂等元——其在谱侧表示为特征标乘以形式次数——映射为余中心中的规范化椭圆特征标。这是“Lafforgue变换连接谱侧与轨道侧”这一理念最清晰、最具体的体现之一。

**3.5. 实Chebyshev公式**。 对于$\mathrm{SL}_2$（$\mathbb{R}$）的离散级数表示，存在定理3.4.1的阿基米德类比。设 $\Theta_\ell$ 为权 $\ell \geq 1$的稳定离散级数特征标，且设 $d_\ell = \ell$ 为其形式次数。以下结果见 [LN，§5。3]。

定理 3.5.1（[LN，定理5.3。1]）。对于 $G=\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，*Lafforgue* 变换将 $d_\ell\Theta_\ell$ 送到椭圆部分 $v\Delta\Theta_\ell^{\mathrm{ell}}$。等价地，

$$\mathcal{F}_\psi\left(\frac{\mathcal{F}_{\psi^{-1}}(d_\ell\Theta_\ell)}{|\cdot|}\right)=v\Delta\Theta_\ell^{\mathrm{ell}}. \tag{23}$$

证明是利用切比雪夫多项式进行的初等计算。记

$$x=e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta,$$

则有

$$\frac{e^{i\ell\theta}+e^{-i\ell\theta}}{|e^{i\theta}-e^{-i\theta}|}=\frac{2T_\ell(x/2)}{\sqrt{4-x^2}},$$

其中 $T_\ell$ 是第一类切比雪夫多项式。椭圆离散级数特征可表示为第二类切比雪夫多项式的形式。定理 3.5.1 中的恒等式于是归结为两族切比雪夫多项式之间的标准微分关系。

**3.6. 稳定 Lafforgue 变换的像。** 对于 $G=\mathrm{SL}_2$上的奇剩余特征非阿基米德局部域，稳定 Lafforgue 截面的像具有简单的描述。

定理 3.6.1（[LN，定理 5.4。1]）。设 $G=\mathrm{SL}_2$ 上的 $F$，其中 $F$ 具有奇剩余特征。其像为

$$\mathrm{LafSec}:\mathcal{Z}^{\mathrm{st}}\to\mathcal{C}^{\mathrm{st}}$$

是稳定 *Kazhdan* 余中心中由与平凡表示的特征正交的元素组成的子空间 $\mathcal{C}^{\mathrm{st},\ \perp,\ \mathrm{triv}}$。

我们回顾 [LN，§5.4]中的证明思路。首先，下面定理 3.7.1 中的解析消失性质意味着 LafSec 的像与平凡特征正交。其次，迹 Paley-Wiener 定理以及对 $\mathrm{SL}_2$ 稳定包的描述表明，$\mathcal{C}^{\mathrm{st},\ \perp,\ \mathrm{triv}}$ 中的每个元素都可由 LafSec 作用于稳定 Bernstein 中心得到。对于 $G=\mathrm{GL}_2$，也有类似的陈述，只需进行涉及中心特征的相应修正。

**3.7. 稳定 Bernstein 中心函数的解析性质。** 公式（21）并非纯粹形式上的。必须知道傅里叶变换后除以 $|\cdot|$ 所得的商是可积的。以下 [LN，§5.5],中的定理给出了这一点，其证明在非阿基米德情形中使用了 Moy 和 Tadic 的显式公式。

定理 3.7.1（[LN，定理 5.5。1]）。设 $G=\mathrm{SL}_2$ 或 $\mathrm{GL}_2$,，并假设 $F$ 的剩余特征不等于二。对于任意 $\mathcal{J}_G\in\mathcal{Z}^{\mathrm{st},\ \mathrm{fin}}_G$，以下陈述成立。

(1) 存在一个绝对可积函数 $\mathcal{J}_{\mathfrak{c}}$，定义在斯坦伯格-希钦基 $\mathfrak{c}_G(F)$ 上，使得

$$\mathcal{J}_G = (\mathcal{J}_{\mathfrak{c}} \circ \mathbf{c})\, \mathrm{d}g.$$

对于 $G = \mathrm{GL}_2$,，函数 $\mathcal{J}$ 在行列式变量上快速衰减。

(2)迹变量中的逆傅里叶变换 $\mathcal{F}_{\psi^{-1}}(\mathcal{J}_{\mathfrak{c}})$ 可表示为一个在全局有界且在零点处消失的光滑函数。

(3) 函数

$$\frac{\mathcal{F}_{\psi^{-1}}(\mathcal{J}_{\mathfrak{c}})}{|\cdot|}$$

在迹变量上绝对可积。因此，对于任意 *étale* 二次 $F$-代数 $K$，函数

$$\mathcal{F}_{\psi}\left(\frac{\eta_K \cdot \mathcal{F}_{\psi^{-1}}(\mathcal{J}_{\mathfrak{c}})}{|\cdot|}\right)$$

在全局上有界，其中 $\eta_K$ 是由 $K$确定的 $F^{\times}$的二次特征。

这个定理对当前讨论有两个推论。首先，它证明了定义 21 式中积分公式$\mathrm{LafSec}(z)$ 在 Steinberg-Hitchin 基底上成立。其次，$\mathcal{F}_{\psi^{-1}}(\mathcal{J}_{\mathfrak{c}})$ 在零点处的消失解释了为什么稳定 Lafforgue 截面的像与平凡特征正交，正如定理 3.6.1 所述。

注记 3.7.2。由于经过 *Weyl*判别式平方根归一化的轨道积分是局部有界的，定理*3.7.1* 的第一项断言意味着相应的分布 $\mathrm{J}_G$ 在$G(F)$上局部可积。对于 $G = \mathrm{GL}_2$,，行列式变量方向上的快速衰减可通过沿中心应用 *Mellin* 变换得到。

**3.8. 进一步的预期**。对于局部域 $F$上的一般约化群 $G$，人们预期存在一个

$$\mathrm{LafSec} : \mathcal{Z} \to \mathcal{C}$$

Lafforgue变换的特 distinguished截面。在限制到 $\mathcal{Z}^{\mathrm{st},\ \mathrm{fin}}$之后，Laf 和 LafSec都应当能够通过 在 Steinberg-Hitchin 基底上的显式积分变换来表示，该基底属于 $G$。在秩一情形下，定理 3.3.1 给出了这样的公式。对于一般约化群，Ngô 与作者已经为稳定 Lafforgue 变换及其在 Steinberg-Hitchin 基底上的截面提出了猜想的解析公式。这些公式将发表于正在准备中的著作[**LN2**]。

人们还期望特 distinguished截面的像满足一个自然的正交条件。在上文考察的秩一情形中，该

像与一维特征标正交。更一般地，所期望的像应与 $G(F)$ 的不可约光滑容许表示的分布特征正交，其中这些表示并非本质上温和。

## 参考文献

[BDK86] J. Bernstein、P. Deligne 和 D. Kazhdan，约化 $p$-adic 群上的迹 Paley-Wiener 定理，《J. Analyse Math.》47 (1986)，180–192。[Ber84a] J. Bernstein，Bernstein“中心”，《局部域上约化群的表示》，Travaux en Cours，Hermann，巴黎，1984，由 P. Deligne 编，1–32 页。[BK00] A. Braverman 和 D. Kazhdan，表示的 $\gamma$函数与提升，《Geom. Funct. Anal.》(2000)，特刊第 I 部分，237–278 页，附 V. Vologodsky 的附录，《GAFA 2000》（特拉维夫，1999）。[BK14] J. Bernstein 和 B. Krötz，Harish-Chandra 模的光滑 Fréchet 整体化，《Israel J. Math.》199 (2014)，第 1 期，45–111。[BKV13] R. Bezrukavnikov、D. Kazhdan 和 Y. Varshavsky，稳定中心猜想的范畴方法，arXiv 预印本 arXiv:1307.4669 (2013)。[Del86] P. Delorme，关于 $L^2(G/\Gamma)$ 中重数的极限公式和渐近公式，《Duke Math. J.》53 (1986)，第 3 期，691–731。[Del05] , 关于 Arthur 的 Paley-Wiener 定理，《Ann. of Math.》(2) 162 (2005)，第 2 期，987–1029。[FLN10a] E. Frenkel、R. Langlands 和 B. C. Ngô，迹公式与函子性：计划的开端，《Ann. Sci. Math. Québec》34 (2010)，第 2 期，199–243。[GG63] I. M. Gel'fand 和 M. I. Graev，元素属于局部紧域的二阶矩阵群的表示及局部紧域上的特殊函数，《Uspehi Mat. Nauk》18 (1963)，第 4(112) 期，29–99。[GJ72] R. Godement 和 H. Jacquet，单代数的 ζ 函数，《Lecture Notes in Mathematics》，第 260 卷，Springer-Verlag，柏林–纽约，1972。[Hai14] T. Haines，稳定 Bernstein 中心与 Shimura 变簇的测试函数，《自守形式与伽罗瓦表示》第 2 卷，《 London Math. Soc. Lecture Note Ser.》，第 415 卷，Cambridge Univ. Press，剑桥，2014，118–186 页。[HC70] Harish-Chandra，约化 $p$-adic 群上的调和分析，《Lecture Notes in Mathematics》，第 162 卷，Springer-Verlag，柏林–纽约，1970，G. van Dijk 笔记。[JL21] D. Jiang 和 Z. Luo，$\mathrm{GL}_1$, 上的某些傅里叶算子及其相关的泊松求和公式，arXiv:2108.03566 (2021)。[JL22] , $\mathrm{GL}_1$ 上的某些傅里叶算子与局部 Langlands 伽马函数，《Pacific J. Math.》318 (2022)，第 2 期，339–374。[JL23] D. Johnstone 和 Z. Luo，局部域上 $\mathrm{GL}_2$ 的函子提升的稳定传递，预印本 (2023)。[JLZ22] D. Jiang、Z. Luo 和 L. Zhang，辛群上的调和分析与伽马函数，即将发表于《Memoirs of the American Mathematical Society》(2022)。[Kaz86a] D. Kazhdan， $p$-adic 群的尖点几何，《J. Analyse Math.》47 (1986)，1–36 页。[Kot82] R. Kottwitz，约化群中的有理共轭类，《Duke Math. J.》49 (1982)，第 4 期，785–806。[Laf14a] L. Lafforgue，专题讲演 3（7 月 3 日，星期四）：GL(2) 的情形：仍然形式化的局部研究（附一段关于一般情形的补充）。

[Laf16] ———, 朗兰兹函子性原理作为加法律推广问题，技术报告，高等科学研究院预印本，2016。[Lan70] R. Langlands，自守形式理论中的问题，18–61 页。《Lecture Notes in Math.》，第 170 卷。[Lan79] , 稳定共轭：定义与引理，《Canadian J. Math.》31 (1979)，第 4 期，700–725。[Lan13] , 奇点与转移，《Ann. Math. Qué.》37 (2013)，第 2 期，173–253。[LN] Z. Luo 和 B. C. Ngô，$SL_2$ 和 $GL_2$, 上的非阿贝尔傅里叶核，arXiv:2409.14696。[LN2] Z. Luo 和 B. C. Ngô，一般约化群的 Lafforgue变换，准备中。[Luo] Z. Luo，《Braverman 和 Kazhdan 猜想》导论，新加坡讲义。[Luo19a] , 关于局部因子的 Braverman-Kazhdan 猜想：球面情形，《Pacific J. Math.》300 (2019)，第 2 期，431–471。[MT02] A. Moy 和 M. Tadić，以不变局部可积函数刻画 Bernstein 中心，《Represent. Theory》6 (2002)，313–329。[Ngô20] B. C. Ngô，汉克尔变换、朗兰兹函子性与自守 $L$函数的函数方程，《Jpn. J. Math.》15 (2020)，第 1 期，121–167。[SS13] P. Scholze 和 S. Shin，分歧分裂点处紧酉群 Shimura簇的上同调，《J. Amer. Math. Soc.》26 (2013)，第 1 期，261–294。[Ste74] R. Steinberg，代数群中的共轭类，《Lecture Notes in Mathematics》，第 366 卷，Springer-Verlag，柏林–纽约，1974，Vinay V. Deodhar 笔记。[Tat50] J. Tate，数域上的傅里叶分析与海克的ζ函数，ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，1950，博士论文—普林斯顿大学。[Wal88] N. R. Wallach，实约化群。I，《Pure and Applied Mathematics》，第 132 卷，Academic Press, Inc.，波士顿，1988。[BPLZZ21] R. Beuzart-Plessis 、 Y. Liu 、 W. Zhang 和 X. Zhu，尖点谱的孤立性及其在 Gan–Gross–Prasad猜想中的应用，《Ann. of Math.》(2) 194 (2021)，第 2 期，519–584。[BT65] A. Borel 和 J. Tits，约化群，《Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.》(1965)，第 27 期，55–150。[KZ82] A. Knapp 和 G. Zuckerman，半单群不可约温和表示的分类，《Ann. of Math.》(2) 116 (1982)，第 2 期，389–455。[Psa23b] K. I. Psaromiligkos，Lafforgue 簇与诱导表示的不可约性，2023 年 5 月，arXiv:2211.11834 [math]。[Var77] V. S. Varadarajan，实约化群上的调和分析，《Lecture Notes in Mathematics》，第 576 卷，Springer-Verlag，柏林–纽约，1977。

数学系，普渡大学，美国印第安纳州西拉斐特市 47907电子邮件地址：luo642@purdue.edu