arXiv:2611.32638v1 [q-fin.PM] 24 Nov 2026

投资组合选择中的半方差与半波动率：下行风险投资组合模型的统一框架

Francesco Cesarone[a], *、Massimiliano Corradini[a]、Nicolò Giunta[a]

[a]罗马第三大学，商业经济学系，*Via Silvio D'Amico* 路77号，罗马，*00145*，意大利

摘要

本文研究了超越最小风险模型的投资组合选择中的下行风险；在最小风险模型中，半方差及其平方根——半波动率——会产生相同的投资组合。下行风险模型通常被视为基于方差的对应模型的直接扩展，尽管不同类别的投资组合问题要求风险度量具备不同的性质。我们按照风险度量关于权重的正齐次性度，将这些模型进行分类：一次齐次使风险贡献之和等于投资组合风险，并使分散化程度和收益风险比保持尺度不变。对于三个阈值——投资组合均值、零和市场指数收益率——我们提出了仅做多下行风险的一个非退化条件；在该条件下，风险平价、最大分散化和索提诺比率问题均具有良好定义。在此条件下，两个比率问题可化为凸规划，而半波动率的可微性确保风险预算公式能够实现预设预算。我们还刻画了低于均值的半波动率具有可加性的条件。最后，我们基于两个真实世界总收益率数据集开展样本外分析，这两个数据集分别包含道琼斯指数和纳斯达克100指数的当前成分股。我们在滚动窗口回测中比较了十七种仅做多策略，涵盖最小风险、收益风险比、风险平价和最大分散化策略族，并通过区块自助法推断检验各策略族内部的差异。

*通讯作者。电子邮箱：francesco.cesarone@uniroma3.it（Francesco Cesarone）、massimiliano.corradini@uniroma3.it（Massimiliano Corradini）、nicolo.giunta@uniroma3.it（Nicolò Giunta）

关键词：投资组合选择、下行风险、半波动率、风险平价、最大分散化、样本外分析

1. 引言

自Markowitz（1952年）的开创性贡献以来，投资组合选择主要在均值–方差范式下发展，其凸二次规划具有可处理性；因此，方差仍然是大多数投资组合选择模型中的标准基准（Kolm 等人，2014年）。

然而，方差对向上和向下的偏离进行对称惩罚，而投资者通常更加关注不利结果。因此，人们开始关注下行风险度量，其中仅考虑负偏离的半方差是讨论最广泛的替代方案（Markowitz，1959年；Hogan 和 Warren，1974 年；Bawa，1975，1976；Fishburn，1977；Nawrocki，1999年；Estrada，2006年；Cesarone 等人，2026年）。非方差风险度量的另一主要分支是线性规划方法，其源于Konno 和 Yamazaki （1991年）提出的平均绝对偏差（MAD）模型；参见Mansini 等人 （2014年）。

半方差传统上被认为不如方Estrada、2008年；Jin 等，2006年；Yao 等人，2021年），但对于情景数据，均值–半方差问题长期以来一直可以通过二次规划求解（Markowitz 等人，1993年），而近期研究结果表明，半方差、半协方差矩阵和下偏矩模型可以采用更具结构性的处理方式（Cesarone 等人，2026年）。下行风险模型通常被描述为其基于方差的对应模型的直接扩展，却未明确指出，不同类别的投资组合问题对风险度量的结构属性有不同要求，而这会在最小风险情形之外带来具体影响。

风险预算在波动率领域已得到充分确立（Maillard 等人，2010年；Bruder 和 Roncalli，2012年；Spinu，2013年；Roncalli，2013年），后来也扩展至条件风险价值（Boudt 等人，2013年；Cesarone 和 Colucci，2018年）。Bruder 和 Roncalli（2012年）虽未给出证明，但指出其对数形式可推广至任何具有欧拉分解的凸风险度量。除仅做多的波动率情形外，可处理性都是针对具体形式逐一确立的：风险平价被表述为一个非凸最小二乘问题（Bai 等人，2016年）；放弃仅做多结构后，则采用进化启发式方法求解（Hochreiter，2015年）；而这一问题直到最近才得到解决（Cetingoz 等人，

2024年）。分散比率最大化会变成非凸问题，因此需要借助全局优化方法（Barkhagen 等人，2023年）；下行表现比率则需要分别重新表述，例如 Kap-sos 等人（2014年）提出的 Omega 比率。因此，反复出现的障碍在于模型设定过于一般，而非风险度量具有下行风险属性。

下行风险投资组合模型应区分二次齐次与一次齐次下行风险度量。半方差关于权重是二次正齐次的，因此在最小风险模型中，它是方差的自然下行风险对应量，并且与其平方根具有相同的极小值点。半波动率是一次正齐次的，也是分散化比率和绩效比率所要求的度量，因为这些比率不受权重缩放的影响。风险预算适用于这两种齐次度数，但只有一次齐次度量会对风险贡献进行归一化，使其总和等于风险。低于均值的半波动率具有上述区别，其依据的性质正是 Ogryczak 和 Ruszczyński （1999年，2001）（第2.2节），而将这些性质系统地用作组织原则才是本文的新意。

本文的贡献如下。首先，我们在这一基于次数的分类法中明确了阈值。我们针对相对于某一阈值（该阈值可以是随机的，例如市场指数收益率）的仅做多下行风险，给出一个非退化条件（假设 2）；在该条件下，固定目标和相对于基准的风险平价、最大分散化及索提诺比率问题均适定。该条件并不能由其低于均值的对应条件推出，我们在命题 2 中对后者进行了刻画。对于比率模型，权重的凸性、正性和一次齐次性已足够，阈值仅通过正性发挥作用。这些正是将收益—风险比率化为凸规划所需的条件（Schaible，1974 年；Stoyanov 等人，2007年）；Cesarone 等人（2025年）也将这一方法用于分散化比率，我们在引理 2 中重述了该结果。作为 Fischer（2003年）结果的一个特例，投资组合半波动率连续可微，且具有显式梯度；与其 L^1 对应模型不同，它不要求收益分布满足连续性假设（引理 1），因此，对数程序能够实现预设的下行风险预算（命题 3）。其次，我们刻画了低于均值的半波动率的可加性（引理 3 和定理 1），以及 Ararat 等人（2024年，引理 2 和定理 6）所述结果的半波动率对应形式；其中的新颖之处在于，由 L^2 结构所要求的下行比例条件。由此得到的风险平价投资组合闭式解（命题 4）仅适用于不存在下行分散化的资产池，这是一个极限情形。S.7.1 节

补充材料列出了每项理论结果及其假设、最接近的先前成果和状态（重述、特化、扩展或新结果）。第三，继早期对均值–方差投资组合与均值–下行风险投资组合的比较之后（Harlow，1991年；Grootveld 和 Hallerbach，1999年），我们在两个真实世界的总收益数据集上，对十七种仅做多策略进行了样本外比较，数据期分别为 18.6 年和 14.1 年；并通过区块自助法推断检验了各策略家族内部的差异。研究设计沿用了Cesarone 和 Colucci (2018年) 对最小风险和分散化策略的比较，并在其模型类别中增加了两个维度：风险度量和阈值。以半波动率替代波动率并未使夏普比率出现显著差异，而市场指数阈值带来的变化大多幅度更大，但往往估计不精确。

第 2 节介绍理论框架，第 3 节介绍投资组合模型以及凸性和齐次性在模型可处理性中的作用，第 4节介绍样本外分析，第 5 节给出结论。 附录 A汇总可加性结果，附录 B 则收录证明；补充材料还提供了更多检验和分析。

2. 理论框架

2.1. 初步概念

设 $(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ 为一个概率空间，$L^2 := L^2(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ 是平方可积随机变量空间，其正锥为 $L^2_+ := \{Z \in L^2 : Z \geq 0\ \mathbb{P}\text{-几乎处处}\}$。对于 $z \in \mathbb{R}$, $z_+ := \max\{z, 0\}$ 和 $z_- := \max\{-z, 0\}$，它们逐点作用于 ω 中的随机变量上。

对于具有线性收益 $R_1,\ \ldots\ldots,\ R_n \in L^2$ 的 n 个资产及其期望收益$\mu_i := \mathbb{E}[R_i]$，令 $R := (R_1,\ \ldots\ldots,\ R_n)^\top$，$\mu := (\mu_1,\ \ldots\ldots,\ \mu_n)^\top$，并将 e_i 记为 $\mathbb{R}^n$ 的第 i 个标准基向量。对于投资组合 $x \in \mathbb{R}^n$，其线性收益为

$$R_P(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i R_i = R^\top x,$$

而一个资金全部投入的只做多投资组合位于单纯形内

$$\Delta := \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \mathbf{1}^\top x = 1\right\}.$$

该结果对任意 $\mathbb{P}$均成立，并且在第 4 $\mathbb{P}$ 是以下各项的经验分布 D_L 个等概率历史情景（第4.1节；回溯法，参见例如DeMiguel 等（2009）；Cesarone 等（2026））。

由于 $x \mapsto R_P(x)$ 是线性的，风险泛函 $\rho: L^2 \to \mathbb{R}_+$ 的凸性和正齐次性 $x \mapsto \rho(R_P(x))$ 也会传递到该函数。[1] 泛函 f 是度为 $k > 0$ 的正齐次泛函，当且仅当 $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ 对每个 $\lambda \geq 0$均成立；对于 $k = 1$ 次可加性与凸性是等价的。

2.2. 方差、波动率、半方差与半波动率

对于 $X \in L^2$，$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ and $\mathrm{sd}(X) := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$；在投资组合层面，$\mathrm{Var}(R_P(x)) = x^\top \Sigma x$ and $\sigma_P(x) := \sqrt{x^\top \Sigma x}$，其中 $\Sigma := \mathrm{Cov}(R)$ 为资产收益的协方差矩阵。按照 Rockafellar 等人（2006）的定义，标准差是一种一阶偏差度量，而方差为二阶，且不满足次可加性（表1）。关于半方差、半协方差矩阵和下部部分矩，参见 Cesarone 等人（2026年）。

定义 1 (半方差)。对于 $X \in L^2$ 和目标值 $\tau \in L^2$，低于目标值的半方差和均值以下半方差分别定义为

$$\mathrm{S}_\tau^2(X) := \mathbb{E}[(X - \tau)_-^2], \qquad \mathrm{S}_\mu^2(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])_-^2].$$

在投资组合层面，$\mathrm{S}_\mu^2(R_P(x)) = \mathbb{E}[(R_P(x) - \mu^\top x)_-^2]$。

随机目标值涵盖确定性阈值 $\tau \in \mathbb{R}$ (Bawa，1975年；Fishburn，1977年)以及市场指数收益率等随机基准R^I (Meade 和 Beasley，2011年)，其表示形式将在第 R_t^I 4节中给出。两种半方差关于 x都是凸的，包括随机目标值在内，因为 $u \mapsto u_-^2$ 是凸的，而$x \mapsto R_P(x) - \tau$和 $x \mapsto R_P(x) - \mu^\top x$ 是仿射的。

注 1. 与方差不同，低于均值半方差通常无法表示为 $x^\top \Sigma^- x$ 一个与权重无关的矩阵 Σ^-，因为 $\mathbb{E}[(R_P(x) - \mu^\top x)_-^2]$ 中的负部作用于投资组合收益，而非单个资产收益。因此，半协方差矩阵是内生的，要精确表示它，需要一个 $\Sigma^-(x)$ 取决于投资组合的矩阵（*Estrada*、*2008年*；*Cheremushkin*、*2009年*；*Cesarone* 等人、*2026年*）。

[1]风险度量 在此采用广义含义，而非公理化的相干风险度量意义（Artzner 等人，1999年；Rockafellar 等人，2006年）。

定义 2（半波动率）。对于 $X \in L^2$ 和目标值 $\tau \in L^2$，低于均值半波动率和低于目标半偏差分别定义为

$$\mathrm{S}_\mu(X) := \left(\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])_-^2]\right)^{1/2}, \qquad \mathrm{S}_\tau(X) := \left(\mathbb{E}[(X - \tau)_-^2]\right)^{1/2}.$$

在投资组合层面，我们写作 $\mathrm{S}_P(x) := \mathrm{S}_\mu(R_P(x))$。

在本文中，半波动率指低于均值的情形，而半偏差指相对于一般目标值的情形；表 3 的策略名称中的标签 SVol（半波动率）涵盖这两种情形。我们回顾一下，低于均值的半波动率是 *Ogryczak* 和 *Ruszczyński* 的标准半偏差（1999年、2001），并且在 $p = 2$ 中，是单侧矩一致风险测度 $\rho_{p,\,a}(X) = -\mathbb{E}[X] + a\,\|(X - \mathbb{E}[X])_-\|_{L^p}$，$a \in [0,1]$，即 Fischer（2003年）的偏差分量。

命题 1 (半波动率的性质)。映射 $X \mapsto \mathrm{S}_\mu(X)$ 是凸的、具有 *1* 次正齐次性、次可加且平移不变。

证明。$\mathrm{S}_\mu(X) = \|(X - \mathbb{E}[X])_-\|_{L^2}$ 由线性平移不变映射 $X \mapsto X - \mathbb{E}[X]$ 与 $Z \mapsto \|Z_-\|_{L^2}$ 复合而成。根据 $z \mapsto z_-$ 的逐点凸性、范数在 L^2_+ 上的单调性以及三角不等式，该映射正齐次且为一次齐次，并且是凸的；由此可得次可加性。□

如表1所示，半方差适用于第3 节的最小风险模型，而半波动率适用于分散化和绩效比率；只有当风险泛函为一次齐次时，这些指标才对权重缩放保持不变。

若 $R_P(x) - \mu^\top x$ 对每个 $x \in \mathbb{R}^n_+$ 都关于零对称，尤其是当 R 服从椭圆分布时（Fang 等人，1990），那么 $\mathrm{S}_\mu(R_P(x)) = \mathrm{sd}(R_P(x))/\sqrt{2}$，且第 3 节的低于均值模型，都与其基于方差的对应模型一致。基于阈值的设定（$\tau = 0$，$\tau_t = R_t^I$）则不一定一致，因为其半偏差也取决于阈值相对于均值的位置。

2.3. 下行风险的非退化性

假设 1（下行风险的非退化性）。唯一的向量 $x \in \mathbb{R}^n_+$ 满足

$$\left(R_P(x) - \mu^\top x\right)_- = 0 \qquad \mathbb{P}\text{-}a.s.$$

是 $x = 0$（等价地，对每个 $x \in \Delta$，$\mathbb{P}\{R_P(x) < \mu^\top x\} > 0$）。

表1：本文所考察风险度量的结构比较。(✓)：风险贡献之和为该度量的两倍；风险预算投资组合与其平方根对应的风险预算投资组合相同。

性质	方差	波动率	均值以下半方差	低于均值的半波动率
非负性	✓	✓	✓	✓
正齐次性（度）	2	1	2	1
凸性	✓	✓	✓	✓
次可加性	×	✓	×	✓
平移不变性	✓	✓	✓	✓
投资组合应用				
适用于最小风险模型	✓	✓	✓	✓
适用于风险预算模型	(✓)	✓	(✓)	✓
适用于分散化和绩效比率模型	×	✓	×	✓

命题 2（非退化性的等价表述）。 以下陈述是等价的：

(i) 假设*1*成立；*(ii)* 唯一的 $x \in \mathbb{R}^n_+$ 使得 $(R-\mu)^\top x = 0$ $\mathbb{P}$-*a.s.* 是 $x = 0$；*(iii)* $\mathrm{S}_\mu\big(R_P(x)\big) > 0$ 对每个 $x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$均成立；*(iv)* $\mathrm{sd}\big(R_P(x)\big) > 0$ 对每个 $x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ 均成立。

证明。 参见 附录 B。 □

公式（ii）是 Ararat 等人 (2024年) 提出的非退化性假设；根据（iv），当且仅当没有非零 $x \geq 0$ 属于 Σ 的核时，该假设成立；特别是，当 Σ 正定时，该假设成立。在（iii）中取 $x = e_i$，得到$\mathrm{S}_\mu(R_i) > 0$ 对每个 i均成立，因此逆半波动率权重定义良好，并且排除了几乎处处为常数的资产，例如无风险资产。

对于目标值 $\tau \in L^2$，在单纯形 $R_P(x) - \tau = (R - \tau\mathbf{1})^\top x$ 上，因此 $\mathrm{S}_\tau(R_P(x)) = \rho_\tau(x)$ 对于 $x \in \Delta$ 成立，其中

$$\rho_\tau(x) := \big\| \big((R - \tau\mathbf{1})^\top x\big)_- \big\|_{L^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

该函数 ρ_τ 关于权重连续、凸且为一次齐次，尽管当 $\tau \neq 0$时，S_τ 关于投资组合收益并非正齐次。其正性是一个独立假设。

假设 2 (相对于目标的非退化性**)**。 设 $\tau \in L^2$。满足 $\left((R-\tau\mathbf{1})^\top x\right)_- = 0$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立的唯一向量 $x \in \mathbb{R}^n_+$ 是 $x = 0$ （等价地，$\mathbb{P}\{R_P(x) < \tau\} > 0$ 对每个 $x \in \Delta$ 均成立）。

假设 2 并非由假设 1推出：如果某个非常数 $R_i \geq \tau$ 几乎处处成立，或者对于 $\tau = R^I$而言，如果某个只做多投资组合从不逊于指数表现，则该假设会失效。特别是当基准可以被完全复制时，就会出现这种情况， $R^I = R^\top \bar{x}$ 对于某个 $\bar{x} \in \Delta$，因为此时 $\rho_{R^I}(\bar{x}) = 0$。每当假设 2 失效时， ρ_τ 就会在只做多投资组合的某个非零凸锥上消失，而第 3 节的基于阈值的模型也就变得不适定，因为索提诺比率和分散化比率可能变得无界，风险预算规划也会退化。

注 *2*（半波动率的可加性）。在附录 *A* 中，我们证明，当且仅当下行偏差 $(X - \mathbb{E}[X])_-$ 和 $(Y - \mathbb{E}[Y])_-$ 正共线时，$S^\mu(X + Y) = S^\mu(X) + S^\mu(Y)$ 成立（引理 *3*）；该结论还具有多变量扩展和共同下行因子形式（定理 *1*）。由于偏差是以均值为中心的，共线性意味着 $X-\mathbb{E}[X]$ 和 $Y-\mathbb{E}[Y]$从不具有相反符号，这正是 *Ararat* 等人（*2024*年，引理 *2*）所述的平均绝对偏差可加性条件。因此，低于均值的半波动率的可加性严格强于 *MAD* 可加性（附录 *A* 中的示例对此进行了说明），同时又严格弱于波动率可加性，后者要求完整偏差具有正共线性。

3. 下行风险下的投资组合模型

3.1. 均值–方差与均值–半方差

目标收益率为 η 的经典均值–方差模型是凸二次规划

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & x^\top \Sigma x \\ \text{s.t.} \quad & \mu^\top x = \eta, \\ & \mathbf{1}^\top x = 1, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

与之对应的下行风险模型是均值–半方差问题

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & \mathrm{S}_\mu^2(R_P(x)) \\ \text{s.t.} \quad & \mu^\top x = \eta, \\ & \mathbf{1}^\top x = 1, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

它是凸的，尽管其目标函数并非具有固定矩阵的二次型（注1）。Markowitz (1959年)、Jin 等(2006年) 和Cesarone 等人(2026年) 给出了求解方法和解析性质。以S_τ^2 替代S_μ^2的基于目标值的变体，即使 τ 为随机变量时仍保持凸性，并得到 MSV 策略$_0$ 和 MSV 策略$_{R^l}$。在第4 节中，这些模型以及第 3.4 节的最充分散投资组合均在不设预期收益约束的情况下求解。

3.2. 半波动率下的风险平价

风险贡献源于正齐次泛函的欧拉分解（Maillard 等人，2010年；Roncalli，2013年），根据该分解，一个可微的 f度为 k的函数满足 $\sum_i x_i\,\partial_i f(x) = k\,f(x)$，因此只有当 $k=1$，即半波动率的情形下，各项贡献之和才等于风险。

设 b_1，……，$b_n > 0$ 为风险预算，且满足 $\sum_{i=1}^n b_i = 1$。遵循Maillard 等人（2010年）（另见Bruder 和 Roncalli 2012；Spinu 2013）针对一阶风险预算的标准（Roncalli，2013；Cesarone 和 Colucci，2018年；Bellini 等人，2021年；Ararat 等人，2024年）对数公式，半波动率风险预算问题可写为

$$\begin{aligned} \min_{y\in\mathbb{R}^n} \quad & \mathrm{S}_P(y) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n b_i \log(y_i) \geq \gamma, \\ & y_i > 0, \qquad i = 1,\ldots,n, \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\gamma \in \mathbb{R}$ 确定解的尺度。对数约束排除了 $y=0$，同时保持可行集为凸集，因为该可行集是凹函数 $y \mapsto \sum_i b_i \log(y_i)$的超水平集，因此问题（4）根据命题 $\mathbb{R}^n_{++}$ 1是在 $\mathbb{R}^n_{++}$ 上的凸规划。

Bruder 和 Roncalli （2012年，第 2.4 节）指出，这种构造可从波动率推广到任何满足欧拉分解的凸风险度量。该构造预设了可微性，而凸性和

齐次性并不能保证这一点。对于 L^1 与 S_P类似的情形，在离散分布中，只要某个情景下投资组合的收益率等于其均值，可微性就会失效；条件风险价值也有同样的问题（Mausser 和 Romanko，2018年）。Yao 等人（2021年，注 1）所述经验下部部分矩的不光滑性，仅涉及阶数为二时的二阶导数。对于S_P，引理 1 仅要求假设 1，不对收益分布作任何连续性假设，因此适用于第 4 节的经验分布。

引理 1（投资组合半波动率的可微性）。 设 $\mathcal{W} := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{S}_P(x) > 0\}$。则 $\mathcal{W}$ 是开集，S_P 在 $\mathcal{W}$ 上连续可微，且

$$\frac{\partial \mathrm{S}_P(x)}{\partial x_i} = -\frac{\mathbb{E}\left[(R_i - \mu_i)\left((R-\mu)^\top x\right)_-\right]}{\mathrm{S}_P(x)}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

在假设 *1*下，$\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\} \subseteq \mathcal{W}$，因此 S_P 在每个非平凡只做多投资组合处连续可微。

证明。 参见附录 B。 □

引理 1 对应于 Fischer （2003年，命题4.8和推论4.9）关于单侧矩风险度量 $\rho_{p,a}$、 $1 < p < \infty$的可微性结果。在假设 1下，根据对数项的严格凹性（见 附录 B），问题（4）具有唯一最优解，这与 Spinu（2013年）；Bellini 等人 （2021年）；Ararat 等人 （2024年）以及对于一般风险度量，Cetingoz 等人 （2024年，定理1和定理2）中的结果一致。

下行风险贡献在

$$\mathrm{RC}_i(x) := x_i \frac{\partial \mathrm{S}_P(x)}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

上定义于 $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ 根据引理1。半方差会给出总和为$2\mathrm{S}_P^2$ 以及相同的投资组合，因为在（S_P 中用S_P^2 替换（4）不会改变最小化解。

命题 3（风险预算刻画）。 设假设 *1* 成立，并设 $y^\star$ 为问题 （4）的最优解。对数约束在 $y^\star$处为活跃约束，并且 $x^\star := y^\star / \mathbf{1}^\top y^\star$，其不依赖于 γ，是唯一的$x \in \Delta$ 满足

$$\mathrm{RC}_i(x^\star) = b_i \, \mathrm{S}_P(x^\star), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

证明。 参见附录 B。 □

我们将 $x^{\mathrm{RP}} := x^\star$ 称为 SV-RP 投资组合（第 μ 节的策略 RP-SVol4）；将 S_P 替换为 σ_P即可得到基于波动率的基准。[2]

在备注 2的可加性条件下， x^{RP} 是显式的，其权重与 $b_i \mathrm{S}^\mu(R_i)^{-1}$ 成正比（附录 A 的命题 4 ）。对于 $b_i = 1/n$ 而言，它是朴素半波动率风险平价投资组合，是逆波动率投资组合的下行版本（Maillard 等人，2010年）。

命题 3之前的结果及脚注，对于基于阈值的策略 RP-SVol$_0$ 和 RP-SVol$_{R^f}$ 同样成立，其中将（$\mathbf{1}_P$ ）中的 ρ_τ 替换为1），将（$R - \mu$5）中的 $R - \tau\mathbf{1}$替换为5），并将假设 1替换为假设 2，因为证明仅使用风险泛函在 $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ 上的凸性、一次齐次性和正性；对于梯度，则使用平方可积性，而不要求中心化。

3.3. 一次齐次比率模型的约化引理

其余模型最大化线性收益与凸下行风险泛函之比，这是一个凹凸分式规划，可以通过 Schaible（1974 年）的变换进行重构。对于具有正齐次凸风险泛函的收益—风险比率（Stoyanov 等人，2007年，命题 4 和 5）以及分散化比率（Cesarone 等人，2025年），这种约化方法已为人所知。我们以以下所采用的形式重新表述该方法，其中仅要求在一个锥上具有正性。

引理 2 (Schaible 约化)。 设 $C \subseteq \mathbb{R}^n_+$ 为闭凸锥，令$\rho\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ 连续、凸、一次齐次，并且满足：对于每个 $x \in C \setminus \{0\}$，都有 $\rho(x) > 0$；再设 $c \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$\Delta_C^+ := \{x \in C \cap \Delta : \ c^\top x > 0\} \neq \emptyset.$$

那么，分式问题

$$\max\left\{ \frac{c^\top x}{\rho(x)} \ : \ x \in \Delta_C^+ \right\} \tag{6}$$

[2]第 4 节的实现求解惩罚形式 $\min_{y>0} \mathrm{S}_P(y) \ -\sum_i b_i \log(y_i)$。根据假设 1 ，其目标函数在 $\mathbb{R}^n_{++}$上严格凸且强制，因此存在唯一的极小值点 $\hat{}y$，它满足问题 (4) 在乘子 1 和 $\gamma = \sum_i b_i \log(\hat{}y_i)$下的 KKT条件，因此归一化后得到相同的 x^{RP}。第 4 节的所有风险预算策略均采用等额预算， $b_i = 1/n$。

等价于凸规划

$$\min\left\{\rho(y)\ :\ y\in C,\ c^{\top}y=1\right\},\tag{7}$$

其最小值可以达到。此外，如果 $y^{\star}$ 是 (7)的解，那么 $x^{\star}=y^{\star}/(\mathbf{1}^{\top}y^{\star})$是 (6)的解。

证明。 见附录 B。 □

对于 $\rho=\sigma_P$，根据命题 2(iv)，该函数在原点以外为正，因此该引理给出了第 4节波动率基准所用的经典改写。

3.4. 半波动率下的最大分散化投资组合

分散化比率和最大分散化投资组合由 Choueifaty 和 Coignard (2008年) 针对波动率提出，随后由 Cesarone 等人 (2025年) 推广至一般风险度量。

定义资产层面半波动率系数

$$s_i:=\mathrm{S}_{\mu}(R_i)=\left(\mathbb{E}[(R_i-\mathbb{E}[R_i])_{-}^{2}]\right)^{1/2},\qquad i=1,\dots,n,$$

以及向量 $s:=(s_1、\ \dots\dots、\ s_n)^{\top}\in\mathbb{R}^{n}_{+}$。对于 $x\in\Delta$ 满足 $\mathrm{S}_P(x)>0$的情形，半波动率分散化比率为

$$\mathrm{DR}(x):=\frac{s^{\top}x}{\mathrm{S}_P(x)}.\tag{8}$$

根据S_{μ} （命题1）的次可加性和一次齐次性，$\mathrm{S}_P(x)\le s^{\top}x$，因此 $\mathrm{DR}(x)\ge 1$，与Choueifaty 和 Coignard （2008年）基于波动率的比率相同。

对于$\mathrm{DR}(x)=1$ 对每个 $x\in\Delta$ 均成立，等价于S_{μ} 在资产收益上具有可加性（定理1），也就是说，所有资产半波动率都具有共同下行因子。

给定最低预期收益率 η，半波动率下的最大分散化投资组合满足

$$\begin{aligned}\max_{x\in\mathbb{R}^n}\quad & \mathrm{DR}(x)\\ \text{s.t.}\quad & \mu^{\top}x\ge\eta,\\ & \mathbf{1}^{\top}x=1,\\ & x\ge 0.\end{aligned}\tag{9}$$

引理 2 适用于 $\rho = \mathrm{S}_P$, $c = s$ 且

$$C := \{y \in \mathbb{R}^n_+ : \mu^\top y \geq \eta\, \mathbf{1}^\top y\},$$

一个闭凸锥，在该锥上 $\rho > 0$ 在假设 1下远离原点，并且由于 $s_i > 0$ 在相同假设下， $\Delta_C^+ \neq \emptyset$ 等价于$\eta \leq$ 最大化$_i\, \mu_i$。问题（9）因此等价于凸规划

$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^n} \quad & \mathrm{S}_P(y) \\ \text{s.t.} \quad & s^\top y = 1, \\ & \mu^\top y \geq \eta\, \mathbf{1}^\top y, \\ & y \geq 0, \end{aligned} \tag{10}$$

对于每个解 $y^\star$，都有一个最大分散化投资组合 $x^{\mathrm{MD}} = y^\star / \mathbf{1}^\top y^\star$ 。用 sd(R_i) 和 σ_P 替换 s_i 和 S_P，即可恢复基于波动率的版本。用 $\rho_\tau(e_i) = \mathrm{S}_\tau(R_i)$ 和 ρ_τ 替换 s_i 和 S_P，得到 MDP-SVol$_0$ 和 MDP-SVol$_{R^I}$；根据 ρ_τ 的次可加性，DR ≥ 1，因此引理 2 在假设 2 下适用。

Barkhagen 等人 （2023年）研究同次齐次的凸函数之比，例如峰度；这类函数通常并非拟凹，因此需要全局算法，而对于凸的一次齐次泛函，引理 2则无需使用这类算法。

3.5. 夏普比率与索提诺比率优化

经典的夏普比率问题为

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \mathrm{Sharpe}(x) := \frac{\mu^\top x - r_f}{\sigma_P(x)} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}^\top x = 1, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{11}$$

与 r_f 期限内的无风险利率。其下行风险对应指标为索提诺比率（Sortino 和 van der Meer，1991年；Sortino 和 Price，1994年），其中目标值为 $\tau \in L^2$，可以是确定值或随机值，如 Meade 和 Beasley （2011年）提出的超额表现比率。在单纯形 R_P（x）$-\tau =$（$R - \tau\mathbf{1}$）$^\top x$中，索提诺比率表示为

$$\mathrm{Sortino}_\tau(x) := \frac{\mathbb{E}[R_P(x) - \tau]}{\mathrm{S}_\tau(R_P(x))} = \frac{\big(\mu - \mathbb{E}[\tau]\mathbf{1}\big)^\top x}{\rho_\tau(x)}. \tag{12}$$

对于 $\tau = R^I$，分子为预期主动收益（$\mu - \mathbb{E}[R^I]\mathbf{1}$）$^\top x$，因此收益和风险都相对于基准。

我们还考虑式（12）的均值以下对应形式，其中在半偏差中以投资组合均值替代目标值，而分子仍保留相对于 r_f 的超额收益，

$$\text{Sortino}_\mu(x) := \frac{\mu^\top x - r_f}{\text{S}_P(x)} = \frac{\mu^\top x - r_f}{\text{S}_\mu(R_P(x))}, \tag{13}$$

其分母为第3.2 节和3.4节中风险平价模型和最大分散化模型的低于均值的半波动率。分母 S^μ 是一种偏差度量（Rockafellar 等人，2006年），而 S_τ 衡量相对于外生目标值的不足额。对于确定性 τ 和非常数 $R_P(x)$，只有当 $\mu^\top x = \tau$时，两者才一致。

令 $\widetilde{\mu} := \mu - r_f\mathbf{1}$用于式（13），并令 $\widetilde{\mu} := \mu - \mathbb{E}[\tau]\mathbf{1}$用于式（12），两个比率均可通过求解下式最大化：

$$\begin{aligned} \max_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & \frac{\widetilde{\mu}^\top x}{\rho(x)} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}^\top x = 1, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\rho = \text{S}_P$ 和 $\rho = \rho_\tau$分别如此。引理 2 对两者均适用，其中 $C = \mathbb{R}^n_+$ 且 $c = \widetilde{\mu}$；根据假设 1 ，由命题 2（iii）可得正性；根据假设 2，另一种情形下也成立。因此，只要存在某个 $\widetilde{\mu}_i > 0$ 使得 i，将问题（14）限制在 $\Delta^+ := \{x \in \Delta: \quad \widetilde{\mu}^\top x > 0\}$ 便等价于以下凸规划：

$$\begin{aligned} \min_{y\in\mathbb{R}^n} \quad & \rho(y) \\ \text{s.t.} \quad & \widetilde{\mu}^\top y = 1, \\ & y \geq 0, \end{aligned} \tag{15}$$

具有最优投资组合 $x^\star = y^\star/(\mathbf{1}^\top y^\star)$。该限制不会造成任何损失，因为在 Δ 上的最优比率随后为正，且仅在 Δ^+中取得。在假设 2 和1分别成立时，基于目标值的比率（12）和低于均值的比率（13）因此导出具有相同形式（15）的凸规划，其中$\rho = \rho_\tau$ 以及 $\rho = \text{S}_P$ 和相应的 $\widetilde{\mu}$，因此，阈值是建模选择，而非计算选择。

通过分式线性规划求解Omega 比率最大化的精确解（Kapsos 等人，2004年）也是引理2的一个实例。事实上，对于

确定性 τ，在 Δ下，Omega比率满足 $\mathbb{E}[(R_P(x) - \tau)_+]/\mathbb{E}[(R_P(x) - \tau)_-] - 1 = (\mu - \tau\mathbf{1})^\top x / \mathbb{E}\left[\left((R - \tau\mathbf{1})^\top x\right)_-\right]$（Kaplan和Knowles，2004年），并且只要 $\mu_i > \tau$ 对某个 i成立，该引理便可在假设 2下应用。

4. 实证分析

4.1. 数据集和实验设置

实证分析基于从 FactSet（FactSet，2026年）获取并列于表2中的两个数据集。这些数据集包含两个美国股票指数成分股经股票拆分、股息和分拆调整后的每日总回报价格，以及相应指数的总回报版本水平。数据于2026年11月6日下载，并可在francescocesarone.com（Cesarone，2026年）及研究结果一并获取，但须遵守数据提供商的许可条款。

表2：所分析的数据集； n：具有完整价格序列的资产。

指数	全名	n	国家	时间间隔
道琼斯	道琼斯工业平均指数	30	USA	2008年3月—2026年11月
纳斯达克100指数	纳斯达克100指数	84	USA	2012年10月—2026年11月

资产收益按照简单收益率计算，即 $r_{it} = (P_{it} - P_{i,t-1})/P_{i,t-1}$，其中 P_{it} 表示资产 i 在时间 t的调整后收盘价，并记 $r_t = (r_{1t}, \dots, r_{nt})^\top$。指数收益率以相同方式根据总收益指数的水平计算。

我们采用滚动时间窗口方法对所选投资组合进行样本外评估（DeMiguel 等人，2009年；Kritzman等人，2010年；Cesarone 和 Colucci，2018年；Cesarone 等人，2025年、2026年）。令 T 表示每日观测值的数量，并令 $D_L = 504$ 个交易日（约两年）和 $D_H = 21$ 个交易日（一个月）分别表示学习期（样本内）和持有期（样本外）的长度。滚动程序生成 $Q = \lfloor (T - D_L)$ 个窗口，以 $q = 1$、……、Q 为索引，其中窗口 q 的样本内期间结束于第 $t_q^{\text{end}} = D_H (q-1)$ 天，即 $+ D_L$。在每个窗口中，均基于样本内数据对每个模型进行估计和求解，得到最优配置 $x_q^\star$；该配置在随后的持有期内不进行交易，

因此权重会随价格变动而漂移。第 t 天的样本外投资组合收益随后为

$$R_t^{\text{out}} = \sum_{i=1}^{n} x_{t-1,i}\, r_{i,t}, \qquad x_{t-1,i} = \frac{x_{q,i}^{\star} \prod_{s=t_q^{\text{end}}+1}^{t-1}(1+r_{i,s})}{\sum_{j=1}^{n} x_{q,j}^{\star} \prod_{s=t_q^{\text{end}}+1}^{t-1}(1+r_{j,s})},$$

对于 $t = t_q^{\text{end}}+1$，……，$t_q^{\text{end}}+D_H$，其中 $x_{t-1,\,i}$是资产 i在第 $t-1$日收盘时的权重。将持有期收益串联起来，可得到 $N^{\text{out}} = Q\,D_H$个样本外观测值，其中，从2010年3月左右开始，道琼斯使用 $Q = 199$ 个窗口；从2014年10月左右开始，纳斯达克100指数使用 $Q = 144$ 个窗口；二者均截至2026年10月。

投资资产集合是静态的；对于每个数据集，它由下载日期时指数的成分股中，在所考虑的整个时间区间内价格序列均完整的成分股构成。该规则保留了表 n 2 中的 30 只资产中的 101 只成分股，分别为。对于纳斯达克100指数，FER-US在2020年以前大多数交易日的价格保持不变，因此将其手动排除。这种资产池存在幸存者偏差和前视偏差（Brown等人，1992年；Elton等人，1996年），这会使每种策略相对于市场指数都显得更优。因此，我们仅将指数用作参考，并根据策略之间的比较得出结论。对于阈值为指数收益率的四种策略，应特别谨慎地解读其结果，因为指数本身被纳入了这些策略的优化过程。

按照DeMiguel 等人（2009年）的方法，在每个再平衡日期，我们根据投资组合换手率收取 50 个基点的比例交易成本。由于x_{q-1}^{+}窗口 $q-1$ 的权重漂移至 t_q^{end}日收盘时，R_t^{out} $t = t_q^{\text{end}}+1$ 日的收益率将减少$c_{\text{tc}} \sum_{i=1}^{n} |x_{q,\,i}^{\star} - x_{q-1,\,i}^{+}|$，其中$c_{\text{tc}} = 0.0050$。第一个窗口的初始配置不收取任何成本。补充材料还报告了交易成本为 0、25 和 100 个基点时的夏普比率。

所有实验均在 MATLAB R2025b 中实现。MV、最大夏普比率和 MDP-Vol 的二次规划使用 quadprog（内点凸算法）求解，其余模型则使用 fmincon（序列二次规划，采用解析梯度；初始点为等权重投资组合；对于 MDP-SVol，则使用半波动率倒数投资组合，并缩放至满足可行性）。二次规划和比率规划的容差为 10^{-12}，其余规划的容差为 10^{-10}。在比率模型的齐次重构中，对归一化权重施加上限 $x_i \le$ub，作为线性约束 $y_i \le \text{ub}\,\mathbf{1}^{\top} y$，从而使可行集成为闭凸

锥，并且归一化后该约束是精确的；在基准 ub $= 1$ 下，该约束是冗余的，而风险预算程序仅带有边界约束 $y_i \geq 10^{-10}$。

4.2. 比较中的投资组合模型

我们比较了十七种仅做多投资组合策略的样本外绩效（$x_i \geq 0$, $\mathbf{1}^\top x = 1$，个体权重没有上界）。除 DeMiguel 等人的等权重（EW）投资组合（DeMiguel 等人（2009年））外，这些策略沿表3的三个轴构成一个网格，即模型类别、风险度量和阈值，偏离量以该阈值为基准进行度量。阈值可以是投资组合均值、固定水平 $\tau = 0$或市场指数收益率 $\tau_t = R_t^I$。市场指数作为额外一行列于第4.4节的表格中，作为外部参考而非一种策略，因此需要投资组合权重、换手率和资产数量的条目均标记为不适用（—）。

表 3：比较中的十七种投资组合模型。

策略	**模型类别**	**风险度量**	τ
EW	朴素	—	—
MV	最小风险	方差	—
MSV_0		半方差	0
MSV_μ		半方差	$\mu^\top x$
MSV_{R^I}		半方差	R_t^I
最大夏普比率	收益风险比	波动率	—
最大索提诺比率$_\mu$		半波动率	$\mu^\top x$
最大索提诺比率$_0$		半波动率	0
最大索提诺比率$_{R^I}$		半波动率	R_t^I
RP-Vol	风险预算	波动率	—
RP-SVol_μ		半波动率	$\mu^\top x$
RP-SVol_0		半波动率	0
RP-SVol_{R^I}		半波动率	R_t^I
MDP-Vol	分散化比率	波动率	—
MDP-SVol_μ		半波动率	$\mu^\top x$
MDP-SVol_0		半波动率	0
MDP-SVol_{R^I}		半波动率	R_t^I

在求解器返回非正退出标志或因错误而停止的任何窗口中，模型均回退至等权配置。在基准配置下，从不需要这种回退，因为两个资产池的每个滚动窗口中，每个模型都返回正的退出标志。在接受的解中，容差水平下的负值项被设为零，并对权重重新归一化。在每个窗口中，收益风险比模型均满足$\Delta_C^+ \neq \emptyset$（某项资产的样本内平均收益为正，且某项资产的样本内平均收益高于指数收益率），并且假设2 对$\tau = 0$ 和 $\tau_t = R_t^I$成立。通过线性规划$m^\star =$ 最小化$_{x\in\Delta}$最大化$_t$（$\tau_t - r_t^\top x$）对样本收益进行检验；当且仅当该值为正时，该窗口中的假设2 成立。风险预算解的准确性详见补充材料第 S.7.2 节。

无风险利率设为 $r_f = 0$，既用于最大夏普比率和最大索提诺比率的目标函数$^\mu$，也用于第 4.3 节的绩效指标，与 Cesarone 和 Colucci (2018年) 中的做法相同。

4.3. 绩效指标

投资组合的绩效通过以下指标进行评估，这些指标通常用于投资组合选择（例如，参见 DeMiguel 等（2009）；Ce- sarone 和 Colucci 2018年；Cesarone 等（2025），以及其中的参考文献）。所有指标均根据拼接后的样本外投资组合收益序列计算，该序列重新编为 R_t^{out}，$t = 1, \ldots\ldots, N^{\text{out}}$，并扣除交易成本。我们用 $W_t = W_{t-1}\big(1 + R_t^{\text{out}}\big)$ 表示时间 t的投资组合财富，其中 $W_0 = 1$，并用

$$\mathrm{dd}_t := \frac{W_t - \max_{0\le\nu\le t} W_\nu}{\max_{0\le\nu\le t} W_\nu}, \qquad t = 1, \ldots, N^{\text{out}}, \tag{16}$$

相应的回撤路径。对于 μ^{ann}、夏普比率、索提诺比率、Omega比率、Rachev 和卡玛比率，数值越高越好；对于 σ^{ann}、条件风险价值$_{5\%}$、最大回撤、溃疡指数和换手率，数值越低越好。

- 样本外投资组合收益的年化平均值，

$$\mu^{\text{ann}} = \frac{252}{N^{\text{out}}} \sum_{t=1}^{N^{\text{out}}} R_t^{\text{out}}. \tag{17}$$

- 样本外投资组合收益的年化标准差，

$$\sigma^{\text{ann}} = \sqrt{252}\left(\frac{1}{N^{\text{out}}-1}\sum_{t=1}^{N^{\text{out}}}\left(R_t^{\text{out}} - \bar{R}^{\text{out}}\right)^2\right)^{1/2}, \tag{18}$$

其中 $\bar{R}^{\text{out}} := \frac{1}{N^{\text{out}}}\sum_{t=1}^{N^{\text{out}}} R_t^{\text{out}}$。

- 夏普比率，即每单位所承担总风险带来的收益率，

$$\text{Sharpe}^{\text{out}} = \frac{\mu^{\text{ann}} - r_f}{\sigma^{\text{ann}}}, \tag{19}$$

其中 r_f 此处是第 3.5 节中利率的年化对应值；在基于日收益计算的（20）和（22）中，则由日利率 $r_f^{\text{d}} := r_f/252$。

- 索提诺比率（Sortino 和 van der Meer，1991年；Sortino 和 Price，1994年）是夏普比率的一种变体，其中不使用标准差，而是考虑低于目标值 rdf 的样本外收益的下行偏差：

$$\text{Sortino}^{\text{out}} = \sqrt{252}\,\frac{\bar{R}^{\text{out}} - r_f^{\text{d}}}{\left(\frac{1}{N^{\text{out}}}\sum_{t=1}^{N^{\text{out}}}\left(R_t^{\text{out}} - r_f^{\text{d}}\right)_-^2\right)^{1/2}}. \tag{20}$$

对于每种策略，无论其目标函数的阈值是多少，都使用相同的目标值。

- 欧米伽比率（Keating 和 Shadwick，2002年）是阈值以上的预期收益 τ 与阈值以下的预期损失之比，

$$\Omega_\tau = \frac{\sum_{t=1}^{N^{\text{out}}}\left(R_t^{\text{out}} - \tau\right)_+}{\sum_{t=1}^{N^{\text{out}}}\left(R_t^{\text{out}} - \tau\right)_-}, \qquad \tau = 0. \tag{21}$$

- 拉切夫比率（Biglova 等人，2004年）通过比较样本外收益的右尾与左尾来衡量上行潜力，

$$\text{Rachev}_\alpha = \frac{\text{CVaR}_\alpha\left(r_f^{\text{d}} - R^{\text{out}}\right)}{\text{CVaR}_\alpha\left(R^{\text{out}} - r_f^{\text{d}}\right)}, \qquad \alpha = 10\%, \tag{22}$$

其中条件风险价值$_\alpha(\cdot)$是式（23）的条件风险价值，应用于括号中的变量，基于$\lceil \alpha N^{\text{out}} \rceil$最大（相应地，最小）收益计算。

- 条件风险价值（Rockafellar 和 Uryasev，2000年）在ε水平下，

$$\text{CVaR}_\varepsilon\big(R^{\text{out}}\big) = -\,\mathbb{E}\big[R^{\text{out}} \mid R^{\text{out}} \le q_\varepsilon\big(R^{\text{out}}\big)\big]\,, \qquad \varepsilon = 5\%, \tag{23}$$

其中，q_ε是经验ε-分位数，是样本外最差5%收益的平均值，并改变符号。

- 最大回撤衡量从观测到的峰值开始的最大样本外损失，

$$\text{MaxDD} = \Big|\min_{1\le t\le N^{\text{out}}} \text{dd}_t\Big|. \tag{24}$$

- 卡玛比率（Young，1991年）衡量每单位最大损失所获得的收益，计算公式为

$$\text{Calmar} = \frac{\mu^{\text{ann}} - r_f}{\text{MaxDD}}. \tag{25}$$

- 溃疡指数（Martin 和 McCann，1989年）评估回撤的深度和持续时间，

$$\text{UI} = \left(\frac{1}{N^{\text{out}}+1}\sum_{t=0}^{N^{\text{out}}} \text{dd}_t^2\right)^{1/2}, \tag{26}$$

在整个财富路径上计算的平均值，包括其初始点（$\text{dd}_0 = 0$）。

- 换手率（DeMiguel 等人，2009年）评估了在实践中实施投资组合策略所需的交易量，

$$\text{Turn} = \frac{1}{Q-1}\sum_{q=2}^{Q}\sum_{i=1}^{n}\big|x^{\star}_{q,i} - x^{+}_{q-1,i}\big|, \tag{27}$$

与上文中的x^{+}_{q-1}相同，并且是交易成本的替代指标。

- 投资组合中持有的资产数量的平均值，

$$\#\text{Assets} = \frac{1}{Q}\sum_{q=1}^{Q}\Big|\big\{i : x^{\star}_{q,i} > 10^{-6}\big\}\Big|. \tag{28}$$

由于它是描述性指标而非绩效标准，因此既未在表格中排序，也未予以突出显示。

4.4. 计算结果

表 4 和5 分别报告了道琼斯和纳斯达克100数据集上十七种投资组合策略的样本外绩效结果。对于每项度量，最佳值以粗体显示，各单元格按照排名着色：最佳值为深绿色，最差值为深红色；处于最后一位的市场指数行不纳入两者。我们首先依次描述每个资产池；第 4.4.3 节检验表 3中沿风险度量和阈值两个维度的家族内差异，并汇总在两个数据集上均保持显著的结果。

4.4.1. 道琼斯

如表4所示，MDP-SVol$_0$ 和 MDP-SVol$^{\mu}$ 取得了最高的夏普比率（1.089和1.071），高于等权重投资组合（1.049）和 MDP-Vol（1.028）。正如预期，最小风险投资组合 MV、MSV$_0$ 和 MSV$^{\mu}$ 的波动率、条件风险价值$_{5\%}$ 和最大回撤最低，但年化收益率也最差。它们是唯一夏普比率低于市场指数（0.801）的策略；由于资产池的构建倾向于这些策略，这一比较见第 4.1 节。相反，最大夏普比率、最大索提诺比率$^{\mu}$ 和最大索提诺比率$_0$ 的收益率最高，但所有风险度量和换手率的表现最差；其中两个最大索提诺比率投资组合的夏普比率略低于最大夏普比率。RP-Vol、RP-SVol$^{\mu}$ 和 RP-SVol$_0$ 几乎无法区分，其夏普比率略低于等权重投资组合。基准阈值 $\tau_t = R_t^I$ 使采用该阈值的四种策略的夏普比率处于0.872–0.896范围内。

4.4.2. 纳斯达克*100*指数

在表5中，我们观察到，等权重投资组合的年化收益率最高，夏普比率（1.156）、索提诺比率、卡玛比率和Omega比率表现最佳

表4：道琼斯数据集的样本外绩效结果。比率（夏普比率、索提诺比率、卡玛比率、Omega比率、Rachev10%）以自然单位表示，保留三位小数；除资产数量外的所有其他数值均以百分比表示，保留两位小数。条件风险价值5% 基于日收益计算，再平衡时计算换手率。

模型	μ^{ann}	σ^{ann}	夏普比率	索提诺比率	卡玛比率	Omega比率	Rachev10%	条件风险价值5%	最大回撤	溃疡指数	Turn	资产数量
EW	17.15	16.34	1.049	1.499	**0.529**	1.222	0.979	2.45	32.42	4.92	4.26	30.00
MV	10.07	13.01	0.774	1.101	0.340	1.156	0.984	**1.88**	29.64	5.29	12.73	12.38
MSV_0	10.21	12.96	0.787	1.119	0.378	1.157	0.985	**1.88**	**26.99**	5.57	15.48	11.45
MSV_μ	9.93	**12.95**	0.767	1.089	0.355	1.153	0.991	**1.88**	27.96	5.76	14.04	11.51
MSV_{R^I}	14.34	16.44	0.872	1.238	0.385	1.184	0.980	2.43	37.24	5.20	5.75	28.25
最大夏普比率	18.37	20.76	0.885	1.308	0.489	1.178	1.011	3.03	37.58	11.93	42.15	6.84
最大索提诺比率$_\mu$	19.20	22.32	0.860	1.289	0.477	1.176	1.030	3.21	40.26	13.19	44.50	6.30
最大索提诺比率$_0$	**19.23**	22.48	0.855	1.282	0.478	1.175	**1.031**	3.24	40.24	13.21	44.99	6.17
最大索提诺比率$_{R^I}$	14.86	16.59	0.896	1.271	0.402	1.188	0.975	2.47	36.95	5.38	13.25	26.20
RP-Vol	15.78	15.17	1.040	1.484	0.502	1.220	0.978	2.27	31.41	4.48	4.43	30.00
RP-SVol$_\mu$	15.73	15.13	1.039	1.482	0.502	1.219	0.977	2.27	31.33	**4.44**	4.52	30.00
RP-SVol$_0$	15.73	15.12	1.041	1.484	0.504	1.220	0.976	2.27	31.20	4.45	**4.21**	30.00
RP-SVol$_{R^I}$	14.63	16.41	0.891	1.265	0.396	1.188	0.978	2.44	36.98	5.18	4.93	30.00
MDP-Vol	15.59	15.17	1.028	1.464	0.483	1.211	0.983	2.26	32.25	5.39	14.36	15.98
MDP-SVol$_\mu$	15.82	14.77	1.071	1.528	0.509	1.219	0.982	2.19	31.07	4.52	17.41	15.23
MDP-SVol$_0$	16.06	14.74	**1.089**	**1.555**	0.525	**1.223**	0.980	2.19	30.61	4.49	17.28	15.05
MDP-SVol$_{R^I}$	14.34	16.45	0.872	1.237	0.385	1.184	0.979	2.44	37.22	5.20	5.77	28.62
市场指数	13.18	16.47	0.801	1.131	0.358	1.167	0.970	2.45	36.82	5.45	—	—

表5：纳斯达克100数据集的样本外绩效结果；单位同表4。

模型	μ^{ann}	σ^{ann}	夏普比率	索提诺比率	卡玛比率	Omega比率	Rachev10%	条件风险价值5%	最大回撤	溃疡指数	Turn	资产数量
EW	**22.81**	19.74	**1.156**	**1.657**	**0.718**	**1.237**	0.971	2.95	31.78	6.74	5.98	84.00
MV	12.20	14.04	0.869	1.207	0.344	1.177	0.951	2.04	35.48	6.49	16.91	21.25
MSV_0	12.42	14.12	0.880	1.222	0.367	1.175	0.970	2.04	33.88	6.89	21.14	19.24
MSV_μ	11.89	**14.02**	0.848	1.179	0.348	1.170	0.968	**2.02**	34.16	6.93	18.96	19.57
MSV_{R^I}	21.96	21.62	1.016	1.455	0.611	1.205	0.959	3.24	35.95	9.57	11.77	66.08
最大夏普比率	18.24	22.12	0.824	1.168	0.352	1.166	0.974	3.40	51.80	22.97	46.98	12.54
最大索提诺比率$_\mu$	20.14	24.83	0.811	1.161	0.349	1.168	0.993	3.78	57.73	27.35	50.04	10.62
最大索提诺比率$_0$	20.15	25.11	0.803	1.150	0.346	1.166	**0.996**	3.82	58.25	27.84	50.58	10.32
最大索提诺比率$_{R^I}$	22.28	21.83	1.021	1.460	0.605	1.204	0.955	3.28	36.84	9.86	16.74	55.26
RP-Vol	19.53	17.33	1.127	1.609	0.623	1.236	0.972	2.58	31.36	5.85	5.93	84.00
RP-SVol$_\mu$	19.41	17.27	1.124	1.604	0.621	1.235	0.973	2.57	**31.25**	**5.80**	6.05	84.00
RP-SVol$_0$	19.38	17.23	1.125	1.605	0.620	1.235	0.972	2.57	31.29	5.86	**5.71**	84.00
RP-SVol$_{R^I}$	22.62	21.49	1.052	1.509	0.651	1.213	0.960	3.22	34.76	9.18	6.89	84.00
MDP-Vol	18.78	16.94	1.109	1.575	0.520	1.227	0.992	2.49	36.13	7.64	18.84	24.97
MDP-SVol$_\mu$	16.49	16.54	0.997	1.412	0.451	1.202	0.986	2.40	36.59	6.60	21.68	23.35
MDP-SVol$_0$	16.58	16.51	1.004	1.419	0.453	1.204	0.986	2.40	36.62	7.03	21.10	22.77
MDP-SVol$_{R^I}$	22.04	21.63	1.019	1.460	0.615	1.205	0.959	3.24	35.84	9.56	11.72	66.58
市场指数	20.56	21.96	0.936	1.336	0.587	1.186	0.952	3.29	35.04	9.64	—	—

夏普比率。此外，在这种情况下，均值-方差、MSV_0 和 MSV_μ 的波动率最低，$\text{CVaR}_{5\%}$ 的年化收益率最差，且夏普比率低于市场指数（0.936）。最大夏普比率、最大索提诺比率$_\mu$ 和最大索提诺比率$_0$的夏普比率在比较中最低，且所有风险度量和换手率的表现均最差。RP-Vol、RP-SVol_μ 和 RP-SVol_0 投资组合再次几乎无法区分，其夏普比率仅次于等权重投资组合，最大回撤和溃疡指数也最低。在最大分散化策略族中，MDP-Vol 的夏普比率（1.109）高于 MDP-SVol_μ （0.997）和 MDP-SVol_0（1.004），但表6中的这一差异并不显著。基准阈值使采用该阈值的四种策略的夏普比率落在 1.016–1.052 之间，均高于市场指数。

4.4.3. 两个数据集之间的比较

表6 报告了相同模型类别中风险度量（A面板）或阈值（B面板和C面板）不同的策略之间，扣除交易成本后的年化样本外夏普比率差异。置信区间95% 采用学生化循环区块自助法计算（Politis andRomano，1992年；Ledoit 和 Wolf，2008年），区块长度为21天，重复抽样1999年次；道琼斯指数的 Bartlett HAC 带宽为9，纳斯达克100指数的带宽为8。值采用 Holm（1979年）方法在每个面板和数据集中进行调整，推断以回测生成的样本外收益率序列为条件。与等权重投资组合、均值-方差模型和市场指数进行的检验结果见补充材料。

在 A面板中，我们观察到，在低于均值阈值下，无论模型类别或数据集如何，任何下行策略与其基于方差的对应模型之间均不存在显著差异。置信区间仅在风险平价情况下较窄，此时 RP-SVol_μ 与 RP-Vol 在道琼斯上的差异为 -0.0010，在纳斯达克100指数上的差异为 -0.0033。我们将 RP-Vol 以夏普比率单位表示的年度交易成本作为等效界值，$\delta = 12\, c_{\text{tc}}$ 换手率$/\sigma^{\text{ann}}$，其中 换手率以小数表示，并结合 σ^{ann} 其换手率和年化波动率。采用这些等效界值（道琼斯为 0。018，纳斯达克100指数为0。021），Schuirmann的双单侧检验程序 （1987年）判定 RP-Vol 与 RP-SVol_μ 在两个数据集上均具有等效性。该规则是在分析之后选择的，并非预先设定，因此这种等效性分析属于探索性分析；其对自助法设置的敏感性报告于补充材料表 S.5 中。在最小风险、收益风险比和最大分散化

表6：样本外夏普比率在同一家族内的差异（自然单位）：点估计、未经调整的等尾95%自助法置信区间及经Holm调整的 p值。采用 $1/N^{\text{out}}$ 方差估计量时，差异可能与表4–5中的结果相差0.0001。

	道琼斯		纳斯达克100指数	
	Δ [95% 置信区间]	p_{Holm}	Δ [95% 置信区间]	p_{Holm}
*A*面板。风险度量：下行风险减去基于方差的模型，$\tau = \mu^\top x$				
MSV_μ − MV	−0.0077 [−0.0575, 0.0427]	1.000	−0.0209 [−0.1145, 0.0718]	1.000
最大索提诺比率$_\mu$ − 最大夏普比率	−0.0247 [−0.0880, 0.0402]	1.000	−0.0133 [−0.1382, 0.1030]	1.000
RP-SVol$_\mu$ − RP-Vol	−0.0010 [−0.0075, 0.0054]	1.000	−0.0033 [−0.0125, 0.0062]	1.000
MDP-SVol$_\mu$ − MDP-Vol	0.0429 [−0.0325, 0.1222]	1.000	−0.1120 [−0.2372, 0.0070]	0.292
面板*B*。阈值：$\tau = 0$ 减去 $\tau = \mu^\top x$（例如 $MSV_0 - MSV_\mu$）				
MSV	0.0208 [−0.0288, 0.0695]	0.836	0.0318 [−0.0401, 0.1063]	1.000
最大索提诺比率	−0.0051 [−0.0141, 0.0040]	0.836	−0.0082 [−0.0239, 0.0078]	1.000
RP-SVol	0.0015 [−0.0046, 0.0077]	0.836	0.0012 [−0.0091, 0.0112]	1.000
MDP-SVol	0.0183 [−0.0110, 0.0475]	0.836	0.0074 [−0.0371, 0.0539]	1.000
*C*面板。阈值：$\tau_t = R_t^I$ 减去 $\tau = \mu^\top x$（例如 $MSV_{R^I} - MSV_\mu$）				
MSV	0.1055 [−0.1995年, 0.4148]	0.979	0.1681 [−0.3413, 0.7438]	1.000
最大索提诺比率	0.0352 [−0.3454, 0.3961]	0.979	0.2096 [−0.2049、0.6589]	1.000
RP-SVol	−0.1481 [−0.2374, −0.0661]	0.006	−0.0714 [−0.3275, 0.2075]	1.000
MDP-SVol	−0.1989 [−0.3965, −0.0065]	0.137	0.0224 [−0.3852, 0.4631]	1.000

模型类别中，置信区间则过宽，既无法区分这两种风险度量，也无法确立二者的等效性。

面板B显示，在两个数据集的所有模型类别中，零阈值和低于均值阈值所得的夏普比率在统计上均无显著差异。对于索提诺比率模型和风险平价模型，这两个阈值的表现几乎完全相同，这与第3.5节的重合条件一致，因为在日频下，$\mu^\top x$ 相对于半偏差而言较小。在最小风险和最大分散化类别中，两个数据集的点估计都更支持 $\tau = 0$，但差异并不显著。

基准阈值$\tau_t = R_t^I$ 的影响最大（C面板），采用该阈值的四种策略实现了几乎相同的收益率、波动率和夏普比率，尽管换手率并不相同。我们将这种趋同解释为共同基准的作用，因为低于均值版本并未趋同。然而，我们的设计无法将基准与其单侧处理区分开来；对于最大索提诺比率$_{R^I}$，分子也变成了预期主动收益。经过Holm校正后，唯一显著的

表6 中的差异涉及道琼斯上的风险平价，其中基准阈值使夏普比率降低了0。148。[3] 在纳斯达克100指数上，降幅为0。071，且不显著；在其他类别中，差异正负不一，经过校正后也不显著。在风险平价中，两种效应的估计都最为精确，基准阈值效应的点估计远大于以半波动率替代波动率的效应。因此，对下行风险模型进行比较时，应说明所采用的阈值约定。

5. 结论与进一步研究

本文研究了只做多投资组合选择中的下行风险，范围超越了最小风险模型；在这类模型中，半方差与半波动率会得出相同的投资组合。我们根据风险度量的正齐次次数，对风险预算、最大分散化和收益风险比模型进行了分类，因为一次齐次性可使分散化比率和收益风险比保持尺度不变，并使风险贡献之和等于投资组合风险。我们通过一个非退化条件明确了阈值，该条件分别针对投资组合均值、零收益率和市场指数收益率提出；在此条件下，风险平价、最大分散化和索提诺比率问题均有良好定义。根据一项已知的约化方法（Schaible，1974 年；Stoyanov 等人，2007年；Ce- sarone 等人，2025年），这两个比率问题可化为凸规划；而半波动率的可微性（这是 Fischer （2003年）的一项结果的特例）确保风险预算规划能够达到规定的预算。我们还刻画了低于均值的半波动率何时具有可加性。

样本外，我们在道琼斯和纳斯达克100数据集的总收益率上比较了十七种仅做多策略，并通过区块自助法检验了各策略族内部夏普比率差异。以低于均值的半波动率替代波动率，并不会导致夏普比率出现显著差异；从探索性角度看，在风险平价中，波动率投资组合与半波动率投资组合是等价的。在道琼斯数据集上，MDP-SVol$_0$ 和 MDP-SVol$_\mu$ 分别取得最高和第二高的夏普比率，但

[3]未调整的 p值为0.0015；针对两个数据集的C面板中的八项比较进行调整后，在 Holm （1979年）和Benjamini和Hochberg（1995年）的方法下均为0.012，因此在这一更大的检验族中，该差异在5% 显著性水平上仍然显著。

MDP-SVol$^{\mu}$ 与 MDP-Vol之间的差异并不显著，而且在纳斯达克100数据集上差异方向发生了变化，此时等权重投资组合排名第一。零阈值与低于均值阈值所得到的夏普比率在统计上没有显著差异，而市场指数阈值则使夏普比率发生了通常更大但往往不精确的变化。唯一显著的变化是道琼斯数据集中风险平价的夏普比率下降了 0.148；在对两个数据集进行市场指数比较时，经 Holm校正后这一结果仍然成立。因此，对下行风险模型进行比较时，应明确说明所采用的阈值约定。

这些发现基于当前指数成分股的数据集；这一选择会产生幸存者偏差和前视偏差，使每种策略相对于市场指数都处于有利地位。因此，使用市场指数收益率作为阈值的策略，其结果应格外谨慎地解读。未来研究可将分类法扩展至更高阶的下部部分矩（例如参见Ogryczak 和 Ruszczyński 2001；Cesarone 等（2026））， 并在时点指数成分股上重复比较。

附录 A. 半波动率的可加性

本附录证明备注 2中提出的刻画，并推导由此得到的风险平价投资组合的闭式解。

引理 3 （半波动率的可加性）。设 X， $Y \in L^2$。则

$$\mathrm{S}_{\mu}(X+Y) = \mathrm{S}_{\mu}(X) + \mathrm{S}_{\mu}(Y) \tag{A.1}$$

当且仅当下行偏差正向共线：存在α、 $\beta \geq 0$，且不同时为零，使得 $\alpha\,(X-\mathbb{E}[X])_{-} = \beta\,(Y-\mathbb{E}[Y])_{-}$ $\mathbb{P}$-*a.s.* 在此情形下 $(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y]) \geq 0$ $\mathbb{P}$-*a.s.*

证明。 令 $\xi_X := X - \mathbb{E}[X]$ 和 $\xi_Y := Y - \mathbb{E}[Y]$，使得 $\mathrm{S}_{\mu}(X+Y) = \|(\xi_X+\xi_Y)_{-}\|_{L^2}$。这里用到两个初等事实。

(I) 对于 $a, b \in \mathbb{R}$，$(a+b)_{-} \leq a_{-} + b_{-}$，当且仅当 $ab \geq 0$ 时等号成立（按符号分类讨论）。

（II）对于 U， $V \in L^2_{+}$，三角不等式 $\|U+V\|_{L^2} \leq \|U\|_{L^2} + \|V\|_{L^2}$是紧的，当且仅当 $\langle U,\ V\rangle = \|U\|_{L^2}\|V\|_{L^2}$，也就是说，当且仅当存在 α， $\beta \geq 0$，且二者不同时为零，使得 $\alpha U = \beta V$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立（柯西–施瓦茨不等式的等号情形）。必须采用对称形式：单边形式 $V = \lambda U$ 在$U = 0 \neq V$时失效，而此时不等式恰好取等。

将（I）逐点应用，并将（II）应用于（ξ_X）$_-$和（ξ_Y）$_-$，

$$\mathrm{S}_\mu(X+Y) \le \|(\xi_X)_- + (\xi_Y)_-\|_{L^2} \le \|(\xi_X)_-\|_{L^2} + \|(\xi_Y)_-\|_{L^2} = \mathrm{S}_\mu(X) + \mathrm{S}_\mu(Y).$$

由于 $0 \le (\xi_X+\xi_Y)_- \le (\xi_X)_- + (\xi_Y)_-$逐点成立，第一个不等式取等迫使非负随机变量 $((\xi_X)_- + (\xi_Y)_-)^2 - (\xi_X+\xi_Y)^2_-$ 的期望为零，因此它几乎处处为零；由 (I) 可知，这意味着 $\xi_X\xi_Y \ge 0$几乎处处成立；根据 (II)，第二个不等式取等当且仅当共线条件成立。因此，(A.1) 成立当且仅当 $\xi_X\xi_Y \ge 0$ 几乎处处成立且共线条件成立。接下来只需证明共线性蕴含 $\xi_X\xi_Y \ge 0$几乎处处成立。若 $\alpha, \beta > 0$，则 $\{\xi_X < 0\} = \{\xi_Y < 0\}$ 几乎处处成立，因此 ξ_X 和 ξ_Y 不会有相反符号。若 $\alpha = 0$，则 $\beta > 0$ 和 $(\xi_Y)_- = 0$ 几乎处处成立，因此 $\xi_Y \ge 0$ 与 $\mathbb{E}[\xi_Y] = 0$，从而 $\xi_Y = 0$ 几乎处处成立； $\beta = 0$ 的情形是对称的。 □

该符号条件正是注 2 中的 MAD-可加性条件，并且其中所述的两种比较均为严格比较：在四个等概率状态下， $X = (-1, -1, 1, 1)$ 具有 MAD-可加性，但对于 $Y = (-1, -2, 3\,2, 3\,2)$ 不具有 S_μ- 可加性；而对于 $Y = (-1, -1, 1\,2, 3\,2)$ 具有 S_μ- 可加性，但不具有 sd- 可加性。下一个结果是半波动率对应于 Ararat 等人（ 2024-年，定理 6 ）的类似结果。

定理 1 （半波动率的多元可加性）。 设 Y_1，……， $Y_n \in L^2$。以下各项等价：

(i) $\mathrm{S}_\mu\left(\sum_{i=1}^n x_i Y_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \mathrm{S}_\mu(Y_i)$ *for every* $x \in \mathbb{R}^n_+$;

（*ii*）对于每个 $x \in \Delta$，*(i)* 中的恒等式均成立；

(iii) $\mathrm{S}_\mu\left(\sum_{i\in I} Y_i\right) = \sum_{i\in I} \mathrm{S}_\mu(Y_i)$ *for every nonempty* $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$;

（*iv*）对于任意满足 $i \ne j$ 的 i、 $j \in \{1, \ldots, n\}$，存在 α_{ij}、 $\beta_{ij} \ge 0$，且二者不同时为零，使得

$$\alpha_{ij}\left(Y_i - \mathbb{E}[Y_i]\right)_- = \beta_{ij}\left(Y_j - \mathbb{E}[Y_j]\right)_- \ \mathbb{P}\text{-}a.s.;$$

(v)（共同下行因子）存在 $V \in L^2_+$ 以及非负常数 $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$，使得

$$\left(Y_i - \mathbb{E}[Y_i]\right)_- = \kappa_i V \quad \mathbb{P}\text{-}a.s. \quad \textit{for every } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

证明。令 $\xi_i := Y_i - \mathbb{E}[Y_i]$，其中 $i = 1, \ldots, n$。我们先证明 (i) $\Rightarrow$ (ii)、(iii)，再证明 (ii) $\Rightarrow$ (i)，最后证明 (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i)。

(i) $\Rightarrow$ ***(ii), (iii)***。由 x特化可立即得出。

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)***。设 $x \in \mathbb{R}^n_+$。情形 $x = 0$显然成立。若 $x \neq 0$，令$a := \sum_{i=1}^n x_i > 0$；则 $x/a \in \Delta$，并且根据 S_μ的一次齐次性，

$$\mathrm{S}_\mu\left(\sum_{i=1}^n x_i Y_i\right) = a\,\mathrm{S}_\mu\left(\sum_{i=1}^n \tfrac{x_i}{a} Y_i\right) \overset{\text{(ii)}}{=} a \sum_{i=1}^n \tfrac{x_i}{a}\,\mathrm{S}_\mu(Y_i) = \sum_{i=1}^n x_i\,\mathrm{S}_\mu(Y_i).$$

(iii) $\Rightarrow$ ***(iv)***。固定 $i \neq j$ 并在 $I = \{i, j\}$处应用 (iii)：$\mathrm{S}_\mu(Y_i + Y_j) = \mathrm{S}_\mu(Y_i) + \mathrm{S}_\mu(Y_j)$。引理 3 于是对这对 (Y_i, Y_j)给出 (iv)。

(iv) $\Rightarrow$ ***(v)***。若对每个 i，$(\xi_i)_- = 0$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立，则取 $V := 0$ 和 $\kappa_i := 0$。否则，固定一个指数 ℓ，使得$(\xi_\ell)_-$ 并非 $\mathbb{P}$-几乎处处为零，令 $V :=(\xi_\ell)_-$以及 $\kappa_\ell := 1$。固定 $i \neq \ell$，并令 $\alpha_{\ell i}, \beta_{\ell i} \geq 0$为(iv)所给出的不全为零的常数，从而 $\alpha_{\ell i}(\xi_\ell)_- = \beta_{\ell i}(\xi_i)_-$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立。若 $\beta_{\ell i} = 0$，则 $\alpha_{\ell i} > 0$且$(\xi_\ell)_- = 0$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立，这与 ℓ的选取相矛盾；因此 $\beta_{\ell i} > 0$，而$\kappa_i := \alpha_{\ell i}/\beta_{\ell i}$ 给出$(\xi_i)_- = \kappa_i V$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立。

(v) $\Rightarrow$ ***(i)***。令 $x \in \mathbb{R}^n_+$, $\xi := \sum_i x_i \xi_i$ 且 $J := \{i : \kappa_i > 0\}$。对于 $i \notin J$，$(\xi_i)_- = 0$ 几乎处处成立，且 $\mathbb{E}[\xi_i] = 0$ 给出 $\xi_i = 0$ 几乎处处成立。对于 $i \in J$，$\{\xi_i < 0\} = \{V > 0\}$几乎处处成立，且 $\xi_i = -\kappa_i V$在 $\{V > 0\}$上成立。因此，$\xi = -\big(\sum_i x_i \kappa_i\big)V$在 $\{V > 0\}$ 上且$\xi \geq 0$ 在 $\{V = 0\}$上，从而 $\xi_- = \big(\sum_i x_i \kappa_i\big)V$ $\mathbb{P}$ 几乎处处成立。取 L^2-范数并利用 $\mathrm{S}_\mu(Y_i) = \kappa_i \|V\|_{L^2}$，

$$\mathrm{S}_\mu\Big(\sum_i x_i Y_i\Big) = \Big(\sum_i x_i \kappa_i\Big)\|V\|_{L^2} = \sum_i x_i\,\mathrm{S}_\mu(Y_i).$$

□

在此条件下，风险平价问题（4）具有显式解，即 Ararat 等人 （2024年，命题 13）所给出的闭式 MAD-RP 投资组合的半波动率对应形式。

命题 4 (闭式 SV-RP 投资组合)。假设 *1* 成立，且资产收益 R_1、……、R_n 满足定理 *1* 的条件 ***(iv)***。令 b_1、……、$b_n > 0$ 且 $\sum_{i=1}^n b_i = 1$。则命题 $x^{\mathrm{RP}} = x^\star$ *3* 中的 ***SV-RP*** 投资组合可表示为闭式解：

$$x_i^{\mathrm{RP}} = \frac{b_i\,\mathrm{S}_\mu(R_i)^{-1}}{\sum_{j=1}^n b_j\,\mathrm{S}_\mu(R_j)^{-1}}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{A.2}$$

对于 $b_i = 1/n$，权重与 $\mathrm{S}_\mu(R_i)^{-1}$ 成正比。

证明。由命题 2，假设 1 意味着对于每个 i，$\mathsf{S}_\mu(R_i) > 0$，因此表达式 (A.2) 定义良好。在条件 (iv) 下，定理 1 给出对于 $x \in \mathbb{R}^n_+$，$\mathsf{S}_P(x) = \sum_{i=1}^n x_i \mathsf{S}_\mu(R_i)$，因此 S_P 在 $\mathbb{R}^n_+$ 上是线性的，并且 $\mathbb{R}^n_{++}$ 上的下行风险贡献为 $\mathsf{RC}_i(x) = x_i \mathsf{S}_\mu(R_i)$。由于 $y^\star \in \mathbb{R}^n_{++}$，也有$x^{\mathrm{RP}} \in \mathbb{R}^n_{++}$，且由命题 3 可知，对于每个 i，$x_i^{\mathrm{RP}} \mathsf{S}_\mu(R_i) = b_i \mathsf{S}_P(x^{\mathrm{RP}})$。对 i 求和 $x_i^{\mathrm{RP}} = b_i \mathsf{S}_P(x^{\mathrm{RP}})/\mathsf{S}_\mu(R_i)$，并利用 $\sum_{i=1}^n x_i^{\mathrm{RP}} = 1$，得到 $\mathsf{S}_P(x^{\mathrm{RP}}) = \left(\sum_{i=1}^n b_i \mathsf{S}_\mu(R_i)^{-1}\right)^{-1}$，代回即可得 (A.2)。 □

附录 B。证明

命题 2的证明

证明。(i) $\Leftrightarrow$ (ii)。令 $Z := (R-\mu)^\top x$。由于 $\mathbb{E}[R-\mu] = 0$，我们有$\mathbb{E}[Z] = 0$。如果 $Z_- = 0$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立，则 $Z \geq 0$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立；结合 $\mathbb{E}[Z] = 0$，这就迫使 $Z = 0$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立。反之，$Z = 0$ $\mathbb{P}$-几乎处处显然意味着 $Z_- = 0$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立。因此，当且仅当 $(R-\mu)^\top x = 0$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立时，$(R_P(x) - \mu^\top x)_- = Z_- = 0$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立，这给出了 (i) 和 (ii) 的等效性。

(i) $\Leftrightarrow$ (iii)。根据定义，$\mathsf{S}_\mu(R_P(x))^2 = \mathbb{E}\left[\left((R-\mu)^\top x\right)_-^2\right]$，当且仅当 $\left((R-\mu)^\top x\right)_- = 0$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立时，该式为零。

(ii) $\Leftrightarrow$ (iv)。由于 $\mathsf{sd}(R_P(x))^2 = \mathbb{E}\left[\left((R-\mu)^\top x\right)^2\right]$，方差为零当且仅当 $(R-\mu)^\top x = 0$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立。 □

引理 1的证明

证明。令 $Z(x) := (R-\mu)^\top x$，并令 $\varphi(x) := \mathsf{S}_P(x)^2 = \mathbb{E}[Z(x)_-^2]$，于是 $\mathsf{S}_P = \sqrt{\varphi}$。$\mathcal{W}$ 的开性由 S_P的连续性得出，而其连续性是其在 $\mathbb{R}^n$上凸且有限的结果。

标量函数 $u \mapsto u_-^2$ 在 $\mathbb{R}$上连续可微，导数为 $-2u_-$（在 $u = 0$处的两个单侧导数均为零）；论证所用的正是这一点，而非 R的分布的连续性；另一方面，$u \mapsto u_-$ 在原点处不可微。

固定 x 和一个方向 e_i。对于 $|h| \leq 1$，根据中值定理，$h \mapsto Z\ x+he_i\ _-^2$ $2\,|R_i-\mu_i|\,(|Z\ x\ |+($) 的差 $|R_i-\mu_i|) \in L^1$ $R \in\ L^2\ ^n$ 商由 ( ) 控制，因为 ( )。因此，控制收敛定理允许在期望下求导，从而得到

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} = -2\,\mathbb{E}[(R_i-\mu_i)\,Z(x)_-]\,,$$

并且这些偏导数关于 x 连续，因为 $|Z(x)_- - Z(x')_-| \le Z(x) - Z(x')$ 以及柯西–施瓦茨不等式给出 $\big|\mathbb{E}[(R_i-\mu_i)(Z(x)$
$Z\ x'\ _$ $^\top\ x - x'$ $\mathbb{R}^n$ $_-\ _-$ $(\ )\ )$
$]\big| \le \|R_i-\mu_i\|_{L^2}\,\|(R-\mu)(\ )\|_{L^2}$；因此 $\varphi \in C^1(\ )$ 具有利普希茨梯度。在 $\mathcal{W}$ 上，我们有 $\varphi > 0$，所以根据链式法则，$\mathrm{S}_P = \sqrt{\varphi}$ 在此处是 C^1，其中 $\partial_i \mathrm{S}_P = \partial_i\varphi/(2\sqrt{\varphi})$，即为式（5）。

最后，在假设 1下，命题 2（iii）给出 $\mathrm{S}_P(x) > 0$ 对于每个$x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$，即 $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\} \subseteq \mathcal{W}$。 □

问题 （4）的存在性与唯一性

该论证将 Cetingoz 等人 （2024年，定理1和定理2）中的方法专门应用于低于均值的半波动率；由假设 $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ 1 提供其在 1上的正性；现将其报告如下，以求完整。

证明。令 $\psi(y) := \sum_{i=1}^n b_i \log(y_i)$，以及 $F := \{y \in \mathbb{R}^n_{++} : \psi(y) \ge \gamma\}$，即问题（4）的可行集。集合 F 非空（$e^\gamma \mathbf{1} \in F$），且在$\mathbb{R}^n$中闭：若对于某个 i，有 $y^k \in F$、$y^k \to \bar{y}$ 和 $\bar{y}_i = 0$，则 $\psi(y^k) \to -\infty$。在假设 1 下，$m := \min\{\mathrm{S}_P(y) : y \in \mathbb{R}^n_+,\ \|y\| = 1\} > 0$，并且根据一次齐次性，$\mathrm{S}_P(y) \ge m\|y\|$ 在 $\mathbb{R}^n_+$上成立，因此 S_P 在 F 上的子水平集是紧致的，从而存在一个最优解。设 $y^1 \ne y^2$ 均为最优解，且具有共同值 $v = \mathrm{S}_P(y^1) > 0$，并令 $\bar{y} := \frac{1}{2}(y^1 + y^2)$。由于对于每个 i，$b_i > 0$ ψ在 $\mathbb{R}^n_{++}$上严格凹，因此 $\psi(\bar{y}) > \frac{1}{2}\psi(y^1) + \frac{1}{2}\psi(y^2) \ge \gamma$，即对数约束在 $\bar{y}$处不紧。S_P 的凸性给出 $\mathrm{S}_P(\bar{y}) \le v$，并且由 ψ的连续性，存在 $\alpha \in (0,1)$ 使得 $\psi(\alpha\bar{y}) \ge \gamma$，因而 $\alpha\bar{y}$ 是可行的。一次齐次性随后得到 $\mathrm{S}_P(\alpha\bar{y}) = \alpha\,\mathrm{S}_P(\bar{y}) \le \alpha v < v$，这与最优性矛盾。 □

命题3的证明

证明。问题（4）是凸的，并满足 Slater条件（取 $y_i \equiv e^{\gamma+1}$），因此 KKT条件刻画了最优性；在假设 1 下，引理 1 保证 S_P 在每个可行点处连续可微。驻点条件给出 $\partial_i \mathrm{S}_P(y^\star) = \lambda\, b_i / y_i^\star$，其中 $\lambda \ge 0$，两边乘以 $y_i^\star$ 并求和，根据一次齐次泛函的欧拉恒等式可得$\mathrm{S}_P(y^\star) = \lambda \sum_i b_i = \lambda > 0$，因此根据互补松弛，对数约束为紧约束，且

$$y_i^\star \frac{\partial \mathrm{S}_P(y^\star)}{\partial y_i} = b_i\, \mathrm{S}_P(y^\star), \qquad i = 1, \dots, n.$$

令 $x^\star := y^\star/\mathbf{1}^\top y^\star$，$\nabla \mathsf{S}_P$ 的零次齐次性（对 $\mathsf{S}_P(ty) = t\,\mathsf{S}_P(y)$ 关于 y 求导）给出 $\partial_i \mathsf{S}_P(x^\star) = \partial_i \mathsf{S}_P(y^\star)$，而 S_P 的一次齐次性给出 $\mathsf{S}_P(x^\star) = \mathsf{S}_P(y^\star)/\mathbf{1}^\top y^\star$。代入后，

$$\mathrm{RC}_i(x^\star) = x_i^\star \frac{\partial \mathsf{S}_P(x^\star)}{\partial x_i} = \frac{y_i^\star\, \partial_i \mathsf{S}_P(y^\star)}{\mathbf{1}^\top y^\star} = \frac{b_i\, \mathsf{S}_P(y^\star)}{\mathbf{1}^\top y^\star} = b_i\, \mathsf{S}_P(x^\star).$$

由于 $\gamma + c$ 的可行集是 γ对应可行集的 e^c 倍，唯一最优解会按 e^c缩放，因此 $x^\star$ 不依赖于 γ。反过来，如果对于每个 i，$x \in \Delta$都满足 $\mathrm{RC}_i(x) = b_i \mathsf{S}_P(x)$，那么 $x \in \mathbb{R}^n_{++}$，因为 $\mathsf{S}_P(x) > 0$且 $b_i > 0$，并且 x 满足KKT条件，其中 $\lambda = \mathsf{S}_P(x)$ 且 $\gamma = \sum_i b_i \log(x_i)$，因此 $x = x^\star$。 □

引理2的证明

证明。令 $F := \{y \in C : \ c^\top y = 1\}$，它是闭凸的。

可行性。设 $\bar{x} \in \Delta_C^+$。由于 C是一个锥，且 $c^\top \bar{x} > 0$，点$\bar{y} := \bar{x}/(c^\top \bar{x})$ 属于 C并满足 $c^\top \bar{y} = 1$，因此 $F \neq \emptyset$。

取到最小值。集合 $K := \{y \in C : \ \|y\| = 1\}$ 是紧致的，且非空，因为 $\Delta_C^+ \neq \emptyset$蕴含 $C \neq \{0\}$；ρ 在K上连续且严格为正，因此 $m := \min_K \rho > 0$。由一次齐次性，对于任意 $y \in C$，均有 $\rho(y) \geq m\|y\|$，因此 ρ 相对于 F 的子水平集有界，且根据魏尔斯特拉斯定理，ρ在 F 上取到其最小值。另请注意，每个$y \in F$ 均非零，因此 $\rho(y) > 0$ 在 F上成立。

等效性。对于 $x \in \Delta_C^+$，定义 $\Phi(x) := x/(c^\top x)$；对于 $y \in F$，定义 $\Psi(y) := y/(\mathbf{1}^\top y)$。对于 $x \in \Delta_C^+$，我们有 $\Phi(x) \in F$，并且根据一次齐次性，

$$\frac{c^\top x}{\rho(x)} = \frac{1}{\rho\big(\Phi(x)\big)}.$$

反之，令 $y \in F$。由于 $y \in C \subseteq \mathbb{R}^n_+$ 和 $y \neq 0$，我们有 $\mathbf{1}^\top y > 0$，因此$\Psi(y) \in C \cap \Delta$ 且 $c^\top \Psi(y) = 1/(\mathbf{1}^\top y) > 0$，即 $\Psi(y) \in \Delta_C^+$，并且

$$\frac{c^\top \Psi(y)}{\rho\big(\Psi(y)\big)} = \frac{1/(\mathbf{1}^\top y)}{\rho(y)/(\mathbf{1}^\top y)} = \frac{1}{\rho(y)}.$$

最大化 $c^\top x/\rho(x)$ 关于 Δ_C^+ 因此等价于最小化 ρ关于F，其最优解之间的关系为 Φ 且 Ψ；特别地 $x^\star = \Psi(y^\star)$ 在以下情况下是（6）的最优解：$y^\star$ 是（7）的最优解。

凸性。(7) 的目标函数根据假设是凸的，其可行集是凸锥 C 与一个超平面的交集。 □

声明与披露

资金支持。 作者未从任何组织获得所提交工作的支持。

利益冲突。 作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。

数据可用性。数据集和结果可在 francescoce-sarone.com (Cesarone, 2026年）获取；原始价格来自 FactSet，须遵守其许可条款。

代码可用性。 如有合理请求，可向通讯作者获取 MATLAB 代码。

参考文献

Ararat, Ç., Cesarone, F., Pınar, M.Ç., Ricci, J.M., 2024年。MAD风险平价投资组合。《运筹学年鉴》336，899–924。doi：10.1007/s10479-023-05797-2。Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D., 1999年。相干风险度量。《数学金融》9，203–228。doi：10.1111/1467-9965.00068。Bai, X., Scheinberg, K., Tütüncü, R., 2016年。投资组合选择中风险平价的最小二乘法。《定量金融》16，357–376。doi：10.1080/14697688.2015.1031815。Barkhagen, M., García Quiles, S., Gondzio, J., Kalcsics, J., Kroeske, J., Sabanis, S., Staal, A., 2023年。优化投资组合多元化与维度。《全球优化杂志》85，185–234。doi：10.1007/s10898-022-01202-7。Bawa, V.S., 1975年。对不确定前景进行排序的最优规则。《金融经济学杂志》2，95–121。doi：10.1016/0304-405X(75)90025-2。Bawa, V.S., 1976年。适用于所有个人的可容许投资组合。《金融学杂志》31，1169–1183。doi：10.2307/2326281。Bellini, F., Cesarone, F., Colombo, C., Tardella, F., 2021年。基于期望分位数的风险平价。《欧洲运筹学杂志》291，1149–1163。doi：10.1016/j.ejor.2020.10.009。

Benjamini, Y., Hochberg, Y., 1995年。控制错误发现率：一种实用且有效的多重检验方法。《皇家统计学会杂志：B辑（方法论）》57，289–300。doi：10.1111/j.2517-6161.1995.tb02031.x。Biglova, A., Ortobelli, S., Rachev, S.T., Stoyanov, S., 2004年。投资组合理论中风险估计的不同方法。《投资组合管理杂志》31，103–112。doi：10.3905/jpm.2004.443328。Boudt, K., Carl, P., Peterson, B.G., 2013年。基于条件风险价值预算的资产配置。《风险杂志》15，39–68。doi：10.21314/JOR.2013.258。Brown, S.J., Goetzmann, W.N., Ibbotson, R.G., Ross, S.A., 1992年。业绩研究中的幸存者偏差。《金融研究评论》5，553–580。doi：10.1093/rfs/5.4.553。Bruder, B., Roncalli, T., 2012年。运用风险预算方法管理风险敞口。SSRN工作论文2009778。SSRN。doi：10.2139/ssrn.2009778。Cesarone, F., 2026年。数据集。网址：https://www.francescocesarone.com/data-sets。访问日期：2026年11月6日。Cesarone, F., Colucci, S., 2018年。投资组合构建中的最小风险策略与资本及风险分散策略。《运筹学学会杂志》69，183–200。doi：10.1057/s41274-017-0216-5。Cesarone, F., Corradini, M., Giunta, N., Lampariello, L., 2026年。投资组合选择中的半方差、半协方差矩阵与下部部分矩：解析与数值结果。《金融研究快报》91，109424。doi：10.1016/j.frl.2025.109424。Cesarone, F., Giacometti, R., Martino, M.L., Tardella, F., 2025年。一种收益率—分散化投资组合选择方法。《计算管理科学》22，12。doi：10.1007/s10287-025-00538-1。Cetingoz, A.R., Fermanian, J.D., Guéant, O., 2024年。风险预算投资组合：存在性与计算。《数学金融》34，896–924。doi：10.1111/mafi.12419。

Cheremushkin, S.V.，2009年。为何D-CAPM是一个重大错误？半协方差统计量的不正确性。《SSRN工作论文》1336169。SSRN。网址：https://ssrn.com/abstract=1336169，doi：10.2139/ssrn.1336169。Choueifaty, Y.，Coignard, Y.，2008年。迈向最大分散化。《投资组合管理杂志》35，40–51。doi：10.3905/jpm.2008.35.1.40。DeMiguel, V.，Garlappi, L.，Uppal, R.，2009年。最优分散化与朴素分散化：1/N投资组合策略的效率究竟有多低？《金融研究评论》22，1915–1953。doi：10.1093/rfs/hhm075。Elton, E.J.，Gruber, M.J.，Blake, C.R.，1996年。幸存者偏差与共同基金业绩。《金融研究评论》9，1097–1120。doi：10.1093/rfs/9.4.1097。Estrada, J.，2006年。实践中的下行风险。《应用公司金融杂志》18，117–125。doi：10.1111/j.1745-6622.2006.00080.x。Estrada, J.，2008年。均值-半方差优化：一种启发式方法。《应用金融杂志》18，57–72。FactSet，2026年。FactSet研究系统。网址：https://www.factset.com。访问日期：2026年11月6日。Fang, K.T.，Kotz, S.，Ng, K.W.，1990。对称多元及相关分布。Chapman and Hall，伦敦。Fischer, T.，2003年。基于单侧矩的一致风险度量进行风险资本配置。《保险：数学与经济学》32，135–146。doi：10.1016/S0167-6687(02)00209-3。Fishburn, P.C.，1977年。与低于目标值收益相关的风险均值-风险分析。《美国经济评论》67，116–126。Grootveld, H.，Hallerbach, W.，1999年。方差与下行风险：二者真的有那么大的差异吗？《欧洲运筹学杂志》114，304–319。doi：10.1016/S0377-2217(98)00258-6。Harlow, W.V.，1991年。在下行风险框架下进行资产配置。《金融分析师杂志》47，28–40。doi：10.2469/faj.v47.n5.28。

Hochreiter, R.，2015年。风险平价投资组合选择的进化优化方法，载于：进化计算应用：EvoApplications 2015，施普林格。第279–288页。doi：10.1007/978-3-319-16549-3_23。Hogan, W.W.，Warren, J.M.，1974年。基于半方差的均衡资本市场模型的发展。《金融与数量分析杂志》9，1–11。doi：10.2307/2329964。Holm, S.，1979年。一种简单的序贯拒绝多重检验程序。《斯堪的纳维亚统计学杂志》6，65–70。Jin, H.，Markowitz, H.，Zhou, X.Y.，2006年。关于半方差的注记。《数学金融》16，53–61。doi：10.1111/j.1467-9965.2006.00260.x。Kaplan, P.D.，Knowles, J.A.，2004年。Kappa：一种广义下行风险调整绩效指标。《绩效衡量杂志》8，42–54。Kapsos, M.，Zymler, S.，Christofides, N.，Rustem, B.，2014年。利用线性规划优化Omega比率。《计算金融杂志》17，49–57。doi：10.21314/JCF.2014.283。Keating, C.，Shadwick, W.F.，2002年。一种通用绩效指标。《绩效衡量杂志》6，59–84。Kolm, P.N.，Tütüncü, R.，Fabozzi, F.J.，2014年。投资组合优化60年：实践挑战与当前趋势。《欧洲运筹学杂志》234，356–371。doi：10.1016/j.ejor.2013.10.060。Konno, H.，Yamazaki, H.，1991年。均值-绝对偏差投资组合优化模型及其在东京证券市场中的应用。《管理科学》37，519–531。doi：10.1287/mnsc.37.5.519。Kritzman, M.，Page, S.，Turkington, D.，2010年。为优化辩护：1/N谬误。《金融分析师杂志》66，31–39。doi：10.2469/faj.v66.n2.6。Ledoit, O.，Wolf, M.，2008年。利用夏普比率进行稳健绩效假设检验。《实证金融学杂志》15，850–859。doi：10.1016/j.jempfin.2008.03.002。

Maillard，S.、Roncalli，T.、Teïletche，J.，2010年。《等权风险贡献投资组合的性质》。《投资组合管理杂志》36，60–70。doi：10.3905/jpm.2010.36.4.060。Mansini，R.、Ogryczak，W.、Speranza，M.G.，2014年。《基于线性规划的投资组合优化：二十年回顾》。《欧洲运筹研究杂志》234，518–535。doi：10.1016/j.ejor.2013.08.035。Markowitz，H.，1952年。《投资组合选择》。《金融学杂志》7，77–91。doi：10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x。Markowitz，H.，1959年。《投资组合选择：投资的有效分散化》。耶鲁大学考尔斯经济学研究基金会，专著16，约翰·威立父子出版公司，纽约。Markowitz，H.、Todd，P.、Xu，G.、Yamane，Y.，1993年。《利用临界线算法计算均值—半方差有效集》。《运筹研究年刊》45，307–317。doi：10.1007/BF02282055。Martin，P.G.、McCann，B.B.，1989年。《富达基金投资者指南》。约翰·威立父子出版公司，纽约。Mausser，H.、Romanko，O.，2018年。《离散分布下基于条件风险价值的仅做多等风险贡献投资组合》。《定量金融》18，1927–1945。doi：10.1080/14697688.2018.1434317。Meade，N.、Beasley，J.E.，2011年。《利用指数超额表现策略检测动量效应》。《定量金融》11，313–326。doi：10.1080/14697680903460135。Nawrocki，D.N.，1999年。《下行风险度量简史》。《投资学杂志》8，9–25。doi：10.3905/joi.1999.319365。Ogryczak，W.、Ruszczyński，A.，1999年。《从随机占优到均值—风险模型：半偏差作为风险度量》。《欧洲运筹研究杂志》116，33–50。doi：10.1016/S0377-2217(98)00167-2。Ogryczak，W.、Ruszczyński，A.，2001年。《随机占优与均值—半偏差模型的一致性》。《数学规划》89，217–232。doi：10.1007/PL00011396。

Politis，D.N.、Romano，J.P.，1992年。《平稳数据的循环分块重抽样程序》，载于：LePage，R.、Billard，L.（编），《探索自助法的极限》。Wiley，纽约，第263–270页。Rockafellar，R.T.、Uryasev，S.，2000年。《条件风险价值的优化》。《风险杂志》2，21–41。doi：10.21314/JOR.2000.038。Rockafellar，R.T.、Uryasev，S.、Zabarankin，M.，2006年。《风险分析中的广义偏差》。《金融与随机过程》10，51–74。doi：10.1007/s00780-005-0165-8。Roncalli，T.，2013年。《风险平价与预算导论》。Chapman & Hall/CRC金融数学系列，CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州。doi：10.1201/b15151。Schaible，S.，1974 年。《分式规划问题的无参数凸等价形式与对偶规划》。《运筹研究杂志》18，187–196。doi：10.1007/BF02026600。Schuirmann，D.J.，1987年。《比较双单侧检验程序与功效方法以评估平均生物利用度的等效性》。《药代动力学与生物药剂学杂志》15，657–680。doi：10.1007/BF01068419。Sortino，F.A.、van der Meer，R.，1991年。《下行风险》。《投资组合管理杂志》17，27–31。doi：10.3905/jpm.1991.409343。Sortino，F.A.、Price，L.N.，1994年。《下行风险框架下的绩效测量》。《投资学杂志》3，59–64。doi：10.3905/joi.3.3.59。Spinu，F.，2013年。《计算风险平价权重的算法》。SSRN工作论文2297383。SSRN。URL：https://ssrn.com/abstract=2297383，doi：10.2139/ssrn.2297383。Stoyanov，S.V.、Rachev，S.T.、Fabozzi，F.J.，2007年。《最优金融投资组合》。《应用数学金融》14，401–436。doi：10.1080/13504860701255292。Yao，H.、Huang，J.、Li，Y.、Humphrey，J.E.，2021年。《利用下部部分矩进行平滑凸投资组合优化的一般方法》。《银行与金融杂志》129，106167。doi：10.1016/j.jbankfin.2021.106167。

Young, T.W., 1991年。卡玛比率：一种更平滑的工具。Futures 20，40。

补充材料

投资组合选择中的半方差与半波动率：下行风险投资组合模型的统一框架

摘要。 本补充材料报告了对正文所述样本外实验的四项额外分析，旨在回答论文绩效表尚未解决的三个问题：所报告的差异在统计上是否显著高于抽样噪声，绩效无法区分的模型所构建的投资组合相差多远，以及在采用其他设计选择和再平衡日历后，这些差异是否依然存在。第一部分（第 S.2节和 S.3节）基于主要实验的样本外序列展开；第二部分（第 S.4节和 S.5节）在替代设计和错开的再平衡日历下重新估计模型。每项分析均涵盖正文中的两个投资范围，第 S.6 节汇总了结果。第 S.7 节将正文的理论结果与其前置理论相对应，并报告最优投资组合的数值精度。估计量汇总于附录 S.A。

目录

S.1 范围与通用实验设置 40S.1.1 设计 .40

S.1.2 推断.42

第一部分：样本外序列分析 44

S.2 绩效差异的统计显著性 44

S.3 投资组合构成：这些模型有多大差异？ 47

P第二部分：重新估计模型的分析 49

S.4 对设计参数的敏感性 49

S.5 再平衡日期运气 51

S.6 结果总结 53

S.7 理论结果与数值精度 53S.7.1 理论结果的前置条件 . . . . . 53S.7.2 最优投资组合的数值精度 . . . 54

S.A 估计量 56S.A.1 HAC协方差 .56S.A.2 夏普比率的Delta方法 . . . . . 57S.A.3 循环分块自助法 .57

S.1. 范围与共同实验设置

S.1.1. 设计

本补充材料中的所有分析均以正文的滚动窗口实验为基础，除非某一节另有说明，否则均采用该实验的配置：学习窗口为 $D_L = 504$ 个交易日，持有窗口为 $D_H = 21$ 个交易日，不设个体权重上限，按再平衡换手率收取 50 个基点的比例交易成本，并采用静态可投资范围。与正文一样，投资范围由当前指数成分股构成；其幸存者偏差和前视偏差使所有策略相对于指数都占据优势，因此，本补充材料中的所有相对指数指标均为描述性指标。资产价格和市场指数均为 FactSet 提供的总回报序列，因此始终计入股息。50 个基点的成本水平遵循 DeMiguel 等（2009）；正文表4和表5报告了每个模型的换手率。最优权重不受成本水平影响，因此同一回测可得出任意成本水平下的净收益，表 S.2 则报告了每个模型在 0、25、50 和 100 个基点成本下的夏普比率。从 0 个基点提高到 100 个基点，会使等权重投资组合的夏普比率降低约 0.03（道琼斯）和 0.04（纳斯达克100指数），使均值–方差模型的夏普比率降低 0.12 至 0.15。因此，随着成本上升，换手率更高的模型相较于等权重投资组合表现更差

；而 RP-SVol$^{\mu}$ 与 RP-Vol 之间的差异最多变化 0。001。正文表 3 所列的十七种投资组合模型，以及各投资范围对应的市场指数，均为构成该投资范围的指数的总收益版本（正文表2）；阈值符号沿用论文中的记法，下标 μ、0 和 R^I 分别表示低于均值、低于零和低于基准的变体。

两个投资资产集合道琼斯和纳斯达克100指数的时间范围分别为2008年3月至2026年11月（道琼斯）和2012年10月至2026年11月（纳斯达克100指数），并采用正文中的完整序列筛选构建（表S.1）。与正文一样，无风险利率为零；若利率为正，r_f 则每个夏普比率将降低 r_f/σ^{ann}，只有当两个模型的波动率相近时，这才会使它们之间的差异变化不大。

表 S.1：投资资产集合。 n 表示样本期内具有完整价格序列的资产数量， N^{out} 表示样本外日度观测数量， Q 表示滚动窗口数量。

资产池	n	$N^{\text{外}}$	Q
道琼斯	30	4179	199
纳斯达克100指数	84	3024	144

图 S.1 展示了两个投资范围内各类别波动率模型、其三种下行变体以及市场指数扣除交易成本后的样本外财富。在每个类别中，波动率模型及其低于均值和低于零的变体在整个时期内走势接近，但最大分散化类别在纳斯达克100指数上的情况例外：MDP-Vol 最终比其两个变体高出约30%（8.*01* ，而二者分别为6.*13* 和 6.20）。风险平价中的各条曲线几乎无法区分，这与表 *S.6*中的距离一致。低于基准的变体走势独特，形态上更接近市场指数；在最小风险类别中，它在两个投资范围内的期末值都远高于其他三种变体。例如，在纳斯达克100指数上，期末财富从 MSV 的 3.70$^{\mu}$ 到 11.43 的 RP-SVol$_{R^I}$不等，而市场指数为 8.82 ；出于上述原因，这一比较仅作描述之用。

正文的实验方案遵循DeMiguel 等人(2009年)，以下两项分析直接取自该论文：针对等权重投资组合的夏普比率差异检验（第 S.2节）

表 S.2：比例交易成本 c_{tc} 分别为 0、25、50 和 100 个基点时，十七个模型的年化样本外夏普比率（自然单位；正文采用的水平为 50 个基点）。每种成本水平下表现最佳的模型以粗体标示；若保留三位小数后并列，则依据未舍入的数值决出胜者。

	道琼斯				纳斯达克100指数			
c_{tc}（基点）	0	25	50	100	0	25	50	100
EW	1.065	1.057	1.049	**1.034**	1.174	**1.165**	**1.156**	**1.138**
MV	0.833	0.804	0.774	0.715	0.941	0.905	0.869	0.796
MSV_0	0.860	0.824	0.787	0.715	0.970	0.925	0.880	0.789
MSV_μ	0.832	0.800	0.767	0.701	0.930	0.889	0.848	0.766
MSV_{R^I}	0.893	0.883	0.872	0.851	1.049	1.032	1.016	0.983
最大夏普比率	1.008	0.947	0.885	0.762	0.952	0.888	0.824	0.696
最大索提诺比率$_\mu$	0.981	0.921	0.860	0.739	0.932	0.872	0.811	0.689
最大索提诺比率$_0$	0.976	0.916	0.855	0.734	0.924	0.863	0.803	0.681
最大索提诺比率$_{R^I}$	0.944	0.920	0.896	0.847	1.066	1.044	1.021	0.975
RP-Vol	1.058	1.049	1.040	1.023	1.148	1.137	1.127	1.107
RP-SVol $_\mu$	1.057	1.048	1.039	1.021	1.145	1.134	1.124	1.103
RP-SVol $_0$	1.058	1.049	1.041	1.024	1.145	1.135	1.125	1.105
RP-SVol_{R^I}	0.909	0.900	0.891	0.873	1.072	1.062	1.052	1.033
MDP-Vol	1.085	1.057	1.028	0.971	**1.176**	1.142	1.109	1.041
MDP-SVol $_\mu$	1.142	1.107	1.071	0.999	1.076	1.036	0.997	0.917
MDP-SVol $_0$	**1.160**	**1.125**	**1.089**	1.018	1.081	1.043	1.004	0.927
MDP-SVol_{R^I}	0.893	0.883	0.872	0.851	1.052	1.035	1.019	0.987

以及估计窗口的变化（第 S.4节）。

S.1.2. 推断

全文反复采用以下两项约定。由于样本外序列由连续的持有期连接而成，所有方差均采用异方差和自相关一致（HAC）形式进行估计（Newey和West，1987年；Andrews，1991年），使用Bartlett核，其带宽（附录S.A）对于约含4179 (道琼斯)和3024 （纳斯达克100指数）的序列分别为9 和8 个观测值。凡需要 p值时，均通过循环分块自助法（Politis and Romano，1992年）获得，区块长度为21 个交易日，并且

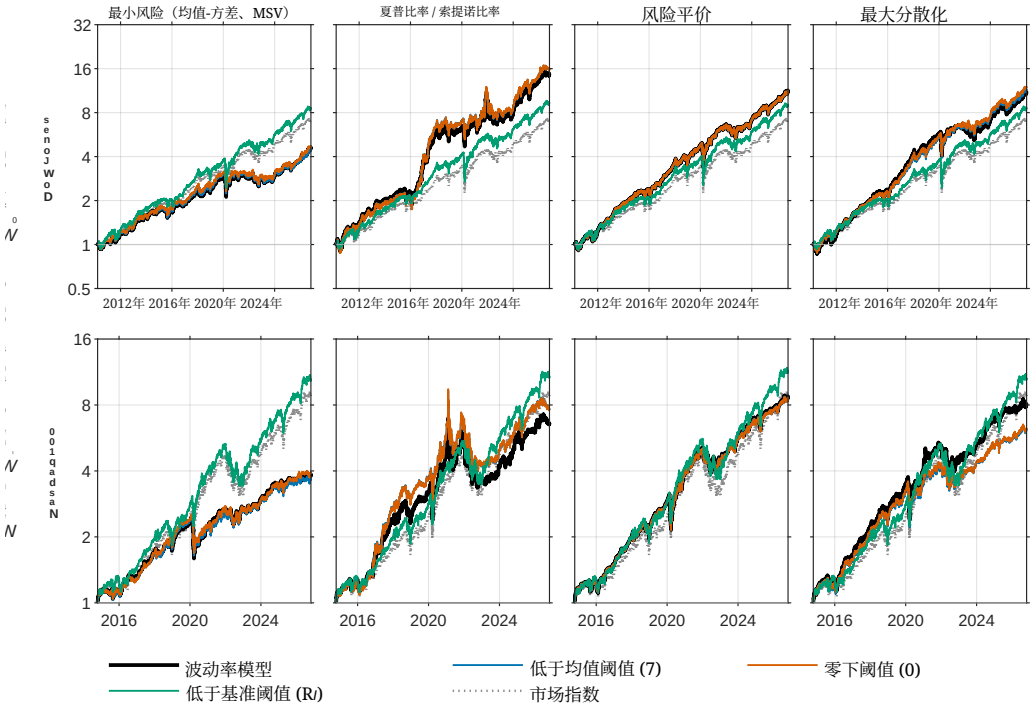

图 S.1：道琼斯和纳斯达克100指数上扣除交易成本后的样本外财富 W_t （$W_0 = 1$，对数刻度）。每一列代表一类模型：最小风险（均值-方差和 MSV）、夏普比率和索提诺比率、风险平价、最大分散化投资组合。在每个面板中，黑线表示基于波动率的模型，彩色线表示其低于均值（μ）、低于零（0）和低于基准（R^l）的变体；点线表示市场指数。每一行内的纵轴刻度一致。当曲线重叠时（如风险平价模型中），黑线仅在边缘处可见。

$B = 1999$ 次重复，每次分析中的所有成对比较均使用相同的重采样索引，并固定随机种子，因此报告的 p- 值可被精确复现。本补充材料中的所有检验均针对夏普比率，正文的表6也同样如此。

第一部分：样本外序列分析

S.2. 绩效差异的统计显著性

研究问题。 我们要探讨的是，投资组合模型与自然基准（等权重投资组合、最小方差投资组合和市场指数）之间的夏普比率差异，是否能够与抽样噪声区分开来。

方法论。对于每个资产池，我们堆叠矩条件$Y = [X,\ X^2]$，其中 X 是18个序列样本外^收益率的 $N^{\text{out}} \times 18$ 矩阵，并估计一个单一的异方差和自相关稳健协方差矩阵 VY。对于给定的一对序列，两个夏普比率之差及其^标准误可由Delta方法表示为 V中的一个 4×4 二次型；梯度见附录 S.A.2。这是经Memmel（2003）修正的Jobson and Korkie（1981）检验，即Ledoit 和 Wolf（2008）的异方差和自相关稳健版本。报告的p值是学生化区块自助法 p值：在每次重复中，均值和HAC协方差矩阵均在自助样本上重新计算，且 p值为（$1 + c$）/（$B + 1$），其中 c是满足$|(\hat{d}^* - \hat{d})/\widehat{se}^*| \geq |\hat{d}/\widehat{se}|$的重复次数。置信区间是根据相同重复得到的等尾百分位数t区间，而 p值是对称的，因此，即使未经调整的 p值略高于0.05，区间仍可能不包含零。由于每个基准都进行了十七次比较，表 S.3 和 S.4 的显著性标记基于未经调整的 p值，解读时必须考虑这种多重性。正文表6的族内检验报告的是经Holm（1979）程序调整的 p值，该程序控制族错误率。这里未实施另外两种相关程序：Bailey 和 López de Prado（2014）的去膨胀夏普比率，以及White（2000）和Hansen（2005）的优越预测能力检验；后者所回答的是一个互补问题，即在考虑模型选择后，十七个模型中表现最佳者是否优于基准。

结果。 表S.3 报告了相对于最小方差投资组合的年化夏普比率差异，表 S.4 汇总了针对三个基准的显著比较次数。

表 S.3：相对于均值-方差的年化夏普比率差异。 * 表示在学生化区块自助法（$B = 1999$）下未经调整的 $p < 0.05$ 。自然单位。

	道琼斯	纳斯达克100指数
EW	+0.27	+0.29
MSV_0	+0.01	+0.01
MSV_μ	−0.01	−0.02
MSV_{R^I}	+0.10	+0.15
最大夏普比率	+0.11	−0.04
最大索提诺比率$_\mu$	+0.09	−0.06
最大索提诺比率$_0$	+0.08	−0.07
最大索提诺比率$_{R^I}$	+0.12	+0.15
RP-Vol	+0.27*	+0.26
RP-SVol $_\mu$	+0.26*	+0.25
RP-SVol_0	+0.27*	+0.26
RP-SVol_{R^I}	+0.12	+0.18
MDP-Vol	+0.25*	+0.24
MDP-SVol $_\mu$	+0.30*	+0.13
MDP-SVol_0	+0.31*	+0.14
MDP-SVol_{R^I}	+0.10	+0.15
市场指数	+0.03	+0.07

表 S.4：在 5% 显著性水平下，夏普比率显著高于或低于各列参考序列（等权重、均值-方差、市场指数）的序列数量（共十七个），未经调整的自助法 p-值。

	与等权重相比		相较于均值-方差		相较于指数	
资产池	更高	更低	更高	更低	更高	更低
道琼斯	0	5	6	0	11	0
纳斯达克100指数	0	1	0	0	5	0

在本节中，除非另有说明，“显著”均指未经调整的

在 5% 显著性水平下的 bootstrap p 值。

首先，均值–方差模型与两个最小半方差模型 MSV_0（低于零）和 MSV^{μ}（低于均值）之间的差异，在统计上均无法与零区分。表S.3中的两行数值介于-0.02 至 $+0.01$ 之间，且从未显著；MSV_{R^I}对应的行也不显著，其基准阈值会改变目标函数。

其次，在道琼斯指数上，均值–方差模型仅显著劣于风险预算模型和分散化比率模型。其中，采用波动率、低于均值和低于零风险度量的三个风险平价变体——MDP-Vol、MDP-SVol^{μ} 和 MDP-SVol_0 ——均达到显著水平，而等权重投资组合（$+0.27$、 $p = 0.066$）与 5% 显著性水平仅差之毫厘；在纳斯达克100指数上，没有任何模型达到显著水平（这些模型中差异最大的是 RP-Vol，$+0.26$ 为 $p = 0.115$）。在风险预算模型中，波动率和半波动率变体的数值几乎相同（道琼斯指数上，RP-Vol 为 $+0.266$，RP-SVol 为 $+0.265^{\mu}$）；而分散化比率模型的数值差异最高约为 0。11（纳斯达克100指数上，MDP-Vol 为 $+0.24$，MDP-SVol 为 $+0.13^{\mu}$）。正文中的表6报告了各下行风险模型与其基于方差的对应模型之间的直接比较，以及每个模型系列中三个阈值之间的比较；结果显示，下行风险模型与其基于方差的对应模型之间的差异均不显著，且只有风险预算模型的置信区间较窄。

正文中 RP-SVol^{μ} 与 RP-Vol 的等效性分析基于 21 天的区块长度和 9 的 HAC 带宽（纳斯达克100指数上为 8）。表 S.5 使用 63 天和 126 天的区块长度，并将带宽减半和加倍，重复进行计算：在每个资产池的五种设定中，最小等效性裕度的变动至多为 0.0004，且在全部十种情况下均低于成本边际 δ。在另外三类设定中，同样的调整使最小裕度处于 0.045 至 0.219 之间，因此仍远高于 δ。由于δ 与 c_{tc}成正比，在 25 个基点时会降至约 0.009 和 0.010；在所有设定下，道琼斯上的数值仍高于 δ^*，但在纳斯达克100指数的五种设定下均低于该值，因此在该成本水平下不会判定为等效。在相同的五种设定下，风险平价中低于均值阈值与基准阈值之间的差异（正文表6的 C面板），在道琼斯上的各面板 Holm p值介于 0.002 和 0.006 之间，而在纳斯达克 100 指数上等于 1。

第三，等权重投资组合在

表 S.5：双单侧检验程序（90% 学生化循环区块自助法区间，$B = 1999$）判定 RP-SVol$^{\mu}$ 与 RP-Vol 的夏普比率等效时的最小裕度 δ^*，适用于不同区块长度和 HAC 带宽L（在纳斯达克100指数上，基准带宽为 8，减半为 4，加倍为 16）。最后一行给出了正文中基于成本的裕度 $\delta = 12\, c_{\text{tc}}\, \text{Turn}/\sigma^{\text{ann}}$，其中 Turn 为换手率（以小数表示），而 σ^{ann} 为 RP-Vol 的年化波动率。

区块，L	道琼斯	纳斯达克100指数
21，9（基准）	0.0066	0.0110
63, 9	0.0068	0.0110
126, 9	0.0065	0.0107
21, 4	0.0065	0.0110
21, 18	0.0065	0.0109
δ	0.0175	0.0205

两个投资范围内均未被显著超越，而在两个投资范围内均显著优于市场指数，并在道琼斯上显著优于四种基准阈值模型。这是DeMiguel 等人(2009年的研究发现；关于相反观点（基于样本长度和估计质量），请参阅Kritzman等人(2010年）。

S.3. 投资组合构成：这些模型有何不同?

研究问题.. 在这一样本长度下，均值–半方差模型与均值–方差模型的绩效无法区分。我们想知道，这是因为这两个投资组合几乎相同，还是因为它们有所不同，但数据无法将它们区分开来。

方法论。 利用每个滚动窗口的最优权重，我们计算出每对模型之间的平均 L_1 权重向量距离。 L_1 该距离与正文中定义换手率的量相同，可理解为从一个模型转换到另一个模型所需的交易量，买入和卖出均计入（双向口径），因此距离 d对应于单向变动的投资组合价值占比 $d/2$；其范围从 0 （相同投资组合）到 2 （投资组合完全不重叠）。这项研究属于最优投资组合估计误差相关文献（Michaud，1989年；Bestand Grauer，1991年；Chopra and Ziemba，1993年），

该文献记录了均值–方差权重对输入微小扰动的敏感程度，并涉及 Jagannathan and Ma （2003年），他们指出权重约束具有隐式收缩作用。距离度量本身则是我们自行构造的。

结果……表S.6 报告了相关 L_1 配对的平均距离。

表 S.6：跨滚动窗口计算的最优权重向量之间的平均 L_1 距离（0 =相同投资组合，2 = 最大距离）。

Pair	道琼斯	纳斯达克100指数
RP-Vol / RP-SVol $_{\mu}$	0.030	0.042
MSV$_0$ / MSV $_{\mu}$	0.190	0.267
最大夏普比率 / 最大索提诺比率 $_{\mu}$	0.223	0.342
均值-方差 / MSV $_{\mu}$	0.252	0.370
均值-方差 / MSV$_0$	0.336	0.473
MDP-Vol / MDP-SVol $_{\mu}$	0.347	0.465

在风险预算中，就我们的数据而言，波动率和半波动率产生的投资组合非常接近： L_1 距离为 0.03 至 0.04，意味着按投资组合价值计算，买入和卖出的交易规模为 3% 至 4%，也就是说，单向交易规模最多约为 2%。RP-Vol 和 RP-SVol$_{\mu}$ 几乎相同的绩效，因此反映的是两个投资组合在经验上的接近性，而不是两个配置不同但结果相似的投资组合。这种接近性是观测到的收益所具有的特征，而非代数恒等式：当每个只做多投资组合的收益率都关于其均值对称时（正文第 2.2 节），两个投资组合会重合；而在收益非对称时，二者可能不同。对于 MV 与 MSV$_{0,}$，以及 MDP-Vol 与 MDP-SVol$_{\mu}$，距离大一个数量级，介于 0.34 和 0.47 之间，但在当前样本长度下，无法区分这些组合对的绩效；本补充材料未评估这一程度的距离是否超过估计权重的抽样变异性。

第二部分：重新估计模型的分析

以下两项分析在替代设计和错开的再平衡日历下，再次求解这些优化问题。

S.4. 对设计参数的敏感性

研究问题。 我们要探讨模型的排序是否取决于正文中采用的三元组（D_L、D_H、ub），其中，ub 是最小风险模型、收益风险比模型和分散化比率模型的个体权重上界（正文中为 $x_i \le \text{ub}$；ub $= 1$ ）。

方法论。 我们围绕基准配置进行一次一因素敏感性分析，其中 $D_L \in \{252, 504, 756\}$、 $D_H \in \{21, 63, 126\}$ 和ub $\in \{0.05, 0.10, 0.20, 1\}$，每个资产池对应八种配置；虽然也实现了在相同网格上进行的全因子设计（36 种配置），但并未运行。对于每种配置，我们都会针对全部十七个模型重新运行整个实验，并报告绩效指标，以及由此得到的十七个模型排序与基准排序之间的斯皮尔曼秩相关。对于 ub $< 1/n$ 的配置，在静态资产 universe 上将不可行；而 $n \ge 30$ 的配置均不存在这种情况。将估计窗口作为稳健性检验进行调整，遵循DeMiguel 等人(2009年)的做法；将权重上限视为设计参数而非技术约束，则遵循Jagannathan 和 Ma (2003年)的做法。这里将再平衡频率作为第三个坐标轴加入。上限仅施加于优化模型：它们不会改变等权重投资组合，因为 $1/n \le 1/30$始终未达到 0。05；对于四个风险预算投资组合，也不施加这些上限，因为它们的规划中没有权重上界，因此，在仅 ub不同的四种配置中，这些投资组合完全相同。在替代配置中，无论在哪个资产池上，求解器都没有退回到等权配置。线性规划表明，在任何窗口（包括 ub $= 0.05$的窗口）中， Δ_C^+ 都非空，因此正文中的引理 2 始终适用。在第S.5 节的日历分析中，无论在哪个资产池上、采用七种偏移量中的哪一种，任何模型在任何窗口中都没有退回到等权配置。

结果。 表 S.7报告了每种替代配置与基准配置之间的秩相关。

表 S.7：在各配置与基准下，十七个模型按夏普比率排序的斯皮尔曼秩相关（D_L, D_H, ub） =(504, 21, 1)。每种配置仅改变一个参数。最后三行统计了满足所述夏普比率不等式的配置数量，其中包括基准配置。

配置	道琼斯	纳斯达克100指数
$D_L = 252$	0.85	0.95
$D_L = 756$	0.95	0.99
$D_H = 63$	0.95	0.95
$D_H = 126$	0.92	0.87
ub $= 0.05$	0.69	0.51
ub $= 0.10$	0.73	0.88
上界 $= 0.20$	0.91	0.95
类内符号计数（八种配置）		
RP-SVol $_{\mu}$ < RP-Vol	8	8
MDP-SVol $_{\mu}$ < MDP-Vol	0	8
MSV_0 >均值-方差	6	5

在两个投资范围内，模型排序对学习窗口和再平衡频率都很稳健，但对权重上限的稳健性较低。在纳斯达克100指数上，除最严格的上限配置（0.51）外，所有配置的相关性都高于0.84。在规模最小的道琼斯资产池中，七种替代方案的相关性介于0.69和0.95之间，因为其中大多数模型的夏普比率仅相差几个百分点。采用半年再平衡时，道琼斯和纳斯达克100指数的持有期分别仅有33期和24期，相关性分别为0.92和0.87。采用不同的学习窗口也会改变样本外期间的起始时间，该期间从样本期开始后的 D_L 天起算。在三个窗口共同覆盖的日期上计算相关性（道琼斯的日期范围为2011年3月至2026年10月，共3927天；纳斯达克100指数的日期范围为2015年10月至2026年10月，共2772天），与基准的相关性分别为：道琼斯和纳斯达克100指数上，$D_L = 252$ 对应0.88和0.90， $D_L = 756$对应0.98和0.99。在共同期间内，相关性变化不大，最大变动出现在纳斯达克100指数上的 $D_L = 252$ （从0.95降至0.90），

因此，不同样本并不能解释表S.7中较低的数值。在设计参数中，5% 的上限对两个投资范围的影响最大；它会约束集中型模型，并使其向分散型模型靠拢。

每一类内部的比较是本文立论的基础，相较于完整排序更为稳定。在 16 种配置（两个资产池各有八种）中，RP-SVol$^{\mu}$ 在全部 16种配置中的夏普比率都低于 RP-Vol，而 MDP-SVol$^{\mu}$ 的夏普比率低于 MDP-Vol 的情况出现在 8种配置中，且全部位于纳斯达克100指数。这些计数描述的是符号保持不变的频率，并非相互独立的重复试验：这些配置共享资产池、样本期以及大部分估计窗口，因此其结果具有很强的依赖性。第S.2 节中的风险预算和分散化比率比较，在两个资产池的所有替代三元组中都保持了其符号；其中，分散化比率比较在道琼斯和纳斯达克100指数上呈现相反符号，而 MSV$_0$ 与均值-方差的比较则没有保持一致；本文不再重新检验其显著性。

S.5 再平衡日期运气

研究问题.. 滚动方案从样本的第一天开始，每隔 $D_H = 21$ 天进行再平衡，但有 21 个同样合理的起始点。我们要探究，再平衡日历发生变化后，模型之间所测得的差异有多大程度仍然存在。

方法论.....实验针对一组偏移量重复进行 o，每次均基于样本 $\{o+1,\ldots,T\}$，并记录不同偏移量下绩效指标的离散度，以及排序的稳定性；稳定性通过相对于基准偏移量的斯皮尔曼相关系数和绩效最佳模型的身份来衡量。起始时间的移动还会略微改变窗口数量，因此不同偏移量下的水平并不完全可比，比较对象是排序。由于偏移量最多使起始时间移动20 个交易日，而道琼斯约有4700 个交易日，纳斯达克100指数约有3500 个交易日，因此这七个序列涵盖的时间段几乎相同，此处无需采用 D_L 第S.4 节中使用的共同日期限制。Hoffstein 等人Hoffstein et al. （2020年）已针对智能贝塔指数记录了这一现象，他们表明

仅再平衡日期的选择就会产生与策略之间差异同量级的绩效离散度；将这种再平衡日期偏移量分析应用于优化模型的比较，正是本文提出的变体。我们使用七个偏移量 $o \in \{0, 3, 7, 10, 13, 17, 20\}$，它们覆盖整个月度周期。

结果.. 表S.8汇总了七种日历安排之间的离散度。

表 S.8：七种偏移量下的再平衡日期运气。$r^{\mathrm{S}}_{\min}$ 是在某一偏移量下与基准相比，夏普比率排序的最低斯皮尔曼相关系数；“最佳模型”是排名第一的不同模型数量；“范围”是各偏移量下夏普比率的最大值减去最小值。最后三行统计了七种偏移量中，第一种模型的夏普比率更高的偏移量数量。

	道琼斯	纳斯达克100指数
$r^{\mathrm{S}}_{\min}$	0.94	0.95
最佳模型	1	1
最大范围	0.082	0.115
等权重的范围	0.012	0.044
MSV_0 与均值-方差	6	7
RP-SVol $_\mu$ 与 RP-Vol	1	0
MDP-SVol $_\mu$ 与 MDP-Vol	7	0

再平衡日历会改变每个模型的水平，但几乎不改变各类别内部的比较结果。在两个投资范围内，排序基本固定，其中 $r^{\mathrm{S}}_{\min}$ 等于 0。94（道琼斯）和 0。95 （纳斯达克100指数），且同一模型在每个日历下都排名第一：道琼斯上的 MDP-SVol_0以及纳斯达克100指数上的等权重投资组合。单个模型的夏普比率在不同日历之间的变化幅度最高可达道琼斯上的 0。08 和纳斯达克100指数上的0。11 。最大变化范围属于集中型模型，即道琼斯上的 MSV_μ 和 MSV_0 ，以及纳斯达克100指数上的最大索提诺比率$_\mu$ 和最大索提诺比率$_0$；而等权重投资组合和风险预算投资组合的变化幅度最多为 0。05。这些范围与第 S.2 节考察的类别内部差异相当，甚至更大。

不过，每一类内部的比较仍然成立，因为一对模型中的两个成员面临相同的日历设定。在14种日历-资产池组合中的13种组合下，RP-SVol_μ 低于RP-Vol，而 MDP-SVol_μ

低于MDP-Vol的情况有7种，且全部发生在纳斯达克100指数上；正如第S.4节所述，这些并非相互独立的重复试验。MSV_0 相对于均值-方差的差值在纳斯达克100指数的全部七种日历设定下均为正，在道琼斯的七种设定中有六种为正。因此，对于本文所依据的类内比较而言，采用单一日历设定已足够；在两个资产池中，排名第一的模型不会随日历设定而改变，尽管单个模型的夏普比率最多会变动0。11。

S.6. 结果总结

四项分析支持以下结论。

1. **在每个模型类别内，经过多重性调整后，以当前样本长度进行样本外评估，无法区分下行风险模型与基于方差的 formul-ations(**第S.2节**)**。在风险预算中，两者在我们的数据上选出的投资组合非常相近（第 S.3节）；对于均值-方差与 MSV_0 以及 MDP-Vol 与 MDP-SVol^{μ} ，两种投资组合之间的平均L_1 距离介于 0。34 和 0。47之间。

2. **类内比较对设计具有稳健性，但完整排序并非如此**（第 S.4 节和S.5节）。在16 种设计配置和 14 种再平衡日历中，半波动率风险预算模型在几乎所有情况下都略低于其波动率对应模型；分散化比率模型在纳斯达克100指数上较低、在道琼斯上较高；MSV_0 相对于均值-方差的优劣方向会随设计选择而改变，而模型的完整排序则会随权重上限而变。

3. **在任一资产池中，等权重投资组合的表现均未被显著超越**（第 S.2节）。

S.7. 理论结果与数值精度

S.7.1. 理论结果的先例

表S.9 列出了正文第2–3节及附录A–B中的理论结果、各结果成立所依据的假设、文献中最接近的先行结果，以及本文在此基础上所作的贡献。当某项结果以本文采用的形式为人所知时，将其归类为重述；当某项结果是已知一般结果针对低于均值的半波动率或阈值泛函 的特化时，

若其是在已知结果基础上增加了新的论述，则归类为扩展；若我们未发现此前已有相关论述，则归类为新结果。大多数分析工具都是重述、特化或扩展而来；新的内容包括刻画低于均值的半波动率的可加性、指出相对于随机阈值的非退化性并不能由其均值以下形式推出，以及将度和阈值作为组织模型的两个维度。

S.7.2. 最优投资组合的数值精度

表 S.10 补充了正文第 4.2 节报告的退出标志，并列出基准实验中每个滚动窗口所存储权重对应的约束残差和风险预算条件残差。当一阶最优性度量低于求解器容差时，正退出标志为 1；当步长低于求解器容差时，标志为 2，因此只有标志 1 能确认找到驻点。在 77% 至 84% 的模型—窗口组合中，求解器返回标志 2，其中大多来自 fmincon 程序；在接受的解中，这些程序的一阶最优性度量始终不超过 3.2×10^{-7}，而二次规划的对应值为 1.5×10^{-12}。在十七个模型和两个投资范围中，预算约束 $\mathbf{1}^{\top} x = 1$ 的误差在 8×10^{-16} 以内，且没有负权重；这符合预期，因为接受的权重会被截断至零并重新归一化（正文第 4.2 节）。这些残差仅确认没有存储无效解。协方差矩阵采用除数 $D_L - 1$ 估计，半偏差采用除数 D_L 计算；由于每个模型对其风险泛函的正比例缩放均具有不变性，因此这不会改变任何最优投资组合。对于四种风险预算策略，我们根据每个窗口的样本内收益，重新计算相对于各策略风险泛函——即波动率、低于均值的半波动率或采用 $\tau = 0$ 或 $\tau_t = R_t^I$ 的半偏差 ρ_τ ——的相对风险贡献 $\mathrm{RC}_i(x)/\rho(x)$，并报告相对于等额预算 $1/n$、以 $1/n$ 为基准的最大偏差。波动率、低于均值和零阈值策略的偏差均未超过 3×10^{-6}，基准阈值策略的偏差未超过 1.6×10^{-4}，因此这些解在求解器精度范围内实现了规定的预算。

最后四列衡量每个窗口距离违反假设 2 还有多远。裕度 $m^\star = \min_{x \in \Delta} \max_t (\tau_t - r_t^{\top} x)$ 由正文第 4.2 节所述的线性规划计算得出，是最小的最坏

表 S.9：正文理论结果：假设、最接近的先前研究、研究状态及本文贡献。结果、方程和假设的编号与正文一致；假设 1 是低于均值的非退化条件，假设 2 是相对于目标值 τ 的对应版本。

结果	假设	先前研究	状态	本文的贡献
命题 1：性质 低于均值的 半波动率	$X \in L^2$	Ogryczak 和 Ruszczyński (1999年, 2001)；Fischer (2003年)	回顾	用我们的符号给出简短证明 。
命题 2：等价 形式 假设 1	$R \in (L^2)^n$	Ararat 等人 (2024年), 形式 (ii)	扩展	加入形式 (iii)–(iv), 它将该条件与 半波动率和波动率 联系起来，并使其可检验 通过……的核 协方差矩阵。
假设 2： 病态阈值 模型失效时 （第2.3节）	$\tau \in L^2$, 可能 随机	关于 Δ中的正性 Cetingoz 等人 (2024年); 假设 1 （均值以下形式）	特化	可能的实例 ρ_τ、 τ 随机；不满足 源自假设 1；对于 可复现基准而言失败。
引理 1： 可微性和 投资组合的梯度 半波动率	假设 1； 任意分布	Fischer (2003年, 命题4.8，推论4.9)	特化	投资组合中的情形 $p = 2$ 权重；阈值版本 针对 ρ_τ。
存在性与 唯一性针对 问题（4） （主文的附录 B ）	假设 1 或 2； $b_i > 0$	Cetingoz 等人 (2024年，定理1 和2)	特化	自包含证明 for 半波动率及 ρ_τ的自包含证明。
命题3： 对数程序 实现风险 预算	假设 1 or 2	Maillard 等人 (2010年)（波动率）； Cesarone 和 Colucci (2018年) （条件风险价值）；Cetingoz 等 (2024年)	特化	一次齐次规范化 贡献；半方差 得到相同的投资组合。
引理 2：化简 一次齐次比率 模型	ρ 凸, 一次齐次, 在一个上为正 锥 C	Stoyanov 等人 (2007年，命题 4–5)； Cesarone 等人 （2025年，第3节）	回顾	重述，其中 正性仅要求在 C.
重述（10） 的 最大分散化 投资组合	假设 1 或 2; $\eta \leq \max_i \mu_i$	Cesarone 等人 (2025年, 第3节)	特化	低于均值、零和 基准版本下的 一个引理。
重新表述（15） 索提诺比率的 引理 3：可加性 对于两个收益	假设 1 或 2；一些 $\widetilde{\mu}_i > 0$ $X, Y \in L^2$	Stoyanov 等人 （2007 年） Ararat 等人 (2024年, 引理 2)（平均绝对偏差）	特化 New	低于均值和 随机阈值比率 由一个引理给出。 下行比例性： 强于平均绝对偏差， 弱于波动率 可加性。
定理 1： 多元 可加性	$Y_1, \ldots, Y_n \in L^2$	Ararat 等人 (2024年, 定理 6)（平均绝对偏差）	New	共同下行因子 形式。
命题 4：闭式解 风险平价投资组合	假设 1； 定理1（iv）	Ararat 等人 (2024年, 命题13) (平均绝对偏差)	New	直接推论 定理 1；极限情形 无下行风险 分散化 ，结构性的 rel方差性 ly.
度 × 阈值 分类法（表 1 和 3）	—	经典性质 (Ogryczak 和 Ruszczyński, 1999年; Fischer, 2003年)	New	每个 模型类别所需的度数， 并以阈值作为第二坐标轴。

低于只做多投资组合可实现阈值的日不足额；当且仅当假设 2 在该窗口中成立时，该值为正。通过二次规划计算的数量 $\min_{x\in\Delta}\rho_\tau(x)$ 是单纯形上低于阈值的样本内日半偏差的最小值。相较于 τ =0，对于基准阈值而言，这两者分别小约 12 至 26 倍，具体取决于资产池和所采用的度量：基准相对模型在每个窗口中都定义良好，但更接近退化状态，部分原因是主动收益的离散程度低于收益，这与正文中对其结果所作的谨慎解读一致。

表 S.10：基准实验滚动窗口中的数值精度和退化距离。第 2 列：十七个模型中对预算约束的最大违反程度。第 3–6 列：风险预算策略的样本内风险贡献相对于等额预算的最大相对偏差 $\max_{i,q}|nRC_i/\rho-1|$。第 7–10 列：在各窗口中，裕度 $m^\star$ 和 $\min_{x\in\Delta}\rho_\tau(x)$ 的最小值，以日收益单位表示，分别针对 $\tau=0$ 和 $\tau_t=R^I_t$。

		风险贡献偏差					$\min_q m^\star$		$\min_q \min_\Delta \rho_\tau$	
资产池	$\lvert\mathbf{1}^\top x-1\rvert$	RP-Vol	RP-SVol	μ	RP-SVol$_0$	RP-SVol$_{R^I}$	$\tau=0$	R^I	$\tau=0$	R^I
道琼斯	7.8e-16	2.0e-6	3.0e-6		2.5e-6	1.6e-4	1.44e-2	5.61e-4	2.87e-3	1.78e-4
纳斯达克100指数	4.4e-16	1.2e-6	2.1e-6		2.2e-6	9.8e-5	1.32e-2	7.45e-4	3.20e-3	2.58e-4

S.A.估计量

在本附录中，T 表示应用估计量的序列长度。

S.A.1. HAC协方差

对于一个由矩条件构成的 $T\times k$ 矩阵 Y，

$$\widehat{V}=\widehat{\Gamma}_0+\sum_{j=1}^{L}\Big(1-\tfrac{j}{L+1}\Big)\big(\widehat{\Gamma}_j+\widehat{\Gamma}_j^\top\big),\qquad \widehat{\Gamma}_j=\tfrac{1}{T}\sum_t(y_t-\bar{y})(y_{t-j}-\bar{y})^\top,\ \text{(S.1)}$$

采用固定带宽 $L=\lfloor 4\,(T/100)^{2/9}\rfloor$，Newey和West的自动程序（1994年）。

S.A.2. 夏普比率的 *Delta*方法

设 r 表示某个序列的日样本外收益率，且 $\theta = (m_1,\ m_2)$，其中 $m_1 = \mathbb{E}[r]$ 和 $m_2 = \mathbb{E}[r^2]$。则

$$\mathrm{SR} = \frac{m_1}{\sigma},\ \sigma^2 = m_2 - m_1^2 : \qquad \frac{\partial \mathrm{SR}}{\partial m_1} = \frac{m_2}{\sigma^3}, \qquad \frac{\partial \mathrm{SR}}{\partial m_2} = -\frac{m_1}{2\sigma^3}. \tag{S.2}$$

两个此类统计量之差的方差为 $\nabla^\top \widehat{V}\, \nabla / T$，涉及四个矩条件。这些是日收益率导数；在无风险利率为零的情况下，年化比率为 $\sqrt{252}\mathrm{SR}$，因此差值和标准误按$\sqrt{252}$缩放，而学生化统计量和 p值不变。该检验源自Jobson and Korkie (1981年）和Memmel(2003年提出的方法，并采用Ledoit 和 Wolf (2008年的 HAC学生化自助法；他们使用预白化二次谱核和基于区块的标准误，$\widehat{\ }$而这里的 Bartlett HAC矩阵 V 在每次重复抽样时重新计算；表S.5 显示，裕度对带宽并不敏感。

S.A.3. 循环分块自助法

总共抽取 $\lceil T/b \rceil$ 个长度为 $b = 21$ 的区块，起始点在首尾相接成圆的样本上均匀分布，并将拼接结果截断至长度 T，因此每个观测值被抽取的概率相同，且区块内依赖关系得以保留（Politis and Romano，1992年）。

补充材料的参考文献

Andrews, D.W.K.，1991年。异方差和自相关稳健协方差矩阵估计。《计量经济学》59，817–858。doi：10.2307/2938229。

Ararat, Ç.、Cesarone, F.、Pınar, M.Ç.、Ricci, J.M.，2024年。平均绝对偏差风险平价投资组合。《运筹学年鉴》336，899–924。doi：10.1007/s10479-023-05797-2。

Bailey, D.H., López de Prado, M., 2014年。去膨胀夏普比率：纠正选择偏差、回测过拟合和非正态性。《投资组合管理杂志》40，94–107。doi：10.3905/jpm.2014.40.5.094。

Best, M.J., Grauer, R.R., 1991年。论资产均值变化对均值-方差有效投资组合的敏感性：一些分析与计算结果。《金融研究评论》4，315–342。doi：10.1093/rfs/4.2.315。Cesarone, F., Colucci, S., 2018年。投资组合构建中的最小风险策略与资本分散化及风险分散化策略。《运筹学学会杂志》69，183–200。doi：10.1057/s41274-017-0216-5。Cesarone, F., Giacometti, R., Martino, M.L., Tardella, F., 2025年。一种用于投资组合选择的收益率—分散化方法。《计算管理科学》22，12。doi：10.1007/s10287-025-00538-1。Cetingoz, A.R., Fermanian, J.D., Guéant, O., 2024年。风险预算投资组合：存在性与计算。《数学金融》34，896–924。doi：10.1111/mafi.12419。Chopra, V.K., Ziemba, W.T., 1993年。均值、方差和协方差误差对最优投资组合选择的影响。《投资组合管理杂志》19，6–11。doi：10.3905/jpm.1993.409440。DeMiguel, V., Garlappi, L., Uppal, R., 2009年。最优分散化与朴素分散化：1/N投资组合策略的效率究竟有多低？《金融研究评论》22，1915–1953。doi：10.1093/rfs/hhm075。Fischer, T., 2003年。基于单侧矩的一致风险度量下的风险资本配置。《保险：数学与经济学》32，135–146。doi：10.1016/S0167-6687(02)00209-3。Hansen, P.R., 2005年。优越预测能力检验。《商业与经济统计杂志》23，365–380。doi：10.1198/073500105000000063。Hoffstein, C., Faber, N., Braun, S., 2020年。再平衡时机运气：智能贝塔的（愚蠢）运气。工作论文。Newfound Research。doi：10.2139/ssrn.3673910。Holm, S., 1979年。一种简单的序贯拒绝多重检验程序。《斯堪的纳维亚统计学杂志》6，65–70。Jagannathan, R., Ma, T., 2003年。大型投资组合中的风险降低：为何施加错误的约束反而有帮助。《金融学杂志》58，1651–1683。doi：10.1111/1540-6261.00580。

Jobson，J.D.，Korkie，B.M.，1981年。采用夏普比率和特雷诺指标进行绩效假设检验。《金融学杂志》36，889–908。doi：10.1111/j.1540-6261.1981.tb04891.x。Kritzman，M.，Page，S.，Turkington，D.，2010年。为优化辩护：1/N谬误。《金融分析师杂志》66，31–39。doi：10.2469/faj.v66.n2.6。Ledoit，O.，Wolf，M.，2008年。采用夏普比率进行稳健绩效假设检验。《实证金融学杂志》15，850–859。doi：10.1016/j.jempfin.2008.03.002。Maillard，S.，Roncalli，T.，Teïletche，J.，2010年。等权风险贡献投资组合的性质。《投资组合管理杂志》36，60–70。doi：10.3905/jpm.2010.36.4.060。Memmel，C.，2003年。采用夏普比率进行绩效假设检验。《金融快报》1，21–23。Michaud，R.O.，1989年。马科维茨优化之谜：“优化”的是否就是最优的？《金融分析师杂志》45，31–42。doi：10.2469/faj.v45.n1.31。Newey，W.K.，West，K.D.，1987年。一个简单的、正半定的、异方差和自相关一致的协方差矩阵。《计量经济学》55，703–708。doi：10.2307/1913610。Newey，W.K.，West，K.D.，1994年。协方差矩阵估计中的自动滞后选择。《经济学研究评论》61，631–653。doi：10.2307/2297912。Ogryczak，W.，Ruszczyński，A.，1999年。从随机占优到均值—风险模型：半偏差作为风险度量。《欧洲运筹学杂志》116，33–50。doi：10.1016/S0377-2217(98)00167-2。Ogryczak，W.，Ruszczyński，A.，2001。关于随机占优与均值—半偏差模型的一致性。《数学规划》89，217–232。doi：10.1007/PL00011396。Politis，D.N.，Romano，J.P.，1992年。平稳数据的循环分块重抽样程序，载于：LePage，R.，Billard，L.（编），《探索自助法的极限》。Wiley，纽约，第263–270页。

Stoyanov, S.V.， Rachev, S.T.， Fabozzi, F.J.， 2007年。最优金融投资组合。《应用数学金融》14，401–436。doi：10.1080/13504860701255292。

White, H.， 2000年。数据窥探的现实检验。《计量经济学》68，1097–1126。doi：10.1111/1468-0262.00152。