从共振 n + ^{16}O 散射相移重构神经网络势

Lucas A. Souza [1], * 以及 Edson Otoniel [2], † [1] *Independent Researcher, Minas Gerais, Brazil* [2] *Universidade Federal do Cariri, Instituto de Formação de Educadores, Brejo Santo, CE, Brazil*

我们利用弹性相移重构了 n + ^{16}O 窄 $D_{3/2}$ 共振对应的局域、与能量无关的有效势，采用与可微变相位计算相结合的高斯包络神经参数化，并通过独立的径向薛定谔求解器进行检验。对于第一共振（低于 2.5 MeV实验室系），重构结果给出了位于 1.001 MeV实验室系的 90° 交叉点，以及 85 keV 实验室系的导数宽度。已发表的 Dubovichenko 势在采用其原始动能系数时给出了相近的数值。四个具有可调程距的重构结果将交叉点限制在彼此相差 5 keV 以内，而其中心势的范围则跨越 47 MeV。这一差异说明，对于测得的 $D_{3/2}$ 相移，反演存在径向不确定性。n + α 的宽 $P_{3/2}$ 共振可作为同一方法的基准。

arXiv:2611.32643v1 [nucl-th] 24 Nov 2026

I. 引言

弹性散射相移约束着有效的核相互作用和共振性质。变相公式将相互作用势直接与其相移联系起来 [1, 2]。对于核子–α粒子散射，Alexander 等人采用改进的 Newton–Sabatier 方法对相移进行了反演，获得了不同于生成部分输入相移的唯象势的径向形式 [3]。通过 S-矩阵反演也获得了依赖能量的核子–α粒子势 [4]。这些反演促使人们提出这样的问题：在有限能区间和单个分波内，能够从弹性相位中推断出哪些径向特征。

如今，机器学习已广泛应用于核物理领域 [5], , 包括正向散射和截面问题 [6–8]。散射逆问题的计算方法 [9] 包括 Balassa 针对中子–α粒子散射提出的 Volterra 级数方法和神经网络重构 [10–12], , 以及 Sastri 及其合作者针对共振道提出的参考势方法 [13, 14]。与本文工作最为相关的是，Awasthi 等人利用高斯包络神经势以及对变相位方程的可微积分，重构了 $P_{3/2}$ n + α 相互作用 [

15]。我们采用该构造，以 n + α 作为基准，并将分析扩展到 n + ^{16}O 的窄 $D_{3/2}$ 共振。

$D_{3/2}$ George 和 Philpott 在连续谱壳模型 [16, 17], 中建立并从微观角度解释的 n+^{16}O 中近 1 兆电子伏的共振，正是我们在此利用局域有效势、直接从弹性相位重构的结构。此前，人们已通过反演交换非局域性提取出较高能量下 n+^{16}O 的局域势 [18, 19]„ 也已将相函数方法应用于同一系统 [20]；而我们研究的目标则是窄的 $D_{3/2}$ 共振。由于其宽度很窄，计算得到的相位对快速上升的位置极为敏感，因此对分支处理和哈密顿量提出了要求，而宽共振并无此要求。

在本工作中，我们通过可微变相位计算优化神经势，从弹性相移重构局域、与能量无关的有效势，并使用独立的径向 Schr¨odinger 求解器对所得相位进行检验。主要应用对象是 n + ^{16}O 的窄 $D_{3/2}$ 共振，数据仅限于第一共振：我们恢复其可观测量，考察在具有物理依据的不同初始条件下重构结果的稳定性，并发现，对于所考察的解，弹性相位对相位交叉点的定位比对中心势深度的约束更为严格。我们还在势固定的条件下评估交叉点对动能系数的敏感性。对于宽共振基准，我们首先将相同方法应用于 n + α [15] 的 $P_{3/2}$ 道，并与已确立的相互作用 [21, 22]进行比较。

II. 理论与计算框架

A. 散射形式主义

我们重构了一个实数、局域且与能量无关的核势 $V_{\ell j}(r)$，用于研究中子在 n+α 的 $P_{3/2}$ 道和 n+^{16}O 的 $D_{3/2}$ 道中与零自旋靶发生的弹性中子散射。对于中子质量 m_n 和靶质量 M_T，约化质量为 $\mu = m_n M_T/(m_n + M_T)$。靶最初处于静止状态时， $E_{\rm cm} = M_T E_{\rm lab}/(m_n + M_T)$ 且 $k = \sqrt{2\mu E_{\rm cm}}/\hbar$。约化径向波函数满足

$$u''_{\ell j} + \left[k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} V_{\ell j}(r)\right] u_{\ell j} = 0, \qquad (1)$$

其中离心项显式保留。我们采用 $\hbar c$ =197.3269804 兆电子伏·飞米。氦计算使用静止

* lasouza@if.usp.br
† edson.otoniel@ufca.edu.br

能量：中子为 939.56542052 兆电子伏， α 粒子为 3727.379378 兆电子伏。氧重建使用$m_n = 1.00866491606$u，原子靶质量为 $M_T = 15.99491461957$ u，且 $1\ \mathrm{u}\,c^2 = 931.49410372$ 兆电子伏。

正则解在 $r^{\ell+1}$ 原点处表现为，并具有渐近形式

$$u_{\ell j}(r) \propto \hat{j}_\ell(kr)\cos\delta_{\ell j} - \hat{n}_\ell(kr)\sin\delta_{\ell j}, \tag{2}$$

其中 $\hat{j}_\ell(x) = x j_\ell(x)$ 和 $\hat{n}_\ell(x) = x y_\ell(x)$ 是由球函数构成的 Riccati–Bessel 函数和 Riccati–Neumann函数 j_ℓ 以及 y_ℓ。变相位方程 [1, 2] 直接由势给出相位。省略运行相位中的道指标后，该方程写为

$$\frac{d\delta(r;k)}{dr} = -\frac{2\mu V_{\ell j}(r)}{\hbar^2 k}\left[\hat{j}_\ell(kr)\cos\delta - \hat{n}_\ell(kr)\sin\delta\right]^2. \tag{3}$$

正则条件为 $\delta(0;k) = 0$。数值传播器从一个很小的正半径处的零相位开始，并用外节点处的相位值近似渐近相位。弹性矩阵元 $S_{\ell j} = e^{2i\delta_{\ell j}}$ 在整数 $\delta_{\ell j} \mapsto \delta_{\ell j} + m\pi$ 下具有不变性 m。对传播器求导可得到逆向拟合所需的相位灵敏度（图1）。

B. 相互作用势的神经网络表示

各通道中的核势为

$$V_\theta(r) = v_\theta(r)\exp[-(r/R_\theta)^2], \tag{4}$$

其中，高斯包络设定衰减尺度 R_θ，神经网络振幅 $v_\theta(r)$ 可随半径变化。一个全连接的 1–16–16–1 多层感知机（MLP）以无量纲输入 $x = r/R_\theta$ 为输入。两个隐藏层均使用 tanh，输出为线性，并直接以兆电子伏表示。

两个通道中，MLP 定义振幅的方式有所不同。对于氦，MLP 的输出就是振幅本身，即 $v_\theta(r)$，因此网络在每个半径处都不受约束。对于氧，我们则对原点施加约束，

$$V_\theta(r) = \left[V_c + x^2 N_\theta(x)\right]e^{-x^2}, \qquad x = r/R_\theta, \tag{5}$$

其中，MLP 输出 $N_\theta(x)$仅通过x^2 修正项发挥作用，因此 $V_\theta(0) = V_c$ 且 $V_\theta'(0) = 0$。这一光滑正则内部区域稳定了更精细的窄共振拟合；振幅随后为 $v_\theta(r) = V_c + x^2 N_\theta(x)$。

对于氦，初步的相位拟合提供高斯势深度和作用程。将输出权重设为零，并将偏置设为拟合得到的势深度，可得到恒定的初始振幅。对于氧，来自经认证共振区域的三个不同势深度–作用程组合用于初始化 V_c 和 R_θ。在初始调整势深度和作用程期间，零输出层使径向修正为零。神经网络阶段会同时优化所有网络权重和偏置、对数作用程坐标，以及对于氧的 V_c。包络限制了重建势的族，同时保留其径向形状的可调性。拟合相位并不能确立唯一性。

C. 逆向优化

在这两个系统中，拟合均通过最小化输入能量处计算相移与参考相移之间的均方失配来实现；两者的区别仅在于失配的度量方式。用弧度表示 $\Delta_i = \delta_i^{\mathrm{calc}} - \delta_i^{\mathrm{ref}}$时，氦采用圆周损失

$$\mathcal{L}_{\mathrm{circ}} = \frac{4}{N}\sum_i \sin^2\Delta_i, \tag{6}$$

即弹性 S-矩阵元之间的均方距离，该距离在 $\delta \mapsto \delta+\pi$下保持不变。对于狭窄的氧共振，相位会迅速越过$\pi/2$，因此我们在此拟合连续（展开后的）相位分支，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{branch}} = \frac{1}{N}\sum_i \left(\widetilde{\delta}_i^{\mathrm{calc}} - \widetilde{\delta}_i^{\mathrm{ref}}\right)^2. \tag{7}$$

计算得到的分支通过以下步骤获得：按能量递增顺序展开两倍相位（修正绝对值大于 π 的跳变），再除以二，并加上 π 的某个公倍数，使第一个值最接近 $-\pi$。Fowler–Cohn 的输入相移偏移 $-\pi$，而 Hickey 的相移则按发表值使用。每次试算时都会重新计算分支整数，并在局部导数计算中将其固定。两个能量网格均包含观测能量，名义间距分别为 2.5 和 5 keV LAB，起始能量分别为 5 和 10 keV LAB。分支之间的一致性、与低能锚点的接近程度，以及对相位增量和试算间变化的界限，共同防止窄共振附近出现分支错误。

每个训练损失都对各来源的均值进行等权平均。对于氦，来源包括 22 个 Morgan–Walter 观测值、20 个 Hoop–Barschall 观测值，以及使用 Satchler 光学模型计算的 22 个相位 [21, 23, 24]。氧则使用 6 个 Fowler–Cohn 观测值和 7 个 Hickey 观测值 [25, 26]。评估时，在所报告的样本中汇集各点，使用

$$\mathrm{RMSE}_{\mathrm{circ}} = \left[\frac{1}{N}\sum_i \left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Arg}\,e^{2i\Delta_i}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{8}$$

对于 42 个氦实验点和全部 13 个氧观测值，均以度为单位报告均方根误差，分别使用 Numerov 和 DOP853 计算相位。特定来源的均方根误差仅汇集指定来源的观测值。

训练正向计算在 CPU 上使用 float64 精度，通过(3) RK4 积分方程。离散 RK4 步骤的导数与势的自动导数复合。对于氧，批量传播

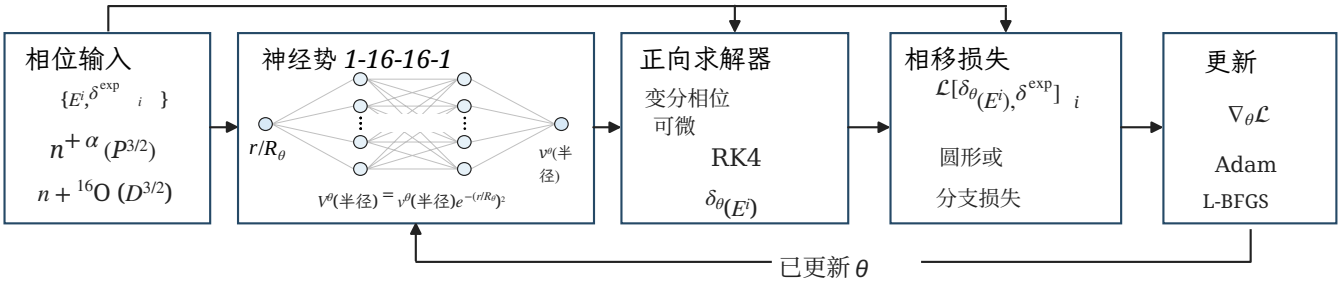

图 1. 神经逆散射工作流。在输入能量下，可微 RK4 将高斯包络势映射为相移。相移损失驱动参数更新。MLP 为氦提供振幅，并输出 $N_\theta(x)$，用于构建方程（5）中的氧振幅。独立的 Numerov（氦）和 Schr¨odinger/DOP853（氧）计算用于认证。

在稠密能量网格上确定分支，而标量传播则提供观测能量处的敏感度。

两种神经拟合均使用学习率为 10^{-3} 的 Adam，随后使用带 Armijo回溯的 L-BFGS [27] 。氦使用 2000 次 Adam 更新，以及最多 300 次 L-BFGS 试探性评估。在经过认证的初始、周期性和终止状态中，选定状态的训练损失最小。

对于氧，粗略的高斯深度–范围扫描和一次局部细化确定了一个在约 1 MeV实验室系附近具有经认证共振的区域。三个不同的起点是在排除两个先前使用的参考点后，满足 $E_{90} = 1.00 \pm 0.01$MeV实验室系的符合条件的认证点。这种基于物理信息的初始化针对共振区域。训练仅最小化相移损失。初始深度和作用程的调整在网络固定的情况下，最多使用 50 个高斯–牛顿候选方案。随后，联合优化最多使用 1000 个 Adam 候选方案和 150 次 L-BFGS 评估。每个候选方案将 V_c 和 R_θ 的变化限制在 0.5 兆电子伏和 0.005 飞米以内。在两个系统中，数值上无效的试验都会被拒绝，并通过减半来缩小步长。拒绝次数计入氧的预算。对于每个氧起点，将深度–范围、Adam之后和终止状态中损失最低的认证状态重新认证。该流程还要求一个带内 E_{90}、不超过 6°的圆形均方根误差，以及非零径向修正。

认证检查径向步长减半以及积分域的扩展。氦的 RK4 网格范围为 0.01–18 飞米，标称间距为 0.00125 飞米，并扩展至 22 飞米。氧的网格范围为 0.001–15 飞米，标称间距为 0.0025 飞米，并扩展至 20 飞米。独立径向解中，氦采用 Numerov，氧采用 DOP853，并与自由 Riccati函数匹配。相位一致性测试至 0.01°，氧还需进行额外的 $|\Delta S| < 10^{-4}$ 检查。氦通过径向细化检查原始相位的稳定性。氧则将密集分支与标量 RK4、径向细化结果及采样后的 DOP853 进行比较。梯度控制采用径向细化和中心有限差分，并对氧进行分支检查的对数范围审查。

有限盒径向谱用于检查两个通道中的负能级。氧的认证还要求在所测试的网格上不存在负 D 波能级，并验证原点处的函数值和斜率。

对于氦，共振可观测量包括分波截面的峰值能量（与 si $n^2\,\delta/k^2$ 成正比），以及其半高全宽，即未经背景扣除的两个半高能量之差。它们以质心系兆电子伏为单位给出。氧的可观测量 E_{90} 是所选分支的向上 $-\pi/2$ 交叉点，并在 0.5–2.5 MeV实验室系范围内使用 DOP853 进行精细化。导数宽度为

$$\Gamma_\delta = \left. \frac{2}{d\widetilde{\delta}/dE_{\rm lab}} \right|_{E_{90}} . \tag{9}$$

导数的单位为每 MeV实验室系对应的弧度，宽度以千电子伏实验室系为单位给出。 k^{-2}的能量依赖性可能使截面峰值偏离 E_{90}。导数宽度衡量交叉点处的相位斜率，而半高全宽衡量截面峰值的跨度。

III. 结果

A. 宽共振基准：$\mathrm{n} + \alpha\ P_{3/2}$

我们首先将该方法应用于宽 $P_{3/2}$ 共振 $\mathrm{n} + \alpha$，这里存在最接近的神经网络先例 [15]，并且有成熟的相互作用可供比较。 $P_{3/2}$ 拟合使用了 Morgan 和 Walter 的 22 个实验相位 [23]，20 以及 Hoop 和 Barschall 的 [24]，22 个相位，并采用 Satchler 光学模型计算的 22 个相位 [21]。计算得到的相位为模型提供输入。表 I 中的圆周均方根误差仅使用 42 个测得的相位。这些数据点也参与了拟合，因此该指标衡量的是样本内一致性。

神经网络相互作用遵循图2中共振上升趋势和测得的能量趋势。在42个测得的相位中，圆形均方根误差为 1.656°（神经网络拟合）和3.857°（采用原始参数的已发表 KKNN 相互作用）。神经网络相互作用给出了

比KKNN更高的截面峰值能量和更大的半高全宽（表I）。

图 3 展示了这些散射曲线背后的径向形状差异。神经网络相互作用和 KKNN 相互作用与能量无关。两个 Satchler 形状分别在 1.2 和 10 MeV实验室系下计算，展示了该相互作用的能量依赖性。

表I。 $n + \alpha$ $P_{3/2}$ 道中神经网络重建与已发表的 KKNN 相互作用的比较。均方根误差是根据 Morgan–Walter 和 Hoop–Barschall 的 42 个经验相移计算得出的。共振能量和宽度均以质心系表示。

模型	RMSE（度）	E_{peak}（兆电子伏）	FWHM（兆电子伏）
神经网络重建	1.656	0.90905	0.88738
KKNN（1979）	3.857	0.86234	0.78730

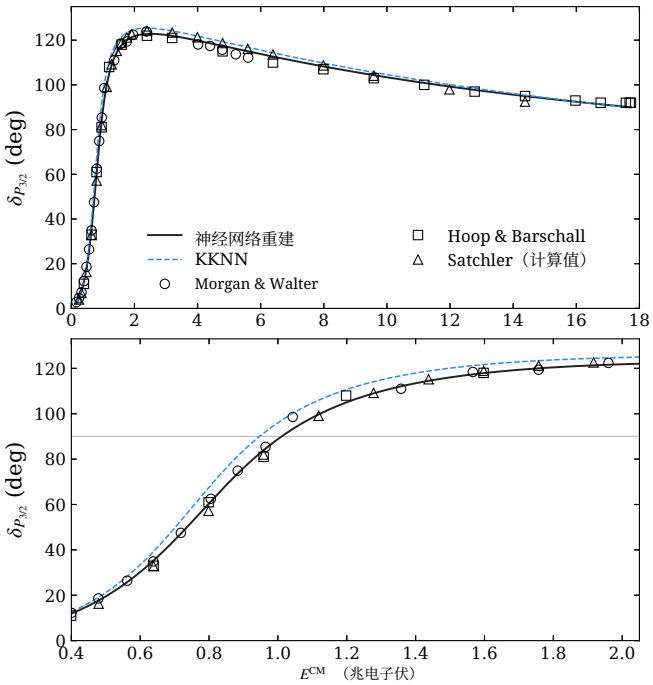

图 2. 神经网络重建和 KKNN 得到的前向 $n + \alpha$ $P_{3/2}$ 相移，展示范围至 20 兆电子伏实验室系。标记表示拟合输入：Morgan–Walter 和 Hoop–Barschall 的测量值，以及计算得到的 Satchler 相移。下方面板展示了穿过共振时的上升过程。

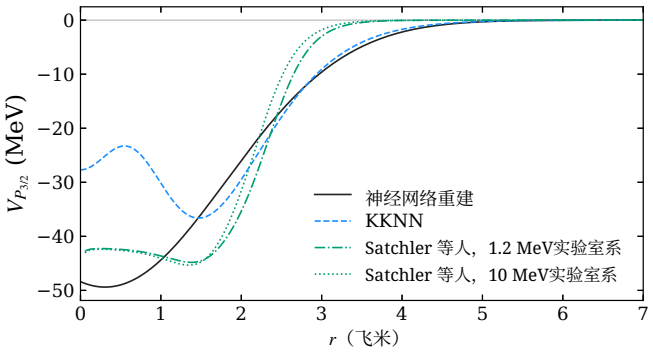

图 3. 神经网络重构、KKNN 和 Satchler 等人的径向 $n + \alpha$ $P_{3/2}$ 相互作用。Satchler 形状显示了 1.2 和 10 MeV实验室系下的结果，起始于 $r = 0.05$ 飞米，因为 Thomas 自旋–轨道项在原点处是奇异的。

B. 窄共振：$\mathrm{n} + {}^{16}\mathrm{O}$ $D_{3/2}$

该 $D_{3/2}$ 拟合使用了 Fowler 和 Cohn 的六个相位 [25] 以及 Hickey 等人的七个相位。 [26]，拟合范围限制在第一共振（低于 2.5 MeV实验室系）。通过跟踪快速上升过程中的连续相位分支，可以解析出 1 MeV实验室系附近的窄共振，分支控制的具体描述见第II节。

代表性重构（R2）和 Dubovichenko高斯相互作用 [28] 都再现了这一上升过程（图 4）。在相同的 13 个实验能量下，它们的圆周均方根误差分别为 5.500287°和 5.541805°。在每种相互作用均采用其自身的动能系数进行评估时，交点相差 1.1 千电子伏 LAB，导数宽度相差 2.4 千电子伏 LAB（表 II）。总体一致性中也包括 1.80 MeV实验室系处的局部差异，在此处 Hickey 等人 给出 $-3° \pm 2°$。在相同的相位分支上，R2 和 Dubovichenko 分别给出 $-11.48°$ 和 $-11.80°$。

三种物理信息重构（R1、R2、R3）均从经认证的近共振区域初始化。它们的圆周均方根误差为 5.501445°、5.500287°和5.501783°；对应的 E_{90} 值分别为 1.001023、1.001002 和 1.001024 MeV实验室系，导数宽度分别为 84.637、85.211 和 84.534 keV实验室系。在 13 个观测能量处，相位两两之间的最大圆周差为 0.173°；在采样径向网格上，势的两两最大差为 1.035 兆电子伏。我们在图4和表II中采用 R2 作为代表性重构。R1–R3 之间的差异反映了在输入相移均保持不变时，结果对初始点的敏感性。实验不确定性尚未传播至 E_{90} 或 Γ_δ。

四种可接受的重构结果具有更宽的初始深度范围和可调包络范围（附录 A），在更大尺度上展示了径向不确定性。它们给出了 $E_{90} = 0.9968$–1。0010 MeV实验室系以及 81。4–96。3 keV实验室系的导数宽度，而 $V(0)$ 的范围从 -95 到 -48 兆电子伏。

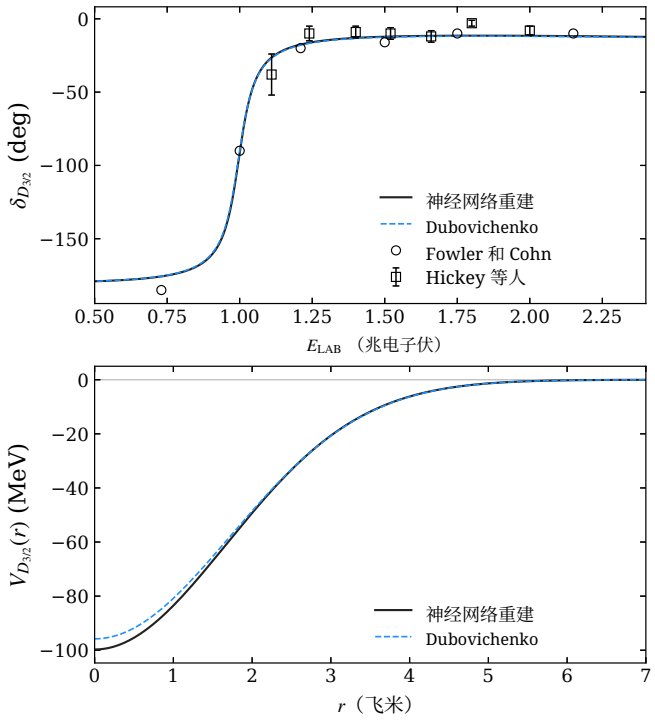

图4。上：弹性 $n + {}^{16}\mathrm{O}$ $D_{3/2}$ 来自 Fowler 和 Cohn [25] 以及 Hickey 等人的相移 [26],，与神经网络重建（R2）和 Dubovichenko 势进行比较 [28]。柱状线表示 Hickey 发表的相移不确定度（2°–14° 在此区间内）。Fowler 和 Cohn 未给出单独的相移不确定度。下：相应的有效径向核势。神经网络曲线采用项目动能约定，$C_{\rm neural} = 22.027964$兆电子伏 飞米^2,，而 Dubovichenko 曲线采用已发表的历史约定，$C_{\rm Dub} = 21.852488$兆电子伏 飞米^2,，其中 $C = \hbar^2/(2\mu)$。

表 II。在相同的 13 个实验能量下的圆形相移均方根误差，以及 $n + {}^{16}\mathrm{O}$ $D_{3/2}$ 的第一共振可观测量。共振能量和导数宽度 $\Gamma_\delta = 2/(d\widetilde{\delta}/dE_{\rm lab})$ 以实验室系给出。最后一行固定 Dubovichenko 势，并采用 R2 动能系数。短划线表示未列出的均方根误差。

模型	C （兆电子伏 飞米^2）	RMSE （度）	E_{90} （兆电子伏）	Γ_δ （千电子伏）
R2	22.027964	5.500	1.001002	85.211
Dubovichenko	21.852488	5.542	0.999888	87.625
Dubovichenko	22.027964	—	1.182544	128.427

四、讨论

在 n $+ {}^{16}$O 中，窄的 $D_{3/2}$ 共振与宽的 $P_{3/2}$ 基准以不同方式考验该方法：计算得到的相位对快速上升位置尤其敏感。与测得的相位一致以及恢复共振可观测量是两项独立测试，而此处给出的样本内均方根误差衡量的是在拟合得到的能量，而不是对预测性能进行任何统计排名。

氧比较还说明了，在解读窄共振时为何必须明确指定哈密顿量。在径向哈密顿量中，$C = \hbar^2/(2\mu)$ 同时缩放径向动能算符和离心势垒 $C\ell(\ell+1)/r^2$。在吸引势固定时改变 C，会改变这些项之间的平衡。主要比较采用 $C_{\rm neural} = 22.027964$兆电子伏 飞米^2 作为 R2 的参数，并采用 $C_{\rm Dub} = 21.852488$兆电子伏 飞米^2 作为 Dubovichenko 势的参数，因此两者的吻合是各自哈密顿量之间的吻合（表 II）。

对于固定的 Dubovichenko 势，将历史约定替换为项目约定，会使 E_{90}从 0.999888 提高到 1.182544 兆电子伏实验室系。0.80% 的增幅使 C 交点移动了 183 千电子伏，并使导数宽度从 87.6 增加到 128.4 千电子伏 LAB。两个实验室系到质心系转换因子的一致性优于 2×10^{-9}，因此在所报告的精度下，可以确定动能系数是发生偏移的原因。改变深度会改变相对于动能项的吸引作用，而改变作用程则会改变该吸引作用与势垒竞争的位置。对于不同的动能系数，任一参数都可能使交点移向其原始能量。在共振位置层面上的这种补偿，并不能决定宽度和径向分布，二者仍需分别评估。此处所述的数值敏感性适用于这一势和共振。

在相位信息不完整的反散射中，径向不确定性是常见的 [3, 9]。在此道中，1.00 MeV实验室系处的Fowler–Cohn点已经定位了90° 交点。附录A 中的四个示例表明，在13个相位具有相近精度的情况下，内部仍保留着多大的自由度：中心势深度的变化伴随着径向形状的变化，而在表面处的离散程度较小。这是在测量区间内的一种经验不确定性。在其他能量处实现严格的相移等价，则是更强的条件。

神经参数化通过散射方程直接调节灵活的径向振幅，其渐近衰减由高斯包络设定。独立的径向求解器和收敛性检验确立了所报告可观测量的数值分辨率。对这些结果的物理解释建立在所选模型类别之上：对于每个系统，仅考虑一个分波中的局域、实数且与能量无关的相互作用，并使用有限能量窗口内的相位输入。在这些假设下，该方法能够恢复共振可观测量，并揭示推断出的径向形式对可用数据和哈密顿量约定的敏感性。道耦合、非局域性以及核相互作用的完整自旋依赖性，均超出了这些拟合所能解析的信息范围。

V. 结论

我们根据中子与 $+ {}^{16}$O散射的窄 $D_{3/2}$ 共振的

弹性相移，通过可微变相位计算优化高斯包络神经势，并使用独立的径向薛定谔求解器检查结果。中子与 $P_{3/2}$ 的宽 $+\,\alpha$共振（已有相近的神经网络先例） [15]，为与既有相互作用进行比较提供了基准。

对于 $\mathrm{n}+{}^{16}\mathrm{O}$，代表性重构给出$E_{90}\ =\ 1.001$ MeV实验室系，导数宽度为 85 keV实验室系，接近采用其历史动能系数计算得到的 Dubovichenko 相互作用所对应的数值。三个近共振初始值之间的一致性体现了拟合的局部稳定性。在四个可调范围示例中，尽管交点和相位残差相近，中心势深度仍变化了约 47 兆电子伏。

因此，该方法重现了窄共振的共振散射行为，并提供了一种灵活的数据驱动替代方案，无需预先规定固定的径向形式；同时也明确表明，根据现有弹性相位推断出的内部相互作用并不是唯一确定的。

附录 A：试探形式与收敛的神经网络解

重构得到的 $D_{3/2}$ 势可以类似于一个简单的高斯函数，这引出了这样一个问题：神经网络振幅究竟是否发挥了作用，还是拟合完全由高斯包络承担。为探究这一点，我们考察了从未经先验信息的初始化得到的重构，而不是主要结果中使用的近共振初始值，从而使这些解不会被迫趋向共同的内部区域。四个这样的重构（S1–S4）采用与主要结果相同的标准予以接受，并从其初始高斯试探形式 $v(r)\ =V_c$ （此时网络输出设为零）演化到收敛的振幅 $v(r)\ =V_c+x^2N_\theta(x)$。

图 5 显示，四个收敛势对测得的相位（上图）都给出了相近的拟合，同时径向形状（下图）存在差异：它们在表面区域（$r\gtrsim 2.5$飞米）一致，但在内部出现分歧，此处 $V(0)$ 的范围约为 -48 至 -95 兆电子伏。收敛的可观测量相近（E_{90} 在 1.00 ± 0.01 MeV实验室系以内，且圆形均方根误差介于 $5.6°$ 和 $5.8°$之间），因此这些内部差异无法通过弹性相位加以分辨。

图 6单独展示了网络所学习的内容，将收敛振幅 $v(r)$（实线）与其试探形式（虚线）进行比较。学习到的修正项 $x^2N_\theta(x)$ 并不均匀：对于较深初始值，其修正幅度较小（S1 和 S2 约为 2 兆电子伏，因此仍接近高斯函数），而次对于较浅初始值，这一数值相当可观（S4 约为 24 兆电子伏）。因此，网络学习到了一个真正依赖于 r 的修正项，其大小取决于初始化，并通过补偿初始深度来重现相同的共振，这与正文中发现的有限径向可辨识性一致。

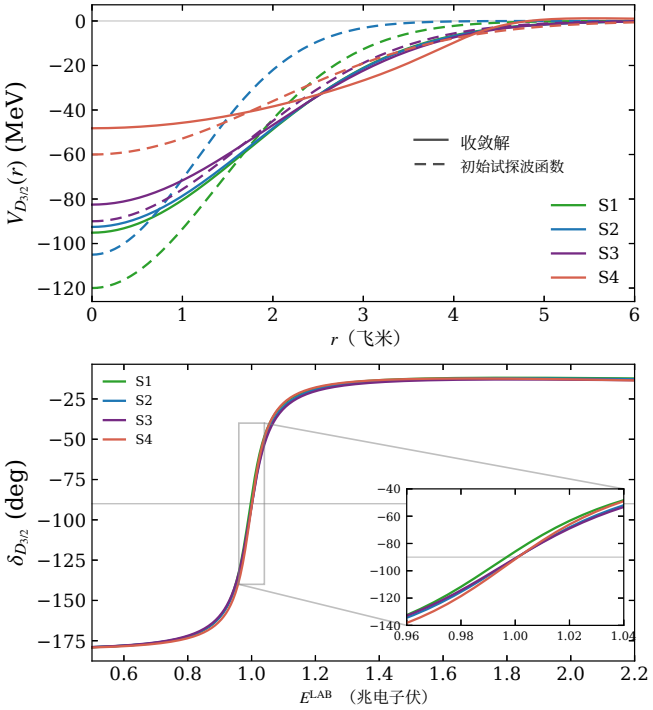

图5. $\mathrm{n}+{}^{16}\mathrm{O}$ $D_{3/2}$ 共振的四种合格重构。上： $D_{3/2}$ 相移（无实验点），并放大显示共振上升段。下：径向势$V(r)$；实线为收敛解，虚线为其初始高斯试探形式，每种解（S1–S4）各用一种颜色表示。各曲线在表面处一致，在内部则逐渐分离。

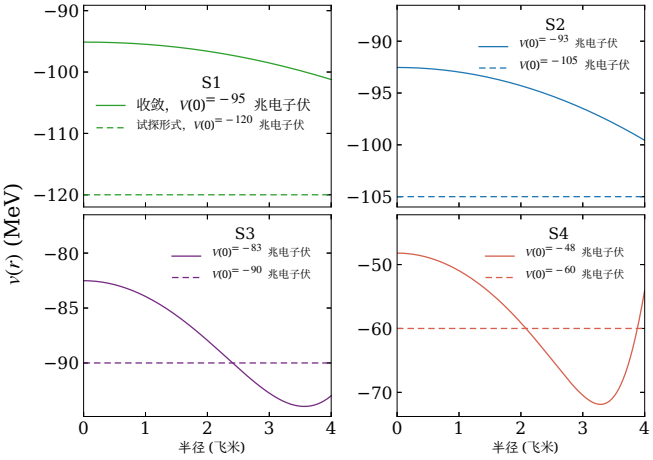

图6. 每种合格重构（S1–S4）的振幅 $v(r)\ =V_c+x^2N_\theta(x)$：收敛解（实线）与初始试探形式 $v=V_c$ （虚线）的对比。对于较深初始值（S1、S2），网络修正较小；对于较浅初始值（S4），网络修正较大。

数据和代码可用性

支持图和数值结果的相移表、源代码及机器可读数据，可在合理请求下向通讯作者获取。

致谢

EO 感谢 Funda¸c˜ao Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Cient´ıficoe Tecnol´ogico（FUNCAP）通过拨款 BP6-0241-00335.01.00/25 提供的支持。

[1] V. V. Babikov, 《Soviet Physics Uspekhi》10，271（1967）。[2] F. Calogero, *Variable Phase Approach to Potential Scattering* 35，《Mathematics in Science and Engineering》，第（Academic Press, 纽约，1967）卷。[3] N. Alexander、K. Amos、B. Apagyi 和 D. R. Lun, 《Physical Review C》53，88（1996）。[4] S. G. Cooper 和 R. S. Mackintosh, 《Physical Review C》54，3133 1996（）。[5] A. Boehnlein *et al.*, 《Reviews of Modern Physics》94，031003（2022）。[6] J. Lei, 《Physical Review C》113，064618（2026）。[7] J. Lei, 《Physical Review C》114，014620（2026）。[8] K. Xing、X.-J. Sun、R.-R. Xu、F.-L. Zou、Z.-H. Hu、J.-M. Wang、X. Tao、X.-D. Sun、Y. Tian 和 Z.-M. Niu, 《Physics Letters B》855，138825（2024）。[9] K. Chadan 和 P. C. Sabatier, *Inverse Problems in Quantum Scattering Theory* 1977（Springer, 纽约，）。[10] G. Balassa, 《The European Physical Journal A》58，186（2022）。[11] G. Balassa, 《Progress of Theoretical and Experimental Physics》2023，113A01（2023）。[12] G. Balassa, 《Progress of Theoretical and Experimental Physics》2024，083A01（2024）。[13] O. S. K. S. Sastri、A. Sharma 和 A. Awasthi, 《Physical Review C》109，064004（2024）。[14] A. Awasthi、A. Sharma、Barbie、I. Kant 和 O. S. K. S. Sastri, 《Physical Review C》112，054604（2025）。[15] A. Awasthi、I. Kant、A. Sharma、M. R. Ganesh Ku- mar 和 O. S. K. S. Sastri，Nuclear Physics A 1077，123528（2026）。[16] J. George 和 R. J. Philpott，Physical Review Letters 32，901（1974）。[17] J. George 和 R. J. Philpott，Physical Review C 12，658（1975）。[18] G. H. Rawitscher、D. Lukaszek、R. S. Mackintosh 和 S. G. Cooper，Physical Review C 49，1621（1994）。[19] D. Lukaszek 和 G. H. Rawitscher，Physical Revie w C 54，805（1996）。[20] A. Sharma、A. Sharma 和 O. S. K. S. Sastri，载于 *Proceedings of the DAE-BRNS Symposium on Nuclear Physics*，第 67 卷（2023），第 849 页，文章 C39，印度印多尔。[21] G. R. Satchler、L. W. Owen、A. J. Elwyn、G. L. Morgan 和 R. L. Walter，Nuclear Physics A 112，1（1968）。[22] H. Kanada、T. Kaneko、S. Nagata 和 M. Nomoto，Progress of Theoretical Physics 61，1327（1979）。[23] G. L. Morgan 和 R. L. Walter，Physical Review 168，1114（1968）。[24] B. Hoop 和 H. H. Barschall，Nuclear Physics 83，65（1966）。[25] J. L. Fowler 和 H. O. Co hn，Physical Review 109，89（1958）。[26] G. T. Hickey、F. W. K. Firk、R. J. Holt 和 R. Nath，Nuclear Physics A 225，470（1974）。[27] D. C. Liu 和 J. Nocedal，Mathematical Programming 45，503（1989）。[28] S. B. Dubovichenko，Russian Physics Journal 55，992（2013）。