arXiv:2611.32648v1 [math.DS] 24 Nov 2026

´曲面上零点处的扭曲庞加莱级数

´ ˜TRISTAN HUMBERT、THIBAULT LEFEUVRE、SEBASTIAN MUNOZ-THON 和 ZHONGKAI TAO

ABSTRACT. 设（Σ, g）是一个闭的、连通的、定向的黎曼 Anosov 曲面。我们证明，基本群 Σ 的有限维不可约表示空间中存在一个开子集 V_g，其补集的复余维至少为一，并且满足如下性质：对所有 x, $y \in \Sigma$、$\rho \in \mathrm{V}_g$，扭曲庞加莱级数 $s \mapsto \eta_{g,\,\rho,\,x,\,y}(s)$ 的亚纯延拓在 $s = 0$ 处为零。我们还给出了非平凡表示的例子，其庞加莱级数在零点处不为零。此外，我们描述了这些例子在零点处的扭曲共振态结构，并证明它们具有非平凡的约当块。

1. INTRODUCTION

1.1. 结果陈述。 设 (Σ, g) 是一个闭的、连通的、有向黎曼曲面。设 $\varphi_t : S\Sigma \to S\Sigma$ 是单位切丛 $S\Sigma$ 上的测地流，其中 Σ 属于该曲面。在本文中，我们还将进一步假设 $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是阿诺索夫 的（例如，g 具有负截面曲率）。在这种情况下，我们称 g 为 *Anosov*度量，或称 (Σ, g) 为 Anosov 曲面。

1.1.1. *Poincar´*级数。 给定 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们引入 $\mathrm{M}_r := \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}))$，并令 $\mathrm{M}_r^{\mathrm{irr}}$ 表示不可约表示的子集。对于 $\rho \in \mathrm{M}_r$，相应的平坦向量丛 为

$$E_\rho := \widetilde{\Sigma} \times \mathbb{C}^r / \sim, \quad (x, \xi) \sim (\gamma(x), \rho(\gamma)\xi), \ \forall \gamma \in \pi_1(\Sigma), \tag{1.1}$$

˜其中 Σ 是 Σ 的万有覆盖。我们分别用 ∇_ρ 和 d^{∇_ρ} 表示扭曲平坦联络和扭曲外微分。我们强调，本文采用如下约定：沿着 γ 的单值化为 $\rho(\gamma)^{-1}$。

令 x, $y \in \Sigma$ 且 $\mathrm{P}_{x,\,y}$ 为从 x 出发并在 y结束的 g-测地线集合。当 $x = y$时，集合 $\mathrm{P}_{x,\,x}$ 还包含化约为单点集 $\{x\}$ 的平凡回路。对于 $\gamma \in \mathrm{P}_{x,\,y}$，关于 ∇_ρ 沿 γ 的平行移动是一个线性映射

$$\tau_\rho(\gamma) \in \mathrm{Hom}(E_\rho(x), E_\rho(y)).$$

我们定义 ´扭曲的庞加莱 ´级数，对于 $s \in \mathbb{C}$，$\mathrm{Re}(s) \gg 1$，如下：

$$\eta_{g,\rho,x,y}(s) := \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_{x,y}} e^{-s\ell_g(\gamma)} \tau_\rho(\gamma) \in \mathrm{Hom}(E_\rho(x), E_\rho(y)), \tag{1.2}$$

其中 $\ell_g(\gamma)$ 是 γ的长度。扭曲的庞加莱˙级数 (1.2) 在 $\mathrm{Re}(s) \gg 1$时收敛且全纯。它可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$ (命题 3.3)。

1.1.2. *0* 处的一般值0。 在本文中，我们研究 $\eta_{g、\rho、x、y}(s)$ 在 $s = 0$ 处的亚纯延拓值。我们的第一个主要结果如下：

定理 1 （一般情形）。 设 （Σ、 g） 是一个闭、连通、定向的 *Anosov* 曲面。存在一个开子集 $\mathcal{V}_g \subset \mathcal{M}_r^{\mathrm{irr}}$，在共轭下不变，并包含所有非平凡幺正表示，其补集的复维数为 ≥ 1，使得以下结论成立：对于所有 $\rho \in \mathcal{V}_g$、 x、 $y \in \Sigma$，

$$\eta_{g,\rho,x,y}(0) = 0.$$

对于 $r = 1$ 和 $\rho = \rho_{\mathrm{triv}}$，即平凡表示，Dang 和 Rivi`ere 证明了 [DR24，定理 1.2] 即 $\eta_{g、\rho_{\mathrm{triv}}、x、y}(0) = 1/\chi(\Sigma)$，其中 $\chi(\Sigma)$ 是 Σ[1] 的欧拉示性数。定理 1 表明，$\rho \mapsto \eta_{g、\rho、x、y}(0)$ 关于表示$\rho \in \mathrm{M}_r^{\mathrm{irr}}$并不连续。证明使用了第一作者和最后一位作者的工作 [HT26] ，该工作描述了一般表示在零处的扭曲 Pollicott–Ruelle 共振空间。

1.1.3. 全纯秩一联络。 设 $K \to \Sigma$ 是 Σ的典范线丛，将其视为复曲线，其中复结构由度量 g的共形类诱导，详见 [Lef25第 15]章。回顾一下，全纯 1-形式$\omega \in H^0(\Sigma; K)$ 通过下式定义了一个秩一表示 $\rho_\omega \in \mathcal{M}_1$：

$$\rho_\omega(\gamma) := \exp\left(-\int_\gamma \omega\right), \qquad \forall \gamma \in \pi_1(\Sigma). \tag{1.3}$$

相应的平坦复线丛 $E_{\rho_\omega} \to \Sigma$ 可以与赋予联络 $d + \omega\wedge$的平凡线丛 $\mathbb{C} \times \Sigma$ 相识别。

对于任意 $x \in \Sigma$，令

$$\mathrm{ev}_x^\omega : H^0(\Sigma; E_{\rho_\omega}) \to E_{\rho_\omega}(x), \quad s \mapsto s(x), \tag{1.4}$$

为取值映射，其中 $H^0(\Sigma;\ E_{\rho_\omega})$ 表示线丛 E_{ρ_ω}的全纯截面。注意， $H^0(\Sigma;\ E_{\rho_\omega}) \simeq \mathbb{C}$ 和（1.4）是同构（引理 5.5）。特别地，这定义了一个典范截面

$$\sigma_\omega(x, y) := \mathrm{ev}_y^\omega \circ (\mathrm{ev}_x^\omega)^{-1} \in \mathrm{Hom}(E_{\rho_\omega}(x), E_{\rho_\omega}(y)).$$

如下结论成立：

定理 2 （全纯 1-形式）。 设 （Σ、 g）为一双曲曲面。存在 U的一个邻域，使得在 H^0（Σ; K）中的 0 处，对于任意 x、 $y \in \Sigma$和 $\omega \in U$：

$$\eta_{g,\rho_\omega,x,y}(0) = \sigma_\omega(x, y)/\chi(\Sigma). \tag{1.5}$$

[1]当 $x = y$时，它们得到 $\eta_{g,\ \rho_{\mathrm{triv}},\ x,\ x}(0) = \chi(\Sigma)^{-1} - 1$。差异源于这样一个事实：当两点相等时，他们的 Poincar´é 级数中不 包含平凡回路。

等式（1.5）在 $s = 0$ 处给出了一个非零值，这与定理 1形成对比。我们还注意到，Σ 上的全纯 1-形式空间的复维数为 g，其中 $g \geq 2$是 Σ的亏格，而秩一表示空间的复维数为 $2g$。因此，我们的示例集合包含在一个复余维数为 $g \geq 2$的子集中，这与定理 1的结果一致。与定理 2类似，还应存在高秩（非平凡）表示（$r \geq 2$），使得 $\eta_{g,\ \rho,\ x,\ y}(0) \neq 0$。

1.1.4. 若尔当块。 证明的总体策略建立在 [DR24] 之上，并且基于对 零点处扭曲 *Pollicott–Ruelle* 共振 的描述，详见 §1.3 。我们的最后一个结果描述了定理 2 中构造的例子的共振空间，并表明其不同于 [HT26，定理 2]中得到的一般情形。在下一个定理中，我们令 $\mathrm{Res}_0^{k,\ell},(\rho,0)$ 表示 0 处处于 $\mathcal{L}^{\ell}_{X^{\rho}}$核中的广义共振态空间，其中 $\mathcal{L}_{X^{\rho}}$ 作用于 k-形式上，详见 §2.2 。

定理 3。 设 (Σ, g) 为亏格为 $g \geq 2$ 的双曲曲面。存在 U 的一个邻域，使得对于 $\omega \in U \setminus \{0\}$ 中的任意元素：

$$\dim(\mathrm{Res}_0^{k,\infty}(\rho_\omega, 0)) = 1, \quad k = 0, 2,$$
$$\dim(\mathrm{Res}_0^{1,\infty}(\rho_\omega, 0)) = 2g, \quad \dim(\mathrm{Res}_0^{1,1}(\rho_\omega, 0)) = 2g - 1.$$

据我们所知，定理3 给出了首批存在零点 Jordan 块的 $\pi_1(\Sigma)$ 表示实例。值得注意的是， $\pi_1(S\Sigma)$ 表示中，存在不 通过 $\pi_1(\Sigma)$ 分解且具有零点 Jordan 块的实例，已在 [HT26的定理 4]中构造。

1.2. 相关工作。Dang 和 Rivière 在 [DR24 的定理 1.2] 中计算了 Anosov 曲面的 Poincaré 级数在 $s = 0$ 处的取值。对于双曲曲面，Paternain [Pat00] 此前已得到对所有点 $x, y \in \Sigma$ 的积分公式。 [DR24] 的结果由 Chaubet [Cha22 的定理 2] 推广至具有全测地边界的负曲率曲面情形。在同一篇论文中，Chaubet 研究了计算连接边界点的正交测地线的 Poincaré 级数，并证明其在 $s = 0$ 处为零，见 [Cha22 的定理 1]。另见 [CGB24]，其中给出了更一般的结论，将某些动力学级数在 $s = 0$ 处的取值与某些拓扑不变量联系起来；以及 [DLR23, DGBLR25]，其中包含凸体的 Poincaré 级数相关结果。最后，Guedes Bonthonneau、Weich 和第二作者证明，与 Anosov 表示相关联的 Poincaré 级数可亚纯延拓至 $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$，见 [GBLW26 的定理 1.10]。

1.3. **证明策略**。 我们遵循 [DR24]的一般策略，并将 Poincar´e 级数表示为一个涉及测地向量场预解式的分布配对，见命题3.1。随后，根据（扭曲的）´Pollicott-Ruelle 共振理论，我们推出 Poincar $\mathbb{C}$ e 级数可亚纯延拓至*Pollicott-Ruelle* 共振——这就是命题3.3的内容。亚纯延拓在 $s = 0$ 处的行为由

作用于次数为 、*resonant spaces*1、2 的微分形式上的零点共振空间，以及缩并算子 ι_X的核决定。

在非扭曲情形下，Dang 和 Rivi`ere 利用了 Dyatlov 和 Zworski [DZ17], 的工作；他们证明了在 0 处不存在约当块，并且共振 1-形式是闭的。Chaubet 在 [Cha22] 中利用了 Hadfield [Had18], 的结果，该结果将 Dyatlov 和 Zworski 的工作推广到了带边界曲面的情形。最近，第一位和最后一位作者在 [HT26] 中获得了表示 $\pi_1(\Sigma)$ 的一般情形下 0 处共振态的描述，我们将在 §2.2 中简要回顾这些结果。最后一步是通过构造公式中出现的分布流的显式原函数，计算在 $s = 0$ 处的值。利用 ρ 是非平凡的，并且属于命题 2.3 所描述的开集，我们得到定理 1。在命题 5.4 中，我们利用一个源自双曲曲面的量子—经典对应的思想，对 0 处的 Jordan 块结构给出了显式描述 [GHW18]。

致谢。 我们感谢 Gabriel Rivi`ere 就与本项目相关的问题展开讨论。T.H.、T.L. 和 S.M.-T. 获欧洲研究委员会（ERC）资助，该资助来自欧盟地平线 2020 研究与创新计划（资助协议编号：101162990 — ADG）。Z.T. 部分获得了法国国家研究署（ANR）在法国 2030 计划下提供的资助，项目编号为 ANR-25-CFFS-0012。

人工智能披露。 定理1是在未使用生成式人工智能的情况下证明的。随后，我们请大语言模型（LLM）寻找在零点处 Poincar´e 级数不消失的表示的例子。更确切地说，我们请大语言模型专注于一维表示，并使用扭曲塞尔伯格迹公式为双曲度量获得一个例子。定理 2陈述中考虑全纯 1-形式的想法源于大语言模型：它利用涉及扭曲塞尔伯格迹公式的显式计算给出了例子。随后，我们使用 Pollicott–Ruelle 共振找到了定理 2的一个更短证明，这也是本文所呈现的证明。由此，我们证明了定理 3 中关于这些例子的精确约当块结构的结论。我们强调，后一结果并不 是由大语言模型最初的论证推出的。所有证明均由作者撰写。在本文的写作和校对过程中均未使用生成式人工智能。

2. 预备知识

2.1. **单位切　丛**。 设 (Σ, g) 为一个闭定向黎曼 Anosov 曲面 .

2.1.1. 动力学分裂。设 $M := S\Sigma$ 为其单位切丛， $\pi: M \to \Sigma$ 为底点投影。设 X 为测地向量场。Anosov 性质意味着，切丛存在一个连续的流不变分裂 $TM = E_u \oplus \mathbb{R}X \oplus E_s$ 以及常数 C， $\vartheta > 0$ ，使得：

$$\|d\varphi_t|_{E_s}\| \leq Ce^{-\vartheta t},\ t \geq 0, \qquad \|d\varphi_t|_{E_u}\| \leq Ce^{\vartheta t},\ t \leq 0.$$

丛 E_s （分别为 E_u）是（φ_t）的稳定（分别为不稳定）丛。Anosov分裂在 M 的余切丛上诱导出一个对偶分裂：

$$T^*M = E_u^* \oplus \mathbb{R}\alpha \oplus E_s^*, \quad E_u^*(E_u \oplus \mathbb{R}X) = 0,\ E_s^*(E_s \oplus \mathbb{R}X) = 0, \tag{2.1}$$

其中 $\alpha \in C^\infty(M; T^*M)$ 是 M 上的接触1-形式，满足 $\iota_X\alpha = 1, \quad \iota_X d\alpha = 0$.

2.1.2. 垂直丛与水平丛。 一个定向黎曼曲面具有可积的几乎复结构，即存在一个平行截面 $J \in C^\infty(M; \mathrm{End}(TM))$，使得 $J^2 = -\mathrm{Id}$，并且与 g相关联的面积形式由 $dA_g = g(J\bullet, \bullet)$ 给出。定义角度为 θ 的纤维逐点旋转为

$$\rho_\theta : SM \to SM, \quad \rho_\theta(x, v) = (x, e^{\theta J}v),$$

其中 $e^{\theta J}v$ 是通过沿正方向旋转 v 角度 θ 所得到的单位向量（相对于 M 的定向而言）。垂直向量场 V 定义为 ρ_θ 的生成元。于是，水平向量场 定义为 $H := [V, X]$。记 $\mathbb{V} := \mathbb{R}V$ （分别为 $\mathbb{H} := \mathbb{R}H$）为垂直丛（分别为水平丛）。注意到 $TM = \mathbb{R}X \oplus \mathbb{V} \oplus \mathbb{H}$。我们将使用余切丛的相应分解：

$$T^*M = \mathbb{H}^* \oplus \mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{V}^*, \quad \mathbb{V}^*(\mathbb{H} \oplus \mathbb{R}X) = 0, \quad \mathbb{H}^*(\mathbb{V} \oplus \mathbb{R}X) = 0. \tag{2.2}$$

2.1.3. 傅里叶分解。令

$$\Omega_k := \{u \in C^\infty(S\Sigma) : Vu = iku\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

每个光滑函数 $f \in C^\infty(S\Sigma)$ 都可以唯一地分解为傅里叶模之和：

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k, \qquad f_k \in \Omega_k.$$

参见 [Lef25，公式（15.2.5）]。Guillemin–Kazhdan升降算子定义为 $\eta_\pm := （X \mp iH）/2$，并将

$$\eta_\pm : \Omega_k \to \Omega_{k\pm1}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

2.1.4. C^o接触分布。 接触分布是流不变的子丛 e

$$\mathbb{H} \oplus \mathbb{V} = \ker(\alpha) = E_u \oplus E_s. \tag{2.3}$$

由于该流是阿诺索夫流，垂直方向处处横截于稳定方向和不稳定方向（参见 [Lef25，定理 13.3。6]）。和之前一样，我们将使用对偶陈述：

$$(\mathbb{H}^* \oplus \mathbb{R}\alpha) \cap E_u^* = (\mathbb{H}^* \oplus \mathbb{R}\alpha) \cap E_s^* = \{0\}. \tag{2.4}$$

接下来，我们利用阿诺索夫流没有共轭点这一事实（[Lef25，定理 13.3。10]）。在余切丛中，该表述为：

$$\forall t \neq 0, \quad d\varphi_t^\intercal(\mathbb{H}^*) \cap \mathbb{H}^* = \{0\}. \tag{2.5}$$

从现在起，我们使用接触体积形式 $\alpha \wedge d\alpha$为 M 定向。根据这一对定向的选择，

$$(X, V, H) \text{ is a positively orthonormal basis of } TM, \tag{2.6}$$

关于 Sasaki度量。证明定理 1时将使用以下事实：

引理 2.1。 存在 a_t、$b_t \in C^\infty(M)$，使得 $a_t > 0$ (分别为 $a_t < 0$)，对于 $t > 0$ (分别对于 $t < 0$)，且

$$d\varphi_t(V) = a_t H + b_t V. \tag{2.7}$$

证明。我们首先利用接触分布 (2.3) 的流不变性，推 deduce 出存在 a_t、$b_t \in C^\infty(M)$，使得 (2.7) 成立。事实上，系数由雅可比场给出，而上文所述不存在共轭点意味着 a_t 对于 $t \neq 0$ 不能为零，参见例如 [Lef25，引理 13.2.2]。我们只需确定 a_t 的符号。为此，我们在 $t = 0$ 附近作泰勒展开： $d\varphi_t(V) = V + t[V, X] + O(t^2) = V + tH + O(t^2)$。这表明 $a_t \sim t$，从而完成证明。□

2.1.5. 双曲曲面上的扭曲几何。 现在我们记录一些将在定理证明中用到的有用恒等式 2 和定理 3。在本段中，我们进一步假设 g 是双曲的。不稳定 horocyclic 向量场定义为

$$U_- := H + V, \tag{2.8}$$

并且张成 E_u 在 $S\Sigma$ 上。它满足 $[X, U_-] = -U_-$。

设 ω 是 Σ上的一个全纯 1-形式。我们将 ω 视为 $M = S\Sigma$上的函数（仍记作 ω），定义为 $(x, v) \mapsto \omega_x(v)$。定义

$$X^\omega := X + \omega, \qquad H^\omega := H + i\omega, \qquad U_-^\omega := U_- + i\omega, \qquad \eta_+^\omega := \eta_+ + \omega$$

最后，扭曲 *Casimir* 算子为

$$C^\omega := (X^\omega)^2 + (H^\omega)^2 - V^2 = (X^\omega)^2 - X^\omega + (U_-^\omega)^2 - 2VU_-^\omega. \tag{2.9}$$

以下结论成立：

引理 2.2。 我们有 $[X^\omega, U_-^\omega] = -U_-^\omega$和 $[C^\omega, V] = 0$。

证明。 利用对易关系可立即得到 $[X, H] = -V$， $[V, X] = H$， $[H, V] = X$（参见 [Lef25，引理 15.2。1]）。□

2.2. **扭曲 Pollicott–Ruelle 共振**。 关于扭曲 Pollicott–Ruelle 共振的更详细论述，请参阅 [HT26，§2.1]。设 $\rho \in \mathcal{M}_r$，并令$\mathcal{E}_\rho := \pi^* E_\rho$ 表示 $M = S\Sigma$ 上相关平坦向量丛的拉回，其微分为 $M = S\Sigma$，参见（ d^{∇_ρ}1.1）。定义分次向量丛

$$\mathscr{E}_\rho := \bigoplus_{k=0}^{3} \mathscr{E}_\rho^k, \quad \mathscr{E}_\rho^k = \Lambda^k T^* M \otimes \mathcal{E}_\rho, \quad \mathscr{E}_{\rho,0}^k := \mathscr{E}_\rho^k \cap \ker(\iota_X). \tag{2.10}$$

2.2.1. 预解式。 对于 $k = 0, 1, 2$，生成元 X 作用于光滑向量丛 $C^\infty(M; \mathscr{E}^k_{\rho,0})$ 的截面上，其作用为

$$\mathcal{L}_{X^\rho} := \iota_X d^{\nabla_\rho} + d^{\nabla_\rho}\iota_X.$$

由 [FS11] 可知，对 $\mathrm{Re}(s) \gg 1$ 定义的预解式

$$R^\rho_k(\lambda) := (\mathcal{L}_{X^\rho} + \lambda)^{-1} = \int_0^\infty e^{-t(\mathcal{L}_{X^\rho}+\lambda)}dt, \tag{2.11}$$

可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$，作为如下映射：

$$R^\rho_k(\lambda): C^\infty(M; \mathscr{E}^k_{\rho,0}) \to \mathcal{D}'(M; \mathscr{E}^k_{\rho,0}). \tag{2.12}$$

这些极点是内禀的，称为扭曲 ***Pollicott–Ruelle*** 共振（在 $\mathscr{E}^k_{\rho,0}$ 上）。共振集记为 $\mathrm{Res}^k(X, \rho)$；若度量不会引起混淆，则记为 $\mathrm{Res}^k(\rho)$。

2.2.2. 共振态。 复数 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ 属于 $\mathrm{Res}^k(\rho)$，当且仅当

$$\mathrm{Res}^{k,1}_0(\rho, \lambda_0) := \{u \in \mathcal{D}'(M; \mathscr{E}^k_{\rho,0}) : \mathcal{L}_{X^\rho} u = -\lambda_0 u,\ \mathrm{WF}(u) \subset E^*_u\} \neq \{0\}, \tag{2.13}$$

其中 $\mathrm{WF}(u)$ 表示波前集（参见 [H¨or03，第 3] 章）。$\mathrm{Res}^{k\,1}_0{}_{,}(\rho, \lambda_0)$ 中的非零元素称为 λ_0 处的共振态。λ_0 处的谱投影算子定义为

$$\Pi^\rho_k(\lambda_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma R^\rho_k(z)dz, \tag{2.14}$$

其中 γ 是围绕 λ_0的小环路。λ_0 的（代数）重数由谱投影的秩给出。广义共振态是$\Pi^k_\rho(\lambda_0)$的值域中的元素：

$$\mathrm{Res}^{k,\infty}_0(\rho, \lambda_0) = \{u \in \mathcal{D}'(M; \mathscr{E}^k_{\rho,0}) : \exists \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ (\mathcal{L}_{X^\rho} + \lambda_0)^\ell u = 0,\ \mathrm{WF}(u) \subset E^*_u\}. \tag{2.15}$$

我们称 若共振 λ_0 满足 $\mathrm{Res}^{k}_{,\,0}{}^{\infty}(\rho, \lambda_0) = \mathrm{Res}^{k\,1}_0{}_{,}(\rho, \lambda_0)$，则称其没有约当块。

预解式 $R^\rho_k(\lambda)$和谱投影 Π^ρ_k也定义在 $C^\infty(M; \mathscr{E}^k_\rho) \to \mathcal{D}'(M; \mathscr{E}^k_\rho)$上，相应共振态的空间为

$$\mathrm{Res}^{k,1}(\rho, \lambda_0) = \{u \in \mathcal{D}'(M; \mathscr{E}^k_\rho) : \mathcal{L}_{X^\rho} u = -\lambda_0 u,\ \mathrm{WF}(u) \subset E^*_u\}. \tag{2.16}$$

注意，我们有如下两个谱投影的值域之间的关系：

$$\forall k = 0, 1, 2, 3 \quad \mathrm{Res}^{k,1}(\rho, \lambda_0) = \mathrm{Res}^{k,1}(\rho, \lambda_0) \wedge \alpha \oplus \mathrm{Res}^{k,1}_0(\rho, \lambda_0), \tag{2.17}$$

其中 $\mathrm{Res}^{-1\,1}_{0\,,}(\rho, \lambda_0) = 0$ 按惯例。我们将需要第一位和最后一位署名作者 [HT26中的定理 2]。

命题 2.3。 设(Σ, g) 为一个闭、连通、定向的阿诺索夫曲面。则存在一个开子集$\mathcal{U}_g \subset \mathcal{M}^{\mathrm{irr}}_r$，在共轭下不变，且其在$\mathcal{M}^{\mathrm{irr}}_r$中的补集具有复余维数 ≥ 1，使得以下结论成立：对于任意 $\rho \in \mathcal{U}_g$：

$$\begin{aligned} &\dim(\mathrm{Res}^{k,\infty}_0(\rho, 0)) = 0, \quad k = 0, 2, \\ &\dim(\mathrm{Res}^{1,\infty}_0(\rho, 0)) = \dim(\mathrm{Res}^{1,1}_0(\rho, 0)) = -\dim(\rho)\chi(\Sigma). \end{aligned} \tag{2.18}$$

此外，$\mathrm{Res}_0^{1,1}(\rho,0)$ 中的共振态是 d^{∇_ρ}-闭的。

共振态是 d^{∇_ρ}-闭的，这一点可由 [HT26，引理 4 的证明推出。5]最后，我们定义

$$\mathcal{V}_g \subset \mathcal{M}_r \tag{2.19}$$

为满足（2.18）的所有不可约表示的集合，并且 Res 中的共振态 $\mathrm{Res}_0^{1,1}(\rho)$ 是闭的。根据 [HT26，引理 4 的证明，5], 我们知道 $\mathcal{V}_g$ 是开的。根据命题 2.3 和 [HT26，命题 4，6], $\mathcal{U}_g \subset \mathcal{V}_g$，以及 $\mathcal{V}_g$ 包含所有非平凡不可约幺正表示。

3. Expressing the Poincaré series in terms of the resolvent

我们遵循 [DR24] 的一般策略，并将扭曲 Poincar´e 级数表示为预解式（2.11）。这将表明 Poincar´e 级数可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$，并利用 $s=0$ 中得到的关于零点处扭曲 Pollicott–Ruelle 共振的描述，表示在 [HT26]处的值。

3.1. 表述扭曲的庞加莱级数。设 x、$y \in \Sigma(x)$、$\mu \in E_\rho^*(y)$。我们将这些向量延拓为光滑截面 $\xi_\star \in C^\infty(\Sigma; E_\rho)$（分别为 $\mu_\star \in C^\infty(\Sigma; E_\rho)$），使得$\xi_\star(x)=\xi$（分别为 $\mu_\star(y)=\mu$）。在下面的陈述中，左侧的配对理解为有限维向量空间中向量与余向量之间的配对，而右侧的配对则按流的意义理解（见 [Lef25，第 10] 章）。

命题 3.1。设 (Σ, g) 为闭、连通、定向的 *Anosov* 曲面，且 $\rho \in \mathcal{M}_r$。设 x、$y \in \Sigma$，并设 $\xi \in E_\rho(x)$ 和 $\mu \in E_\rho^*(y)$。那么，对于任意足够小的 $\varepsilon > 0$，对于任意满足 $\mathrm{Re}(s) \gg 1$ 的$s \in \mathbb{C}$：

(1) 如果 $x \neq y$,

$$\langle \eta_{g,\rho,x,y}(s)\xi, \mu\rangle = e^{-s\varepsilon}\langle R_1^\rho(s)\big(\iota_X[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^{\rho^*}}}([S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star)\rangle; \tag{3.1}$$

(2) 若 $x=y$，则

$$\langle \eta_{g,\rho,x,x}(s)\xi, \mu\rangle = e^{-s\varepsilon}\langle R_1^\rho(s)\big(\iota_X[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^{\rho^*}}}([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star)\rangle + \langle\xi,\mu\rangle. \tag{3.2}$$

注记 *3.2*。选择数值 $\varepsilon > 0$ 使得 $\varphi_\varepsilon(S_x\Sigma)\cap S_y\Sigma = \varnothing$。根据波前集条件，这保证了证明中的分布配对是良定义的；例如参见 [*H¨or03*，第 3] 章。特别地，若 $x \neq y$，则可在前一个命题中取 $\varepsilon = 0$。$x=y$ 和 $x\neq y$ 的不同公式源于以下事实：当 $x=y$ 时，我们在 η_g、ρ、x、$x(s)$ 的定义中包含了平凡回路（参见 [*DR24*，命题 *3.*8]）。

证明。对于满足 $\mathrm{Re}(s)\gg 1$ 的 $s\in\mathbb{C}$，Poincar´e 级数等于

$$\langle \eta_{g,\rho,x,y}(s)\xi,\mu\rangle = \sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{x,y}} e^{-s\ell_g(\gamma)}\langle\tau_\rho(\gamma)\xi,\mu\rangle. \tag{3.3}$$

取足够小的 $\varepsilon > 0$，并定义 $c_{x,\varepsilon} := \pi(\varphi_\varepsilon(S_x\Sigma)) \subset \Sigma$，即以 x 为中心、半径为 $\varepsilon > 0$ 的测地球面。令 $\tau_\rho(\varepsilon): E_\rho(x) \to C^\infty(c_{x,\varepsilon}, E_\rho)$ 表示这样一个映射：沿径向测地线，将截面 $\xi \in E_\rho(x)$ 平行移动至 $c_{x,\varepsilon}$。我们可以定义 y 与 $c_{x,\varepsilon}$ 的 Poincar´ 级数如下：

$$\eta_{g,\rho,c_{x,\varepsilon},y}(s) := \sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{c_{x,\varepsilon},y}} \tau_\rho(\gamma)\tau_\rho(\varepsilon)e^{-s\ell_g(\gamma)},$$

其中 $\mathrm{P}_{c_{x,\varepsilon},y}$ 表示连接 $c_{x,\varepsilon}$ 与 y的正交测地线集合，即与 $c_{x,\varepsilon}$正交、连接$c_{x,\varepsilon}$ 上的一点与 y，且初速度指向外侧的测地线集合。当 $x = y$时，我们将 $\mathrm{P}_{c_{x,\varepsilon},x}$ 定义为长度严格大于 ε 的正交测地线集合，以确保长度集合是离散的（连接x 与 $c_{x,\varepsilon}$ 且长度为 ε的测地射线不包含在此集合中）。

根据高斯引理，任何非平凡的 $\gamma \in \mathrm{P}_{x,y}$ 都与 $c_{x,\varepsilon}$ 正交相交。也就是说，如果 $\varepsilon > 0$ 取得足够小，则 γ 确定一条从 $c_{x,\varepsilon}$ 到 y 的唯一正交测地线 γ_ε，其长度等于 $\ell_g(\gamma) - \varepsilon$。由此得到以下公式，其中 $\varepsilon > 0$ 足够小且 $s \in \mathbb{C}$满足 $\mathrm{Re}(s) \gg 1$:

(1) 如果 $x \neq y$，则

$$\eta_{g,\rho,x,y}(s) = e^{-s\varepsilon}\eta_{g,\rho,c_{x,\varepsilon},y}(s); \tag{3.4}$$

(2) 如果 $x = y$，则

$$\eta_{g,\rho,x,x}(s) = e^{-s\varepsilon}\eta_{g,\rho,c_{x,\varepsilon},x}(s) + \mathrm{Id}_{E_\rho(x)}, \tag{3.5}$$

根据 [DR24引理 3。6], 对于任意足够 $\varepsilon > 0$ 小的情形，以及 $T \geq 0$，若 $v \in \varphi_\varepsilon(S_x\Sigma) \cap \varphi_{-T}(S_y\Sigma)$，则

$$T_vM = T_v(\varphi_\varepsilon(S_x\Sigma)) \oplus T_v(\varphi_{-T}(S_y\Sigma)) \oplus \mathbb{R}X(v).$$

事实上，如果 $x \neq y$，则这对 $\varepsilon = 0$成立。特别地，$\varphi_\varepsilon(S_x\Sigma)$和 $S_y\Sigma$ 满足[DR24，引理 2。1] 的条件。注意到，$c_{x,\varepsilon}$ 是同伦平凡的，因此它界定了一个包含 x 的单连通开集（即，以 x为中心、半径为 ε 的测地球）。仿照 [DR24，引理 2。1] 的证明，并利用传播子 $e^{t\mathcal{L}_{X^\rho}}$ 沿测地流线通过平行移动（相对于 ∇_ρ）作用于平坦丛的截面这一事实，我们得到在 $\mathrm{D}'(\mathbb{R}_+)$ 中成立如下等式，

$$\begin{aligned} f_{\xi,\mu,\varepsilon}(t) &:= \sum_{\gamma_\varepsilon\in\mathcal{P}_{c_{x,\varepsilon},y}} \langle\tau_\rho(\gamma_\varepsilon)\tau_\rho(\varepsilon)\xi,\mu\rangle\delta(t-\ell_g(\gamma_\varepsilon)) \\ &= \langle e^{-t\mathcal{L}_{X^\rho}}e^{-\varepsilon\mathcal{L}_{X^\rho}}(\iota_X[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star), [S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star)\rangle. \end{aligned} \tag{3.6}$$

由（2.6）和（2.7），项 $\epsilon_\tau(x) = -1$ 在 [DR24的公式（7）中]与 $(-1)^{\dim N_1} = -1$相消。

我们将上述等式与 $t \mapsto e^{-st}$ 配对，得到[2]

$$\begin{aligned}\langle \eta_{g,\rho,c_{x,\varepsilon},y}(s)\xi,\mu\rangle &= \langle f_{\xi,\mu,\varepsilon}(t), e^{-st}\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)\times C^\infty(\mathbb{R}_+)}\\ &\overset{(3.6)}{=} \int_0^{+\infty} \langle e^{-t\mathcal{L}_{X^\rho}} e^{-\varepsilon\mathcal{L}_{X^\rho}}(\iota_X[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star), [S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star)\rangle e^{-st}dt\\ &= \left\langle \int_0^{+\infty} e^{-t(s+\mathcal{L}_{X^\rho})} e^{-\varepsilon\mathcal{L}_{X^\rho}}(\iota_X[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star)dt, [S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star\right\rangle \qquad (3.7)\\ &\overset{(2.11)}{=} \langle R_1^\rho(s) e^{-\varepsilon\mathcal{L}_{X^\rho}}\big(\iota_X[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big), [S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star\rangle\\ &= \langle R_1^\rho(s)\big(\iota_X[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^\rho{}^*}}([S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star)\rangle\end{aligned}$$

其中，第一行用到了 $\eta_{g,\ \rho,\ c_{x,\ \varepsilon,\ y}}(s)$ 的定义；第三行交换了绝对收敛的积分（当 $\mathrm{Re}(s) \gg 1$ 时）；第四行在 $\mathrm{Re}(s) \gg 1$ 时使用了预解式的积分表示；最后一行则用到了 $[R_1^\rho(s)\ e^{-\varepsilon\mathcal{L}_{X^\rho}}] = 0$。所述结果由（3.4）和（3.5）即可推出。□

命题 3.3。设 (Σ, g) 是一个闭、连通、定向的 *Anosov* 曲面。设 $\rho \in \mathcal{M}_r$。那么，庞加莱级数 $s \mapsto \eta_{g,\ \rho,\ x,\ y}(s)$ 存在亚纯延拓，其极点包含于 $\mathrm{Res}^1(\rho)$。

证明。由 [DZ16，命题 3。3] 可知，$R_k^\rho(s): C^\infty(M;\ \mathscr{E}_\rho^k) \to \mathcal{D}'(M;\ \mathscr{E}_\rho^k)$ 可以亚纯延拓至 $\mathbb{C}$，并且在每个极点 s_0，

$$R_k^\rho(s) = R_{\mathrm{hol}}(s) - \sum_{j=1}^{J(s_0)} (-1)^j (s-s_0)^{-j} (\mathcal{L}_{X^\rho} + s_0)^{j-1} \Pi_k^\rho(s_0), \qquad (3.8)$$

其中 $R_{\mathrm{hol}}(s)$在 s_0附近全纯，且 $\Pi_k^\rho(s_0)$ 定义于（2.14）中。此外

$$\mathrm{WF}'(R_{\mathrm{hol}}(s)) \subset \Delta(T^*M) \cup \Omega_+ \cup E_u^* \times E_s^*, \quad \mathrm{WF}'(\Pi_k^\rho(s_0)) \subset E_u^* \times E_s^*,$$

其中 $\Delta(T^*M)$ 表示 $T^*M \times T^*M$ 的对角线，而 Ω_+ 是由下式定义的（正向）流出集

$$\Omega_+ := \{(\varphi_t v, d\varphi_t^{-\top}\xi); (v,\xi))\ :\ t \geq 0,\ \xi(X) = 0\}.$$

注意，$\mathrm{WF}([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star) \subset \mathbb{H}^* \oplus \mathbb{R}\alpha$。根据 [H¨or03，定理 8.2。13]，我们有$R_1^\rho(s)\big([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big)$ 有良好定义，关于 s是亚纯的，并且

$$\mathrm{WF}\big(\Pi_1^\rho(0)\big([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big)\big),\ \mathrm{WF}\big(R_{\mathrm{hol}}(s)\big([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big)\big) \subset \Gamma, \qquad (3.9)$$

其中

$$\Gamma := (\mathbb{H}^* \oplus \mathbb{R}\alpha)_x \cup \bigcup_{t\geq 0} d\varphi_t^{-\top}\mathbb{H}_x^* \cup E_u^*, \qquad \mathbb{H}_x^* := \bigcup_{v\in S_x\Sigma} \mathbb{H}_v^*.$$

在上述计算中，我们使用了 $(\mathbb{H}^* \oplus \mathbb{R}\alpha)_x \cap \{\xi(X) = 0\} = \mathbb{H}_x^*$。

我们断言

$$\Gamma \cap d\varphi_{-\varepsilon}^{-\top}(\mathbb{H}^* \oplus \mathbb{R}\alpha)_y = \varnothing. \qquad (3.10)$$

[2]对于足够大的 s，尽管 $t \mapsto e^{-st}$ 并非紧支集，配对仍然是良定义的。

首先，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，$(\mathbb{H}^* \oplus \mathbb{R}\alpha)_x \cap d\varphi_{-\varepsilon}^{-\top}(\mathbb{H}^* \oplus \mathbb{R}\alpha)_y = \varnothing$ 与 $S_x\Sigma$ 以及 $\varphi_{-\varepsilon}(S_y\Sigma)$ 不相交。其次，由于 $\mathbb{H}_x^* \subset \{\xi(X) = 0\}$，交集 $(\cup_{t\geq 0}(d\varphi_t^g)_x^{-\top}\mathbb{H}_x^*) \cap (d\varphi_{-\varepsilon}^g)_y^{-\top}(\mathbb{H}^* \oplus \mathbb{R}\alpha)_y$ 仅在存在某个 $t \geq 0$ 使得 $(d\varphi_{t+\varepsilon}^g)_x^{-\top}\mathbb{H}_x^* \cap \mathbb{H}_y^* \neq \varnothing$ 时才非空，而这由 (2.5) 可知是不可能的。最后，E_u^* 与 $(d\varphi_{-\varepsilon}^g)_y^{-\top}(\mathbb{H}^* \oplus \mathbb{R}\alpha)_y$ 横截。这证明了 (3.10)，并表明配对 (3.1) 和 (3.2) 可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$。□

3.2. **简化配对**。现在我们研究庞加莱级数在 $s = 0$ 处的行为。

引理 3.4。设 $y \in \Sigma$ 和 $\mu \in E_\rho^*(y)$，并将 μ 延拓为光滑截面 $\mu_\star \in C^\infty(M;\ E_{\rho^*})$，且在 y 处平行。则 $[S_y\Sigma] \otimes \pi^*\mu_\star$ 是 $d^{\nabla_{\rho^*}}$-恰当的。此外，原函数可选取为其波前集包含于 $(\mathbb{H}^* \oplus \mathbb{R}\alpha)_y$.

证明。由于 $\mu_\star$ 在 y 处平行，流 $[S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star$ 是 $d^{\nabla_{\rho^*}}$-闭的，因此它在相应的扭曲德拉姆上同调群 $H^1_{\rho^*}(S\Sigma,\ \mathbb{C})$ 中定义了一个扭曲同调类。根据庞加莱对偶性，要证明该类是平凡的，只需证明：

$$\forall \omega \in H^1_\rho(S\Sigma, \mathbb{C}), \quad \langle [S_y\Sigma] \otimes \pi^*\mu_\star, \omega\rangle = \int_{S_y\Sigma} \langle \mu, \omega\rangle = 0.$$

根据吉辛正合列（例如，参见 [HT26，引理 2。1]），我们可以假设 ω是基底 Σ上某个形式的拉回，即 $\omega = \pi^*\theta$ 其中 $\theta \in H^1_\rho(\Sigma,\ \mathbb{C})$。因此

$$\int_{S_y\Sigma} \langle \mu, \omega\rangle = \int_{S_y\Sigma} \langle \mu, \pi^*\theta\rangle = \int_{S_y\Sigma} \langle \mu, \pi^* i_y^*\theta\rangle = 0,$$

其中 i_y:$\{y\} \to \Sigma$ 是点的嵌入。根据霍奇定理的微局部版本，原函数可以选取为其波前集包含于 $[S_y\Sigma] \otimes \pi^*\mu_\star$ f 的波前集之中。□

从现在起，$\xi_\star$ 和 $\mu_\star$ 是 Σ 上的截面，它们分别在 ξ 和 μ 处与 x 和 y重合，并且在这些点处平行。现在我们利用前一个引理，化简命题 3.1中的表达式。

命题 3.5。设 (Σ, g) 是一个闭、连通、定向的 *Anosov* 曲面。设 $\rho \in \mathcal{V}_g \subset \mathcal{M}_r^{\mathrm{irr}}$，其中 $\mathcal{V}_g$ 定义于 (2.19)中。设 $F_{y,\ \mu}$满足 $d^{\nabla_{\rho^*}} F_{y,\ \mu} = [S_y\Sigma] \otimes \pi^*\mu_\star$。那么对于任意充分小的 $\varepsilon > 0$：

(1) 如果 $x \neq y$，那么

$$\langle \eta_{g,\rho,x,y}(0)\xi, \mu\rangle = \langle [S_x\Sigma] \otimes \pi^*\xi_\star, e^{\varepsilon \mathcal{L}_{X^{\rho^*}}} F_{y,\mu}\rangle; \tag{3.11}$$

(2) 如果 $x = y$，那么

$$\langle \eta_{g,\rho,x,x}(0)\xi, \mu\rangle = \langle [S_x\Sigma] \otimes \pi^*\xi_\star, e^{\varepsilon \mathcal{L}_{X^{\rho^*}}} F_{x,\mu}\rangle + \langle \xi, \mu\rangle. \tag{3.12}$$

注记 3.6. 由注记 *3.2*，若 $x \neq y$，我们可以在 $\varepsilon = 0$ 中取 (3.11)。

证明。 由命题3.1可得

$$\begin{aligned}\langle \eta_{g,\rho,x,y}(s)\xi,\mu\rangle - \delta_{x=y}\langle\xi,\mu\rangle &= e^{-s\varepsilon}\langle R_1^\rho(s)\big(\iota_X[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X\rho^*}}\big([S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star\big)\rangle\\ &= e^{-s\varepsilon}\langle R_1^\rho(s)\big(\iota_X[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X\rho^*}} d^{\nabla_\rho}F_{y,\mu}\rangle\\ &= e^{-s\varepsilon}\langle d^{\nabla_\rho}R_1^\rho(s)\big(\iota_X[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X\rho^*}} F_{y,\mu}\rangle,\end{aligned}$$

其中第二行使用了引理 3.4，第三行使用了 $[d^{\nabla_\rho}, e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X\rho^*}}] = 0$ 和分部积分。继续计算，利用 $d^{\nabla_\rho}R_1^\rho(s) = R_2^\rho(s)d^{\nabla_\rho}$，我们得到：

$$\begin{aligned}\langle \eta_{g,\rho,x,y}(s)\xi,\mu\rangle - \delta_{x=y}\langle\xi,\mu\rangle =& e^{-s\varepsilon}\langle R_2^\rho(s)d^{\nabla_\rho}\big(\iota_X[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X\rho^*}} F_{y,\mu}\rangle\\ =& e^{-s\varepsilon}\langle R_2^\rho(s)\mathcal{L}_{X\rho}\big([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X\rho^*}} F_{y,\mu}\rangle\\ =& e^{-s\varepsilon}\langle\big([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X\rho^*}} F_{y,\mu}\rangle\\ & - se^{-s\varepsilon}\langle R_2^\rho(s)\big([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X\rho^*}} F_{y,\mu}\rangle,\end{aligned} \tag{3.13}$$

其中使用了 Cartan 公式 $\mathcal{L}_{X\rho} = \iota_X d^{\nabla_\rho} + d^{\nabla_\rho}\iota_X$ 以及引理 3.4，由此可得$d^{\nabla_\rho}\big([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big) = 0$；第二行使用了该公式，而最后一行使用了预解式的定义。当 $s\to 0$时，最后一行中的第一项收敛到所声称的公式。因此，只需证明当 $s\to 0$时，第二项趋于 0。

根据命题 3.3 中的同样论证，$\langle R_2^\rho(s)\big([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big)e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X\rho^*}}F_{y,\ \mu}\rangle$ 关于 $s\in\mathbb{C}$ 是亚纯的。根据（2.19），对于 $\rho\in\mathcal{V}_g$，由（2.16）定义的 2-形式上的共振态空间没有若尔当块，并且是闭的。事实上，我们有

$$\mathrm{Res}^{2,1}(\rho,0) = \mathrm{Res}_0^{1,1}(\rho,0)\wedge\alpha,$$

这由（2.17）推出。于是我们可以写成

$$R_2^\rho(s) = \Pi_2^\rho(0)/s + R_{\mathrm{hol}}(s)\colon C^\infty(M;\mathscr{E}_\rho^2)\to\mathcal{D}'(M;\mathscr{E}_\rho^2),\quad d^{\nabla_\rho}\Pi_2^\rho(0) = 0,$$

其中，$\Pi_2^\rho(0)$ 在（2.14）中定义，而 $R_{\mathrm{hol}}(s)$ 在 s 中 0 的一个邻域内是全纯的。利用这一点以及 $[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star = d^{\nabla_\rho}F_{x,\ \xi}$ 是恰当的这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{s\to0} se^{-s\varepsilon}\langle R_s^\rho(s)([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X\rho^*}}F_{y,\mu}\rangle &= \lim_{s\to0} e^{-s\varepsilon}\langle\Pi_2^\rho(0)([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X\rho^*}}F_{y,\mu}\rangle\\ &= \langle\Pi_2^\rho(0)d^{\nabla_\rho}F_{x,\xi}, e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X\rho^*}}F_{y,\mu}\rangle\\ &= \langle d^{\nabla_\rho}\Pi_1^\rho(0)F_{x,\xi}, e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X\rho^*}}F_{y,\mu}\rangle = 0,\end{aligned}$$

其中在最后一行中，我们使用了交换关系 $d^{\nabla_\rho}\Pi_1^\rho(0) = \Pi_2^\rho(0)d^{\nabla_\rho}$. □

4. Computing the value at zero

4.1. **不同点。** 在本节中，我们证明定理 1。我们先讨论两个不同点的情形。

命题 4.1。 设 $(\Sigma,\ g)$ 是一个闭、连通、定向的 *Anosov* 曲面，并设$x,\ y\in\Sigma$ 为不同点。对于任意 $\rho\in\mathcal{V}_g\subset\mathcal{M}_r$ (其中 $\mathcal{V}_g$ 如 (2.19))：

$$\eta_{g,\rho,x,y}(0)=0.$$

我们将使用以下线性代数引理。其证明是直接的，关键在于： ρ 不可约当且仅当对偶表示 ρ^* 不可约。

引理 4.2。对于 $\rho\in\mathcal{M}_r^{\mathrm{irr}},\ \ \mathrm{Span}\{\mathrm{Ran}(\rho(\gamma)-\mathrm{Id}):\gamma\in\pi_1(\Sigma)\}=\mathbb{C}^r$。

命题 4.1 的证明。我们将构造一个显式的原函数 $F_{y,\mu}$ 并应用命题 3.5。对于 $\xi\in E_\rho(x)$, $\mu\in E_\rho^*(y)$，我们将证明 $\eta_{g,\rho,x,y}(0)\xi,\mu=0$。由命题 3.5 和注记 3.6 可得

$$\langle\eta_{g,\rho,x,y}(0)\xi,\mu\rangle=\langle[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star,F_{y,\mu}\rangle,$$

其中 $\mathrm{WF}(F_{y,\ \mu})\subset(\mathbb{H}^*\oplus\mathbb{R}\alpha)_{y\cdot}$ 我们将考虑如下构造的另一个原函数。

根据引理 4.2，对于 $\rho\in\mathcal{V}_g$，存在有限个元素 $\gamma_j\in\pi_1(\Sigma)$ 和$\theta_j\in E_\rho^*(y)$，使得 $\sum_j(\rho^*(\gamma_j)\theta_j-\theta_j)=\mu$。考虑一条环路 c_j 的参数化 $c_j:[0,1]\to\Sigma$，它表示类 γ_j，且基点为 y。对曲线作适当扰动后，我们还可以假设，对于任意 j， x 都不在 c_j 上。对于 $t\in[0,1]$, 令 $\theta_{j,\star}(t)$ 为沿 c_j 从 $y=c_j(0)$ 到 $c_j(t)$ 对 θ_j 作平行移动的结果，并通过平行移动将 $\theta_{j,\star}$ 局部横向延拓到 c_j。于是我们定义

$$\widetilde{F}_{y,\mu}:=\sum_j[S_{c_j}\Sigma]\otimes\pi^*\theta_{j,\star},$$

其中上述记号对应于 $S\Sigma$ 在限制到 c_j 后的积分流。由于 $\theta_{j,\star}$ 在 $S_{c_j}\Sigma$ 的支撑上平行，

$$d^{\nabla_{\rho^*}}\widetilde{F}_{y,\mu}=\sum_j[S_y\Sigma]\otimes\big((\rho(\gamma_j)-\mathrm{Id})\theta_j\big)=[S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star.\tag{4.1}$$

~ ~因此，$F_{y,\ \mu}$是 $[S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star$的另一个原函数。注意，$F_{y,\ \mu}$的支集包含于 $\cup_{j=1}S_{c_j}\Sigma$中； $\cup_{j=1}S_{c_j}\Sigma$是限制在 c_j上的单位切丛之并。特别地，其波前集包含于余法丛 $\cup_{j=1}N^*S_{c_j}\Sigma$中。由于$F_{y,\ \mu}$ 的波前集包含于 $N^*(S_y\Sigma)$中，故有：

$$d^{\nabla_{\rho^*}}(F_{y,\mu}-\widetilde{F}_{y,\mu})=0,\quad \mathrm{WF}(F_{y,\mu}-\widetilde{F}_{y,\mu})\subset N^*S_y\Sigma\cup\bigcup_{j=1}N^*S_{c_j}\Sigma=:\mathcal{C}.$$

根据霍奇分解定理（参见 [DZ17，引理 2。1]），存在一个 $d^{\nabla_{\rho^*}}$-闭的 1-形式 $\omega\in\Omega^1\otimes\mathcal{E}^{\rho^*}$ 以及 $f\in\mathcal{D}'(M;\ \mathcal{E}^{\rho^*})$，使得 $\mathrm{WF}(f)\subset\mathcal{C}$满足

$$F_{y,\mu}-\widetilde{F}_{y,\mu}=\omega+d^{\nabla_{\rho^*}}f.$$

由于 x 不在曲线 c_j中的任何一条上，$\mathcal{C}$ 与 $[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star$的波前集不相交。特别地，配对可以改写为

$$\langle\eta_{g,\rho,x,y}(0)\xi,\mu\rangle=\langle[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star,\widetilde{F}_{y,\mu}\rangle+\langle[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star,\omega\rangle+\langle[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star,d^{\nabla_{\rho^*}}f\rangle.$$

˜由于 $[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star$ 支集位于 x 和 $F_{y\text{之上},\,\mu}$ 支集位于曲线 c_j上，右侧的第一个配对为零。对于第二个配对，我们使用引理 3.4以及 ω 是闭的这一事实，得到

$$\langle[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star,\omega\rangle=\langle d^{\nabla_\rho}F_{x,\xi},\omega\rangle=\langle F_{x,\xi},d^{\nabla_{\rho^*}}\omega\rangle=0.$$

为处理第三个配对，我们使用引理 3.4 并通过分部积分得到

$$\langle[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star,d^{\nabla_{\rho^*}}f\rangle=\langle d^{\nabla_\rho}([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star),f\rangle=0.$$

这证明 Poincar´é 级数在 $s=0$ 处为零。 □

4.2. 相等点。 现在我们处理两个点相等的情形。

命题 4.3。 设 $(\Sigma,\ g)$ 是一个闭、连通、定向的 *Anosov* 曲面，并设 $x\in\Sigma$。对于任意 $\rho\in\mathcal{V}_g\subset\mathcal{M}_r$，其中 $\mathcal{V}_g$ 是来自 (2.19)的表示所组成的子集，我们有：

$$\eta_{g,\rho,x,x}(0)=0.$$

证明。如命题 4.1 的证明所示，我们将使用一个更为明确的原函数。注意，$\pi(\varphi_{-\varepsilon}(S_x\Sigma))$ 界定了一个包含 x （以 x 为中心、半径为 $\varepsilon>0$ 的测地圆盘）的单连通开集 $D_\varepsilon(x)$。由于 E_ρ 是平坦的，我们还可以进一步假设 $\mu_\star$（使得 $\mu_\star(x)=\mu$）在该圆盘上平行。为了构造 $e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^\rho}}([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star)$ 的一个明确原函数，我们首先选取一点 $z\in D_\varepsilon(x)\smallsetminus\{x\}$，使得 $d(x,z)<\varepsilon/3$。接下来，我们如下定义 $D_\varepsilon(x)\smallsetminus\{z\}$ 上的向量场 Y：

(1) 如果 $w\in D_{\varepsilon/2}(z)\smallsetminus\{z\}$，则将 $w=\pi(\varphi_{-s}u)$ 记作 $s\in[0,\varepsilon/2)$，$u\in S_z\Sigma$，并令 $Y(\pi(\varphi_{-s}u)):=\varphi_{-s}u$。(2) 如果 $w\in\pi(\varphi^g_{-\varepsilon}(S_x\Sigma))$，则将 $w=\pi(\varphi_{-\varepsilon}v)$ 记作 $v\in S_x\Sigma$，并令 $Y(\pi(\varphi_{-\varepsilon}v)):=\varphi_{-\varepsilon}v$。(3) 向量场 Y 在 $D_\varepsilon(x)\smallsetminus\{z\}$ 上光滑，并在 z 处具有奇点。

边界上给定的两个向量场的次数均为 1，因此它们可以通过环带上的一个不消失向量场彼此同伦，故这样的向量场 Y 存在。于是我们定义 $S\Sigma$中的一个带边界曲面：

$$\mathcal{Y}:=\{(w,Y(w))\ :\ w\in D(x,\varepsilon)\smallsetminus\{z\}\}. \tag{4.2}$$

接着考虑 $[\mathcal{Y}]\otimes\pi^*\mu_\star$。由于 $\pi^*\mu_\star$ 关于 $\mathbf{E}_\rho=\pi^*E_\rho$ 上的拉回平坦联络平行，因此有：

$$d^{\nabla_\rho}([\mathcal{Y}]\otimes\pi^*\mu_\star)=e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^\rho}}([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star)-[S_z\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star.$$

这里，我们按照由 $\pi(\varphi_{-\varepsilon}(S_x\Sigma))$ 上的内法向量诱导的定向来为 $\mathbf{Y}$ 定向。我们可以写成

$$e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^\rho}}([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star)=d^{\nabla_\rho}\big([\mathcal{Y}]\otimes\pi^*\mu_\star+\widetilde{F}_{z,\mu}\big), \tag{4.3}$$

˜其中 $F_{z,\ \mu}$ 是命题 4.1 的证明中构造的原函数。

为了在（3.11）中使用这个显式原函数，我们现在计算$[\mathcal{Y}]\otimes\pi^*\mu_\star$的波前集。由于我们将它与流 $[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star$配对，而该流支撑在

x，我们只需计算 $[\mathbf{Y}]\otimes\pi^*\mu_\star$ 在 x 附近的波前集。根据我们对 z 的选择可知，在 x 附近，Y 由条目 (1) 定义。因此，$\mathbf{Y}$ 在 x 附近可由 $\varphi_{-s}(u)$ 参数化，其中 $s\in\in(0,\varepsilon/2)$，且 $u\in S_z\Sigma.$。我们计算点 $(x,Y(x))$ 处 $\mathbf{Y}$ 的切空间 $=\varphi_{-s_0}(u_0)$。注意，

$$\partial_s\varphi_{-s}(u_0)|_{s=s_0}=-X(x,Y(x)),\quad \partial_u\varphi_{-s_0}(u)|_{u=u_0}=d(\varphi_{-s_0})_{(z,u_0)}(V).$$

因此

$$T_{(x,Y(x))}\mathcal{Y}=\mathbb{R}X(x,Y(x))\oplus d(\varphi_{-s_0})_{(z,u_0)}(\mathbb{V}).$$

注意，根据 $\mathcal{Y}$ 的定向选择，我们可以推 deduce 出，$T_{(x,Y\ (x)}\ \mathcal{Y}$的一个正定向基为 $(-X\ (x,\ Y\ (x)\ \ d\ (\varphi_{-s_0})\ _{(z,u_0)}\ \ (V\ (z,\ \ u_0)$。利用（2.7），可得

$$T_{(x,Y(x))}S_x\Sigma\oplus T_{(x,Y(x))}\mathcal{Y}=T_{(x,Y(x))}M,$$

因此，$\mathcal{Y}$ 与 $S_x\Sigma$的余法丛在它们唯一的交点处横截。~特别地，$[\mathcal{Y}]\otimes\pi^*\mu_\star+F_{z\,\mu}$ 是 $e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X\rho}}([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star)$ 的一个原函数，其波前集与 $[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star$的不相交；由此，仿照命题 4.1 证明中所使用的论证，我们可以在（3.12）中使用这个原函数。这就得到

$$\begin{aligned}\langle\eta_{g,\rho,x,x}(0)\xi,\mu\rangle&=\langle[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star,[\mathcal{Y}]\otimes\pi^*\mu_\star\rangle+\langle[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star,\widetilde{F}_{z,\mu}\rangle+\langle\xi,\mu\rangle\\&=\langle[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star,[\mathcal{Y}]\otimes\pi^*\mu_\star\rangle+\langle\xi,\mu\rangle\\&=\langle[S_x\Sigma],[\mathcal{Y}]\rangle\times\langle\xi,\mu\rangle+\langle\xi,\mu\rangle,\end{aligned}$$

~其中，第二个等式利用了$[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star$,$F_{z,\mu}$ 根据前面的证明为零这一事实，因为 $z\neq x$；最后一个等式则利用了 $\xi_\star$ 和 $\mu_\star$ 平行这一事实。证明将在我们证明$[S_x\Sigma],[\mathbf{Y}]$ $=-1$之后完成。为此，我们注意到 $S_x\Sigma$ 与 $\mathbf{Y}$ 仅交于一点。因此，该配对等于 ±1，其符号由定向决定。

由前面的讨论可知，$T_{(x,Y(x))}S_x\Sigma\oplus T_{(x,Y(x))}\mathbf{Y}$ 的一个定向基为

$$\big(V(x,Y(x)),-X(x,Y(x)),d(\varphi_{-s_0})_{(z,u_0)}(V(z,u_0))\big).$$

应用（2.7），我们看到该基与以下基具有相同的定向

$$\big(V(x,Y(x)),-X(x,Y(x)),a_{-s_0}(z,u_0)H(x,Y(x)))\big),$$

其中 $a_{-s_0}<0$。由（2.6）可知，该基是负定向的。这意味着$\langle[S_x\Sigma],[\mathcal{Y}]\rangle=-1$，从而完成证明。□

4.3. **另一种证明**。这里我们概述定理1的一种另一种证明。我们声称，对于任意 $x\in\Sigma$、任意 $\xi\in(E_\rho)_x$ 以及任意 $\rho\in\mathcal{V}_g$，

$$y\mapsto\eta_{g,\rho,x,y}(0)\xi\text{ is parallel, i.e., }\nabla_y\eta_{g,\rho,x,y}(0)\xi=0.$$

事实上，当 $\mathrm{Re}(s) \gg 1$时，函数 $y \mapsto \eta_{g,\rho,x,y}(s)\xi$ 是 C^1，但在 $y = x$处除外。对（1.2）求导，得

$$\forall x \neq y, \quad \nabla_y \eta_{g,\rho,x,y}(s) = -s \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_{x,y}} \nabla_y \ell_g(\gamma) e^{-s\ell_g(\gamma)} \tau_\rho(\gamma),$$

其中我们用到了$\tau_\rho(\gamma)$ 由平行移动定义。注意，我们有 $\nabla_y \ell_g(\gamma) = \dot{\gamma}(\ell_g(\gamma))$。令 $\beta \in C^\infty(T^*M)$。使用与（3.7）中相同的论证，我们可以写出，对于$\xi \in (E_\rho)_x$ 和 $\mu \in (E_{\rho^*})_y$,

$$\begin{aligned}\langle \nabla_y \eta_{g,\rho,x,y}(s)\xi, \beta(y) \otimes \mu \rangle &= -s \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_{x,y}} \langle \nabla_y \ell_g(\gamma) e^{-s\ell_g(\gamma)} \tau_\rho(\gamma)\xi, \beta(y) \otimes \mu \rangle \\ &= -s \langle R^{\pi^*T\Sigma}_{1,\rho}(s)(\iota_X[S_x\Sigma] \otimes \pi^*\xi_\star \otimes \mathrm{s}), [S_y\Sigma] \otimes \pi^*\mu_\star \otimes \pi^*\beta \rangle,\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{s} \in C^\infty(S\Sigma, \pi^*T\Sigma)$, $\mathrm{s}(x,v) := v$是典范截面，而 $R^{\pi^*T\Sigma}_{1,\rho}(s)$ 是作用于 $\mathscr{E}^1_{\rho,0} \otimes \pi^*T\Sigma$ 上的预解式，其中 X通过 $\mathrm{L}_{X^\rho} \otimes (\pi^*\nabla^{\mathrm{LC}})_X$ 作用。注意，$(\pi^*\nabla^{\mathrm{LC}})_X \mathrm{s} = 0$，因此预解式 $R^{\pi^*T\Sigma}_{1,\rho}(s)$ 作用于纯态 $\omega \otimes s$（其中 $\omega \in \mathrm{D}'(M; \mathscr{E}^1_{\rho,0})$）时，结果为 $R^{\pi^*T\Sigma}_{1,\rho}(s)(\omega \otimes \mathrm{s}) = (R^\rho_1(s)\omega) \otimes \mathrm{s}$，其中 $R^\rho_1(s)$ 是作用于 1-形式上的预解式。因此我们得到：

$$\langle \nabla_y \eta_{g,\rho,x,y}(s)\xi, \beta(y) \otimes \mu \rangle = -s \langle R^\rho_1(s)(\iota_X[S_x\Sigma] \otimes \pi^*\xi_\star) \otimes \mathrm{s}, [S_y\Sigma] \otimes \pi^*\mu_\star \otimes \pi^*\beta \rangle. \tag{4.4}$$

根据命题2.3和引理3.4，我们有

$$\begin{aligned}R^\rho_1(s)(\iota_X[S_x\Sigma] \otimes \pi^*\xi_\star) &= R^{\rho,\mathrm{hol}}_1(s)(\iota_X[S_x\Sigma] \otimes \pi^*\xi_\star) + s^{-1}\Pi^\rho_1(0)(\iota_X d^{\nabla_\rho} F_{x,\xi}) \\ &= s^{-1} \underbrace{\Pi^\rho_1(0)\mathcal{L}_{X^\rho}}_{=0} F_{x,\xi} - s^{-1} \underbrace{d^{\nabla_\rho}\Pi^\rho_0(0)}_{=0} \iota_X F_{x,\xi} + O(1) = O(1).\end{aligned}$$

特别地，(4.4)意味着 $\nabla_y \eta_{g,\rho,x,y}(0) = 0$ 当 $y \neq x$时。我们选择在 $x = y$ 时将平凡回路纳入庞加莱级数，这使得 $y \mapsto \eta_{g,\rho,x,y}(0)$ 在 $y = x$ 处连续，从而证明了任意 x, $y \in \Sigma$的情形。现在，令 $p \in \Sigma$ 为一个周期点，则

$$\forall \gamma \in \pi_1(\Sigma), \quad \rho(\gamma)\eta_{g,x,p,\rho}(0)\xi = \eta_{g,x,p,\rho}(0)\xi.$$

利用引理 4.2，我们推得 $\eta_{g,x,p,\rho}(0)\xi = 0$。由周期点的稠密性以及该截面的连续性可知，整个截面均为零。

5. Proof of Theorems 2 and 3

5.1. **零点处的共振形式**。我们首先描述双曲曲面 (Σ, g) 在零点处的共振态结构，以及与一个全纯 1-形式 ω 足够接近于 0（定理 3）相关的表示。

5.1.1. *Ker*扭曲拉普拉斯算子的核。该扭曲平坦拉普拉斯算子在 $C^\infty(\Sigma; E_{\rho_\omega})$ 是

$$\Delta_\omega := -\operatorname{tr}\left((\nabla^{\rho_\omega})^2\right).$$

这里，二阶协变导数是诱导导子 $\nabla^{\rho_\omega}: C^\infty(\Sigma; T^*\Sigma \otimes E_{\rho_\omega}) \to C^\infty(\Sigma; T^*\Sigma^{\otimes 2} \otimes E_{\rho_\omega})$，其中列维-奇维塔联络作用于 $T^*\Sigma$ 因子。令$p: \mathbb{H}^2 \to \Sigma = \mathbb{H}^2/\Gamma$ 为底点投影（当然，这个 Γ 与

（3.9）。在 $p^*E_{\rho_\omega} = \mathbb{C}\times\mathbb{H}^2$ 在 $\mathbb{H}^2$上的平凡化中， $p^*C^\infty(\Sigma;\ E_{\rho_\omega})$ 与等变截面空间相同 $f\in C^\infty(\mathbb{H}^2,\ \mathbb{C})$，使得

$$f(\gamma.x) = \exp\left(\int_\gamma \omega\right) f(x). \tag{5.1}$$

从 Δ_ω 到 $\mathbb{H}^2$ 的提升是标量双曲拉普拉斯算子。一般而言，扭曲拉普拉斯算子不是自伴的。

引理 5.1。存在 U 的一个邻域，使得对于任意 $H^0(\Sigma;\ K)$ 中的 $\omega\in U$，0 是 Δ_ω 的特征值，且代数重数为1。

证明。设 F 是 $p^*\omega$ 在万有覆盖 $\mathbb{H}^2$上的全纯原函数。 e^F 满足（5.1）。由于 ω 是全纯的， e^F 是调和的： $\Delta_{\mathbb{H}^2}e^F = 0$。由前面的讨论可知，这证明了 $\dim(\ker\Delta_\omega)\geq 1$。由于 $\ker\Delta_0$ 是一维的，对于所有接近 0 的 ω，结论同样成立。□

5.1.2。共振的0-形式和2-形式。我们利用引理5.1 以及 [GHW18]的经典量子对应来描述它们。

引理 5.2。 存在一个包含 0 的邻域 U，位于 $H^0(\Sigma;\ K)$ 中，使得对任意 $\omega\in U$，都有

$$\dim(\mathrm{Res}_0^{k,\infty}(\rho_\omega,0)) = 1,\quad k = 0,2. \tag{5.2}$$

证明。 根据 [DZ17，命题 3。1], (5.2) 在 $\omega = 0$处成立。根据微扰理论 [Bon20]，若 $U\subset H^0(\Sigma;\ K)$ 在 0 附近取得足够小，则对任意 $\omega\in U$，

$$\dim(\mathrm{Res}_0^{k,\infty}(\rho_\omega,0))\leq 1,\quad k = 0,2.$$

由于 $\dim(\mathrm{Res}^0{}_{,0}{}^{\infty}(\rho_\omega,0)) = \dim(\mathrm{Res}^2{}_{,0}{}^{\infty}(\rho_\omega,0))$，我们只需证明 $\mathrm{Res}_0^{0,1}(\rho_\omega,0)$ 非平凡。其思路是利用经典-量子对应，证明可以从引理 5.1 给出的、与 0 相关的 Δ_ω 的特征向量 e^F （其中 F 是 $p^*\omega$ 在万有覆盖 $\mathbb{H}^2$ 上的全纯原函数）构造出一个共振态。

注意，对于任意 $o\in\mathbb{H}^2$，都存在 $C>0$ 使得 $|e^{F(x)}|\leq e^{Cd(x,o)}$、 $\forall x\in\mathbb{H}^2$。因此，我们可以将泊松–赫尔加森变换 P_0 应用于 e^F。P_0 的恰当定义并非必要，可参见 [GHW18，引理 2.1]。由 [GHW18，引理 2.1], 可知，对于值 $\lambda = 0$，泊松–赫尔加森变换是从 $\mathrm{D}'(\mathbb{S}^1)$ 到 $\Delta_{\mathbb{H}^2}$核中的温和分布的同构。令 $\Xi\in\mathrm{D}'(\mathbb{S}^1)$ 为满足 $\mathrm{P}_0(\Xi) = e^F$ 的唯一分布。令 $B_-: S\mathbb{H}^2\to\mathbb{S}^1$ 为霍普夫坐标中的后向端点映射，并令

$$\widetilde{\Xi}(x,v) := B_-^*\Xi(x,v),\quad \widetilde{\Xi}_F(x,v) := e^{-F(x)}\widetilde{\Xi}(x,v),\qquad (x,\ v)\in S\mathbb{H}^2 \tag{5.3}$$

其中，由于 B_- 是浸没，拉回是良定义的。根据 [GHW18，方程 (2.12)]:

$$X\widetilde{\Xi} = 0,\quad U_-\widetilde{\Xi} = 0,\quad \mathrm{WF}(\widetilde{\Xi})\subset E_u^*, \tag{5.4}$$

其中 U_- 表示不稳定 horospherical 向量场（2.8）。参见 [GHW18，定理 3 的证明。3]。由于 F 是 $p^*\omega$的光滑原函数，我们得到

$$(X+\omega(dp(v)))\widetilde{\Xi}_F(x,v) = 0,\quad \mathrm{WF}(\widetilde{\Xi}_F)\subset E_u^*.$$

˜最后，根据 [GHW18，引理 21]， Ξ 在 Γ 的作用下具有等变性，由此我们˜推得 Ξ_F 满足（5.1）。这表明它下降为 $S\Sigma$ 上的一个（非零）分布，其取值于该平坦丛；根据前面的讨论，它定义了一个非平凡的零点扭曲共振态。□

我们记作 $\mathrm{Res}^0_{,0}{}^{\infty}(\rho_\omega, 0) = \mathrm{Span}(h)$，并记录关于 h 的进一步信息。

引理 5.3。写出傅里叶分解 $h = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k$ 其中 $h_k \in \Omega_k$（见 §2.1.3）。那么我们可以将 h 归一化，使得

$$h_{-1} = 0, \quad h_0 = 1, \quad h_1 = -2\omega.$$

证明中我们将使用 §2.1.5中引入的算子。

证明。扭曲 Casimir 算子 C^ω （见 (2.9)）与 V （引理 2.2）对易，并满足 $C^\omega|_{\Omega_0} = -\Delta_\omega$。由于 $h \in \mathrm{Res}^0_{,0}{}^{\infty}(\rho_\omega,0)$ 且 $\mathrm{Res}^0(\rho_\omega) \subset \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) \le \|\omega\|_\infty\}$，(5.4) 表明，只要 $\|\omega\|_\infty$ 足够小，h 就是一个第一带共振态（即，它属于 U^ω_- 的核）。因此， $X^\omega h = 0 = U^\omega_- h$。特别地，根据 (2.9)， $-\Delta_\omega h_0 = C^\omega h_0 = (C^\omega h)_0 = 0$。这意味着 $h_0 \in \mathrm{Ker}(\Delta_\omega)$，根据引理 5.1，我们可以假设 $h_0 = 1$（由于根据下面的 (5.5)， $h_0 = 0$ 蕴含对于所有 $k \in \mathbb{Z}$ 都有 $h_k = 0$，所以有 $h_0 \neq 0$）。

一种适应 于 [GHW18 引理 2。2] 表明，对于任意 $k \in \mathbb{Z}$，我们有（其中 $\eta^\omega_\pm = \eta_-$ ）：

$$2\eta^\omega_\pm h_{k\mp1} = \mp k h_k. \tag{5.5}$$

对于 $k = 1$，这给出 $h_1 = -2\eta^\omega_+(1) = -2\omega$，而对于 $k = -1$，我们得到 $h_{-1} = -2\eta_-(1) = 0$.这就完成了证明。□

5.1.3. 共振 1-形式。 现在我们研究作用在一个 1-形式上的广义共振态。

命题 5.4。 设 (Σ, g) 是一个亏格为 $g \ge 2$ 的双曲曲面。存在 U 的一个邻域，使其包含 $H^0(\Sigma; K)$中的0，从而对于任意 $\omega \in U \setminus \{0\}$，我们有

$$\dim(\mathrm{Res}^{1,\infty}_0(\rho_\omega, 0)) = 2g, \quad \dim(\mathrm{Res}^{1,1}_0(\rho_\omega, 0)) = 2g - 1. \tag{5.6}$$

此外，我们有 $d^{\nabla\rho_\omega}(\mathrm{Res}^{1,1}_0(\rho_\omega, 0)) = 0$。也就是说，所有共振态都是 $d^{\nabla\rho_\omega}$-闭的。

证明。 根据 [FS23，推论 C]，表明，(g, ρ_ω) 的 ζ 函数在零点处的零点阶数等于 $2g - 2$。根据引理 5.2 和 [HT26，公式 (1.2)] 我们推 deduce 得到 $\dim(\mathrm{Res}^1_{,0}{}^{\infty}(\rho_\omega, 0)) = 2g$. 现在我们更精确地研究零点处的 Jordan 块结构。由于 g 是双曲的，$\ker \iota_X$ 中的 1-形式向量丛在 $S\Sigma$ 上可由两个光滑截面 $\beta_\pm$ 平凡化，使得 $\mathrm{L}_X\beta_\pm = \pm\beta_\pm$。这些 1-形式分别与稳定和不稳定 horocyclic 向量场对偶。此外，我们有

$$\mathcal{L}_{X^{\rho_\omega}}(f_+\beta_+ + f_-\beta_-) = (X^\omega(f_+) + 1)\beta_+ + (X^\omega(f_-) - 1)\beta_-.$$

这意味着

$$\mathrm{Res}^{1,\infty}_0(\rho_\omega, 0) \cong \mathrm{Res}^{0,\infty}_0(\rho_\omega, 1) \oplus \mathrm{Res}^{0,\infty}_0(\rho_\omega, -1).$$

注意，该同构保持 Jordan 块结构。由于 $\mathrm{Res}^0(\rho_\omega) \subset \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) \le \|\omega\|_\infty\}$，如果 $\|\omega\|_\infty$ 足够小，则 $\mathrm{Res}^{0,\infty}_0(\rho_\omega, 1) = 0$，因此只需研究 $\mathrm{Res}^{0,\infty}_0(\rho_\omega, -1)$。利用引理 2.2，我们有

$$U^\omega_-: \mathrm{Res}^{0,\infty}_0(\rho_\omega, -1) \to \mathrm{Res}^{0,\infty}_0(\rho_\omega, 0), \tag{5.7}$$

根据引理 5.2，右侧的空间是一维的。

步骤 *1.* 每个共振态都属于第一带。给定 $f \in \mathrm{Res}^{0,1}_0(\rho_\omega, -1)$，现在我们证明 $f \in \mathrm{Ker}(U^\omega_-)$。由（5.7），存在一个 $c \in \mathbb{C}$ 使得

$$(X^\omega - 1)f = 0, \quad U^\omega_- f = ch,$$

其中 h 按照引理 5.3进行归一化。投影到 Ω_k上，这意味着对于任意 $k \in \mathbb{Z}$

$$2\eta^\omega_\pm f_{k\mp1} = (1 \mp k) f_k \mp ich_k. \tag{5.8}$$

当 $k = -1$时，w 我们得到 $2\eta_- f_0 = ich_{-1} = 0$，因此 f_0 是常数。将（5.8）与 $k = 1$ 结合可得 es

$$2\omega f_0 = 2\eta^\omega_+(f_0) = -ich_1 = 2ic\omega,$$

其中再次使用了引理 5.3 。由于 $\omega \neq 0$，这意味着 $f_0 = ic$。对（5.8）进行积分，并取$k = 0$ 和 η_-，利用引理 5.3 及分部积分可得，f_0 的积分为零，因此 $c = 0$，即 $f \in \mathrm{Ker}(U^\omega_-)$。

步骤 *2*。每个共振态都是 $d^{\nabla_{\rho\omega}}$-闭的。提升后的扭曲外微分在$S\Sigma$ 上由 $d + \pi^*\omega\wedge$给出。注意，$\pi^*\omega(X) = \omega_x(v)$，且 $\pi^*\omega(H) = \omega_x(Jv) = i\omega_x(v)$，因为 ω 是 (1，0) 型。双曲结构方程给出 $d\beta_- = -\alpha \wedge \beta_-$. 给定$f \in \mathrm{Res}^{0,1}_0(\rho_\omega, -1)$，我们得到：

$$\begin{aligned} d^{\nabla_{\rho\omega}}(f\beta_-) &= d^{\nabla_{\rho\omega}} f \wedge \beta_- + f d\beta_- = (X^\omega(f)\alpha + U^\omega_-(f)\beta_+) \wedge \beta_- - f\alpha \wedge \beta_- \\ &= \big((X^\omega - 1)f\big)\alpha \wedge \beta_- + (U^\omega_- f)\beta_+ \wedge \beta_- = 0, \end{aligned}$$

根据第一步。这表明所有共振态都是闭的。

步骤 *3*。共振态空间的维数至多为 $(2g - 1)$。根据步骤 2，$\mathrm{Res}^{1,1}_0(\rho_\omega, 0)$ 中的元素都是闭的。这意味着存在一个自然映射（参见 [HT26，引理 4。3] 其中给出了确切定义）：

$$S : \mathrm{Res}^{1,1}_0(\rho_\omega, 0) \to H^1(S\Sigma, \rho_\omega), \tag{5.9}$$

其中 $H^1(S\Sigma, \rho_\omega)$ 是 $S\Sigma$的扭曲上同调群。根据 [HT26，引理 2。1],$\dim H^1(S\Sigma, \rho_\omega) = 2g - 2$，且 S的核等于 $d^{\nabla_{\rho\omega}}(\mathrm{Res}^{0,1}_0(\rho_\omega, 0)) = \mathbb{C}d^{\nabla_{\rho\omega}} h$。因此，对 S 应用秩-零化度定理可得

$$\dim(\mathrm{Res}^{1,1}_0(\rho_\omega, 0)) \le \dim(H^1(S\Sigma, \rho_\omega)) + \dim(\mathrm{Ker}(S)) = 2g - 2 + 1 = 2g - 1. \tag{5.10}$$

第*4*步。共振态空间是 $(2g-1)$维的。我们声称 $hd\alpha$ 是恰当的。首先，根据 [HT26 中的扭曲 Gysin 正合序列，引理2，1], 我们有同构

$$\pi_*: H^2(S\Sigma, \rho_\omega) \to H^1(\Sigma, \rho_\omega).$$

现在我们计算 $\pi_*(hd\alpha)$。对于 Σ 上的任意光滑*1*-形式 θ，利用结构方程直接计算可得 $d\alpha \wedge \pi^*\theta = \theta_x(v)\alpha \wedge d\alpha$。这意味着

$$\int_\Sigma \pi_*(hd\alpha) \wedge \theta = \langle \pi_*(hd\alpha), \theta \rangle = \langle hd\alpha, \pi^*\theta \rangle = \int_{S\Sigma} h(x,v)\theta_x(v)\alpha \wedge d\alpha = -\pi \int_\Sigma \star h_1 \wedge \theta,$$

其中 $\star$ 是作用于1-形式上的Hodge星算子。因此我们推得 $\pi_*(hd\alpha) = \star h_1$. 引理 5.3以及 $\star\omega = -i\omega$ 蕴含 $\pi_*(hd\alpha)$ 是 ω的倍数。因此，它在$H^1(\Sigma, \rho_\omega)$ 中是恰当的，因为 $d^{\nabla_{\rho_\omega}} \cdot 1 = \omega$。

对偶表示 $\rho_{-\omega}$ 采用相同的论证，可得余共振态 $h_* d\alpha \in \mathrm{Res}_0^{*\,2\,1}{}_{,,}(\rho_{-\omega},0)$的正合性。根据 [CDDP22 的引理 2，映射 (5.9) 是满射。因此，(5.10) 中的不等式实际上是等式，由此我们得出

$$\dim(\mathrm{Res}_0^{1,1}(\rho_\omega, 0)) = 2g - 1. \qquad \square$$

定理*3*的证明。 由引理5.2和命题5.4可得。 $\square$

5.2. **零点处的取值**。 现在我们利用命题5.4 中得到的共振态结构，证明庞加莱˙级数在零点处具有良定义的取值，并对其进行计算。在证明的其余部分，我们将使用下标 ω 代替 ρ_ω ，以表示对应于与 ω相关的一维表示的对象。

5.2.1. 复几何。 令 $H^0(\Sigma; E_\omega)$ 表示 $E_\omega \to \Sigma$ 的全纯截面空间。

引理5.5。 当 $\omega \in H^0(\Sigma;\ K)$ 充分小时，对于所有 $x \in \Sigma$， $H^0(\Sigma;\ E_\omega) \simeq \mathbb{C}$ 取值映射

$$\mathrm{ev}_x^\omega \colon H^0(\Sigma; E_\omega) \to E_\omega(x)$$

是同构。

证明。 若 $f \in H^0(\Sigma;\ E_\omega)$，则 $f \in$ 核(Δ_ω) 是一维的（引理5.1），并且可识别为常值函数1的张成空间，因此它不为零。 $\square$

我们还需要以下引理。

引理 5.6. 设 x、 $y \in \Sigma$ 是两个不同点。那么存在一个亚纯 1-形式$\beta_{x,\ y}$ 在 Σ 上恰有 *2* 个简单极点，分别位于 x和 y。此外，我们可以选择 $\beta_{x,\ y}$ 使得

$$\mathrm{Res}_x(\beta_{x,y}) = 1, \quad \mathrm{Res}_y(\beta_{x,y}) = -1, \tag{5.11}$$

其中，$\mathrm{Res}_p(\varphi)$ 表示形式 φ 在 $p \in \Sigma$ 处的留数。

证明。 回顾一下， K 表示 Σ的典范线丛；其全纯截面是全纯 1-形式。我们关注的是 H^0(Σ; $K(x+y)$)的截面，其中 $x+y$ 表示有效除子，记号的含义是：我们考虑在 x 和 y处至多有简单极点的亚纯 1-形式。

我们用 O 表示平凡全纯线丛，其全纯截面是全纯函数。我们令 $\mathcal{O}(-x-y)$ 表示在 x 处消失的全纯函数空间； y 处的情形（该空间缩减为 0）。注意，我们有 $K\otimes\mathcal{O}(x+y) = K(x+y)$。将黎曼–罗赫定理应用于全纯线丛 $L = K(x+y)$，得到

$$\dim(H^0(\Sigma;L)) - \dim(H^0(\Sigma;K\otimes L^{-1})) = \deg(L) - g + 1,$$

也就是说，

$$\begin{aligned}\dim(H^0(\Sigma;K(x+y))) &= \deg(K) + 2 + 1 - g + \dim(H^0(\Sigma;\mathcal{O}(-x-y)))\\ &= 2g-2+2+1-g = g+1,\end{aligned}$$

其中，我们利用了 $\deg(K) = 2g-2$，并利用 Σ 上的全纯函数为常数这一事实，得到 $\dim(H^0(\Sigma;\mathcal{O}(-x-y))) = 0$.

由于 $g>0$，这表明存在一个至多具有简单极点的（非常数）亚纯 1-形式 a x 和 y。根据留数定理，留数之和必须为零，因此该 1-形式必定在 x 和 y处均有极点。通过对该 1-形式进行缩放，可以确保（5.11）。□

5.2.2. 使用 1-形式上的谱投影算子表示 0 处的值。现在我们将使用这一事实：对偶线丛 E_ω^* 与 $E_{-\omega}$ 自然同构；这仍然是 Σ上的一个全纯线丛。令 x、$y\in\Sigma$，并考虑 $\xi\in E_\omega(x)$（分别为 $\mu\in E_{-\omega}(y)$）。根据引理5.5， ξ 通过对任意 $z\in\Sigma$定义为以下形式，唯一延拓为一个全纯截面 $\xi_\star\in H^0(\Sigma;E_\omega)$（分别为 $\mu_\star\in H^0(\Sigma;E_{-\omega})$），

$$\xi_\star(z) := \mathrm{ev}_z^\omega\circ(\mathrm{ev}_x^\omega)^{-1}(\xi) = \sigma_\omega(x,z)\xi. \tag{5.12}$$

根据命题 3.1，对于任意 $s\in\mathbb{C}$ 满足 $\mathrm{Re}(s)\gg 1$，以及任意 $\varepsilon>0$ 充分小的情形，

$$\langle\eta_{g,\omega,x,y}(s)\xi,\mu\rangle = e^{-s\varepsilon}\langle R_1^\omega(s)\big(\iota_X[S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^{-\omega}}}([S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star)\rangle + \delta_{x=y}\langle\xi,\mu\rangle.$$

我们强调，上述配对关于两个自变量都是 $\mathbb{C}$-线性的。根据命题 3.3，该配对可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$，其极点包含于 $\mathrm{Res}^1(\omega)$中。不同于我们在命题 3.5中所做的，我们不能根据零点处不存在若尔当块这一事实，推断出庞加莱级数在零点处具有良定义的值。相反，我们将使用命题 5.4 的结果。

命题 5.7。 设(Σ,g) 为一个双曲曲面。存在一个0在 $H^0(\Sigma;\ K)$ 中的邻域 U，使得对于任意 $x,y\in\Sigma$, $\xi\in E_\omega(x)$ $\mu\in E_{-\omega}(y)$， $\omega\in U\setminus\{0\}$ 以及 $\varepsilon>0$ 充分小的情形：

$$\langle\eta_{g,\omega,x,y}(0)\xi,\mu\rangle = -\langle\Pi_1^\omega(0)F_{x,\xi}, e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^{-\omega}}}([S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star)\rangle, \tag{5.13}$$

其中 Π_1^ω（0）表示在（2.14）中定义的谱投影算子，且$F_{x,\ \xi}$ 是引理*3.4*中构造的原函数。

注 5.8. 注意，(5.13) 对 $x=y$ 和 $x\neq y$给出相同的结果。这个事实将在定理 *2* 的证明中用到。

证明。 命题 3.5 证明的第一部分 适用，特别是，(3.13) 成立。对于 $s \in \mathbb{C}$，我们有

$$\begin{aligned}&\langle \eta_{g,\omega,x,y}(s)\xi,\mu\rangle - \delta_{x=y}\langle \xi,\mu\rangle \\ &\quad = e^{-s\varepsilon}\langle \big([S_x\Sigma]\otimes \pi^*\xi_\star\big), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^{-\omega}}}F_{y,\mu}\rangle - se^{-s\varepsilon}\langle R_2^\omega(s)\big([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^{-\omega}}}F_{y,\mu}\rangle.\end{aligned} \tag{5.14}$$

对于（5.14）右端的第一项，我们有

$$\lim_{s\to 0} e^{-s\varepsilon}\langle \big([S_x\Sigma]\otimes \pi^*\xi_\star\big), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^{-\omega}}}F_{y,\mu}\rangle = \langle \big([S_x\Sigma]\otimes \pi^*\xi_\star\big), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^{-\omega}}}F_{y,\mu}\rangle = -\delta_{x=y}\langle \xi,\mu\rangle, \tag{5.15}$$

其中，最后一个等式由命题 4.1 和 4.3（的证明）推出。对于（5.14）右端的第二项，利用引理 3.4，我们注意到

$$R_2^\omega(s)\big([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big) = d^{\nabla\omega}R_1^\omega(s)F_{x,\xi}.$$

命题5.4 给出

$$(\mathcal{L}_{X^\omega})^2\Pi_1^\omega(0) = 0, \quad d^{\nabla\omega}\mathcal{L}_{X^\omega}\Pi_1^\omega(0) = 0. \tag{5.16}$$

因此，我们得到洛朗展开：

$$R_1^\omega(s) = -\mathcal{L}_{X^\omega}\Pi_1^\omega(0)/s^2 + \Pi_1^\omega(0)/s + R_{\mathrm{hol}}(s),$$

其中 $R_{\mathrm{hol}}(s)$ 在 $s = 0.$ 附近全纯。由（5.16）可得

$$d^{\nabla\omega}R_1^\omega(s)F_{x,\xi} = d^{\nabla\omega}\Pi_1^\omega(0)F_{x,\xi}/s + O(1).$$

将其代入（5.14）右端的第二项，得到

$$\begin{aligned}se^{-s\varepsilon}\langle R_2^\omega(s)\big([S_x\Sigma]\otimes\pi^*\xi_\star\big), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^{-\omega}}}F_{y,\mu}\rangle &= e^{-s\varepsilon}\langle d^{\nabla\omega}\Pi_1^\omega(0)F_{x,\xi}, e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^{-\omega}}}F_{y,\mu}\rangle + O(s)\\ &= e^{-s\varepsilon}\langle \Pi_1^\omega(0)F_{x,\xi}, e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^{-\omega}}}([S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star)\rangle + O(s),\end{aligned}$$

其中第二行使用了分部积分。令 $s\to 0$，取极限后将结果代入（5.14），再利用（5.15），即可完成命题的证明。 □

5.2.3. 证明结束。 现在证明定理 2。

定理 *2* 的证明。 回顾引理 5.6中的记号。注意到

$$d\beta_{x,z} = \bar\partial\beta_{x,z} = 2\pi i([x]-[z]), \tag{5.17}$$

其中，$[x]\in \mathrm{D}'(\Sigma,\ \Lambda^2T^*\Sigma)$ 表示满足以下条件的分布型二形式：对于所有函数 f，均有 $[x], f = f(x)$。在第一个等式中，我们利用了 $\partial\beta_{x,\ z}$ 具有 (2，0) 型，因此在曲面上为零。由于 $M = S\Sigma$ 是利用 $\alpha\wedge d\alpha$ 定向的，直接计算可得 $\pi^*([x]) = [S_x\Sigma]$，由此我们推出

$$d(\pi^*\beta_{x,z}) = \pi^*d\beta_{x,z} = 2\pi i([S_x\Sigma]-[S_z\Sigma]). \tag{5.18}$$

回顾一下， $\xi_\star(z)$ 定义于（5.12）中。根据莱布尼茨法则，有：

$$\begin{aligned} d^{\nabla^\omega}(\pi^*\beta_{x,z}\otimes\pi^*\xi_\star) &= d(\pi^*\beta_{x,z})\otimes\pi^*\xi_\star - \pi^*\beta_{x,z}\wedge\nabla_\omega\pi^*\xi_\star \\ &= d(\pi^*\beta_{x,z})\otimes\pi^*\xi_\star - \pi^*(\beta_{x,z}\wedge(\omega\otimes\xi_\star)) \\ &= d(\pi^*\beta_{x,z})\otimes\pi^*\xi_\star, \end{aligned}$$

其中，第二个等式用到了 $\nabla_\omega\pi^*\xi_\star = \pi^*\nabla_\omega\xi_\star = \pi^*(\omega\otimes\xi_\star)$，而最后一个等式用到了 $\pi^*\beta_{x,z}$ 和 $\pi^*(\omega\otimes\xi_\star)$ 均属于 $(1,0)$ 型，因此它们的楔积为零。结合（5.18），我们得到

$$d^{\nabla^\omega}\pi^*(\beta_{x,z}\otimes\xi_\star) = 2\pi i([S_x\Sigma]-[S_z\Sigma])\otimes\pi^*\xi_\star. \tag{5.19}$$

引理 5.9。 令 $x,y,z\in\Sigma$。则有

$$\eta_{g,\omega,x,y}(0) = \eta_{g,\omega,z,y}(0)\circ\sigma_\omega(x,z). \tag{5.20}$$

证明。 若 $x=z$，则引理的结论显然成立，因此我们可以假设 $x\neq z$。由 $\beta_{z,x}=-\beta_{x,z}$，根据命题 5.7 可得

$$\begin{aligned} \langle\eta_{g,\omega,x,y}(0)\xi,\mu\rangle - \langle\eta_{g_0,\omega,z,y}(0)\xi_\star(z),\mu\rangle &= \langle\Pi_1^\omega(0)(F_{z,\xi}-F_{x,\xi}), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^{-\omega}}}([S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star)\rangle \\ &\overset{(5.19)}{=} \frac{1}{2i\pi}\langle\Pi_1^\omega(0)\pi^*(\beta_{z,x}\otimes\xi_\star), e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^{-\omega}}}([S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star)\rangle \\ &= \frac{1}{2i\pi}\langle\beta_{z,x}\otimes\xi_\star, \pi_*\Pi_2^{*,\omega}(0)\big(e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^{-\omega}}}([S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star)\big)\rangle. \end{aligned}$$

在第二个等式中，由于 $\mathrm{WF}(\pi^*(\beta_{z,x}\otimes\xi_\star))\subset(\mathbb{H}^*\oplus\mathbb{R}\alpha)\setminus\{0\}$，因此配对是良定义的，并且与 E_u^* 和 E_s^* 不相交，这是由（2.4）得到的。（配对与原函数的选择无关，这是因为由引理3.4提供了 $e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^{-\omega}}}([S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star)$ 的正合性，再结合与命题4.1证明中类似的论证即可得到。）第三个等式由分部积分得到，并且 $\Pi^{*,\omega}_2(0)$ 表示投影到余共振态上的谱投影算子，即对应于 $(-X,-\omega)$ 的 2-形式上的共振态。

我们断言

$$\pi_*\Pi_2^{*,\omega}\big(e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^{-\omega}}}([S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star)\big)\in\mathrm{Span}(\omega\otimes\mu_\star). \tag{5.21}$$

假设该断言成立。将此恒等式代入上面的等式，我们便可得出存在 $c\in\mathbb{C}$ 使得

$$\langle\eta_{g,\omega,x,y}(0)\xi,\mu\rangle - \langle\eta_{g,\omega,z,y}(0)\xi_\star(z),\mu\rangle = c\langle\beta_{z,x}\otimes\xi_\star,\omega\otimes\mu_\star\rangle = 0,$$

这里用到了 $\beta_{z,x}$ 和 ω 均为 $(1,0)$ 型，因此它们的楔积为零。至此，引理得证。□

证明 (5.21)。 我们将使用记号 $v := \Pi^{*,\omega}_2(e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X^{-\omega}}}([S_y\Sigma]\otimes\pi^*\mu_\star))$。回顾一下，

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}^{*,2,\infty}(\rho_{-\omega},0) &= \mathrm{Res}_0^{*,2,1}(\rho_{-\omega},0)\oplus(\mathrm{Res}_0^{*,1,2}(\rho_{-\omega},0)\wedge\alpha) \\ &= (\mathrm{Res}_0^{*,0,1}(\rho_{-\omega},0)\wedge d\alpha)\oplus(\mathrm{Res}_0^{*,1,2}(\rho_{-\omega},0)\wedge\alpha), \end{aligned} \tag{5.22}$$

这由（2.17）和命题 5.4 得出。注意，由于 α 在每个圆纤维上限制为 0，因此有 $\alpha \wedge [S_y\Sigma] = 0$，由此我们推得 $\alpha \wedge v = 0$. 这意味着，在分解（5.22）中，$v \in \mathrm{Res}_0^{*\,1\,2}{}_{,\,,}(0) \wedge \alpha$ 。接下来，回顾引理3.4，$e^{\varepsilon \mathcal{L}_{X-\omega}}([S_y\Sigma] \otimes \pi^*\mu_\star)$ 是 $d^{\nabla-\omega}$-恰当的。根据命题 5.4，共振 1-形式是$d^{\nabla\omega}$-闭的，因此 v 与任何真正的共振 1-态的配对都为零。这意味着 $v \in \mathrm{L}_{X-\omega}(\mathrm{Res}_0^{*\,1\,2}{}_{,\,,}(\rho_{-\omega},\ 0)) \wedge \alpha$. 令 h^* 使其张成 $\mathrm{Res}_0^{*\,0\,1}{}_{,\,,}(\rho_{-\omega},\ 0)$。我们断言，

$$\mathcal{L}_{X-\omega}(\mathrm{Res}_0^{*,1,2}(\rho_{-\omega}, 0)) = \mathrm{Span}(d^{\nabla-\omega}h^*).$$

事实上，我们注意到 $d^{\nabla-\omega}h^* \in \mathrm{Res}_0^{*\,1\,1}{}_{,,}(\rho_{-\omega}, 0)$ 与共振 1-态平凡配对，因为根据命题5.4，它们都是闭的。根据对偶性，$\mathrm{Res}_0^{1,1}(\rho_\omega, 0)$ 的正交补（相对于共振态与余共振态之间的配对）由 $\mathrm{Ran}(\mathrm{L}_{X-\omega})$ 给出，这就证明了 $d^{\nabla-\omega}h^* \in \mathrm{L}_{X-\omega}(\mathrm{Res}_0^{*\,1\,2}{}_{,,}(\rho_{-\omega}, 0))$。

为了证明它非零，我们计算其前几个傅里叶系数。由于联络是从 Σ, 拉回的，我们看到 $d^{\nabla-\omega}h^*(V) = V(h^*)$，特别地，由引理 5.3 （应用于 $-X$ 和 $-\omega$），我们有

$$(d^{\nabla-\omega}h^*)_{-1} = 0, \quad (d^{\nabla-\omega}h^*)_1 = 2i\omega \neq 0.$$

现在我们可以完成（5.21）的证明。存在 $c \in \mathbb{C}$，使得对任意 $x \in \Sigma$,

$$\begin{aligned}\pi_*\Pi_2^{*,\omega}\left(e^{\varepsilon\mathcal{L}_{X-\omega}}([S_y\Sigma] \otimes \pi^*\mu_\star)\right)(x) &= -c\int_{S_x\Sigma} V(d^{\nabla-\omega}h^*)(x,\theta)d\theta \otimes \mu_\star \\ &= -4i\pi c(\omega \otimes \mu_\star),\end{aligned}$$

这里用到了上文得到的 $d^{\nabla-\omega}h^*$ 的傅里叶模。至此，（5.21）的证明完成。□

现在我们来完成定理 2 的证明。固定 $x \in \Sigma$ 和 $\xi \in E_\omega(x)$。

引理 5.10。截面 $\Sigma \ni y \mapsto \eta_{g,\ \omega,\ x,\ y}(0)\xi \in E_\omega(y)$ 是 E_ω 的全纯截面。

证明。设 $t \in H^0(\Sigma; E_{-\omega})$ 是一个处处不为零的截面；那么对所有 x，$y \in \Sigma$,

$$\langle \eta_{g,\omega,x,y}(0)\xi, t(y)\rangle = \langle \xi, \eta_{g,-\omega,y,x}(0)t(y)\rangle,$$

其中配对 $\mathbb{C}$ 对两个变量均为线性。利用引理 5.9 (应用于 $-X$ 和 $-\omega$)，可知对所有 x，y, $z \in \Sigma$

$$\eta_{g,-\omega,y,x}(0)t(y) = \eta_{g,-\omega,z,x}(0) \circ \mathrm{ev}_z^{-\omega} \circ (\mathrm{ev}_y^{-\omega})^{-1}(t(y)) = \eta_{g,-\omega,z,x}(0)t(z),$$

这表明配对不依赖于 y。这证明了 $y \mapsto \eta_{g_0,\ \omega,\ x,\ y}(0)\xi$ 是全纯的。□

由引理 5.5 可知，$\eta_{g,\ \omega,\ x,\ y} = c_x\sigma_\omega(x,\ y)$ 对于某个 $c_x \in \mathbb{C}$成立。再次应用引理 5.9，令 X 且 ω，于是得到 $c_x = c_z$ 对于 x，$z \in \Sigma$，也就是说，

$$\exists C(\omega) \in \mathbb{C}, \quad \forall x, y \in \Sigma, \quad \eta_{g,\omega,x,y}(0) = C(\omega)\sigma_\omega(x,y). \tag{5.23}$$

引理 5.11。成立：$C(\omega) = \chi(\Sigma)^{-1}$。

证明。 我们在扭曲情形下调整 Paternain [Pat00] 的计算，并计算 Poincar´é 级数在 $\Sigma \times \Sigma$. 上的积分。我们选取两个处处不为零的全纯截面 $\xi_\star$（分别为 $\mu_\star$），它们属于 E_ω（分别属于 $E_{-\omega}$），并将其归一化，使得 $\xi_\star, \mu_\star \equiv 1$. 对于任意 $x, y \in \Sigma$以及 $\gamma \in \mathbf{P}_{x,y}$，都有

$$\langle \tau_\omega(\gamma)\xi_\star, \mu_\star \rangle = \exp\left(-\int_\gamma \omega\right). \tag{5.24}$$

对于满足 $\mathrm{Re}(s) \gg 1$ 的 $s \in \mathbb{C}$，定义

$$I_\omega(s) := \int_\Sigma \int_\Sigma \langle \eta_{g,\omega,x,y}(s)\xi_\star(x), \mu_\star(y)\rangle d\mathrm{vol}_g(x) d\mathrm{vol}_g(y).$$

通过直接改写 [Pat00的命题 3.2 和注记 34] 以及（5.24），可得

$$I_\omega(s) = \int_\Sigma \int_0^{+\infty} e^{-st}\sinh(t)\left(\int_{S_x\Sigma} \exp\left(-\int_{(\gamma_{x,v})|_{[0,t]}} \omega\right) dS_x(v)\right) dt d\mathrm{vol}_g(x),$$

其中 $\gamma_{x,\ v}$ 表示由 $(x,\ v)$ 定义的 -测地线。内层积分等于

$$\forall x \in \Sigma,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \int_{S_x\Sigma} \exp\left(-\int_{(\gamma_{x,v})|_{[0,t]}} \omega\right) dS_x(v) = 2\pi.$$

事实上，若将所有对象提升到万有覆盖上，则被积函数是端点的全纯函数。根据平均值定理，该函数在测地球面上的平均值等于 1，即其在原点处的值。

这意味着

$$I_\omega(s) = 2\pi \mathrm{Area}_g(\Sigma) \int_0^{+\infty} e^{-st}\sinh(t) dt = \frac{2\pi \mathrm{Area}_g(\Sigma)}{s^2 - 1}.$$

右端具有一个亚纯延拓，其在 $s = 0$ 处的值等于 -2π面积$_{g_0}(\Sigma)$。对5.23进行积分，并利用高斯–博内公式，我们得到

$$C(\omega)\mathrm{Area}_g(\Sigma)^2 = -2\pi \mathrm{Area}_g(\Sigma) \implies C(\omega) = -\frac{2\pi}{\mathrm{Area}_g(\Sigma)} = \frac{1}{\chi(\Sigma)}. \qquad \square$$

定理得证。 $\square$

References

[Bon20] Yannick Guedes Bonthonneau。Ruelle 共振的扰动与 Faure-Sj¨ostrand 各向异性空间。*Rev. Uni´on Mat. Argent.*，61(1):63–72，2020。[CDDP22] Mihajlo Ceki´c、Benjamin Delarue、Semyon Dyatlov 和 Gabriel P. Paternain。近双曲三维流形上的 Ruelle ζ 函数在零点处的性质。*Invent. Math.*，229(1):303–394，2022。[CGB24] Yann Chaubet 和 Yannick Guedes Bonthonneau。向量场的预解式与 Lefschetz 数。*Pure and Applied Analysis*，6(2):521–540，2024。[Cha22] Yann Chaubet。带边界曲面的 Poincar´e 级数。*Nonlinearity*，35(12):5993–6013，2022。[DGBLR25] Nguyen Viet Dang、Yannick Guedes Bonthonneau、Matthieu L´eautaud 和 Gabriel Rivi`ere。解析凸体的 Poincar´e 级数。arXiv 预印本，arXiv:2509.11652，2025。

[DLR23] Nguyen Viet Dang、Matthieu L´eautaud 和 Gabriel Rivi`ere。平坦环面上凸体的长度正交谱。《剑桥数学杂志》，11(4):917–1043，2023。[DR24] Nguyen Viet Dang 和 Gabriel Rivi`ere。Poincar´e 级数与勒让德结的链接。《杜克数学杂志》，173(1):1–74，2024。[DZ16] Semyon Dyatlov 和 Maciej Zworski。通过微局部分析研究 Anosov 流的动力学 ζ 函数。Annales scientifiques de l’ ´ Ecole normale sup ´erieure，49(3):543–577，2016。[DZ17] Semyon Dyatlov 和 Maciej Zworski。曲面上的 Ruelle ζ 函数在零点处的性质。《数学新进展》，210(1):211–229，2017。[FS11] Fr´ed´eric Faure 和 Johannes Sj¨ostrand。Anosov 流的 Ruelle 共振密度上界。《数学物理通讯》，308(2):325–364，2011。[FS23] Jan Frahm 和 Polyxeni Spilioti。紧致双曲曲面上的扭曲鲁埃尔 ζ 函数在零点处的性质。《数论杂志》，243:38–61，2023。[GBLW26] Yannick Guedes Bonthonneau、Thibault Lefeuvre 和 Tobias Weich。Anosov 表示的谱。arXiv 预印本，arXiv:2603.24519，2026。[GHW18] Colin Guillarmou、Joachim Hilgert 和 Tobias Weich。双曲曲面的经典与量子共振。《数学年刊》，370(3–4):1231–1275，2018。[Had18] Charles Hadfield。带边界曲面的 ζ 函数在零点处的性质。arXiv 预印本，arXiv:1803.10982，2018。[H¨or03] Lars H¨ormander。《线性偏微分算子分析 I：分布理论与傅里叶分析》。《数学经典丛书》。施普林格出版社，柏林，第 2 版，2003。[HT26] Tristan Humbert 和 Zhongkai Tao。一般扭曲波利科特–鲁埃尔共振与零点处的 ζ 函数。arXiv 预印本，arXiv:2602.12166，2026。[Lef25] Thibault Lefeuvre。《双曲动力学与几何中的微局部分析》，《Cours Sp ´ecialis ´es》第 32 卷。法国数学学会，2025。含有 Yann Chaubet 撰写的章节。 ´Pat[Gabriel P. Paternain。测地流的拓扑压。Annales scientifiques de l’00] Ecole normale sup ´erie ure，33(1):121–138，2000。

电子邮箱地址： humbertt@imj-prg.fr

Institut de mathématiques de Paris rive gauche, Sorbonne Université, Campus Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75005, Paris, France.

电子邮箱地址： thibault.lefeuvre1@universite-paris-saclay.fr

Bâtiment 307, rue Michel Magat Faculté des Sciences d’Orsay, Université Paris-Saclay F-91405 Orsay Cedex

电子邮箱地址: sebastian.munoz-thon@universite-paris-saclay.fr

Bâtiment 307, rue Michel Magat Faculté des Sciences d’Orsay, Université Paris-Saclay F-91405 Orsay Cedex

电子邮箱地址: ztao@ihes.fr

Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 35 route de Ghartres, 91440 Bures-sur-Yvette,France