arXiv:2611.32644v1 [math.DG] 24 Nov 2026

¨带锥形奇点的 Teichmüller 空间与 Virasoro 余伴随轨道

安东·阿列克谢耶夫、REA DALIPI 和萨姆森·沙塔什维利

Abstract. 我们研究圆盘上具有理想边界且在一个标记点处带有角度为 $\theta = 2\pi\beta$的锥形奇点的双曲 0-度量的 Teichmüller空间。对于所有 $\beta > 0$，我们证明 Teich$^{\beta}(\mathbb{D}) \cong S^1\backslash\mathrm{Diff}(S^1)$，并构造由 Atiyah–Bott 构造诱导的自然闭 2-形式 ω_β 。对于非整数 β，形式 ω_β 是辛形式，并且可以将 Teich$^{\beta}(\mathbb{D})$与相应的椭圆型Virasoro余伴随轨道等同起来。

对于正整数 $\beta = n$， ω_β 是预辛的，并下降为例外Virasoro轨道 PSU$^{(n)}(1,\ 1)\backslash\mathrm{Diff}(S^1)$上的 Kirillov-Kostant-Souriau辛形式。圆盘上带有角度为 $\theta = 2\pi n$ 的锥形奇点的双曲 0-度量的无穷小等距变换由李代数 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 给出；该李代数在圆盘边界上积分为群 PSU$^{(n)}(1,\ 1)$ ，但当 $n > 1$时，在内部不能积分为该群。值得注意的是，相应 Teichmüller空间的预辛结构恢复了这个群，并下降到相应的 Virasoro 余伴随轨道。

Contents

1. 引言 1
2. Virasoro 余伴随轨道 3
3. 圆盘的 Teichm¨uller 空间 6
4. 辛结构 12
附录 A. 圆盘上的双曲圆锥度量 23
参考文献 25

1. 引言

Teichm¨uller 空间在复分析和双曲几何中发挥着核心作用，并在数学物理中有重要应用。引力理论的最新进展重新激发了人们对带边界曲面的 Teichm¨uller 空间的兴趣，它们与 Virasoro 余伴随轨道 [2]密切相关。尤其是，圆盘上的 Jackiw–Teitelboim（JT）引力具有一种边界描述，由圆上的 Schwarzian作用量 [14, 15, 13]支配。Virasoro 余伴随轨道的分类已十分成熟 [11, 18], ，这些轨道分为椭圆型、双曲型、抛物型和例外型。文献 [1]中的作者在具有理想边界的曲面 Teichm¨uller 空间上构造了自然的辛结构，并确立了它们与 Virasoro几何之间的关系。尤其是，他们证明圆盘的 Teich m¨uller 空间与第一例外型 Virasoro 余伴随轨道辛同构。

在本文中，我们通过研究一个具有理想边界的圆盘来拓展这一几何图景，其中有一个带有总角度为 2 的锥形奇点的标记点 $\pi\beta$、 $\beta > 0$。我们描述相应的Teichm¨uller空间，并在其上构造一个自然的闭二形式。对于非整数 $\beta > 0$，该形式 ω_β是辛的，而动量映射将Teichm¨uller空间识别为经过常值Hill势 $T = \beta^2/4$的椭圆型Virasoro余伴随轨道。对于 $\beta = n \in \mathbb{Z}_{>0}$，动量映射与

到相应例外轨道的自然投影一致， ω_n 是预辛的，并且是该投影下KKS辛形式的拉回。

与这一对应关系相关的方法也已通过规范理论得到发展。Valach 和 Youmans [17] 展示了，例外型 Virasoro 余伴随轨道可通过在带 puncture 圆盘上的 PSL$(2,\mathbb{R})$ BF理论的 Drinfeld–Sokolov 约化产生。Blau 和 Youmans [5] 发展了一种规范理论描述，将一般的 Virasoro 余伴随轨道与双曲几何联系起来。他们证明，在无穷小层面上，相应双曲度量的等距变换与余伴随轨道的稳定子群相对应。

更具体地，设 $\mathbb{D}$ 为闭圆盘， $p \in \mathbb{D}$ 为其内部的一个标记点。我们考虑 $\mathbb{D}\backslash\{p\}$ 上的双曲度量，其具有理想边界，并在 p 处有一个阶为 $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ 的简单奇点（见下文定义 3.7）。这类奇点称为锥形奇点，其总角度为 $2\pi\beta$。固定 p位于原点，模型度量可通过沿映射 $z \mapsto z^\beta$拉回 Poincar´e 度量得到：

$$g^{\beta}_{\mathbb{D}} = \frac{4\beta^2|z|^{2(\beta-1)}}{(1-|z|^{2\beta})^2}\,|dz|^2. \tag{1}$$

对于正整数 $\beta = n$，映射 $z \mapsto z^n$ 是一个分支覆盖。

将这类度量组成的空间记为 Hyp$^\beta(\mathbb{D},\ p)$。于是， $\mathbb{D}\backslash\{p\}$ 上存在由 $g \in \mathrm{Hyp}^\beta(\mathbb{D},\ p)$ 诱导的复结构。事实证明，对于简单奇异性，这个复结构可以光滑延拓到 $\mathbb{D}$。我们将相应的 Teichm¨uller 空间定义为

$$\mathrm{Teich}^\beta(\overline{\mathbb{D}},p) = \mathrm{Hyp}^\beta(\overline{\mathbb{D}},p)/\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}},\partial\mathbb{D},p)$$

其中，Diff$(\overline{\mathbb{D}},\ \partial\mathbb{D},\ \mathrm{p})$ 是固定边界和点 p 的保向微分同胚群。

对于 $\beta = 1$，模型度量在 p 处是光滑的。遗忘标记点后，可以得到带理想边界的光滑圆盘的 Teichm¨uller 空间，该空间在 [1] 中有所研究。作者为这个空间赋予了自然的辛结构，并证明它同构于第一个例外型 Virasoro余伴随轨道：

$$\mathrm{Teich}(\overline{\mathbb{D}}) \cong \mathrm{PSU}(1,1)\backslash\mathrm{Diff}(S^1). \tag{2}$$

这里，Diff(S^1) 表示圆的保向微分同胚群。注意，光滑 Poincar´é 度量的无穷小 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 等距变换可以积分为全局 PSU$(1,\ 1)$ M¨obius 等距变换。

本文旨在将这一几何图景推广到椭圆型和高阶例外 Virasoro 余伴随轨道。例外轨道具有如下形式

$$\mathcal{O}^{(n)} = \mathrm{PSU}^{(n)}(1,1)\backslash\mathrm{Diff}(S^1),$$

其中 PSU$^{(n)}(1,\ 1)$ 是作用在圆上的 Möbius 群的 n 重覆盖。应注意，对于$\beta = n \geqslant 2$，度量 **(1)** 的无穷小等距变换再次在带 puncture 圆盘上定义了一个 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-作用。然而，正如 [6] 中所示，相应的向量场并非全部完备，并且该作用无法积分为带 puncture 圆盘上的全局 PSU$^{(n)}(1,\ 1)$-作用。

我们的第一个主要结果如下。

定理 A。 对于每个 $\beta > 0$，有

$$\mathrm{Teich}^\beta(\overline{\mathbb{D}},p) \cong S^1\backslash\mathrm{Diff}(S^1). \tag{3}$$

该空间带有一个由 Atiyah–Bott 构造诱导的自然闭2-形式 ω_β。

注意，描述（3）与 β无关。然而，我们将展示 β 会重新出现在2-形式ω_β中，并使我们能够恢复椭圆型 Virasoro轨道与例外 Virasoro 轨道之间的区别。特别地，当 β取正整数值时，2-形式 ω_β 会变得退化，而其零方向

决定了进一步的商，从而导出一个例外 Virasoro 轨道。我们的第二个主要结果精确刻画了这一关系。

定理 B。 设 ω_β 是 Teich$^\beta(\mathbb{D}$ 上的 $p)$ 上述引入的闭2-形式。

(i) 若 $\beta \notin \mathbb{Z}_{>0}$，则形式 ω_β 为辛形式，且动量映射将 Teich$^\beta(\mathbb{D}, p)$ 与相应的椭圆型Virasoro余伴随轨道等同起来，该轨道配备了其Kirillov–Kostant–Souriau形式。**(ii)** 若 $\beta = n \in \mathbb{Z}_{>0}$，则形式 ω_n 为预辛形式，并且满足

$$\omega_n = \pi_n^* \omega_{\mathrm{KKS}}^{(n)},$$

其中 $\omega^{(n)}$ KKS 是 $\mathcal{O}^{(n)}$ 上的 Kirillov–Kostant–Souriau形式，且

$$\pi_n : \mathrm{Teich}^n(\overline{\mathbb{D}}, p) \cong S^1 \backslash \mathrm{Diff}(S^1) \longrightarrow \mathrm{PSU}^{(n)}(1,1) \backslash \mathrm{Diff}(S^1) = \mathcal{O}^{(n)}$$

是自然投影。

值得注意的是，尽管如上所述，$\beta = n > 1$的无穷小等距变换不可积，但这一结果同时重新得出了群 $\mathrm{PSU}^{(n)}(1,1)$ 以及对 n的依赖，而这两者在齐性空间描述 Teich$^n(\mathbb{D}, p) \cong S^1 \backslash$Diff$(S^1)$中都无从体现。

本文结构如下。第2节回顾 Virasoro 余伴随轨道的相关性质，并特别关注例外轨道。第3节定义带奇点双曲度量的 Teichm¨uller 空间，并给出其齐性空间描述。第4节构造两个二形式 ω_β 并证明主要结果。附录 A 回顾第3节所用的一致化结果。

致谢。我们感谢 Matthias Blau、Eckhard Meinrenken、Julian Sonner、Marc Troyanov、Herman Verlinde、Yilin Wang 和 Donald Youmans 分享他们的思想，并就这一主题展开富有启发性的讨论。R.D. 非常感谢汉密尔顿数学研究所位于都柏林圣三一学院期间给予的热情款待，本工作的部分内容正是在那里完成的。

A.A. 和 R.D. 的研究部分得到了瑞士国家科学基金会（SNSF）236683 号资助的支持。A.A. 的研究部分得到了 SNSF 10009199 号资助的支持。A.A. 和 S.S. 的研究部分得到了西蒙斯基金会根据“研究所定向资助”计划向都柏林圣三一学院汉密尔顿数学研究所提供的奖项支持；S.S. 的研究还得到了都柏林圣三一学院汉密尔顿数学研究所的支持。

2. Virasoro coadjoint orbits

2.1. Virasoro 余伴随作用与余伴随轨道。本节汇集关于圆的微分同胚群的中心扩张、其 Virasoro 余伴随作用以及相应余伴随轨道 [4, 11, 10] 的一些标准事实。

2.1.1. Bott-维拉索罗中心扩张。 </style}保向微分同胚群 Diff(S^1)可表示为

$$\mathrm{Diff}(S^1) = \{\phi : S^1 \to S^1; \phi'(x) > 0, \int_{S^1} \phi'(x)dx = 2\pi\}.$$

其基本群由 π_1(Diff$(S^1)) \cong \mathbb{Z}$ 给出，而其万有覆盖可视为 $\mathbb{R}$ 上的拟周期微分同胚群，周期为 2π:

$$\widetilde{\mathrm{Diff}}(S^1) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f'(x) > 0, f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi\}.$$

角度为 θ 的刚性旋转由一个元素表示

$$r_\theta(x) = x + \theta.$$

旋转角度为 $r_{2\pi k}$ 的刚性旋转是 $\widetilde{\text{Diff}}(S^1)$ 的中心元素，其中旋转角度是 2π 的整数倍，并且我们有 e

$$\text{Diff}(S^1) \cong \widetilde{\text{Diff}}(S^1)/2\pi\mathbb{Z} \cong 2\pi\mathbb{Z}\backslash\widetilde{\text{Diff}}(S^1).$$

若使用映射 $x \mapsto z = e^{ix}$ 将 S^1 与复平面上的单位圆对应，则 $\text{Diff}(S^1)$ 的作用具有如下形式

$$\phi : z = e^{ix} \mapsto w = e^{i\phi(x)}.$$

群 群 $\text{Diff}(S^1)$ 有一个与 PSU(1, 1) 同构的子群，它通过 M¨obius 变换 ns

$$z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}, \tag{4}$$

其中 $|a|^2 - |b|^2 = 1$。它还包含与 n 重覆盖 $\text{PSU}^{(n)}(1、1)$ $\text{PSU}(1、1)$ 同构的子群。

其作用由公式定义为

$$z \mapsto \left(\frac{az^n+b}{\bar{b}z^n+\bar{a}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

n 次根函数的每个分支定义了 $\text{PSU}^{(n)}(1、1)$ 的一个元素，该元素覆盖由 a 和 b 定义的 $\text{PSU}(1、1)$ 中的元素。

Both $\text{Diff}(S^1)$ 和 $\widetilde{\text{Diff}}(S^1)$ 允许通过 Bott–Virasoro 2-余循环定义中心扩张 le

$$c(f_1, f_2) = \frac{1}{2}\int_{S^1} \log(f_1'(f_2(x)))\,\frac{d}{dx}\,\log(f_2'(x))\,dx. \tag{5}$$

这里可以将 $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 替换为 $\phi\colon\ S^1 \to S^1$。注意，对于每个 f，对圆的所有刚性旋转都有 $c(r_\theta、f) = c(f、r_\theta) = 0$。

2.1.2. *Virasoro*余伴随作用。Virasoro余伴随作用定义在圆上的二阶Hill算子空间上

$$\text{Hill}(S^1) = \left\{\partial_x^2 + T(x); T(x+2\pi) = T(x)\right\},$$

并且可表示如下

$$\begin{aligned} f^{-1}:\quad \partial_x^2 + T(x) &\mapsto f'(x)^{3/2}\left(\tfrac{\partial^2}{\partial f(x)^2} + T(f(x))\right) f'(x)^{1/2} \\ &= \partial_x^2 + \left(T(f(x))f'(x)^2 + \tfrac{1}{2}\mathcal{S}(f)\right), \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\mathcal{S}(f)$ 是Schwarzian导数

$$\mathcal{S}(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\frac{f''^2}{f'^2}. \tag{7}$$

注意，(6)的右端定义了元素 f的右作用，以及元素 f^{-1}的左作用。

对于Hill势 $T(x)$，Virasoro余伴随轨道 $\mathcal{O}_T$ 自带典范投影

$$\nu_T : \text{Diff}(S^1) \to \mathcal{O}_T = \text{Stab}_T\backslash\text{Diff}^+(S^1),$$

其中 Stab_T 是Hill算子 $\partial_x^2 + T$ 在 Virasoro余伴随作用下的稳定子 .

我们将重点关注经过常数Hill势$T(x) =$ const 的 Virasoro 余伴随轨道（完整分类见 [11]）。对于 $T < 0$，相应的轨道称为双曲型；对于 $T > 0$ 但 $T \notin \{\frac{n^2}{4};\ n \in \mathbb{N}\}$ 则称为椭圆型。在这两种情况下，$\text{Stab}_T = S^1$均由圆的刚性旋转实现。

具有 $T \in \{\frac{n^2}{4}$ 的 Virasoro 轨道；$n \in \mathbb{N}\}$ 称为例外型。我们将用记号 $\mathcal{O}^{(n)}$ 表示经过 $T = \frac{n^2}{4}$ 的轨道。其稳定子子群为 —

$$\text{Stab}^{(n)} = \text{PSU}^{(n)}(1,1) \subseteq \text{Diff}(S^1).$$

特别地，轨道 $\mathcal{O}^{(1)}$ 称为 Teichm¨uller 轨道，而 $\mathrm{Stab}^{(1)} = \mathrm{PSU}(1,\ 1)$ 是 Möbius 群。

2.1.3. *KKS* 辛形式。 余伴随轨道 $\mathcal{O}_T$ 带有一个规范的 Kirillov-Kostant-Souriau（KKS）辛形式 ω_T，使得

$$\nu_T^*\,\omega_T = \frac{1}{4}\int \delta(\log(f'(x)) \wedge \delta(\log(f'(x))')dx + \int T(f(x))\,\delta f'(x) \wedge \delta f(x)dx. \tag{8}$$

在此辛结构下，刚性旋转的哈密顿量具有如下形式

$$H = \int \left(T(f(x))f'(x)^2 + \frac{1}{2}\mathcal{S}(f)\right) dx. \tag{9}$$

2.2. **例外 Virasoro 轨道**。 在本节中，我们将重点关注例外 Virasoro 余伴随轨道的结构。

2.2.1. $\mathrm{PSU}^{(n)}(1,\ 1)$ 在圆上的作用。 回顾一下，$\mathrm{PSU}^{(n)}(1,\ 1)$ 的作用是使用 n次根函数的分支定义的。更具体地说，设

$$\mu_n : z \mapsto z^n, \quad \Pi_n : \mathrm{PSU}^{(n)}(1,1) \to \mathrm{PSU}(1,1)$$

是 n 次幂函数，以及从 $\mathrm{PSU}^{(n)}(1,1)$ 到 $\mathrm{PSU}(1,1)$ 的自然投影。下面这个简单的命题描述了它们在圆上的作用。

命题 2.1。对于所有 $z \in S^1, g \in \mathrm{PSU}^{(n)}(1,1)$ 有

$$\mu_n(g \cdot z) = \Pi_n(g) \cdot \mu_n(z).$$

证明。证明可通过直接计算得出:

$$\mu_n(g \cdot z) = \mu_n\left(\frac{az^n + b}{\bar{b}z^n + \bar{a}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{az^n + b}{\bar{b}z^n + \bar{a}} = \Pi_n(g) \cdot z^n = \Pi_n(g) \cdot \mu_n(z).$$

□

2.2.2. 空间 $\mathrm{Diff}^{(n)}(S^1)$ 和 $\widetilde{\mathrm{Diff}}^{(n)}(S^1)$。 为便于后续使用，我们引入以下空间

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Diff}}^{(n)}(S^1) &= \{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; F'(x) > 0, F(x + 2\pi) = F(x) + 2\pi n\},\\ \mathrm{Diff}^{(n)}(S^1) &= \{\phi : S^1 \to S^1; \phi'(x) > 0, \textstyle\int_{S^1} \phi'(x)dx = 2\pi n\},\end{aligned}$$

以及映射

$$m_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad m_n(x) = nx.$$

注意，$m_n \in \widetilde{\mathrm{Diff}}^{(n)}(S^1)$ 和 $\mu_n \in \mathrm{Diff}^{(n)}(S^1)$。空间 $\widetilde{\mathrm{Diff}}^{(n)}(S^1)$ 和 $\mathrm{Diff}^{(n)}(S^1)$的性质汇总于以下命题中:

命题 2.2。 映射 $q_n :\ f \mapsto m_n \circ f$ 建立了一个同构 $\widetilde{\mathrm{Diff}}^{(n)}(S^1) \cong \widetilde{\mathrm{Diff}}(S^1)$。此外，对于所有 f_1、$f_2 \in \widetilde{\mathrm{Diff}}(S^1)$，我们有

$$q_n(f_1 \circ f_2) = q_n(f_1) \circ f_2.$$

映射 q_n 下降为 n 重覆盖映射

$$p_n : \mathrm{Diff}(S^1) \to \mathrm{Diff}^{(n)}(S^1) \cong \mathbb{Z}_n \backslash \mathrm{Diff}(S^1)$$

由 $p_n(\phi) = \mu_n \circ \phi$ 给出。对于所有 ϕ、ϕ_1、$\phi_2 \in \mathrm{Diff}(S^1)$、$g \in \mathrm{PSU}^{(n)}(1$、$1)$，我们有

$$p_n(\phi_1 \circ \phi_2) = p_n(\phi_1) \circ \phi_2, \quad p_n(g \circ \phi) = \Pi_n(g) \circ p_n(\phi).$$

证明。 首先注意到，映射 q_n 确实将 $\widetilde{\text{Diff}}(S^1)$ 映射到 $\widetilde{\text{Diff}}^{(n)}(S^1)$。事实上，令 $F(x) = q_n(f)(x) = m_n((f)(x)) = nf(x)$。于是，

$$F(x+2\pi) = nf(x+2\pi) = n(f(x)+2\pi) = nf(x)+2\pi n = F(x)+2\pi n,$$

如所要求的，映射 q_n 可逆，其逆映射为

$$q_n^{-1}(F)(x) = \frac{1}{n}F(x).$$

因此， q_n 是 $\widetilde{\text{Diff}}(S^1)$ 与 $\widetilde{\text{Diff}}^{(n)}(S^1)$ 之间的同构。接下来，我们计算

$$q_n(f_1\circ f_2)(x) = nf_1(f_2(x)) = q_n(f_1)(f_2(x)) = (q_n(f_1)\circ f_2)(x).$$

类似的计算表明 $p_n(\phi_1\circ\phi_2) = p_n(\phi_1)\circ\phi_2$。对于 $\text{PSU}^{(n)}(1,1)$ 的作用，我们有

$$p_n(g\circ\phi) = \mu_n\circ g\circ\phi = \Pi_n(g)\circ\mu_n\circ\phi = \Pi_n(g)\circ p_n(\phi),$$

其中我们使用了命题 2.1。最后，在映射 p_n 下， $\mu_n \in \text{Diff}^{(n)}(S^1)$ 的原像是子群 $\mathbb{Z}_n \subseteq \text{Diff}(S^1)$，由刚性旋转 $r_{2\pi k/n}$ （ $k = 0, \dots, n-1$ ）给出，这表明 $\text{Diff}^{(n)}(S^1) \cong \mathbb{Z}_n\backslash\text{Diff}(S^1)$。□

2.2.3. 结构： $\mathcal{O}^{(n)}$。以下命题阐明了例外轨道与空间 $\text{Diff}^{(n)}(S^1)$ 之间的关系：

命题 2.3。对于例外余伴随轨道 $\mathcal{O}^{(n)}$ ，我们有

$$\mathcal{O}^{(n)} \cong \text{PSU}(1,1)\backslash\text{Diff}^{(n)}(S^1).$$

在投影 σ_n ： $\text{Diff}^{(n)}(S^1)\to\mathcal{O}^{(n)}$ 下，辛形式为

$$\sigma_n^*\omega^{(n)}_{\text{KKS}} = \frac{1}{4}\int_{S^1}\left(\delta(\log(F'(x))\wedge\delta(\log(F'(x))') + \delta F'(x)\wedge\delta F(x)\right)dx,$$

刚性旋转的动量映射具有如下形式

$$H = \int_{S^1}\left(\frac{1}{4}F'^2(x) + \frac{1}{2}\mathcal{S}(F)\right)dx.$$

证明。回顾 $\text{Diff}^{(n)}(S^1) \cong \mathbb{Z}_n\backslash\text{Diff}(S^1)$，其中 $\mathbb{Z}_n$ 通过角度为 $2\pi k/n$ 的刚性旋转作用，而这正是子群 $\text{PSU}^{(n)}(1,\ 1) \subseteq \text{Diff}(S^1)$ 的中心的作用。因此，

$$O^{(n)} \cong \text{PSU}^{(n)}(1,1)\backslash\text{Diff}(S^1) \cong (\text{PSU}^{(n)}(1,1)/\mathbb{Z}_n)\backslash\text{Diff}^{(n)}(S^1) = \text{PSU}(1,1)\backslash\text{Diff}^{(n)}(S^1),$$

如所要求。辛形式和刚性旋转的哈密顿量的公式通过将 $F(x) = nf(x)$ 代入方程（8）和（9）即可得到。□

3. Teichmüller spaces of a disk

3.1. **双曲结构与泰希米勒¨空间**。 本节回顾与带边界曲面相关的双曲型 0-度量以及（无限维）泰希米勒空间的概念。

3.1.1. 0-度量。 带边界曲面上双曲结构的模型是闭庞加莱圆盘

$$\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| \leqslant 1\},$$

配备了 $G = \mathrm{PSU}(1,\ 1)$ 由 M¨obius 变换给出的标准作用 (4)。回顾一下，它带有标准的庞加莱度量

$$g_{\mathbb{D}} = \frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}, \tag{10}$$

并且 G是 $g_{\mathbb{D}}$的等距变换群。

定义 3.1。 定向曲面 Σ with boundary $\partial\Sigma$ 上的双曲结构 是一个带有 $\mathbb{D}$-值图的定向图册，其过渡映射为由 G中的元素给出的常值映射。 Σ 上的所有双曲结构构成的空间记为 $\mathrm{Hyp}(\Sigma)$。

对于 $U \subseteq \Sigma$ 上的图 Σ，局部映射（发展映射） $\sigma : U \to \mathbb{D}$ 通过拉回庞加莱度量 $g_{\mathbb{D}}$，在 $U \cap \mathrm{int}(\Sigma)$ 上诱导出一个黎曼度量。定义在不同图上的黎曼度量在重叠区域上一致，从而在 $\mathrm{int}(\Sigma)$上得到一个双曲黎曼度量。边界分支成为理想边界，即由双曲度量的紧化产生的无穷远处边界。这类度量表现出特定的边界行为，可由 0-度量这一概念刻画。

定义 3.2。 设 Σ是一个带边界的光滑流形。内点集 $\mathrm{int}(\Sigma)$ 上的黎曼度量 g 称为*0-度量*，如果对于 Σ 上的每个光滑边界定义函数 ϱ，张量 $\varrho^2 g$ 都能光滑延拓为 Σ上的一个度量。若其高斯曲率在 $\mathrm{int}(\Sigma)$上满足 $K_{\mathrm{g}} = -1$，则称 0-度量是双曲型 的。[1]

显然，Poincar´e 度量（10）是 $\mathbb{D}$上的 0-度量。事实上，对于边界定义函数$\varrho = 1 - |z|^2$，我们有

$$\underline{\varrho}^2 g_{\mathbb{D}} = 4|dz|^2$$

它可光滑延拓至$\mathbb{D}$的边界。

3.1.2. *Teichm¨uller* 空间。对于带边界曲面 Σ，$\partial\Sigma \neq \varnothing$，记 $\mathrm{Hyp}(\Sigma)$ 为 Σ上的双曲 0-度量空间。该空间带有群 $\mathrm{Diff}(\Sigma)$ （ Σ的保向微分同胚群）以及其连通分支 $\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$的自然作用。

我们定义相应的 Teichm¨uller 空间

$$\mathrm{Teich}(\Sigma) = \mathrm{Hyp}(\Sigma)/\mathrm{Diff}_0(\Sigma; \partial\Sigma), \tag{11}$$

其中

$$\mathrm{Diff}_0(\Sigma; \partial\Sigma) = \{\varphi \in \mathrm{Diff}(\Sigma); \varphi|_{\partial\Sigma} = \mathrm{Id}\}_0$$

是群 $\mathrm{Diff}(\Sigma; \partial\Sigma)$ 的连通分支，其中包含 Σ上限制在边界为恒等映射的保向微分同胚。在 $\Sigma = \mathbb{D}$的情形下，群 $\mathrm{Diff}(\mathbb{D})$ 和 $\mathrm{Diff}(\mathbb{D}; \partial\mathbb{D})$ 是连通的，因此我们省略下标。我们回顾以下初等事实：

命题 3.3。 假设 $\partial\Sigma \cong S^1$。那么，对于正亏格曲面

$$\mathrm{Diff}_0(\Sigma)/\mathrm{Diff}_0(\Sigma; \partial\Sigma) \cong \widetilde{\mathrm{Diff}}(S^1),$$

以及对于圆盘

$$\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}})/\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}}; \partial\overline{\mathbb{D}}) \cong \mathrm{Diff}(S^1). \tag{12}$$

[1]我们回顾一下，边界定义函数是一个光滑的非负函数 ρ，满足 $\rho^{-1}(0) = \partial\Sigma$，并且在边界 $\partial\Sigma$上有 $d\rho \neq 0$。

证明。 记作 $\mathcal{G}=\mathbf{Diff}_0(\Sigma),\ \mathcal{H}=\mathbf{Diff}_0(\Sigma;\ \partial\Sigma)$ 并且

$$\mathcal{F}=\mathrm{Diff}_0(\Sigma)/\mathrm{Diff}_0(\Sigma;\partial\Sigma).$$

限制到边界给出一个满射同态

$$r:\mathcal{G}\longrightarrow \mathrm{Diff}(S^1),\qquad r(\phi)=\phi|_{\partial\Sigma},$$

由同伦延拓可知，它存在局部截面。由于 $\mathcal{H}=(\ker r)_0$，这诱导出一个连通覆盖

$$\overline{r}:\mathcal{F}=\mathcal{G}/\mathcal{H}\longrightarrow \mathrm{Diff}(S^1).$$

回忆同伦群正合列

$$\cdots\to\pi_1(\mathcal{H})\to\pi_1(\mathcal{G})\to\pi_1(\mathcal{F})\to\pi_0(\mathcal{H})\to\dots$$

由于 $\mathcal{H}=\mathbf{Diff}_0(\Sigma;\partial\Sigma)$ 是可缩的，我们有 $\pi_0(\mathcal{H})=\pi_1(\mathcal{H})=1$ 和 $\pi_1(\mathcal{F})\cong\pi_1(\mathcal{G})$。对于正亏格的 Σ ， $\chi(\Sigma)=1-2g<0$，因此 $\mathcal{G}$ 是可缩的 [8]。于是， $\pi_1(\mathcal{F})=1$，我们得出 r 是万有覆盖，

$$\mathcal{F}\cong\widetilde{\mathrm{Diff}}(S^1).$$

对于 $\Sigma=\mathbb{D}$，我们有 $\pi_1(\mathcal{G})\cong\mathbb{Z}$ 由 2π 的整数倍刚性旋转实现。因此， $\pi_1(\mathcal{F})\cong\mathbb{Z}$ 以及

$$\mathcal{F}\cong\mathrm{Diff}(S^1).$$

□

3.1.3. 圆盘的特伊希米勒 ¨空间。 回顾 [1] 中关于与圆盘 $\Sigma=\mathbb{D}$相关的特伊希米勒空间的如下简单计算。

命题 3.4。我们有

$$\mathrm{Teich}(\overline{\mathbb{D}})\cong\mathrm{PSU}(1,1)\backslash\mathrm{Diff}(S^1).$$

注意，$\mathbf{Teich}(\mathbb{D})$ 与维拉索罗特伊希米勒轨道 $\mathcal{O}^{(1)}$微分同胚。

证明。 由于 $g_{\mathbb{D}}$ 的等距变换群是 M¨obius 群 $\mathbf{PSU}(1,\ 1)$，我们有

$$\mathrm{Hyp}(\overline{\mathbb{D}})=g_{\mathbb{D}}\cdot\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}})\cong\mathrm{PSU}(1,1)\backslash\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}}).$$

然后，利用（12）我们得到

$$\mathrm{Teich}(\overline{\mathbb{D}})=\mathrm{Hyp}(\overline{\mathbb{D}})/\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}},\partial\overline{\mathbb{D}})\cong\mathrm{PSU}(1,1)\backslash\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}})/\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}},\partial\overline{\mathbb{D}})\cong\mathrm{PSU}(1,1)\backslash\mathrm{Diff}(S^1),$$

如所要求。 □

令 J 表示由全纯坐标 z定义在 $\mathbb{D}$ 上的标准复结构。我们回顾一下， J 的稳定子群也是 Möbius 群 $\mathbf{PSU}(1,\ 1)$，而圆盘 $\mathcal{J}(\mathbb{D})$ 上的复结构空间为

$$\mathcal{J}(\overline{\mathbb{D}})=J\cdot\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}})\cong\mathrm{PSU}(1,1)\backslash\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}})\cong\mathrm{Hyp}(\overline{\mathbb{D}}).$$

我们还需要考虑与带标记点的曲面相对应的 Teichmüller 空间。对于圆盘，我们引入度量空间

$$\mathrm{Hyp}^{(1)}(\overline{\mathbb{D}})=\mathrm{Hyp}(\overline{\mathbb{D}})\times\overline{\mathbb{D}},$$

其中，一个元素 $(g,\ p)\in\mathbf{Hyp}^{(1)}(\mathbb{D})$ 是一对对象，由 $\mathbb{D}$ 上的双曲 0-度量 g 和一个点$p\in\mathbb{D}$组成。 Teichmüller 空间定义为商空间

$$\mathrm{Teich}^{(1)}(\overline{\mathbb{D}})=\mathrm{Hyp}^{(1)}(\overline{\mathbb{D}})/\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}};\partial\overline{\mathbb{D}})$$

在微分同胚群对度量和圆盘的对角作用下。

命题 3.5。我们有

$$\mathrm{Teich}^{(1)}(\overline{\mathbb{D}})\cong S^1\backslash\mathrm{Diff}(S^1).$$

证明。如前所述，我们利用 $\mathbf{Diff}(\mathbb{D})$ 在 $\mathbf{Hyp}(\overline{\mathbb{D}})$上传递作用这一事实。此外，标准度量 $g_{\mathbb{D}}$ 的稳定子是 $\mathbf{M}^{\cdot\cdot}$ 比乌斯群，该群在圆盘上传递作用，且稳定子群同构于 S^1。因此，

$$\mathrm{Hyp}^{(1)}(\overline{\mathbb{D}}) \cong S^1\backslash\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}}).$$

然后，

$$\mathrm{Teich}^{(1)}(\overline{\mathbb{D}}) = S^1\backslash\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}})/\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}}, \partial\overline{\mathbb{D}}) \cong S^1\backslash\mathrm{Diff}(S^1),$$

如所要求的。 □

注意，我们可以再次考虑 $\mathcal{J}^{(1)}(\mathbb{D})$ 在 $\mathbb{D}$ 上的复结构，其中内部有一个标记点 t 圆盘。然后，

$$\mathcal{J}^{(1)}(\overline{\mathbb{D}}) = J \cdot \mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}}) \cong S^1\backslash\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}}) \cong \mathrm{Hyp}^{(1)}(\overline{\mathbb{D}}).$$

3.2. Teichm¨uller 空间与锥形奇点。本节讨论与带有一个锥形奇点的圆盘相关联的 Teichm¨uller 空间。

3.2.1. 锥形奇点。设 Σ 是一个配备了复结构 I的定向二维流形 .

定义 3.6。黎曼度量 g 在 Σ上相对于复结构 I 是共形的，如果它可以表示为以下形式

$$g = e^{2v}|dz|^2,$$

其中，v 是一个实值函数，z 是 Σ上的局部全纯坐标。

我们将关注具有以下特殊类型奇点的共形度量：

定义 3.7。 Σ 上的共形度量 g 在 $p \in \Sigma$ 处具有阶为 $\beta \in \mathbb{R}$ 的简单奇点，当且仅当它可以局部写成

$$g = e^{2u}|z|^{2(\beta-1)}|dz|^2,$$

其中，z 是满足 $z(p) = 0$的局部全纯坐标，且 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}$，$\Delta u \in L^1_{\mathrm{loc}}$。条件$\Delta u \in L^1_{\mathrm{loc}}$ 应理解为 p的一个完整邻域（包括 p 本身）上的分布意义下的条件。如果$\beta > 0$，则称简单奇点是锥形的，其锥角为 $\theta = 2\pi\beta$。 [2]

注意，$\beta = 1$ 对应于角度 $\theta = 2\pi$，且因子 $z^{2(\beta-1)}$ 消失。在下文所考虑的双曲情形中，该奇点是可去的（见引理 A.3），并且度量可光滑延拓穿过 p。对于 $0 < \beta < 1$，角度为 $\theta = 2\pi\beta < 2\pi$，且因子 $z^{2(\beta-1)}$ 在 $z = 0$处发散。对于 $\beta > 1$，角度为 $\theta = 2\pi\beta > 2\pi$，且因子 $z^{2(\beta-1)}$ 在 $z = 0$处消失。

现在我们将重点讨论$\Sigma = \mathbb{D}$ 具有一个锥形奇点的情形。以下定理总结了 Troyanov 等人 [16, 9] 的若干结果。其证明以及简单奇异性度量理论中的其他相关结果见附录 A。

定理 3.8. 对于圆盘 $\mathbb{D}$ 上的复结构 I、一点 $p \in \mathbb{D}$ 和 $\beta > 0$，存在唯一的双曲型共形 0-度量 g，其定义在 $\mathbb{D}$ 上，并且在 p 处有一个阶为 β 的锥形奇点。

例如，考虑圆盘上的标准复结构 J，以及原点处的点 p。那么，局部定义的全纯映射 $\phi_\beta\colon z \mapsto z^\beta$ 产生一个共形双曲度量

$$g^\beta_{\mathbb{D}} = \phi^*_\beta g_{\mathbb{D}} = \frac{4\beta^2|z|^{2(\beta-1)}}{(1-|z|^{2\beta})^2}\,|dz|^2.$$

该度量具有一个阶为 β 的锥形奇点，相应的函数

$$u(z) = \log\left(\frac{2\beta}{1-|z|^{2\beta}}\right)$$

[2] Our 约定不同于经典约定：此处阶为 β 的奇点在 [9] 中的阶为 $\beta - 1$。

在 $z=0$ 处连续。此外，请注意， $g_{\mathbb{D}}^{\beta}$ 是一个 0-度量。事实上，对于边界定义函数 $\varrho=1-|z|$，我们有

$$\varrho^2 g_{\mathbb{D}}^{\beta}=\frac{4\beta^2|z|^{2(\beta-1)}(1-|z|)^2}{(1-|z|^{2\beta})^2}\,|dz|^2$$

它在边界 $|z|=1$ 附近是一个正则黎曼度量。

3.2.2. *Teichm¨uller* 空间（圆盘上带锥形奇点）。 为今后使用，我们引入如下记号：设 $\mathbf{Hyp}(\mathbb{D}\backslash p)$ 为点 $p\in\mathbb{D}$的补集上的双曲0-度量空间，这些度量相对于 $\mathbb{D}$ 上的某个复结构 I 是共形的，并在 p处具有锥形奇点。我们用 $\mathbf{ord}(p)$表示该奇点的阶。

我们将 $\mathbf{Hyp}^{(1)}(\mathbb{D})$ 的定义推广到圆盘上的双曲度量空间：圆盘带有一个标记点，且该点具有阶为 β 的锥形奇点：

$$\mathrm{Hyp}^{\beta}(\overline{\mathbb{D}})=\{(g,p);p\in\overline{\mathbb{D}},g\in\mathrm{Hyp}(\overline{\mathbb{D}}\backslash p),\mathrm{ord}(p)=\beta\}.$$

注意，对于 $\beta=1$ ，该度量具有可去奇点（见引理 A.3），但标记点数据仍保留在我们的定义中，并且我们恢复了 $\mathbf{Hyp}^{(1)}(\mathbb{D})$。

此外，我们还可以考虑在给定点 p 处具有锥形奇点的双曲度量：

$$\mathrm{Hyp}^{\beta}(\overline{\mathbb{D}},p)=\{g\in\mathrm{Hyp}(\overline{\mathbb{D}}\backslash p),\mathrm{ord}(p)=\beta\}.$$

我们还定义微分同胚群 $\mathbf{Diff}(\mathbb{D};\ p)\subseteq\mathbf{Diff}(\mathbb{D})$ 中保持 p 不变的子群。

命题 3.9。我们有

$$\mathrm{Hyp}^{\beta}(\overline{\mathbb{D}})\cong S^1\backslash\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}}),\quad \mathrm{Hyp}^{\beta}(\overline{\mathbb{D}},p)\cong S^1\backslash\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}};p).$$

证明。 根据定理 3.8， $\mathbb{D}$ 上具有锥形奇点的度量与带有一个标记点的复结构之间存在双射。因此，我们有一个同构

$$\mathrm{Hyp}^{\beta}(\overline{\mathbb{D}})\cong\mathcal{J}^{(1)}(\overline{\mathbb{D}})\cong S^1\backslash\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}}),$$

这正是所要求的。类似的论证也适用于 $\mathbf{Hyp}^{\beta}(\mathbb{D},\ p)$。 □

我们将具有锥形奇点的 Teichm¨uller 空间定义为

$$\mathrm{Teich}^{\beta}(\overline{\mathbb{D}})=\frac{\mathrm{Hyp}^{\beta}(\overline{\mathbb{D}})}{\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}};\partial\overline{\mathbb{D}})},\quad \mathrm{Teich}^{\beta}(\overline{\mathbb{D}},p)=\frac{\mathrm{Hyp}^{\beta}(\overline{\mathbb{D}},p)}{\mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}};\partial\overline{\mathbb{D}},p)},$$

其中 $\mathbf{Diff}(\mathbb{D};\partial\mathbb{D},\ p)$ 是 $\mathbf{Diff}(\mathbb{D})$ 的子群，保持边界上每一点不变，并保持 p。注意，由于 $\mathbf{Diff}(\mathbb{D};\partial\mathbb{D})$ 和 $\mathbf{Diff}(\mathbb{D};\partial\mathbb{D},\ p)$ 都是连通的，我们省略表示恒等元所在连通分支的下标 0。

命题 3.10。 对于所有 $p\in\mathbb{D}$ 和 $\beta>0$，我们有

$$\mathrm{Teich}^{\beta}(\overline{\mathbb{D}},p)\cong\mathrm{Teich}^{\beta}(\overline{\mathbb{D}})\cong S^1\backslash\mathrm{Diff}(S^1).$$

证明。对于 $\mathbf{Teich}^{\beta}(\mathbb{D})\cong S^1\backslash\mathbf{Diff}(S^1)$，证明与命题 3.5 的证明完全相同。对于 $\mathbf{Teich}^{\beta}(\mathbb{D},\ p)\cong\mathbf{Teich}^{\beta}(\mathbb{D})$，注意到 $\mathbf{Diff}(\mathbb{D};\ \partial\mathbb{D})$ 在圆盘上具有传递性作用，因此总可以将锥形奇点移动到 p，而保持 p 不变的 $\mathbf{Diff}(\mathbb{D};\ \partial\mathbb{D})$ 的子群正是 $\mathbf{Diff}(\mathbb{D};\ \partial\mathbb{D},\ p)$。□

3.2.3. 关于 $\beta = n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 的情形。在本段中，我们将更详细地考察 β 取整数值的情形。将 p 固定在 $\mathbb{D}$的原点，并令 $u_n : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 为映射 $u_n : z \mapsto z^n$，记

$$\mathrm{Diff}^{(n)}(\overline{\mathbb{D}}, p) := \{u_n \circ \phi : \phi \in \mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}}, p)\}.$$

命题 3.11。与命题 *2.2* 类似，存在一个映射

$$v_n : \mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}}, p) \longrightarrow \mathrm{Diff}^{(n)}(\overline{\mathbb{D}}, p), \qquad v_n(\varphi) = u_n \circ \varphi,$$

它诱导出一个双射

$$\mathbb{Z}_n \backslash \mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}}, p) \;\cong\; \mathrm{Diff}^{(n)}(\overline{\mathbb{D}}, p),$$

其中，$\mathbb{Z}_n$ 通过与旋转 $r_{2\pi k/n}$进行后合成作用。赋予 $\mathrm{Diff}^{(n)}(\mathbb{D}、\ p)$ 相应的商光滑结构后，该识别成为一个微分同胚，并且 v_n 是一个 n 重覆盖。

此外，对于 $\varphi_1、\ \varphi_2 \in \mathrm{Diff}(\mathbb{D}、\ p)$,

$$v_n(\varphi_1 \circ \varphi_2) = v_n(\varphi_1) \circ \varphi_2,$$

并且，对于 $r_\theta(z) = e^{i\theta} z$,

$$v_n(r_\theta \circ \varphi) = r_{n\theta} \circ v_n(\varphi).$$

证明。满射性由 $\mathrm{Diff}^{(n)}(\mathbb{D},\ p)$ 的定义可知。对于单射性，设

$$v_n(\varphi_1) = v_n(\varphi_2).$$

对于 $z \neq p$，这意味着

$$\left(\frac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)}\right)^n = 1.$$

该比值在连通穿孔圆盘上连续，并且取值于 n 次单位根所组成的离散集合中。因此它是常值的，所以

$$\varphi_2 = r_{2\pi k/n} \circ \varphi_1$$

对于某个 $k \in \{0,\ \ldots\ldots,\ n-1\}$。由于两个微分同胚都固定 p，该等式在 p 处也成立。反之，

$$u_n \circ r_{2\pi k/n} = u_n,$$

因此，这样的旋转保持 v_n 的纤维不变。于是，纤维恰好是 $\mathbb{Z}_n$-轨道，从而证明了所断言的双射。

其余恒等式直接由

$$v_n(\varphi_1 \circ \varphi_2) = u_n \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = v_n(\varphi_1) \circ \varphi_2$$

and

$$v_n(r_\theta \circ \varphi) = u_n \circ r_\theta \circ \varphi = r_{n\theta} \circ u_n \circ \varphi = r_{n\theta} \circ v_n(\varphi).$$

□

命题 3.12。我们有

$$\mathrm{Hyp}^{(n)}(\overline{\mathbb{D}}, p) \cong S^1 \backslash \mathrm{Diff}^{(n)}(\overline{\mathbb{D}}, p), \quad \mathrm{Teich}^{(n)}(\overline{\mathbb{D}}, p) \cong S^1 \backslash \mathrm{Diff}^{(n)}(\overline{\mathbb{D}}, p) / \mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}}; \partial\overline{\mathbb{D}}, p).$$

证明。对于第一个陈述，我们计算

$$\mathrm{Hyp}^{(n)}(\overline{\mathbb{D}}, p) \cong S^1 \backslash \mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}}, p) \cong S^1 \backslash \mathrm{Diff}^{(n)}(\overline{\mathbb{D}}, p),$$

其中我们利用了以下事实：v_n 在旋转商空间之间诱导出一个微分同胚。对于第二个陈述，我们有

$$\mathrm{Teich}^{(n)}(\overline{\mathbb{D}}, p) = \mathrm{Hyp}^{(n)}(\overline{\mathbb{D}}, p) / \mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}}; \partial\overline{\mathbb{D}}, p) = S^1 \backslash \mathrm{Diff}^{(n)}(\overline{\mathbb{D}}, p) / \mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}}; \partial\overline{\mathbb{D}}, p) \cong S^1 \backslash \mathrm{Diff}^{(n)}(S^1)$$

因此，根据命题 2.2，我们得到

$$\mathrm{Teich}^{(n)}(\overline{\mathbb{D}},p)\cong S^1\backslash\mathrm{Diff}\,(S^1). \tag{13}$$

□

注 3.13。 注意，根据前述构造，余伴随轨道可以用Diff(𝔻、 p)来作几何解释。我们有如下的对应关系：

$$\mathcal{O}^{(n)}\cong \mathrm{PSU}(1,1)\backslash\mathrm{Diff}^{(n)}(\overline{\mathbb{D}},p)/\mathrm{Diff}^{(n)}(\overline{\mathbb{D}},\partial\overline{\mathbb{D}},p). \tag{14}$$

4. Symplectic structures

本节将描述 Teichm¨uller 空间 $\mathrm{Teich}^{\beta}(\mathbb{D})$上的自然 2-形式，并讨论它们与 Virasoro余伴随轨道的关系。

4.1. 余标架形式主义与 Atiyah-Bott 2-形式。 我们简要回顾双曲度量 [1]的余标架形式主义及平坦联络的等价语言，并介绍 Atiyah-Bott 2-形式 [3]的定义和基本性质。

4.1.1. *Cartan* 形式主义与平坦联络。 设 Σ为一个带有黎曼度量 g的定向二维流形。在图表 $U\subseteq\Sigma$ 上，可以选取一个正交归一余标架 $(\alpha_1,\ \alpha_2)$ 使得

$$g=\alpha_1^2+\alpha_2^2.$$

于是，Cartan 移动标架形式主义表明，存在唯一的 1-形式 $\sigma\in\Omega^1(U)$ （自旋联络），满足结构方程

$$d\alpha_1=\sigma\wedge\alpha_2,\quad d\alpha_2=-\sigma\wedge\alpha_1.$$

回顾一下，度量 g 是双曲型的，当且仅当 $\mathfrak{sl}(2,\ \mathbb{R})$-联络

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha_2 & \alpha_1+\sigma\\ \alpha_1-\sigma & -\alpha_2\end{pmatrix}$$

是平坦的。也就是说，

$$F_A=dA+A^2=0.$$

设 $H=\mathrm{SO}(2)$ 由矩阵表示

$$h_\theta=\begin{pmatrix}\cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2)\\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2)\end{pmatrix}.$$

U 上的不同余标架通过余标架旋转 θ 相互关联： $U\to\mathrm{SO}(2)$ 使得

$$\alpha_1^\theta=\alpha_1\cos(\theta)-\alpha_2\sin(\theta),\quad \alpha_2^\theta=\alpha_1\sin(\theta)+\alpha_2\cos(\theta).$$

这对应于对联络 A 的一次规范变换：

$$A^\theta=h_\theta^{-1}Ah_\theta+h_\theta^{-1}dh_\theta, \tag{15}$$

以及对自旋联络的变换

$$\sigma^\theta=\sigma-d\theta.$$

在李代数 $\mathfrak{sl}(2,\ \mathbb{R})$ 上选取一个不变标量积 $(\cdot,\ \cdot)$，例如

$$(a,b)=\mathrm{Tr}(ab).$$

设 $P\to\Sigma$ 是 Σ上的主 $\mathrm{PSL}(2,\ \mathbb{R})$ 丛。在局部坐标图中， Σ 上的平坦 $\mathfrak{sl}(2,\ \mathbb{R})$ 联络由 1-形式 $A\in\Omega^1(U,$ $\mathfrak{sl}(2,\ \mathbb{R}))$表示。由于 $\mathrm{PSL}(2,\ \mathbb{R})$ 与 $\mathrm{SO}(2)$同伦等价，因此可以选择联络 1-形式之间的变换，如（15）所示。

P 上的平坦联络空间带有一个自然的 Atiyah-Bott 2-形式 [3]

$$\omega_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}\int_\Sigma (\delta A, \delta A), \tag{16}$$

其中， δ 表示联络空间上的 de Rham微分。虽然 1-形式 A 只在局部坐标图中定义，但很容易验证，式 (16) 的右端在坐标图的粘合下是良定义的。

对于无边界曲面，Atiyah-Bott 2-形式 (16) 下降到相应的泰希米üller 空间，并诱导出一个辛（ Weil-Petersson [19]）结构。

4.1.2. 带边界曲面。当曲面 Σ 有边界 $\partial\Sigma \cong S^1$，且平坦联络 A由双曲 0-度量的一个余标架所诱导时，式 (16) 中的积分可能在 $\partial\Sigma$处发散。为处理这个问题，在边界附近引入局部坐标系 $(\varrho,\ \phi)$ 。这里 ϱ 是一个局部边界定义函数， ϕ 是边界上的一个坐标。回顾一下，余标架 $(\alpha_1,\ \alpha_2)$称为适配的，如果

$$\alpha_2 = \frac{d\varrho}{\varrho} + O(\varrho^0).$$

非正式地，可以设想在对偶标架 $(e_1,\ e_2)$ 中，向量场 e_1 与边界相切，而 e_2 与边界正交。

用 $\mathcal{A}^{\mathrm{adp}}$ 表示由双曲型 0-度量的适配余标架局部诱导的平坦联络空间。事实证明（见 [1]），限制到 $\mathcal{A}^{\mathrm{adp}}$时，右侧的积分（16）收敛，且方程（16）在 $\mathcal{A}^{\mathrm{adp}}$上定义了一个闭2-形式。然而，与闭曲面的情形不同， ω_{AB} 不能下降到 Teichm¨uller 空间 Teich(Σ)。

回顾　边界 $\partial\Sigma$ 附近的 1-形式 A 若写作如下形式，便称为 Drinfeld-Sokolov [7] 形式

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{d\varrho}{\varrho} + O(\varrho^0) & \frac{d\phi}{\varrho} + O(\varrho^0) \\ -\varrho T(\phi)d\phi + O(\varrho^2) & -\frac{1}{2}\frac{d\varrho}{\varrho} + O(\varrho^0) \end{pmatrix}. \tag{17}$$

我们用 $\mathcal{A}^{\mathrm{DS}}$ [3]表示 Drinfeld-Sokolov 形式中的平坦联络空间。

以下定理概述了 [1] 的若干结果:

定理 4.1。 ***(i)*** 对于每个双曲型0-度量类 $[g] \in \mathrm{Teich}(\Sigma)$，都可以选取一个度量 g 和一个适配标架 (α_1, α_2)，使得相应的 *1*-形式 A 处于 ***Drinfeld-Sokolov*** 形式。

(ii) Atiyah-Bott 形式(16) 从 $\mathcal{A}^{\mathrm{DS}}$ 下降为Teich(Σ上的辛形式).

(iii) 以下作用 $\widetilde{\mathrm{Diff}(S^1)}$ （或$\mathrm{Diff}(S^1)$）在Teich(Σ)上的作用是一个带动量映射的 ***Virasoro*** 作用

$$\mu([g]) = \partial_\phi^2 + T(\phi),$$

其中 $T(\phi)$ 是(17)中的系数。

作为一个例子，考虑圆盘上的 Poincar´e 度量 $g_{\mathbb{D}}$，以及余标架

$$\alpha_1 = \frac{2\rho d\phi}{1-\rho^2}, \quad \alpha_2 = -\frac{2d\rho}{1-\rho^2}.$$

[3]更准确地说，设 B 是 A的奇异规范变换，即

$$B = r^{-1}Ar + r^{-1}dr, \qquad r = \begin{pmatrix} \varrho^{-1/2} & 0 \\ 0 & \varrho^{1/2} \end{pmatrix}.$$

那么，如果 B 可光滑延拓至边界，且其在嵌入 $\iota\colon \partial\Sigma \hookrightarrow \Sigma$ 下的拉回满足

$$\iota^* B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -T(\varphi) & 0 \end{pmatrix} d\varphi.$$

相应的自旋联络为

$$\sigma = \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\,d\phi,$$

且联络 A由下式给出

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{d\rho}{1-\rho^2} & \frac{1}{2}\frac{1+\rho}{1-\rho}\,d\phi \\ -\frac{1}{2}\frac{1-\rho}{1+\rho}\,d\phi & \frac{d\rho}{1-\rho^2} \end{pmatrix}.$$

利用边界定义函数 $\varrho = 1-\rho$，不难验证，该联络具有 Drinfeld-Sokolov 形式，其中 $T(\phi) = \frac{1}{4}$。

4.2. **Teichm¨uller 空间**Teich$^\beta(\mathbb{D},\ \overline{\ }p)$。在本节中，我们在 Teich$^\beta(\mathbb{D},\ p)$ 上构造一个自然的闭2-形式，并阐明其与 Virasoro 余伴随轨道的关系。我们首先描述相应的余标架和平坦联络，并计算 Atiyah–Bott 形式在边界处的两个贡献。随后，我们在理想边界处施加 Drinfeld-Sokolov 条件，并证明在减去标记点处的贡献后，所得形式下降到 Teichm¨uller 空间上。

4.2.1. 其上的余标架和平坦联络 $\mathbb{D}\backslash p$。考虑双曲度量

$$g^\beta_{\mathbb{D}} = \frac{4\beta^2|z|^{2\beta-2}|dz|^2}{(1-|z|^{2\beta})^2},$$

相应的余标架 α^β

$$\alpha^\beta_1 = \frac{2\beta\rho^\beta}{(1-\rho^{2\beta})}\,d\phi, \quad \alpha^\beta_2 = -\frac{2\beta\rho^{\beta-1}d\rho}{(1-\rho^{2\beta})},$$

自旋联络

$$\sigma = \beta\frac{1+\rho^{2\beta}}{1-\rho^{2\beta}}\,d\phi,$$

以及平坦的 sl$(2,\ \mathbb{R})$ 联络

$$A^\beta = \begin{pmatrix} -\beta\frac{\rho^{\beta-1}d\rho}{1-\rho^{2\beta}} & \frac{\beta}{2}\frac{1+\rho^\beta}{1-\rho^\beta}\,d\phi \\ -\frac{\beta}{2}\frac{1-\rho^\beta}{1+\rho^\beta}\,d\phi & \beta\frac{\rho^{\beta-1}d\rho}{1-\rho^{2\beta}} \end{pmatrix}.$$

命题 4.2。 联络 A^β具有 *DS* 形式，其中 $T^\beta(\phi) = \frac{1}{4}\beta^2$。

证明。 取边界定义函数 $\varrho \sim 1-\rho$，我们得到

$$-\beta\frac{\rho^{\beta-1}d\rho}{1-\rho^{2\beta}} = \frac{1}{2}\,\frac{d\varrho}{\varrho} + O(\varrho^0),$$

and

$$\frac{\beta}{2}\frac{1+\rho^\beta}{1-\rho^\beta}\,d\phi = \frac{d\phi}{\varrho} + O(\varrho^0), \quad -\frac{\beta}{2}\frac{1-\rho^\beta}{1+\rho^\beta}\,d\phi = -\frac{\beta^2}{4}\varrho + O(\varrho^2).$$

因此，联络 A^β 获得了 DS 形式

$$A^\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{d\varrho}{\varrho} + O(\varrho^0) & \frac{d\phi}{\varrho} + O(\varrho^0) \\ -\varrho\frac{\beta^2}{4}d\phi + O(\varrho^2) & -\frac{1}{2}\frac{d\varrho}{\varrho} + O(\varrho^0) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

□

定义该群

$$\mathcal{G} = \{(\varphi, \theta) \in \mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}}; p) \ltimes \mathrm{Map}(\overline{\mathbb{D}}, \mathrm{SO}(2)); \theta|_{\partial\overline{\mathbb{D}}} = 0\}$$

作为由 $\mathbb{D}$ 上保持边界和点 p不变的保向微分同胚群，与在边界处为平凡的余标架旋转规范群构成的半直积。该群作用于余标架，我们将 α^β 在其作用下的轨道记为

$$\mathrm{Cof}^\beta(\mathbb{D}) = \mathcal{G} \cdot \alpha^\beta.$$

在 p处固定一个标准标架，微分 $d_p\varphi$ 可以表示为一个矩阵

$$L = d_p\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R}), \qquad \Delta = ad - bc > 0 \tag{19}$$

令 $\nabla \subseteq \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ 为正对角元的上三角矩阵子群。我们定义 $\mathcal{G}$ 的子群

$$\mathcal{G}_0 = \{(\varphi, \theta) \in \mathcal{G} : d_p\phi \in \nabla\}.$$

命题 4.3。 $\mathcal{G}$ 对 $\mathrm{Cof}^\beta(\mathbb{D})$ 的自然作用的稳定子群同构于 $\mathrm{SO}(2)$，所有元素 $\alpha \in \mathrm{Cof}^\beta(\mathbb{D})$ 都是适配余标架，自然映射 $\mathrm{Cof}^\beta(\mathbb{D}) \to \mathrm{Hyp}^\beta(\mathbb{D}; p)$ 定义为

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \mapsto g = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$$

是满射。

证明。 首先，令 $g \in \mathrm{Hyp}^\beta(\mathbb{D}, p)$。存在一个微分同胚 $\varphi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{D}; p)$，使得 $g = \varphi^* g_{\mathbb{D}}^\beta$，其中 $g_{\mathbb{D}}^\beta$ 是标准度量。然后，取标准余标架 α^β 在 $\alpha = \varphi^*\alpha^\beta$ 下的像，便得到一个对应于 g 的余标架。此外，由于余标架旋转保持度量，$\mathrm{Hyp}^\beta(\mathbb{D})$ 是 $\mathrm{Cof}^\beta(\mathbb{D})$ 的完整像。

接下来，回顾在微分同胚的作用下，$g_{\mathbb{D}}^\beta$ 的稳定子群等于 $S^1 \cong \mathrm{SO}(2) \subseteq \mathrm{Diff}(\mathbb{D}; p)$。显然，这个子群也保持余标架 α^β。由于余标架旋转对余标架的作用是自由的，α^β 在 $\mathcal{G}$ 作用下的稳定子群也等于 $\mathrm{SO}(2)$，而所有其他余标架 $\alpha \in \mathrm{Cof}^\beta(\mathbb{D})$ 的稳定子群都同构于 $\mathrm{SO}(2)$。

最后，我们计算

$$\varphi^* \frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{d(\lambda(\phi)\varrho + O(\varrho^2))}{\lambda(\phi)\varrho + O(\varrho^2)} = \frac{d\varrho}{\varrho} + O(\varrho^0).$$

由于对于 $\mathcal{G}$ 中的元素，我们有 $\theta|_{\partial\mathbb{D}} = 0$，因此上述性质在余标架旋转下保持不变，并且 $\mathrm{Cof}^\beta(\mathbb{D})$ 中的所有余标架都是适配的。□

我们将与 $\mathrm{Cof}^\beta(\mathbb{D})$ 中的余标架相对应的、定义在 $\mathbb{D}\backslash\{p\}$ 上的平坦 $\mathrm{sl}(2, \mathbb{R})$ 联络的集合记为 $\mathcal{A}^\beta$。命题 4.3 允许将 $\mathcal{A}^\beta$ 写成齐性空间 $\mathcal{A}^\beta \cong \mathcal{S}^1\backslash\mathcal{G}$。 $\mathcal{G}$对余标架的作用诱导出轨道映射

$$\begin{aligned} q : \mathcal{G} &\to \mathcal{A}^\beta \\ (\varphi, \theta) &\mapsto h_\theta^{-1}\varphi^* A^\beta h_\theta + h_\theta^{-1} dh_\theta. \end{aligned}$$

q 的每个纤维都是一个 S^1 轨道。

命题 4.4. 对于每个 $A \in \mathcal{A}^\beta$，都存在唯一的一对 $(\varphi_A、\ \theta_A) \in \mathcal{G}_0$，使得

$$q(\varphi_A, \theta_A) = A.$$

所得映射

$$\sigma : \mathcal{A}^\beta \longrightarrow \mathcal{G}_0, \qquad A \longmapsto (\varphi_A, \theta_A),$$

是 q 的光滑整体截面。

证明。令 $A\in\mathcal{A}^\beta$ 并选取 $(\varphi,\ \theta)\in q^{-1}(A)$。考虑 $\mathrm{GL}^+(2,\ \mathbb{R})$ 元素的 QR 分解 t

$$d_p\varphi = QT,\qquad Q\in \mathrm{SO}(2),\quad T\in\nabla.$$

由于刚性旋转保持 A^β 不变，$(r_Q^{-1}\circ\varphi,\ \theta)$ 这一对与 $(\varphi,\ \theta)$属于同一个纤维。此外，

$$d_p(r_Q^{-1}\circ\varphi) = Q^{-1}d_p\varphi = T\in\nabla,$$

因此，这一对属于 $\mathcal{G}_0$。根据 QR 分解的唯一性，这一对也是唯一的。因此，限制映射 $q|_{\mathcal{G}_0}$ 是一个双射。其逆映射为我们提供了光滑整体截面

$$\sigma(A) = q|_{\mathcal{G}_0}^{-1}:\mathcal{A}^\beta\to\mathcal{G}_0\subseteq\mathcal{G},\qquad \sigma=(\phi_A,\theta_A),$$

以及 $q\circ\sigma=\mathrm{id}_{\mathcal{A}^\beta}$. □

命题4.5。 所有联络 $A\in\mathcal{A}^\beta$ 都可写成形式 $A=G^{-1}dG$，其中 $A=G^{-1}dG$ 是一个准周期函数

$$G(\rho,\phi+2\pi) = M_\beta G(\rho,\phi),$$

其单值化矩阵为 $M_\beta = h_{-2\pi\beta}$。

证明。 显然，联络 A^β 满足所需性质，其中

$$G^\beta = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\phi\right) & \sin\left(\frac{\beta}{2}\phi\right)\\ -\sin\left(\frac{\beta}{2}\phi\right) & \cos\left(\frac{\beta}{2}\phi\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{1-\rho^\beta}{1+\rho^\beta}\right)^{\frac12} & 0\\ 0 & \left(\frac{1+\rho^\beta}{1-\rho^\beta}\right)^{\frac12}\end{pmatrix}.$$

作用一个元素 $(\varphi,\ \theta)\in\mathcal{G}$后，得到 $A=G^{-1}dG$，其中 $G=\varphi^*(G^\beta)h_\theta$。从这个显式公式可以清楚地看出，$G$ 满足与 G^β相同的准周期性条件。□

为便于后续使用，我们将在点 p处对 $\mathbb{D}$ 进行实爆破，记为 $\mathbb{D}_p$。对于微分同胚 φ，令˜表示 $\phi=\varphi^*\phi$。然后，限制到 $\rho=0$ 并令 $h_0=h(\rho=0)$，可得

$$A(\rho=0) = h_0^{-1}(\varphi^*A^\beta(\rho=0))h_0 = \begin{pmatrix}0 & \frac{\beta}{2}d\tilde\phi\\ -\frac{\beta}{2}d\tilde\phi & 0\end{pmatrix}.$$

这里我们考虑到了，由 h_0 进行共轭不会改变这个联络。

4.2.2. 辛形式的计算。命题 4.4 中的截面 σ 将全空间与 $\mathcal{A}^\beta\times S^1$ 识别。形式 δGG^{-1} 是 $\mathcal{A}^\beta\times S^1$ 上取值于 $\mathbb{D}_p$ 上准周期函数的一形式，并满足周期性条件 [4]，

$$\delta GG^{-1}(\rho,\phi+2\pi) = M_\beta(\delta GG^{-1})(\rho,\phi)M_\beta^{-1}.$$

另一方面，我们有 $G^{-1}dG=A$，并且

$$q^*(\delta A) = \delta(G^{-1}dG) = G^{-1}d(\delta GG^{-1})G.$$

从现在起，我们沿用命题 4.4 的截面 σ。特别地，涉及δGG^{-1} 的表达式均理解为沿 σ拉回后的表达式，记号中对此不作明确说明。

对于 $0<\epsilon<\rho<1$，令

$$\mathbb{D}_p(\epsilon,\rho) = [\epsilon,\rho]\times S^1\subseteq\mathbb{D}_p,$$

并在 $\mathcal{A}$ 上定义 Atiyah-Bott 形式：

$$\omega_{\mathrm{AB}}^{\epsilon,\rho} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}_p(\epsilon,\rho)}\mathrm{Tr}\,\delta A\wedge\delta A.$$

我们令 $G_\rho=G(\rho,\ \phi)$。注意，$G_0(\phi)=G(0,\ \phi)$ 定义良好。

[4] δ 是全空间上的 de Rham微分。

命题 4.6。 对于 $0 < \epsilon < \rho < 1$，*Atiyah-Bott* 形式为

$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{AB}}^{\epsilon,\rho} &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int_{S^1} \mathrm{Tr}(\delta G_\rho G_\rho^{-1}) d(\delta G_\rho G_\rho^{-1}) \\ &- \tfrac{1}{2}\textstyle\int_{S^1} \mathrm{Tr}(\delta G_\epsilon G_\epsilon^{-1}) d(\delta G_\epsilon G_\epsilon^{-1}).\end{aligned}$$

证明。 首先，我们注意到

$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{AB}}^{\epsilon,\rho} &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int_{\mathbb{D}_p(\epsilon,\rho)} \mathrm{Tr}\delta A \wedge \delta A \\ &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int_{\mathbb{D}_p(\epsilon,\rho)} \mathrm{Tr}\left(\delta(G^{-1}dG) \wedge \delta(G^{-1}dG)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int_{\mathbb{D}_p(\epsilon,\rho)} \mathrm{Tr}\, d(\delta G G^{-1}) \wedge d(\delta G G^{-1}) \\ &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int_{\mathbb{D}_p(\epsilon,\rho)} d\,\mathrm{Tr}\left(\delta G G^{-1}\right) \wedge d(\delta G G^{-1}) \\ &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int_{\partial\mathbb{D}_p(\epsilon,\rho)} \mathrm{Tr}\left(\delta G G^{-1}\right) \wedge d(\delta G G^{-1}) \\ &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int_{S^1} \mathrm{Tr}(\delta G_\rho G_\rho^{-1}) d(\delta G_\rho G_\rho^{-1}) \\ &- \tfrac{1}{2}\textstyle\int_{S^1} \mathrm{Tr}(\delta G_\epsilon G_\epsilon^{-1}) d(\delta G_\epsilon G_\epsilon^{-1}),\end{aligned}$$

其中，我们在环域 $\mathbb{D}_p(\epsilon,\rho)$ 上应用了斯托克斯定理，将 Atiyah–Bott 形式表示为两个方向相反的圆形边界贡献 C_ϵ 和 C_ρ 之和（图 1）。我们还利用了这样一个事实：尽管 $\delta G G^{-1}$ 具有拟周期性，1-形式 $\mathrm{Tr}\left(\delta G G^{-1}\right) \wedge d(\delta G G^{-1})$ 仍下降到 $\mathbb{D}_p(\rho)$。□

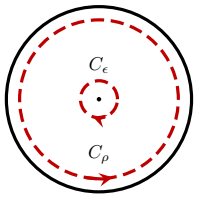

FIGURE 1. 环域 $\mathbb{D}_p(\epsilon,\rho)$

˜在 $\partial\mathbb{D}$ 的邻域内，微分同胚 φ：$(\rho,\phi) \mapsto (\tilde{\rho},\phi)$ 以及旋转角 θ 在局部坐标 (ϱ,ϕ)下具有如下形式：

$$\tilde{\rho} = 1 - \varrho g(\phi) + O(\varrho^2), \quad \tilde{\phi} = f(\phi) + O(\varrho), \quad \theta = \varrho h(\phi),$$

其中 $\varrho = 1 - \rho$ 是一个边界定义函数， g： $S^1 \to \mathbb{R}_+$， h： $S^1 \to \mathbb{R}$ 是 ϕ的两个函数，并且f ∈Diff (S^1) 是圆的一个保向微分同胚。

定理 4.7. *2*-形式族 $\omega^{\epsilon,\ \rho}{}_{\mathrm{AB}}$ 具有极限 $\omega_{\mathrm{AB}} = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \rho\to 1}} \omega^{\epsilon,\ \rho}{}_{\mathrm{AB}}$， 由下式给出

$$\omega_{\mathrm{AB}} = \omega_{\mathrm{in}} + \omega_{\mathrm{out}},$$

其中

$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{in}} &= \tfrac{\pi\beta^2}{4(ad-bc)^2}\big(d\,\delta a - c\,\delta b + b\,\delta c - a\,\delta d\big) \wedge \big(-b\delta a + a\delta b + d\delta c - c\delta d\big), \\ \omega_{\mathrm{out}} &= \textstyle\int_{S^1} \left(\tfrac{1}{4}\delta(\log g) \wedge \delta((\log g)') - \tfrac{1}{2}\delta\left(\tfrac{f'}{g}\right) \wedge \delta h - \tfrac{\beta^2}{4}\delta f \wedge \delta(f')\right).\end{aligned}$$

证明。证明分三步进行。

步骤 1。我们来定义这两个贡献。在极限$\epsilon \mapsto 0$下计算命题 4.6 中的表达式，内边界贡献为

$$\begin{aligned}\omega_{\text{in}} &:= -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_{S^1}\mathrm{Tr}\big[(\delta G_\epsilon G_\epsilon^{-1})\wedge d(\delta G_\epsilon G_\epsilon^{-1})\big]\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{Tr}\big[(\delta G_0 G_0^{-1})\wedge \partial_\phi(\delta G_0 G_0^{-1})\big]\,d\phi.\end{aligned}$$

接着，我们将外边界贡献定义为

$$\omega_{\text{out}} := \lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2}\int_{S^1}\mathrm{Tr}\big[(\delta \mathrm{G}_\rho \mathrm{G}_\rho^{-1})\wedge \mathrm{d}(\delta \mathrm{G}_\rho \mathrm{G}_\rho^{-1})\big],$$

我们将在步骤 3 中看到，此极限存在。因此，

$$\omega_{\text{AB}} = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \rho\to 1}}\omega_{\text{AB}}^{\epsilon,\rho} = \omega_{\text{in}}+\omega_{\text{out}}.$$

步骤 2. 我们计算内边界贡献。回顾在 (19) 中引入的 L，

$$L = d_p\varphi = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},\qquad \Delta = ad-bc>0.$$

所诱导的 a 这种变换下的角向作用为 $\widetilde{\phi} = \mathsf{arg}(L(\cos\,\phi,\ \sin\,\phi)^T)$，或等价地为 [5]，

$$\tan\widetilde{\phi} = \frac{c+d\tan\phi}{a+b\tan\phi}.$$

对于 $J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 和 $h_t = \exp(tJ/2),$，我们得

到

$$G_0 = h_{-\beta\widetilde{\phi}}h_{\theta_0},\qquad \delta G_0 G_0^{-1} = \frac{J}{2}(-\beta\,\delta\widetilde{\phi}+\delta\theta_0),$$

whe其中 θ_0 是 p处的余框架旋转，与 ϕ无关。于是内边界项为

$$\begin{aligned}\omega_{\text{in}} &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{Tr}\big[(\delta G_0 G_0^{-1})\wedge\partial_\phi(\delta G_0 G_0^{-1})\big]\,d\phi\\ &= \frac{\beta^2}{4}\int_0^{2\pi}\delta\widetilde{\phi}\wedge\partial_\phi(\delta\widetilde{\phi})\,d\phi.\end{aligned}\tag{20}$$

涉及 $\delta\theta_0$的项消失，因为 $\int_0^{2\pi}\partial_\phi(\delta\widetilde{\phi})\,d\phi = 0$。

为了用 L的各个元素表示（20），我们计算

$$\delta L\,L^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d\,\delta a - c\,\delta b & -b\,\delta a + a\,\delta b\\ d\,\delta c - c\,\delta d & -b\,\delta c + a\,\delta d\end{pmatrix}.\tag{21}$$

写作 $v = L(\cos\,\phi,\ \sin\,\phi)^T = s(\cos\,\widetilde{\phi},\ \sin\,\widetilde{\phi})^T$，其中 $s>0$。在固定的 ϕ， $\delta v = (\delta L)L^{-1}v$处。它与单位角向向量 $(-\sin\,\widetilde{\phi},\ \cos\,\widetilde{\phi})^T$的标量积为 $s\,\delta\widetilde{\phi}$。因此，要计算 $\delta\widetilde{\phi}$，只需进行以下计算：

$$\delta\widetilde{\phi} = (-\sin\widetilde{\phi},\cos\widetilde{\phi})\,(\delta L L^{-1})\begin{pmatrix}\cos\widetilde{\phi}\\ \sin\widetilde{\phi}\end{pmatrix}.\tag{22}$$

对（20）中的三角项进行积分可得

$$\omega_{\text{in}} = \frac{\pi\beta^2}{4}\,\mathrm{Tr}(J\delta L L^{-1}\wedge\delta L L^{-1}).\tag{23}$$

[5] $(u_1,u_2)^T$ 表示向量 $u=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$ 的转置。

用 L的各项表示，即为

$$\omega_{\mathrm{in}} = \frac{\pi\beta^2}{4(ad-bc)^2}\,\big(d\,\delta a - c\,\delta b + b\,\delta c - a\,\delta d\big) \wedge \big(-b\,\delta a + a\,\delta b + d\,\delta c - c\,\delta d\big). \tag{24}$$

步骤 3。最后，我们现在来计算外边界贡献。设 $(\widetilde{\rho},\ \phi)$ 是点$(\rho,\ \phi)\in\mathbb{D}$ 在 φ的作用下的像，并令 θ 表示余标架旋转。利用边界定义函数 $\varrho = 1-\rho$，我们可以写出外边界附近的展开式:

$$\widetilde{\rho} = 1 - \varrho g(\varphi) + O(\varrho^2), \qquad \widetilde{\varphi} = f(\varphi) + O(\varrho), \qquad \theta = \varrho h(\varphi) + O(\varrho^2).$$

引入常矩阵

$$K = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是我们可以将包括余框架旋转在内的 G 写成

$$G = e^{-\beta\tilde{\varphi}K} e^{-sH} e^{\theta K}, \tag{25}$$

其中 $s = -\frac{1}{2}\log\frac{1+\widetilde{\rho}^{\,\beta}}{1-\widetilde{\rho}^{\,\beta}}$。径向变分为 [6]

$$\delta s = \frac{\beta\widetilde{\rho}^{\beta-1}}{1-\widetilde{\rho}^{2\beta}}\,\delta\widetilde{\rho}. \tag{26}$$

写成 $\xi = \delta G_\rho\, G_\rho^{-1}$，并利用恒等式 $e^{sH}Ke^{-sH} = K\cosh(2s) - S\sinh(2s)$，可得

$$\begin{aligned} \xi &= e^{-\beta\tilde{\varphi}K} Q e^{\beta\tilde{\varphi}K}, \\ Q &= -\beta K\,\delta\tilde{\varphi} - H\,\delta s + \big(K\cosh(2s) + S\sinh(2s)\big)\delta\theta. \end{aligned}$$

求导得到（撇号表示 ∂_φ）：

$$\xi' = e^{-\beta\tilde{\varphi}K}\big(Q' - [\beta\tilde{\varphi}' K, Q]\big)e^{\beta\tilde{\varphi}K}, \qquad \operatorname{Tr}(\xi\wedge\xi') = \operatorname{Tr}\big(Q\wedge\big(Q' - [\beta\tilde{\varphi}'K, Q]\big)\big).$$

令 $c = \cosh(2s)$，可得

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(\xi\wedge\xi') &= 2\,\delta s\wedge\delta s' - \frac{\beta^2}{2}\,\delta\tilde{\varphi}\wedge\delta\tilde{\varphi}' - \frac{1}{2}\,\delta\theta\wedge\delta\theta' \\ &\quad + \frac{\beta c}{2}\big(\delta\tilde{\varphi}\wedge\delta\theta' + \delta\theta\wedge\delta\tilde{\varphi}'\big) + \frac{\beta c'}{2}\,\delta\tilde{\varphi}\wedge\delta\theta - \beta\tilde{\varphi}'\,\delta c\wedge\delta\theta, \end{aligned} \tag{27}$$

其中，利用分部积分，涉及 c' 的项相互抵消。其余混合项合并为 $-\frac{1}{2}\beta\,\delta(c\tilde{\varphi}')\wedge\delta\theta$。因此，

$$\int_{S^1}\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\xi\wedge\xi')\,d\varphi = \int_{S^1}\left[\delta s\wedge\delta s' - \frac{\beta^2}{4}\,\delta\tilde{\varphi}\wedge\delta\tilde{\varphi}' - \frac{1}{4}\delta\theta\wedge\delta\theta' - \frac{1}{2}\beta\,\delta(c\tilde{\varphi}')\wedge\delta\theta\right]d\varphi. \tag{28}$$

现在我们取极限 $\varrho\to 0$。展开式 $\widetilde{\rho} = 1-\varrho g + O(\varrho^2)$ 给出

$$\delta\widetilde{\rho} = -\varrho\,\delta g + O(\varrho^2), \qquad \frac{\beta\widetilde{\rho}^{\beta-1}}{1-\widetilde{\rho}^{2\beta}} = \frac{1}{2\varrho g} + O(1).$$

代入径向变分（26），我们得到

$$\delta s = \left(\frac{1}{2\varrho g} + O(1)\right)\big(-\varrho\,\delta g + O(\varrho^2)\big) = -\frac{1}{2}\,\delta\log g + O(\varrho).$$

[6]场空间微分 δ作用于 f，g，h，同时固定 ϱ，ϕ。

因此 δs 具有 一个有限的边界极限，尽管 s 本身发散。它对 2-形式的贡献为

$$\lim_{\varrho\to 0}\delta s\wedge\delta s'=\frac{1}{4}\delta\log g\wedge(\delta\log g)'.$$

另请注意展开式 $c=\cosh(2s)=\frac{1+\tilde\rho^{2\beta}}{1-\tilde\rho^{2\beta}}=\frac{1}{\beta\varrho g}+O(1)$。结合 $\delta\theta=\varrho\delta h$ 和 $\delta\tilde\varphi=\delta f+O(\varrho)$，我们在边界极限下得到：

$$\lim_{\varrho\to 0}(\beta\,\delta(cf')\wedge\delta\theta)=\delta\left(\frac{f'}{g}\right)\wedge\delta h,\qquad\lim_{\varrho\to 0}\delta\theta\wedge\delta\theta'=0.$$

最后，

$$\omega_{\rm out}=\lim_{\varrho\to 0}\int_{S^1}\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\xi\wedge\xi')\,d\varphi=\int_{S^1}\left[-\frac{\beta^2}{4}\,\delta f\wedge\delta f'+\frac{1}{4}\,\delta\log g\wedge(\delta\log g)'-\frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{f'}{g}\right)\wedge\delta h\right]d\varphi,\tag{29}$$

如所需。 □

注意， $\omega_{\rm in}$ 和 $\omega_{\rm out}$ 是 C 上的闭 2-形式，其中$^{\beta}(\mathbb{D})$。形式 $\omega_{\rm in}$ 下降到度量空间，在那里它是 $T_p\mathbb{D}$上的复结构空间上的辛形式的拉回，见下方注 4.9。形式 $\omega_{\rm out}$ 一般不能下降。

现在我们描述 $\omega_{\rm in}$的几何意义，即证明 $\omega_{\rm in}$ 与余伴随轨道上的基里洛夫–科斯坦特–苏里奥（KKS）辛形式的拉回成正比。

对于群 $\mathcal{F}$，令 $\xi\in\mathfrak{f}^*$，并记

$$O_\xi=\{\mathrm{Ad}^*_u\xi;u\in\mathcal{F}\}$$

其对应的余伴随轨道。记 $\pi_\xi:\ u\mapsto\mathrm{Ad}^*_u\xi$ 为典范投影。回顾一下， O_ξ带有一个典范的 KKS 辛形式 ω_ξ，其特征如下：

$$\pi_\xi^*\omega_\xi=\frac{1}{2}\langle\xi,[u^{-1}\delta u,u^{-1}\delta u]\rangle.$$

命题 4.8。令 $\mathcal{O}_\beta$ 为

$$\xi_\beta=\beta J,\qquad J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},$$

在 $\mathrm{GL}^+(2$ 下， $\mathbb{R})$，利用迹配对将李代数与其对偶空间等同。将其 *KKS* 形式记为 $^{\omega_{\xi_\beta}}$。定义

$$\pi_\beta:\mathcal{A}^\beta\longrightarrow\mathcal{O}_\beta,\qquad\pi_\beta(A)=L(A)^{-1}\xi_\beta L(A),$$

其中， $L(A)=d_p\varphi_A$ 由命题 *4.4* 的截面确定。于是

$$\omega_{\rm in}=\frac{\pi\beta}{4}\,\pi_\beta^*\omega_{\xi_\beta.}$$

证明。 由于 $\pi_\beta(A)=\pi_{\xi_\beta}(L^{-1}(A))$，我们应用 KKS拉回恒等式，其中 $u=L^{-1}$。于是

$$u^{-1}\delta u=L\,\delta(L^{-1})=-\delta L\,L^{-1}.$$

对于矩阵值一形式，利用 $[\delta L\,L^{-1},\ \delta L\,L^{-1}]=2\delta L\,L^{-1}\wedge\delta L\,L^{-1}$，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\pi\beta}{4}\pi_\beta^*\omega_{\xi_\beta.}&=\frac{\pi\beta}{4}\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\big(\xi_\beta[-\delta L\,L^{-1},-\delta L\,L^{-1}]\big)\\&=\frac{\pi\beta^2}{4}\,\mathrm{Tr}(J\delta L\,L^{-1}\wedge\delta L\,L^{-1})=\omega_{\rm in},\end{aligned}$$

如（23）所示。 □

注 4.9。 内边界贡献 ω_{in} 可以自然地解释为标记点处的复结构 （23）。记 $\mathcal{J}^+(T_p\mathbb{D})$ 为 $T_p\mathbb{D}$ 上线性复结构的空间，其中 $J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ 为标准复结构。对于 $g=\varphi^*g_D^\beta$，诱导的复结构延拓穿过p，在固定的定向标架下，我们有

$$I_g(p)=L^{-1}JL,\qquad L=d_p\varphi,\qquad .$$

根据前述命题， ω_{in} 是沿着 $\alpha\mapsto I_g(p)$对 $\mathcal{J}^+(T_p\mathbb{D})$上的 ***KKS*** 形式进行拉回所得结果的常数倍，其中 g 是由余标架 α定义的度量。因此，它下降到度量空间。

此外，这一描述与命题 ***4.4*** 中定义的截面相容。事实上，对于 ***QR*** 分解 $L=QT$，其中 $Q\in\mathrm{SO}(2)$ 且 $T\in\nabla$，我们有

$$L^{-1}JL=T^{-1}JT,$$

因为 Q与 J可交换。当且仅当 $T'=rT$ 对某个 $r>0$成立时，两个矩阵 T、$T'\in\nabla$ 确定相同的复结构。因此，

$$\nabla/\mathbb{R}_{>0}\longrightarrow\mathcal{J}^+(T_p\mathbb{D}),\qquad [T]\longmapsto T^{-1}JT,$$

是一个微分同胚，其中 $\mathbb{R}_{>0}$ 表示正标量矩阵组成的子群。因此很容易看出，空间 $\mathcal{J}^+(T_p\mathbb{D})$ 也是 ∇的一个余伴随轨道。

4.2.3. ***Drinfeld-Sokolov*** 切片。对于形式 ω_{out}，回顾一下， $\mathcal{A}^\beta$ 中的所有联络都可以变换到 Drinfeld-Sokolov（DS）切片（18）。更确切地说，DS 形式 [7] 满足：其边界限制的右上系数为 1，且对角系数为零。这可以通过对 A^β施加奇异规范变换得到：

$$B:=r^{-1}A^\beta r+r^{-1}dr,\qquad r=\begin{pmatrix}\varrho^{-1/2}&0\\0&\varrho^{1/2}\end{pmatrix}.$$

然后 B 平滑地延拓到边界，其边界限制 ι^*B 的右上系数为 1，且对角系数为零，其中 $\iota:\ \partial\mathbb{D}\hookrightarrow\mathbb{D}$。

对于展开式

$$\widetilde{\rho}=1-\varrho g(\varphi)+O(\varrho^2),\qquad \widetilde{\varphi}=f(\varphi)+O(\varrho),\qquad \theta=\varrho h(\varphi)+O(\varrho^2),$$

对公式（18）中的联络进行规范变换并限制到边界上，得到

$$\iota^*B=\begin{pmatrix}\dfrac{g'+hf'}{2g}&\dfrac{f'}{g}\\ *&-\dfrac{g'+hf'}{2g}\end{pmatrix}d\varphi.$$

因此，DS条件为

$$\frac{f'}{g}=1,\qquad g'+hf'=0,$$

或等价地

$$g=f',\qquad h=-\frac{f''}{f'}.$$

由于 $f'>0$，这些条件可以通过固定边界微分同胚调整法向导数，并通过余框架旋转调整其一阶法向导数来实现。这两种变换都可以支撑在边界领圈内，使标记点的一个邻域保持不变，因此 DS 切片存在。

经过这一规范化后，剩余的系数为

$$\iota^* B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -T_f & 0 \end{pmatrix} d\varphi, \qquad T_f = \frac{\beta^2}{4}(f')^2 + \frac{1}{2}\mathcal{S}(f), \tag{30}$$

其中 $\mathcal{S}(f)$是 f的Schwarzian导数，如式（7）所示。

命题 4.10。 在 *DS* 切片上， ω_{out} 具有如下形式：

$$\omega_{\text{out}}|_{\text{DS}} = \int_{S^1} \left(\frac{1}{4}\delta\log(f')) \wedge \delta(\log(f')' - \frac{\beta^2}{4}\delta f \wedge \delta f' \right) d\phi.$$

证明。 在 DS 切片上， $g = f'$，因此 $f'/g = 1$，从而

$$\delta\left(\frac{f'}{g}\right) = 0.$$

因此，（29）中的混合项消失，代入可得

$$\omega_{\text{out}}\big|_{\text{DS}} = \int_{S^1} \left(\frac{1}{4}\,\delta\log f' \wedge \partial_\varphi(\delta\log f') - \frac{\beta^2}{4}\,\delta f \wedge \delta f' \right) d\varphi.$$

□

结合前面的结果，我们在 Teichm¨uller 空间上得到一个典范闭2-形式，并确定了它与 Virasoro 余伴随轨道之间的关系。下述定理给出了定理 4.1 在一般锥参数 β下的类似结果，将讨论范围从第一个例外轨道扩展到椭圆型和例外轨道。

定理 4.11. 固定 $\beta > 0$。

(i) 对于每个类 $[g] \in \text{Teich}^\beta(\mathbb{D}, p)$，都可以选取一个代表元 g 及一个适配标架，使得相应的平坦联络在理想边界附近具有 *Drinfeld–Sokolov* 形式。

(ii) 2-形式 $\omega_{\text{AB}} - \omega_{\text{in}}$限制在 *Drinfeld–Sokolov* 截面上后，下降为$\text{Teich}^\beta(\mathbb{D}, p)$上的典范闭二形式 ω_β 。

(iii) $\text{Diff}^+(S^1)$ 的自然作用是一个 *Virasoro* 作用，其动量映射为

$$\mu_\beta([g]) = \partial_\varphi^2 + T(\varphi),$$

其中， $T(\varphi)$ 是 *Drinfeld–Sokolov* 联络的系数。在通过 f进行的边界参数化中，该系数为

$$T_f = \frac{\beta^2}{4}(f')^2 + \frac{1}{2}S(f).$$

(iv) 如果 $\beta \notin \mathbb{Z}_{>0}$，则动量映射 μ_β 是到 $\mathcal{O}_{\beta^2/4}$，上的双射；形式 ω_β 是辛形式，并且与对应于 $T = \frac{\beta^2}{4}$ 的椭圆型*Virasoro*余伴随轨道上的 *KKS* 辛形式重合。如果 $\beta = n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ，则到其像的动量映射与自然投影相同

$$\pi_n : \text{Teich}^n(\mathbb{D}, p) \cong S^1 \backslash \text{Diff}^+(S^1) \longrightarrow \text{PSU}^{(n)}(1,1) \backslash \text{Diff}^+(S^1) = \mathcal{O}^{(n)}.$$

此外，形式 ω_n 是预辛形式，并且与在 π_n下对应于 $T(\varphi) = \frac{n^2}{4}$ 的 *KKS* 形式的拉回重合

$$\omega_n = \pi_n^* \omega_{\text{KKS}}^{(n)}.$$

证明。 证明可由综合前面的结果得到。回顾一下，每个 Teichm¨uller 类都存在一个 DS 代表元，因为归一化可以在边界领圈中进行，从而保持锥点不变。根据定理 4.7 和命题 4.10，

$$(\omega_{\text{AB}} - \omega_{\text{in}})|_{\text{DS}} = \omega_{\text{out}}|_{\text{DS}}$$

是闭的，并且仅取决于边界微分同胚 f。因此，它与内部延拓和余标架无关，并且在保边界微分同胚下是基本的。剩余的不确定性 $f \mapsto f + c$ 保持此表达式不变，而其无穷小生成元 V，由$\delta f(V) = 1$刻画，满足

$$\iota_V(\omega_{\text{out}}|_{\text{DS}}) = -\frac{\beta^2}{4}\int_{S^1} \delta f'\, d\varphi = 0.$$

因此，该形式可典范地下降到

$$\text{Teich}^{\beta}(\mathbb{D}) \cong S^1 \backslash \text{Diff}^+(S^1).$$

将下降后的形式记为 ω_β，并令

$$q : \text{Diff}^+(S^1) \longrightarrow S^1 \backslash \text{Diff}^+(S^1)$$

为商映射。比较命题 4.10 与（8），对于 $T = \beta^2/4,$，可得

$$q^*\omega_\beta = \nu_T^*\omega_T.$$

根据方程（30），边界势 T_f 恰好是常数势 $T_\beta = \beta^2/4$ 在作用（6）下的余伴随变换。因此 $\mu_\beta \circ q = \nu_{T_\beta}$。

若 $\beta \notin \mathbb{Z}_{>0}$， T 的稳定子为 S^1。因此，将 Teichm¨uller 空间与相应椭圆轨道的识别，将 ω_β 与其 KKS 辛形式对应起来。

若 $\beta = n \in \mathbb{Z}_{>0}$，稳定子为 $\text{PSU}^{(n)}(1,\ 1)$，以及 $\nu_T = \pi_n \circ q$。因此

$$q^*\omega_n = q^*\pi_n^*\omega_{\text{KKS}}^{(n)}.$$

由此可得

$$\omega_n = \pi_n^*\omega_{\text{KKS}}^{(n)},$$

因此 ω_n 是预辛的。 □

Appendix A. Hyperbolic cone metrics on the disk

在本附录中，我们回顾 Hulin 和 Troyanov [9, 16], 以及 McOwen [12], 关于简单奇异性的相关研究结果，并详细证明定理 3.8。存在性由一致化论证得到。唯一性则通过施瓦茨引理建立，所使用的是标记点处和理想边界处共形比的性质。

在本附录中，奇异性阶数均按定义 3.7 的含义理解。我们的阶数$\beta > 0$ 对应于 [16, 9]约定中的阶数 $\alpha = \beta - 1$ 。

A.1. 简单奇点与唯一性。 具有阶数 β简单奇点的度量，在 p处的锥角为 $2\pi\beta$，它表示除子 $(\beta - 1)p$，并具有局部形式

$$g = e^{2u}|z|^{2(\beta-1)}|dz|^2, \qquad u \in L^1_{\text{loc}}, \qquad \Delta_0 u \in L^1_{\text{loc}}.$$

这里 $z(p) = 0$，可积性条件在 p上以及 $\Delta_0 = \partial_x^2 + \partial_y^2$成立。

定理 A.1 (McOwen [12])。 设 $g = e^{2v}|dz|^2$ 是穿孔单位圆盘上的共形度量，在原点之外光滑。如果其曲率满足

$$-b|z|^{\ell} \leqslant K(z) \leqslant -a|z|^{\ell}$$

对于某些 $\ell \in \mathbb{R}$ 和 a、$b > 0$，则原点是 g的简单奇点。

对于 $K = -1$，假设条件在 $\ell = 0$ and $a = b = 1$ 下成立。该判据保证奇点是简单的，但不能确定其阶。在定理 3.8 中，我们预先固定 $\beta > 0$，并要求度量在标记点处有一个阶为 β 的简单奇点。

命题 A.2 (圆盘的施瓦茨引理；Hulin–Troyanov [[9], 定理 3.1])。设 g_1 *and* g_2 是 $\mathbb{D}\backslash\{p\}$ 上曲率为 -1 的共形度量，且各自在 p 处有一个阶为 β 的简单奇点，其中$\beta > 0$。记 $g_2 = e^{2v}g_1$。若 g_1 在 $\mathbb{D}$ 的无穷远边界处完备，且 v 可连续延拓至 p，则 $g_2 \leqslant g_1$ 于 $\mathbb{D}\backslash\{p\}$ 上成立。

施瓦茨引理的证明依赖于 Yau 的广义最大值原理；参见 [16] 和[9]。下一个引理给出了标记点附近所需的控制，以便在唯一性证明中应用命题 A.2。

引理 A.3。设

$$g = e^{2u}|z|^{2(\beta-1)}|dz|^2$$

其曲率为 -1，且在 $z = 0$处有一个参数为 $\beta > 0$ 的简单奇点。则 u 在原点处有一个连续代表元。因此，具有相同参数 β 的这两个度量在原点附近的对数比有界。

证明。 在原点以外，曲率方程给出

$$\Delta_0 u = |z|^{2(\beta-1)}e^{2u} \geqslant 0.$$

由于 $\Delta_0 u$ 在整个坐标圆盘上是一个 L^1 函数，因此该恒等式在原点处也以分布意义下成立。因此 u 是次调和的，并且在局部有上界。右端在局部属于 L^q，其中某个 $q > 1$: 如果 $0 < \beta < 1$，则取

$$1 < q < (1-\beta)^{-1},$$

而当 $\beta \geqslant 1$ 时，它在局部有界。内部椭圆正则性给出

$$u \in W^{2,q}_{\mathrm{loc}}(U),$$

其中 U 是圆盘中的一个包含原点的开邻域。由二维情形的Sobolev嵌入， u 因此在 U上有一个连续代表元，其中包括原点。

对于两个具有相同参数 β的此类度量，记

$$g_i = e^{2u_i}|z|^{2(\beta-1)}|dz|^2.$$

奇异幂相互抵消，得到

$$g_2 = e^{2v}g_1, \qquad v = u_2 - u_1.$$

由于 u_1 和 u_2 都可连续延拓到原点，因此 v也可以连续延拓到原点，且

$$\lim_{z\to 0} v(z) = u_2(0) - u_1(0) \in \mathbb{R}.$$

因此， v 在原点的一个邻域内有界。 □

A.2. **定理 3.8 的证明**。

证明。 固定$\mathbb{D}$上的光滑复结构 I、一点 $p \in \mathbb{D}$以及参数 $\beta > 0$。我们证明，存在唯一一个相容的双曲 0-度量，并且它在 p处具有阶为 β 的简单奇点。

存在性。 一致化定理结合光滑边界正则性，给出了内部之间的双全纯映射

$$w : (\mathbb{D}, I) \longrightarrow (\mathbb{D}, J), \qquad w(p) = 0,$$

延拓为闭圆盘之间的光滑微分同胚。考虑模型

$$g^{\beta}_{\mathbb{D}} = \frac{4\beta^2|z|^{2(\beta-1)}}{(1-|z|^{2\beta})^2}|dz|^2, \qquad g = w^* g^{\beta}_{\mathbb{D}}.$$

该模型的曲率为 -1，原点处的锥角为 $2\pi\beta$。由于 w 在 p处是局部微分同胚，拉回度量在那里具有相同的锥角。在外边界的一个领圈上，令 $\varrho = 1 - |z|$。于是

$$\varrho^2 g_{\mathbb{D}}^{\beta} = \left(\frac{2\beta |z|^{\beta-1}(1-|z|)}{1-|z|^{2\beta}} \right)^2 |dz|^2$$

可光滑且正地延拓至 $|z| = 1$。因此， $g_{\mathbb{D}}^{\beta}$ 及其拉回都满足0-度量条件。归一化映射 w 在目标空间的旋转意义下是唯一的，而旋转保持 $g_{\mathbb{D}}^{\beta}$ 不变，因此该构造与这一选择无关。

唯一性。 设 g_1 和 g_2 是两个双曲0-度量，它们在 p处具有阶为 β 的简单奇点。在以 p为中心的共同全纯坐标中，写成

$$g_i = e^{2u_i} |z|^{2(\beta-1)} |dz|^2, \qquad i = 1, 2.$$

根据引理 A.3 ，每个 u_i 都能连续延拓过 p。因此，对数共形比 io 定义为

$$g_2 = e^{2v} g_1, \qquad v = u_2 - u_1 \quad \text{near } p,$$

延拓为 $\mathbb{D}$ 上的连续函数，并且在 p 之外光滑。

Both度量在无穷远处是完备的。事实上，在理想边界附近，它们具有如下形式

$$g_i = \varrho^{-2} \bar{g}_i,$$

其中 ϱ 是边界定义函数，而 $\bar{g}_i$ 可光滑且正值地延拓至边界。由于 $K_{g_1} = K_{g_2} = -1$，满足针对具有相同阶奇点的度量的施瓦茨引理的假设。取 $(g,\ h) = (g_1,\ g_2)$ 应用该引理可得 $g_2 \leqslant g_1$。交换这两个度量可得 $g_1 \leqslant g_2$。因此 $g_1 = g_2$。 □

因此，对于每个固定的 $\beta > 0$，定理 3.8 将一个标记共形圆盘与其唯一兼容的双曲锥度量对应起来。唯一性使得这一对应在微分同胚的拉回作用下具有自然性。这一点将在命题 3.9 以及随后对 Teichm¨uller 空间的描述中使用。

References

[1] A. Alekseev、E. Meinrenken，具有理想边界的曲面的Teichm¨uller空间的辛几何，《Commun. Math. Phys.》 405 2024 10, 2401 03029 ( )第 期。arXiv: 。A. Alekseev、S. Shatashvili，维拉索罗群余伴随轨[2]道的路径积分量子化与二维引力，《Nucl. Phys. B》323(1989)，719–733。[3] M. F. Atiyah、R. Bott，黎曼曲面上的杨–米尔斯方程。《Phil. Trans. R. Soc. London》308（1983），523–615。[4] J. Balog、L. Feh´er、L. Palla，维拉索罗代数的余伴随轨道与全局刘维尔方程，《Int. J. Mod. Phys. A》13（1998），315–362，arXiv:hep-th/9703045。[5] M. Blau、D.R. You mans， $SL(2,\ \mathbb{R})$ 规范理论、双曲几何与Virasoro余伴随轨道，arXiv:2410.01302（2024）。[6] R. Dalipi，奇异等距变换的李群胚积分：Poincar´e圆盘，arXiv:2608.30077（2026）。[7] V. G. Drinfel'd、V. V. Sokolov，李代数与Korteweg–de Vries型方程，《Journal of Soviet Mathematics》（ 1985 30 2 1975 2036 ），（），– A. Gramain，紧曲面微分同[8]胚群的同伦类型，《Annales scientifiques de l' ´Ecole Normale Sup ´ 6, 1973 1, 53 66 10 24033 1242 erieure》，（），第 期。– DOI: 。/[9]asens。D. Hulin、M. Troyanov，开曲面上的指定曲率，《Math. Ann.》 293 1992 2, 277 315 （），第 期。–[10]64, A. A. Kirillov，《轨道方法讲义》，《 Grad. Stud. Math. 》，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2004 年。[11] V. F. Lazutkin、T. F. Pankratova，希尔方程的正规形与全变形，《Funct. Anal. Appl.》9（1975），306–311。[12] R. C. McOwen，黎曼曲面上共形度量的指定曲率与奇点。《J. Math. Anal. Appl.》177（1993），第1期，287–298。[13] T. G. Mertens、G.J.Turiaci，Jackiw–Teitelboim引力中的缺陷，arXiv:1904.05228。[14] P. Saad、S.H. Shenker、D.Stanford，JT引力作为矩阵积分，arXiv:1903.11115（2019年）。

[15] D. Stanford、E. Witten，JT引力与随机矩阵理论的系综，《Adv. Theor. Math. Phys.》24（2020），1475–1680，arXiv:1907.03363。[16] M. Troyanov，具有简单奇异性的黎曼曲面，《Reshetnyak的次调和度量理论》2023，arXiv:2201.03359[17] F. Valach、D. Youmans，作为Drinfeld-Sokolov约化的Schwarzian量子力学 BF 2020, 理论，189, 1912 12331 《JHEP》arXiv: 。。[18] E. Witten，Virasoro群的余伴随轨道，《Commun. Math. Phys.》114（1988），第1期，1–53。[19] S. Wolpert，关于双曲曲面变形的辛几何，《Ann. Math.》117，2，207 1983 234（ ）第 期。- 。