arXiv:2611.32655v1 [math.AT] 24 Nov 2026

一个实现所有同伦类型的幺半群：主幺半群

´ISAAC CARCACIA-CAMPOS

Abstract. 传统上，同伦论的研究要么通过拓扑空间，要么通过适当组合范畴上的预层范畴来开展；后者这一视角包含在 Grothendieck 的测试范畴理论之中。本文提出一种更具代数性的观点：同伦类型可以表示为单个幺半群在集合上的作用。

这个幺半群是通过将半单纯范畴的所有对象视为同一对象，同时保留其面算子而得到的。每个 CW 同伦类型都是其某个作用的平移范畴的分类空间；该幺半群在维数 n 处的截断是有限呈示的，并且恰好实现维数至多为 n的同伦类型。

这一构造基于一条一般性结果：每个取值于集合的、小范畴上的函子都会自由生成其泛幺半群的一个作用，而它的元素范畴是由此得到的平移范畴的全余反射子范畴。因此，每个弱测试范畴都会产生一个幺半群，其作用能够实现所有同伦类型；然而，当该范畴拥有多个对象时，这个幺半群本身并不是弱测试范畴。由此，单个幺半群可以实现所有同伦类型，却不一定能将同伦论建模为一种局部化。障碍在于将对象认同为一，而不在于是否只有一个对象：存在只有一个对象的严格测试范畴，例如无限集上所有自映射构成的幺半群，以及一个由原始递归函数构成的可数幺半群。

Introduction

代数拓扑是运用代数工具研究拓扑学，这一观点虽有一定道理，但只说对了一半。代数拓扑确实以自然的方式将群、环、模.....赋予空间；事实上，这正是范畴论诞生的原因 [20]。此外，这些对应关系使我们能够回答一些重要问题：例如，获得映射存在性的障碍、计算不动点或研究运动规划，等等。但所有这些方法都把拓扑学视为研究对象，把代数视为工具。借用一句名言来说，它们探讨的是代数能够为拓扑学做什么，而不是拓扑学能够为代数做什么。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 20M30、55U35；次要分类号 18F20、18N40、18B40、20M05。*Key words and phrases.* 幺半群、半群、同伦类型、分类空间、单纯集合、测试范畴。
单纯集合、测试范畴。

拓扑学服务于代数的历史比反过来的历史更短，但其中有一些非凡的篇章。最著名的或许是 Nielsen–Schreier 定理，该定理指出，自由群的每个子群都是自由群 [30]。其最优美的证明借助了拓扑学。自由群F 是某个拓扑空间的基本群，其分类空间为 BF；这个空间可以构造成一个 1 维复形，也就是一张图。 F 的一个子群对应于一个覆盖空间，而后者同样是一张图，并且以该子群为基本群；由于它是某张图的基本群，该子群便是自由群。

这一论证中的关键步骤，是为每个群函子性地指定一个拓扑空间，也就是分类空间函子 B : Group $\to$ Top，$G \mapsto$ BG，它恰好将代数对象映射到拓扑空间。一旦意识到存在这样一座桥梁，自然就会追问：在它的另一端，拓扑学究竟涵盖多少内容？第一个有力的答案是 Kan 和 Thurston 的定理 [17]：每个连通空间都具有某个群的分类空间的同调，包括任意局部系数。就同调而言，每个连通空间本质上都是一个群。但同伦呢？它几乎完全被排除在外：与群相连的空间 BG从 π_2 起同伦群皆为平凡群。

于是问题变成：如何将拓扑空间与其他代数对象联系起来，使其捕捉同伦，而不只是同调？McDuff [26], 的研究给出了答案：她证明，每个道路连通空间都具有某个离散幺半群 M 的 BM 的弱同伦型。她构造的幺半群为单纯复形中每个不属于极大树的单纯形设置一个生成元；边对应的生成元可逆，而较高维单纯形对应的生成元则是幂等元。证明结合了 Kan–Thurston 方法与 Baumslag–Dyer–Heller [17, 2]的方法。此外，可以选择 M，使得其极大子群的包含诱导出同调等价：该群已经呈现了 Kan 和 Thurston 定理中的同调，而不可逆幂等元所增加的恰恰是同伦。这一结果后来也由 Fiedorowicz 和 Hurwitz [9, 15]重新表述并加以推广。

在本文中，我们沿着这一路径前进，但对量词进行某种交换。在 McDuff 的构造中，给定一个空间，目标是寻找一个表示它的幺半群；而在这里，我们要寻找一个能够表示所有空间的幺半群。当然，通过分类空间来实现这一点是没有意义的，因为分类空间只能给出一个单独的空间。相反，我们将把每个拓扑空间在其同伦类型层面上视为一个作用于集合的幺半群。重要的是，存在一个幺半群，其作用能够表示每一种同伦类型。在本文中，我们构造了多个具有这一性质的幺半群，并将它们称为主幺半群。

从某种意义上说，这可以看作是克莱因《爱尔朗根纲领》精神的延续。在那里，人们通过保持空间结构的变换，即通过保持其性质的群，来研究空间。这一思想也推动了从群到范畴、尤其是到幺半群所构成的单对象范畴的转变，因为正是它

促使 Eilenberg 和 Mac Lane 引入了范畴论 [8]。人们通过空间彼此之间的变换方式来理解空间；例如，通过同调、上同调或同伦等函子，可以从它们的代数影像来理解所有空间。我们的方案处于两者之间：我们将拓扑空间研究为其上作用着一个单独幺半群的集合。

乍看之下，这个想法似乎有些奇怪，但一旦揭示其中的诀窍，谜团便会消失。一个单独的幺半群如何通过其作用表示每一种同伦类型? 这与通过单纯形，或某种类似的组合结构，观察一个空间的方式相同；也就是说，将其视为一个单纯集合，其中的信息蕴含在不同胞腔如何粘合以构成该空间之中。在这种情况下，一个空间的同伦类型表现为从某个范畴到集合的函子。如果我们能够将该范畴压缩为一个单独的对象，从而得到一个幺半群，并且在此过程中保留形状，就得到了我们想要的结果。毕竟，将幺半群看作只有一个对象的范畴时，从幺半群到集合的函子不过就是一个集合，以及幺半群在其上的一个作用。

这一问题的自然背景是 Grothendieck 的测试范畴理论，该理论在 *Pursuing Stacks* [12]中有所勾勒，并由 Maltsiniotis 和 Cisinski [25, 4]加以发展。Grothendieck 提出，哪些形状的小范畴 $\mathcal{A}$能够作为同伦论的组合基础；其含义是，在 $\mathcal{A}$上的预层范畴中，将那些在其元素范畴之间诱导同伦等价的态射局部化后，可以恢复空间的同伦范畴。单纯范畴 Δ 是奠基性例子，但它只是众多测试范畴中的一个，其中还包括 Joyal 的范畴 Θ [5]。从这一观点来看，我们的问题是：一个测试范畴的形状能否被压缩为一个单独的对象；如果可以，在压缩之后，测试性质还剩下什么。由于幺半群是只有一个对象的范畴，这也引出了一个自然问题：是否存在只有一个对象的测试范畴；换言之，同伦论是否可以通过集合上一个单独幺半群的作用来建模。

这段旅程并非毫无代价，本文相当一部分内容都致力于揭示这些代价。转向泛幺半群后，仍能逐对象实现每一种同伦类型，但通常会失去建模整个同伦范畴这一更强的能力。这段旅程的主要目的地及其主要代价，可概括如下。

主要结果。令 $M_\Delta = \mathsf{Mon}(\Delta^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{inj}})$ 为半单纯范畴的泛幺半群，令 $M_n = \mathsf{Mon}((\Delta^{\leq n}{}_{\mathrm{inj}})^{\mathrm{op}})$ 为其截断的泛幺半群。

(1) M_Δ 是一个主幺半群：每个 CW 同伦类型都具有$S//M_\Delta$ 的形式，其中 S是某个 M_Δ-集合。 (2) 对于 $n \geq 1$， M_n 是有限呈示的，具有 $n(n+3)/2$ 个生成元，而 $S//M_n$ 形式的同伦类型恰好是维数至多为 n 的那些类型。

(3) 如果 $\mathcal{A}$ 是一个弱测试范畴，则 $\mathrm{Mon}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 是一个主幺半群。此外，如果 $\mathcal{A}$ 至少有两个对象，则 $\mathrm{Mon}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 不是弱测试范畴。(4) 如果 X 是一个无限集，则由 X 的所有自映射构成的幺半群 $\mathrm{End}(X)$ 是一个严格测试范畴；可数的原始递归函数幺半群 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 也是如此。

陈述 (4) 表明，(3) 中的代价是识别对象所付出的代价，而非只保留一个对象所付出的代价（命题 5.14 和推论 5.15）。$\mathrm{End}(X)$ 的测试结构并非源于对测试范畴中对象的识别，而是源于将它们作为幂等元保留下来。

本文组织如下。第 1 节回顾范畴如何作用于集合，以及它们如何决定同伦类型。第 2 节介绍范畴的泛幺半群、其标准形及自由作用，并将其解读为一种扬弃。第 3 节给出余反射定理，这是本文的核心。第 4 节研究半单纯主幺半群及其截断；截断幺半群的精确性是唯一需要处理任意非自由作用之处。第 5 节将主幺半群与 Grothendieck 的测试范畴进行比较，说明当形状被拆分而非被识别时，单个幺半群仍然能够为同伦论建模，最后反思我们得到了什么，又失去了什么。

人工智能的使用。 在撰写本文时，作者使用 Claude Opus 5.5（Anthropic）润色文字、将文本从西班牙语翻译成英语、审查论证的逻辑，并检查是否遗漏了该主题的相关文献。图 2.1、例 4.9、图 3.1 以及注 5.13 中的图均由 Claude 绘制。作者对本文内容承担全部责任。

1. From categories and actions to homotopy types

数学中通常出现的范畴都是大的：它们的对象和态射构成真类。本文采取相反的观点。所有范畴都是小的，并将被视为自身具有独立意义的数学对象；我们将研究它们的组合结构以及它们所确定的同伦类型。

描述小范畴的一种特别有用的方式是通过生成元和关系，这与半群、幺半群和群的表示类似。按照 [1], 范畴表示由一个箭图$Q = (Q_0, Q_1, s, t)$和一族 R平行路径之间的关系组成；所表示的范畴是由 Q 上的自由范畴除以 R生成的同余所得。我们尤其关注只有一个对象的范畴，也就是幺半群。幺半群 M 是一个范畴，其唯一的对象记作 $*$，其自同态是 M的元素，复合运算由积给出。按照我们的约定， $gf = g \circ f$ 表示先作用f，然后作用 g。群恰好是每个态射都可逆的单对象范畴，

而将幺半群表示为范畴时，若该范畴只有一个顶点，且每个生成元对应一个环，这种表示就与幺半群的通常表示相同。

1.1. 作用于集合的范畴。 幺半群或群在集合上的作用，可以看作从相应的单对象范畴到**集合范畴**的函子。这启发我们研究一个小范畴 $\mathcal{C}$上的函子 $X\colon \mathcal{C} \to$ **集合范畴**。我们可以将范畴看作具有多个对象的幺半群，并将这样的函子看作在具有多种类型的集合上的作用。

我们研究协变函子。一个 $\mathcal{C}$-集合是一个函子 $X\colon \mathcal{C} \to$ 集合范畴。元素 $x \in X(c)$ 具有类型 c，每个态射 $f\colon c \to c'$ 通过映射 $X(f)\colon X(c) \to X(c')$，将 c类型的元素转换为 c'类型的元素。Grothendieck 构造为 X 附加其元素范畴$\int_{\mathcal{C}} X$，其对象是满足 $x \in X(c)$ 的二元组 (c, x)；态射 $(c, x) \to (c', x')$ 是 $f\colon c \to c'$ 在 $\mathcal{C}$中的一个态射，并满足 $X(f)(x) = x'$。在不会引起混淆时，我们简单地将 (c, x) 写作 x。投影 $\int_{\mathcal{C}} X \to \mathcal{C}$是一个离散余纤维化；事实上，Grothendieck 构造给出了 $\mathcal{C}$-集合与 $\mathcal{C}$上的离散余纤维化之间的等价。这一解读也是数据库函子模型的基础：范畴是模式，到集合范畴的函子是实例，而模式之间的函子则诱导数据迁移操作 [10, 31, 32]。

1.1.1. 作用于集合的幺半群。 设 M 为一个幺半群。一个 M-集合 是一个函子$S\colon M \to$ **集合范畴**，也就是说，是一个带有左作用 $(m, s) \mapsto m \cdot s$的集合 S。它的元素范畴是平移范畴 $M \ltimes S$：其对象是 S的元素，并且

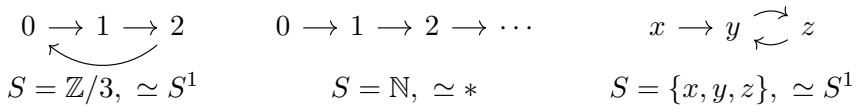
$$\mathrm{Hom}_{M \ltimes S}(s, t) = \{m \in M \mid m \cdot s = t\},$$

复合由 M 的积诱导而来。特别地，从每个对象 s 出发，对于每个元素 $m \in M$，恰好有一个以其为标记、目标为 $m \cdot s$ 的态射。我们将分类空间 $S/\!/M = B(M \ltimes S)$ 称为该作用的同伦商。当 M 是一个群时，$M \ltimes S$ 是一个群胚，即该作用的作用群胚，而 $S/\!/M$ 是集合关于群的通常同伦商（例 1.1）。对于单点集，我们得到 $*/\!/M = BM$；对于左正则作用，我们得到 $M/\!/M \simeq *$，因为单位元 $1 \in M$ 是 $M \ltimes M$ 的始对象。

例 1.1（群）。 如果群 G 作用于集合 S，那么 $G \ltimes S$ 是一个群胚，其连通分支是轨道，而对象 s 的自同构群就是其稳定子群 G_s。因此 $S/\!/G \simeq \coprod_{[s] \in S/G} BG_s$。特别地，集合上的群作用的同伦商是不交并的无球空间。

示例 1.2（单个变换）。 $\mathbb{N}$-集合范畴是一个集合 S，其上带有一个自同态 $\varphi\colon S \to S$。范畴 $\mathbb{N} \ltimes S$是函数图 $s \to \varphi(s)$上的自由范畴，而自由范畴的分类空间具有其生成图的同伦类型。函数图的每个连通分支

至多包含一个环，因此 $S//\mathbb{N}$ 的每个连通分支要么是可缩的，要么是一个圆：



$S = \mathbb{Z}/3,\ \simeq S^1$ $\qquad$ $S = \mathbb{N},\ \simeq *$ $\qquad$ $S = \{x, y, z\},\ \simeq S^1$

例 1.3（两个变换）。设 $F_2 = \langle s, t\rangle$ 是由两个生成元生成的自由幺半群。对于每个 F_2-集合 S，范畴 $F_2 \ltimes S$ 都是由每个顶点上有两个出射箭头的图自由生成的，这两个箭头分别是 $x \to s \cdot x$ 和 $x \to t \cdot x$。因此，$S//F_2$ 具有图的同伦类型。若一个有限连通分支有k 个元素，则其图有 k 个顶点和 $2k$ 条边，并且是$2k - k + 1 = k + 1$ 个圆的楔和。

1.2. **范畴与拓扑空间**。每个小范畴都函子性地确定一个拓扑空间，即它的分类空间。这推广了群的经典构造 $G \mapsto BG$，并使我们能够用同伦方法研究范畴。

1.2.1. 神经与分类空间。小范畴$\mathcal{C}$的神经 是单纯集合 $N\mathcal{C}\colon\ \Delta^{\mathrm{op}} \to$**集合范畴**，其 n-单纯形是由 n 个可复合态射 $x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_n$组成的序列；等价地，$N_n\mathcal{C}$ =Fun($[n], \mathcal{C}$)，其中 $[n] = \{0 < 1 < \cdots < n\}$ 被视为一个范畴。面算子将两个连续的箭头复合，或删去序列的一端；退化算子则插入恒等态射。

定义 1.4. 小范畴 $\mathcal{C}$ 的分类空间 是其神经 $B\mathcal{C} = |N\mathcal{C}|$的几何实现。

构造 $B\colon \mathbf{Cat} \to$ 拓扑空间范畴是函子性的，两个函子之间的自然变换会在相应映射之间诱导一个同伦。特别地，一个伴随 $F\colon\ \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}\colon\ G$ 会诱导同伦等价 $B\mathcal{C} \simeq B\mathcal{D}$；而具有始对象或终对象的范畴，其分类空间 [23, 24]是可缩的。该构造保积，$B(\mathcal{E} \times \mathcal{F}) \cong B\mathcal{E} \times B\mathcal{F}$，但一般不保普通余极限。范畴构造与同伦余极限之间的恰当关系由 Thomason 定理给出。

1.2.2. *Grothendieck* 构造与 *Thomason* 定理。取值于集合范畴的函子的元素范畴，是一种更一般构造的离散情形。设 $F\colon\ \mathcal{C} \to \mathbf{Cat}$ 是一个小范畴图。其 *Grothendieck* 构造 $\int_{\mathcal{C}} F$ 的对象是形如（$c,\ x$）的有序对，其中 $c \in$ 属于 Ob$\mathcal{C}$，且 $x \in$ 属于 Ob$F(c)$；态射（$c,\ x$）$\to$（$c',\ x'$）是由态射 $f\colon\ c \to c'$（属于 $\mathcal{C}$）和态射 $u\colon\ F(f)(x) \to x'$（属于 $F(c')$）组成的有序对。以下结果是基本工具，使我们能够将 Grothendieck 构造视为一种范畴论的同伦组装过程。

定理1.5 (Thomason)**.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴，且 $F\colon\ \mathcal{C} \to$**Cat**是一个函子。存在一个单纯集合之间的自然弱等价

$\operatorname{hocolim}_{c\in\mathcal{C}} NF(c) \to N\big(\int_{\mathcal{C}} F\big)$，因此存在一个自然同伦等价

$$\operatorname{hocolim}_{c\in\mathcal{C}} BF(c) \simeq B\int_{\mathcal{C}} F.$$

这就是 Thomason 同伦余极限定理 [33, 定理 1.2]。它指出，Grothendieck 构造是范畴图表同伦余极限的严格范畴模型。普通余极限可能会丢失图表中各对象如何组装起来的信息，而 Grothendieck 构造则同时保留了范畴 $F(c)$ 以及描述它们如何随 $\mathcal{C}$ 变化的态射。将每个 $X(c)$ 都视为离散范畴，对于一个 $\mathcal{C}$-集合，我们得到

$$B\int_{\mathcal{C}} X \simeq \operatorname{hocolim}_{c\in\mathcal{C}} X(c),$$

其中，右侧是底层离散空间构成的图表 X的同伦余极限。

这不能与普通余极限 $\operatorname{colim}_{\mathcal{C}} X$ 混淆；普通余极限沿着 $\mathcal{C}$ 的态射识别元素，却会遗忘这些识别方式所包含的同伦信息。对于取值为一个点的常值函子，我们有 $\int_{\mathcal{C}} * \cong \mathcal{C}$，因此 $\operatorname{hocolim}_{\mathcal{C}} * \simeq B\mathcal{C}$；而非空连通 $\mathcal{C}$ 的普通余极限只是一个点。即使图表仅由点构成，也能产生具有非平凡同伦的空间。Thomason 定理还将使我们能够从同伦的角度解读余反射定理，即将其视为关于 Kan 延拓的陈述（推论 3.3）。

定义 1.6。 小范畴 $\mathcal{C}$ 的实现谱 是由下列同伦类型组成的类

$$\mathcal{T}(\mathcal{C}) = \left\{ \left[B\int_{\mathcal{C}} X \right] \;\middle|\; X : \mathcal{C} \to \mathbf{Set} \right\}$$

这些同伦类型由 $\mathcal{C}$-集合的元素范畴表示；根据 Thomason 定理，它们是 $\operatorname{hocolim}_{\mathcal{C}} X$ 所表示的同伦类型，其中 X 的取值被视为离散空间。

谱 $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ 衡量了通过 $\mathcal{C}$ 在带有类型的集合上的作用能够编码多少拓扑学。它不仅包含 $B\mathcal{C}$的同伦类型（这对应于取值为一点的常值函子），还包含随着图 X 变化而得到的全部同伦类型。

例1.7. (1) 图。 设$\mathbf{K} = \{E \rightrightarrows V\}$ 为 Kronecker 范畴，其箭头为 s, t: $E \to V$。函子 $X : \mathbf{K} \to$ **集合范畴** 是一个图或箭图，其中 $X(E)$ 是边集，$X(V)$ 是顶点集，而源映射和目标映射为 $X(s)$ $X(t)$: $X(E) \to X(V)$。范畴 $\int_{\mathbf{K}} X$ 是该图的关联范畴，其神经给出重心细分，并且 $B\int_{\mathbf{K}} X \simeq |X|$。对于只有一个顶点 v 和一个环 e的图，其元素范畴为 $e \rightrightarrows v$，且 $B\int_{\mathbf{K}} X \simeq S^1$。

(2) 半单纯集合。 函子 $X\colon \Delta^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{inj}} \to$ **集合范畴** 是一个半单纯集合。它的元素范畴就是它的单形范畴，并且存在自然同伦等价 $B\int_{\Delta^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{inj}}} X \simeq |X|$，这也可以看作 Thomason 定理的离散情形。

(3) 单对象范畴。 如果 G 是一个群，例 1.1 表明， $\mathcal{T}(G)$由 G的子群的分类空间的不交并构成。例 1.2 表明， $\mathcal{T}(\mathbb{N})$由点和圆的不交并构成；例 1.3 则表明， $\mathcal{T}(F_2)$包含于图的同伦类型这一类之中。我们将在例 3.4 中看到，它包含所有这类同伦类型。

现在可以精确地表述引言中提出的问题：能否忘掉类型，也就是范畴的对象，并将一个具有多个对象的范畴替换为一个幺半群，同时不改变其实现谱？余反射定理将给出肯定的回答，即 $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{T}(\mathrm{Mon}(\mathcal{C}))$。更具体地说，它将展示如何把每个$X\colon \mathcal{C} \to$ **集合范畴** 变成一个 $\mathrm{Mon}(\mathcal{C})$-集，其同伦商具有 $B\int_{\mathcal{C}} X$的同伦类型。

2. The universal monoid of a category

给定一个范畴，我们来看看如何以一种自然的方式为它附加一个幺半群。回想一下，每个幺半群不仅是一个小范畴，而且幺半群的每个态射恰好都是一个函子。因此我们有一个函子 $\mathbf{Mon} \hookrightarrow \mathbf{Cat}$，它的左伴随将给出我们要找的对象。本节中，我们将通过示例阐述这些想法，并以一个汇集所有想法的示例作结（第 2.3 节）。

定义 2.1。小范畴 $\mathcal{C}$ 的泛幺半群 $\mathrm{Mon}(\mathcal{C})$ 是 $\mathbf{Cat}$ 中的推出

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ob}\mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\ * & \longrightarrow & \mathrm{Mon}(\mathcal{C}), \end{array}$$

其中 $\mathrm{Ob}\mathcal{C}$ 表示以 $\mathcal{C}$ 的对象为对象的离散范畴。等价地，Mon 是从幺半群到范畴的包含的左伴随，其单位元为 $\iota\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Mon}(\mathcal{C})$。因此，从 $\mathcal{C}$ 到幺半群 N 的函子等同于同态 $\mathrm{Mon}(\mathcal{C}) \to N$。

利用 [1, §3.1], 中关于呈示范畴余极限的描述，我们可以看到，$\mathrm{Mon}(\mathcal{C})$ 是由 $\mathcal{C}$ 的所有态射生成的幺半群，并且对每个可复合对都满足$[g][f] = [g \circ f]$，其中恒等态射成为单位元。更明确地说，如果一个小范畴由箭图及关系 $\mathcal{C} = \langle Q \mid R\rangle$呈示，则 $\mathrm{Mon}(\mathcal{C}) = \langle Q_1 \mid R\rangle$，其中 Q_1 是箭头的集合。

例 2.2. (1) 平行箭头。 在 Kronecker 范畴 $\mathbf{K} = \{E \rightrightarrows V\}$ 中，具有箭头 $s, t\colon E \to V$，任意两个非恒等态射都无法复合，因此不施加任何关系，$\mathrm{Mon}(\mathbf{K}) = \langle s, t\rangle = F_2$ 是自由

由两个生成元生成的幺半群。同理，$\mathsf{Mon}(\{0 \to 1\}) = \mathbb{N}$，箭图上的自由范畴的泛幺半群是由其箭头生成的自由幺半群。

（2）带关系的范畴。设$\mathbf{P}$ 是一个对象为 x、y、z的范畴，由两个箭头 f_1、f_2：$x \to y$和两个箭头 g_1、g_2：$y \to z$生成，并满足

$$x \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} y \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} z \qquad g_1 f_1 = g_2 f_2, \qquad g_2 f_1 = g_1 f_2.$$

它有六个非恒等态射：f_1、f_2、g_1、g_2 以及两个复合箭头 $h = g_1 f_1 = g_2 f_2$ 和 $k = g_2 f_1 = g_1 f_2$。其泛幺半群为

$$\mathrm{Mon}(\mathbf{P}) = \langle f_1, f_2, g_1, g_2 \mid g_1 f_1 = g_2 f_2,\ g_2 f_1 = g_1 f_2 \rangle.$$

2.1. 标准形。研究数学对象时，我们希望有一种便于处理它的方式。对于附属于一个范畴的幺半群，我们可以利用该范畴的表示来得到这个幺半群的表示；但对于幺半群而言，表示只是第一步，我们还希望得到标准形。

$\mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ 中的一个元素是 $\mathcal{C}$ 的非恒等态射的积 $u_1 \cdots u_k$，我们称它们为字母；字母 u_k 最先作用。若一个字中没有两个连续的字母可复合，则称其为约化的，也就是说，对于所有 i，都有 $\mathsf{dom}\ u_i \neq \mathsf{cod}\, u_{i+1}$。下面说明这确实给出了标准形。

引理 2.3（标准形）。对于每个小范畴 $\mathcal{C}$，*$\mathsf{Mon}(\mathcal{C})$* 中的每个元素都由唯一的约化字表示。特别地，$\iota$ 在非恒等态射上是忠实且单射的，并且 $\iota^{-1}(1)$ 由恒等态射组成。

证明。考虑如下 2-多图：它有一个 0-胞腔；对于 $\mathcal{C}$ 的每个非恒等态射有一个 1-胞腔；对于每个可复合对有一个 2-胞腔 $uv \Rightarrow u \circ v$，当 $u \circ v$ 是恒等态射时，其目标为空字。它表示 $\mathsf{Mon}(\mathcal{C})$，并且由于每条规则都会缩短长度，所以它满足终止性。其临界分歧是形如 uvw 的字，其中 $(u,\ v)$ 和 $(v,\ w)$ 可复合。由于结合律，两种约化都以 $u \circ v \circ w$ 结束；当其中一个中间复合箭头是恒等态射时，例如 $u \circ v = \mathsf{id}$，一侧给出 w，另一侧给出 $u \circ (v \circ w) = w$；其他情形同理。由临界分歧引理 [1, 引理 4.3.7] 和纽曼引理 [1, 引理 1.3.21]„ 该多图是合流的，其标准形就是约化字。□

根据这个引理，我们将简写为 f，而不写作 $\iota(f)$，表示由 $\mathcal{C}$ 的一个态射 f 所代表的 $\mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ 中的元素，恒等态射则成为单位元 1。这是对记号的一种轻微滥用：一个非恒等态射 f 同时也是 $\mathcal{C}$ 中的一个箭头和泛幺半群中的一个字，语境总会清楚地表明它扮演哪种角色。对于例 2.2 中的范畴$\mathbf{P}$，字母是六个箭头 $f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2,\ h$，以及 k，当且仅当没有字母 g_i 紧接着字母 f_j 时，一个字才是约化的；例如，$g_2 f_1$ 不是约化的，它的标准形是由一个字母组成的字

k。一个表示只需要四个生成元，但标准形需要全部六个箭头。

现在来看一个引理，它将是主定理的关键。在 $\int X$ 之上的元素范畴中，对象 (c, x) 发出的箭头，恰好就是 c 在 $\mathcal{C}$中发出的箭头。相反，对于幺半群 M，任意平移范畴中每个对象发出的箭头数量，都等于 M的元素数量。让我们看看，将幺半群相对于 $\mathcal{C}$的一个固定对象 c 分解时，这对 $\mathrm{Mon}(\mathcal{C})$ 意味着什么。对于对象 c，令 W_c 为由约化字组成的集合，其中的字要么为空，要么其首个作用字母u_k 满足 $\operatorname{dom} u_k \neq c$。这些字无法吸收任何位于 c 的元素。

引理 2.4 (唯一分解)。对于 $\mathcal{C}$的每个对象 c，映射

$$\coprod_d W_d \times \mathcal{C}(c,d) \longrightarrow \mathrm{Mon}(\mathcal{C}), \qquad (w,g) \longmapsto wg,$$

是一个双射。

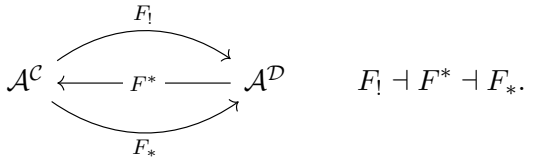
证明。设 m的约化字为 $u_1 \cdots u_k$。若 $k \geq 1$且 $\operatorname{dom} u_k = c$，则$m =$($u_1 \cdots u_{k-1}$) u_k，并且 $u_1 \cdots u_{k-1} \in W_{\operatorname{cod} u_k}$，因为该字是约化的。否则 $m \in W_c$，且 m 是 (m,id_c) 的像。反过来，若 $m = wg$，其中 $g \neq \mathrm{id}$ 且 $w \in W_{\operatorname{cod} g}$，则字 wg 是约化的，因此它是 m 的标准形，而 g 是其首个作用字母；若 $g = \mathrm{id}$，则 $m = w \in W_c$。这两种情况互斥。□

换句话说，可以把一个元素 x想成属于类型 c的元素。$\mathrm{Mon}(\mathcal{C})$ 中所有可能作用于它的东西，都是这样的一个字：其首个作用字母要么离开 c，随后可被 x吸收；要么不会离开，此时该字属于W_c；后一种情况正是 $\mathcal{C}(c,\ c)$ 中的因子为恒等态射的情形。现在让我们看看如何构造一些集合，使 $\mathrm{Mon}(\mathcal{C})$ 作用于其上。

2.2. 扬弃：**限制与自由作用**。范畴 $\mathcal{C}$ 与其泛幺半群之间的关系不仅仅是一种构造，甚至也不只是函子性的构造。它伴随着一个典范函子 $\iota\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Mon}(\mathcal{C})$，该函子将 $\mathcal{C}$ 的所有对象映射到 $\mathrm{Mon}(\mathcal{C})$ 的唯一对象，并将每个态射 f映射到它在泛幺半群中所表示的元素 f。这个函子将作为桥梁：它把一个函子 $X\colon \mathcal{C} \to$ **集合范畴** 映射为一个集合，使 $\mathrm{Mon}(\mathcal{C})$ 作用于其上；同时，它还使我们能够用泛幺半群作用的平移范畴替换元素范畴 $\int_{\mathcal{C}} X$，而不改变其同伦类型。当我们忘记由 $\mathcal{C}$ 的对象所赋予的不同类型，并将它们替换为单一的整体作用时，新的元素便会出现；但是，正如我们将看到的，它们被组织成若干分支，并不会改变原有的同伦类型。

首先回顾一般的范畴情形。设 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是小范畴之间的一个函子，且 $\mathcal{A}$是一个完备且余完备范畴。与 F进行前复合定义了限制函子 $F^*\colon \mathcal{A}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$，$F^*(Y) =$

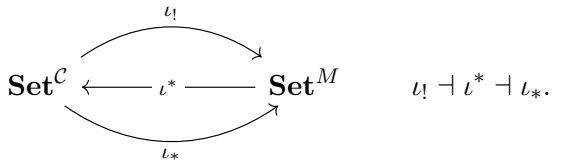
$Y \circ F$，它具有一个左伴随和一个右伴随，即左、右 Kan 延拓$F_! = \mathrm{Lan}_F$ 以及 $F_* = \mathrm{Ran}_F$:



$$F_! \dashv F^* \dashv F_*.$$

因此，图表的限制有两个相应的泛构造：由 $F_!$ 给出的自由延拓和由 F_* 给出的余自由扩张；关于伴随和 Kan 延拓的一般理论，请参见 [29, 第 4 章和 6]。这种形式的伴随三元组也出现在对预层拓扑斯各层级的研究中：小范畴的满包含会在相应的预层范畴之间诱导出一个限制函子，以及其左、右 Kan 延拓，见 [18, 第 1] 节。在这一语境下，这一构型与 Lawvere 的对立面的统一与同一有关，而 Lawvere 借指黑格尔所引入的术语扬弃，表达了一种结构如何能够同时被扬弃又被保留 [22]。

让我们将其应用于典范函子 $\iota\colon\ \mathcal{C} \to M$，其中 $M =$Mon($\mathcal{C}$)，以及 $\mathcal{A} =$ **集合范畴**。我们得到伴随三元组



$$\iota_! \dashv \iota^* \dashv \iota_*.$$

限制 ι^* 将一个 M-集合 S 映射为这样的 $\mathcal{C}$-集合：在 $\mathcal{C}$的每个对象处都具有同一个集合 S，一个箭头 $f\colon\ c \to c'$ 通过字母 $f \in M$作用。在限制该作用后， S 的每个元素同时属于由 $\mathcal{C}$的对象给出的所有类型。它的左伴随，即左 Kan 扩张，是我们主要感兴趣的函子。对于 $X\colon\ \mathcal{C} \to$ **集合范畴** ，它由下式给出

$$\iota_! X = M \otimes_{\mathcal{C}} X = \int^{c \in \mathcal{C}} M(\iota c, *) \times X(c),$$

带有自然变换 $X \to \iota^* \iota_! X$的泛 M-集合。下面对其作出具体描述。

命题 2.5（自由作用）。令 $M = \mathrm{Mon}(\mathcal{C})$ 且 $X\colon\ \mathcal{C} \to$ **集合范畴**。$\iota_! X$ 的每个元素都可以唯一地写成 $[w, x] = w \cdot [1, x]$，其中$x \in X\ (c)$ 且 $w \in W_c$，从而

$$\iota_! X \cong \coprod_{c \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}} W_c \times X(c).$$

此外，如果 $m \in M$ 分解为 $m = w'g$，其中 $g\colon\ c \to c'$ 且 $w' \in W_{c'}$，那么$m \cdot [1, x] = [w', X\ (g)\ x]$。

证明。 根据余 Yoneda 引理和引理 2.4,

$$M \otimes_{\mathcal{C}} X = \int^{c\in\mathcal{C}} M(\iota c, *) \times X(c) \cong \int^{c\in\mathcal{C}} \Big(\coprod_{d\in \mathrm{Ob}\mathcal{C}} W_d \times \mathcal{C}(c,d) \Big) \times X(c)$$
$$\cong \coprod_{d\in \mathrm{Ob}\mathcal{C}} W_d \times \int^{c\in\mathcal{C}} \mathcal{C}(c,d) \times X(c) \cong \coprod_{d\in \mathrm{Ob}\mathcal{C}} W_d \times X(d),$$

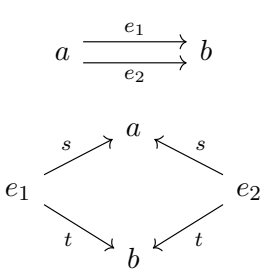
并且，如果 $m = w'g$ 是 m 关于 c的唯一分解，那么 (m, x) 的等价类对应于 $(w', X(g)x)$。这既给出了标准形 $[w, x]$的描述，也证明了它的唯一性。□

因此， $\iota_! X$ 是由 X 的元素作为生成元、关系 $f \cdot [1, x] = [1, X(f)x]$（其中 $f\colon c \to c'$ 且 $x \in X(c)$）呈现的 M-集合。当一个字母作用于一个根 $[1, x]$时，只要它表示一个定义域为 x类型的箭头，就会被吸收到 X 的结构中。如果无法吸收，它就会开始一个新的分支。

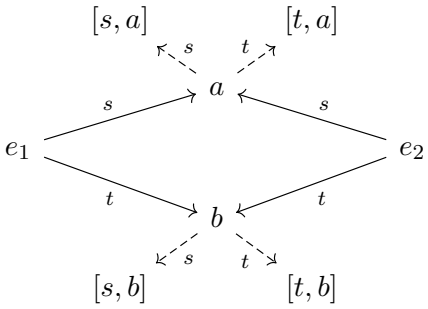
这种描述解释了我们为何使用扬弃一词。在拓扑斯层级理论中，这一术语表达了一种关系：一种结构同时被扬弃并保留 [18, 第 1]节。在我们的情形中，当我们转向泛幺半群时，由 $\mathcal{C}$ 的对象确定的类型不再作为显式的类存在，但它们所承载的信息并未完全消失：这些信息仍编码在每个元素能够吸收的运算中。从 X 到 $\iota_! X$ 的转变舍弃了按类型对元素进行的显式分类，但以运算形式保留了这种分类。

注记 2.6（余自由作用）。 限制也具有一个右伴随，$\iota_* X = \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}}(\iota^* M, X)$，其中 M 是正则 M-集合，而 M 的作用由其在自身上的右作用诱导。 $\iota_* X$ 的元素可以理解为一个元素在 M 的所有字下可能出现的行为。左延拓自由地加入无法在 X 内执行的运算结果，而右延拓则同时为所有这些运算规定相互兼容的答案。不同于 $\iota_!$，它不保持元素范畴的同伦类型。对于箭头范畴 $\mathcal{C} = \{0 \to 1\}$ 和终对象函子 $X = (* \to *)$，范畴 $\int_{\mathcal{C}} X$ 具有一个终对象和 $B\int_{\mathcal{C}} X \simeq *$；但 $\mathrm{Mon}(\mathcal{C}) \cong \mathbb{N}$ $\iota_* X$ 是带平凡作用的一个点，而 $B(\mathbb{N} \ltimes \iota_* X) \cong B\mathbb{N} \simeq S^1$。因此，同伦不变性是三元组中自由侧的性质，即 $\iota_!$ 的性质，而不是余自由延拓 ι_* 的性质。

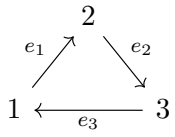
2.3. **一个例子**。让我们在单个例子中汇总迄今为止看到的所有内容：Kronecker 范畴 $\mathbf{K} = \{E \rightrightarrows V\}$，其泛幺半群是自由幺半群 $F_2 = \langle s, t\rangle$（例 2.2）。回忆一下，$\mathbf{K}$-集合 X 是一个箭图，其边集为 $X(E)$，顶点集为 $X(V)$，源映射为 $X(s)$，目标映射为 $X(t)$。



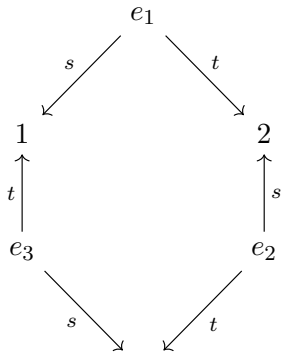
(a) X 和 $\int_{\mathbf{K}} X$



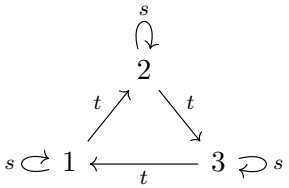
(b) $F_2 \ltimes \iota_! X$



(c) 箭图 $\iota^* S$



(d) $\int^3_{\mathbf{K}} \iota^* S$



(e) $F_2 \ltimes S$

FIGURE 2.1. 第 2.3 节中的例子。(a) 箭图 X，包含两个顶点 a，b 和两条平行边 e_1，e_2，从 a 指向 b（上），以及它的元素范畴——一个冠（下）。(b) 自由作用 $\iota_! X$的平移范畴：边吸收两个字母（实线箭头），而每个顶点都长出一棵分支二叉树（虚线箭头），图中画出了树的第一层。(c) 将作用 F_2限制在 $\{1,2,3\}$上得到的箭图 $\iota^* S$，其中 s是恒等态射，t是循环置换 $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$。(d) 它的元素范畴，一个六边形冠。(e) 作用本身的平移范畴。

例 2.7。 设 X 为一个具有两个顶点 a、b 和两条边e_1、e_2从 a到 b的箭图，即 $X(E) = \{e_1, e_2\}$、 $X(V) = \{a, b\}$、 $X(s)(e_i) = a$以及 $X(t)(e_i) = b$。

元素范畴。 范畴 $\int_{\mathbf{K}} X$ 具有四个对象e_1、e_2、a、b，并且从每条边到其每个端点都有一个箭头；它是称为冠的偏序集，见图 2.1(a)。其分类空间是一个正方形，即该图的重心细分，因此 $B\int_{\mathbf{K}} X \simeq S^1$。

自由作用。 两个字母 s、t 的定义域都是 E。因此 $W_E = \{1\}$，因为每个非空约化字都首先由定义域为 E的字母作用，并且$W_V = F_2$。根据命题 2.5，

$\iota_! X \cong \{e_1, e_2\} \sqcup \big(F_2 \times \{a, b\}\big)$，$u \cdot [w, v] = [uw, v]$，对于 $v \in \{a, b\}$和 u，$w \in F_2$。边吸收两个字母，而顶点一个也不吸收，并且每个顶点都长出一棵由分支组成的二叉树，见图 2.1(b)。核心是冠，而下一节的余反射定理将说明这些分支不会改变同伦类型：$\iota_! X // F_2 \simeq S^1$。

限制作用。 反过来，设 $S = \{1, 2, 3\}$中 s作用为恒等态射， t 作用为循环置换 $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$，记作 231。 $\iota^* S$ 这个$\mathbf{K}$-集的边集和顶点集都是 S，边 e_i从 $s \cdot i = i$指向 $t \cdot i$。它是图 2.1(c)中的有向三角形，其元素范畴是图 2.1(d)中的六边形冠，因此$B\int_{\mathbf{K}} \iota^* S \simeq S^1$。作用本身揭示了更多信息： $F_2 \ltimes S$ 在图 2.1(e)所示的图上自由作用，该图有三个顶点和六条边，而 $S//F_2$ 是四个圆的楔和。多出的三个圆之所以出现，是因为 S中的每个元素在限制后既是边也是顶点，而作用无法区分这两个副本；引理 4.10 将对此作出精确说明。

3. The coreflection theorem

本节将证明构造主幺半群所需的主要结果。我们将看到，给定一个范畴 $\mathcal{C}$，其元素范畴 $\int_{\mathcal{C}} X$ 的同伦类型可以表示为$\iota_! X$ 作为 Mon($\mathcal{C}$)-集合的同伦类型。从现在起， $\mathcal{C}$ 是一个小范畴， $X\colon \mathcal{C} \to$ **集合范畴** 且$M =$ Mon($\mathcal{C}$)。

我们首先来看看其中的关键所在。从 X 到 $\iota_! X$ 的过渡并非无关紧要：每一个元素无法吸收的运算都会开启一条新的分支，而这些分支通常是无限的，即使 X 是有限的。在元素范畴中，对象 $(c,\ x)$ 只会发出 $\mathcal{C}$ 中从其类型 c出发的箭头；而在平移范畴 $M \ltimes \iota_! X$中，每个对象都会针对 M中的每个元素发出一条箭头。因此，第二个范畴通常比第一个大得多，并没有先验理由认为二者应具有相同的同伦类型。下面的定理说明，所有这些新增材料在同伦意义下都是不可见的。元素范畴作为一个满子范畴包含在平移范畴中，我们称之为核心，而这些分支则通过一个伴随收缩到它们的根上。请回忆

第 1 节中，伴随会诱导分类空间之间的同伦等价；这就是我们所需的全部同伦理论。

定理 3.1 (余反射定理)。设 $M = \mathrm{Mon}(\mathcal{C})$ 且 $X\colon \mathcal{C} \to$ **集合范畴**。函子 $V\colon \int X \to M \ltimes \iota_! X$，由 $V(c,x) = [1,x]$ 和 $V(f) = f$给出，它是完全忠实的，并且有一个右伴随 R，其在对象上的定义为 $R[w,x] = (c,x)$。在 $[w,x]$ 处的余单位是箭头 $w\colon [1,x] \to [w,x]$。因此

$$B\textstyle\int_{\mathcal{C}} X \;\simeq\; \iota_! X /\!/ \mathrm{Mon}(\mathcal{C}),$$

且 $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{T}(\mathrm{Mon}(\mathcal{C}))$。

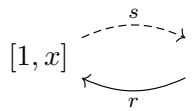
证明。设 $(c,x) \in \int X$ 和 $s = [w',x'] \in \iota_! X$，其中 $x' \in X(c')$ 且 $w' \in W_{c'}$。箭头 $V(c,x) \to s$ 是一个元素 $m \in M$，满足 $m \cdot [1,x] = [w',x']$。记 $m = w''g$，其中 $g\colon c \to d$ 且 $w'' \in W_d$（引理 2.4）。由命题 2.5，$m \cdot [1,x] = [w'', X(g)x]$；根据唯一性，当且仅当 $d = c'$、$w'' = w'$ 且 $X(g)x = x'$时，它等于 s。因此 $m \mapsto g$ 是一个双射

$$\mathrm{Hom}_{M \ltimes \iota_! X}\big(V(c,x),\, [w',x']\big) \;\cong\; \mathrm{Hom}_{\int X}\big((c,x),\,(c',x')\big),$$

其逆为 $g \mapsto w'g$。它在 (c,x) 中具有自然性：与 $V(f)$ 进行前合成 $= f$对应于与 f 进行前合成，因为 ι 是一个函子。因此，$s \mapsto (c',x')$ 唯一延拓为一个右伴随 R，其余单位元是与 $\mathrm{id}_{(c',x')}$ 对应的箭头，即 $w'\colon [1,x'] \to [w',x']$。当 $w' = 1$ 时，该双射表明 V 是完全忠实的。最后，带有伴随的函子会在分类空间之间诱导一个同伦等价。□

具体而言，R将一个箭头 $m\colon [w,x] \to [w',x']$ 映射到唯一的 g，使得$mw = w'g$。只有当整个分支被吸收时，一个元素的根才会发生变化。这个伴随是第 2 节中所用图像的精确形式：类型不再作为显式标签存在，但 $\iota_! X$中的每个元素仍然通过 R知道自己是由 X 中的哪个元素生长而来的。

注记 3.2（核心与分支）。V的像，即核心，是以根 $[1,x]$ 为对象的满子范畴。每个对象 $[w,x]$ 都恰好接收一条来自核心的箭头，该箭头在 R 下的像是恒等态射，即余单位 w。若 $\mathcal{C}$ 没有回缩（不存在由非恒等态射复合而成的恒等态射），则没有分支返回核心：核心是一个筛；当 $\mathcal{C}$ 自由时，分支便是树，如图 3.1 所示。若存在回缩，分支则可能返回。若 $rs = \mathrm{id}_a$，且 $s\colon a \to b$，那么对于 $x \in X(b)$，元素 $[s,x]$ 位于某个分支上，而



$$r \cdot [s,x] = [rs,x] = [1,x].$$

无论如何，定理 3.1 都成立：余反射并不要求核心是一个筛。

通过 Thomason 定理，余反射定理也可以解读为关于 Kan 延拓的陈述。

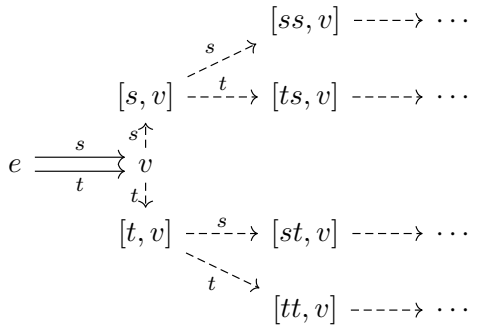


FIGURE 3.1. 圆作为 Kronecker Cat X 上的图，其中有一条边 e 和一个顶点 v，以及在自由幺半群 $\iota_!X$ 下的平移范畴 $\langle s, t\rangle$。每个对象针对每个生成元发出一个箭头。边吸收两个字母（实线箭头）；顶点不吸收任何字母，并从其上生长出一棵分支二叉树（虚线箭头）。核心 $\{e \rightrightarrows v\}$是 $\int X \simeq S^1$，而各分支收缩到其根。

推论 3.3。 </style}对于每个函子： $\mathcal{C} \to$ 集合范畴，映射 $\mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}} X \to \mathrm{hocolim}_{\mathrm{Mon}(\mathcal{C})} \iota_! X$ 由函子 ι 和单位元 $X \to \iota^*\iota_! X$ 诱导，是一个同伦等价。

证明。 根据 Thomason 对两个同伦余极限与 Grothendieck 构造的分类空间所作的自然同一化，该映射是由单位元和 ι诱导的函子 $\int_{\mathcal{C}} X \to \int_{\mathcal{C}} \iota^*\iota_! X \to$ Mon($\mathcal{C}$) $\ltimes \iota_! X$ 的 B 。该函子将 $(c,\ x)$ 映射为 $[1, x]$，并将 f映射为字母 f；它就是定理 3.1 中的函子 V，而 BV 是一个同伦等价。□

该定理还完成了第 1 节中遗留下来的计算。

例 3.4. 由一个和两个生成元生成的自由幺半群都是泛幺半群： $\mathbb{N} =$ Mon($\{0 \to 1\}$) 和 $F_2 =$ Mon(**K**)，其中 $\mathbf{K} = \{E \rightrightarrows V\}$ 是 Kronecker 范畴。由例 1.7可知， $\mathcal{T}$(**K**)由所有图的同伦类型构成，因此定理 3.1 和例 1.3 给出

$$\mathcal{T}(F_2) = \{\text{homotopy types of graphs}\}.$$

图 3.1 展示了圆的情形。类似地， $\mathcal{T}(\mathbb{N})$ 恰好由点和圆的不交并构成：一个包含关系由例 1.2 得出，另一个则由该例中的 $\mathbb{N}$-集合 $\mathbb{Z}/k$ 和 $\mathbb{N}$ 得出，因为同伦商会将作用的余积映为不交并。在这里，余反射定理只能得到离散空间 $\mathcal{T}(\{0 \to 1\})$，圆则必须手动找出：包含关系 $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{T}(\mathrm{Mon}(\mathcal{C}))$ 可能是严格的。

余反射定理只讨论形如 $\iota_!X$的作用。它为 Mon($\mathcal{C}$) 的实现谱给出了下界，这正是我们构造主幺半群所需要的，但它没有说明该

谱还能增长到多大。例子的最后一部分已经表明，它确实可能增长：自由幺半群 $\mathbb{N}$ 能几何实现圆，而箭头范畴 $\{0 \to 1\}$ 却不能。要控制任意作用，需要另一种工具，类似于范畴的amalgamation定理。我们将在下一节给出这样的工具，并将其用于幺半群 $M_n = \mathsf{Mon}((\Delta^{\leq n}{}_{\text{单射}})^{\mathrm{op}})$：这是截断于维数 n的半单纯范畴的泛幺半群，由维数至多为 n 的面算子生成。我们将看到， M_n 的任何作用，无论是否自由，都不会产生高于维数 n 的同伦。

4. The semisimplicial master monoid and its levels

代数拓扑中令人惊讶的一点是：关于如何粘合单纯形以获得任意同伦类型的知识，包含在对有限序数之间单射映射的研究之中，而这些映射又具有一个关系极其简单的组合表示。利用这一点，我们将构造一个主幺半群。

更确切地说，在本节中，我们将泛幺半群的构造应用于半单纯范畴及其截断。所得结果是一列幺半群 $M_0 \to M_1 \to M_2 \to \cdots \to M_\Delta$，它在代数上反映了半单纯集合按维数进行的滤子。每个 M_n都是有限呈示的，并且恰好实现维数至多为 n的同伦类型，而余极限 M_Δ 则实现每一种 CW 同伦类型。不同维数之间的关系让人想起由 [18], 发展起来的单纯集合和立方集合拓扑斯的层级理论；我们在讨论 扬弃 时已经遇到过这一理论。

4.1. 半单纯范畴的泛幺半群。 范畴 Δ_{inj} 由有限非空序数 $[n] = \{0 < 1 < \cdots < n\}$, $n \geq 0$及严格递增映射生成，其中余面映射 δ_i^k: $[k-1] \to [k]$,$0 \leq i \leq k$的像不包含 i。它们满足半单纯恒等式 $\delta_j^k \delta_i^{k-1} = \delta_i^k \delta_{j-1}^{k-1}$，其中 $0 \leq i < j \leq k$。我们采用对偶范畴$\mathcal{C}_\Delta = \Delta^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{inj}}$，并将相应的面算子记作 $d_i^k = (\delta_i^k)^{\mathrm{op}}$: $[k] \to [k-1]$。按照我们的复合约定，这些恒等式写作

$$d_i^{k-1} d_j^k = d_{j-1}^{k-1} d_i^k, \qquad 0 \leq i < j \leq k.$$

函子 $X\colon \mathcal{C}_\Delta \to$ **集合范畴** 恰好就是一个半单纯集合。

定义 4.1. 若每个 CW 同伦类型都可表示为 $S/\!/M$，其中 S是某个 M-集合，则称幺半群 M 为**主幺半群**。半单纯主幺 r 幺半群 是泛幺半群 $M_\Delta = \mathsf{Mon}(\Delta^{\mathrm{op}}{}_{\text{单射}})$，具有泛函子$\iota_\Delta\colon\ \Delta^{\mathrm{op}}{}_{\text{单射}} \to M_\Delta$。

应用以生成元和关系描述泛幺半群的方法，我们得到如下表示

$$M_\Delta = \left\langle d_i^k \;\middle|\; \begin{array}{l} k \geq 1,\ 0 \leq i \leq k, \\ d_i^{k-1} d_j^k = d_{j-1}^{k-1} d_i^k \quad (0 \leq i < j \leq k) \end{array} \right\rangle.$$

因此，通过将 $\Delta^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{inj}}$ 的所有对象识别为同一个对象，并将所有维数中的面算子都视为同一个幺半群的元素，即可得到 M_Δ 。函子 $\iota_{\Delta!}$ 将半单纯集合 X 变为自由的 M_Δ-集合 $\iota_{\Delta!}X = M_\Delta \otimes_{\Delta^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{inj}}} X$。由于 X 的元素范畴与其几何实现具有相同的同伦类型（例1.7），余反射定理给出了自然同伦等价 $|X| \simeq \iota_{\Delta!}X//M_\Delta$。

定理 4.2（半单纯主幺半群）。 幺半群 M_Δ 是一个主幺半群：对于每个 *CW*复形 Y，都存在一个 M_Δ-集合范畴 S，使得$S//M_\Delta \simeq Y$。

证明。 每个 CW复形都具有某个单纯复形 K [27, 的几何实现的同伦类型 $n = 1$]定理 2，情形 $n = 1$]。重心细分 $\mathrm{sd}\,K$ 可以看作一个半单纯集合 X，其单纯形是由包含关系排序的 K的单纯形链，而$|X| \cong |\,\mathrm{sd}K| \cong |K| \simeq Y$。取$S = \iota_{\Delta!}X$，定理 3.1 给出 $S//M_\Delta \simeq B\int_{\Delta^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{inj}}} X \simeq |X| \simeq Y$。 □

该构造是严格代数的： Y的同伦类型由一个集合范畴和一个作用 $M_\Delta \times S \to S$编码。 X 中每个元素的原始维数不再作为显式类型出现，但仍记录在该元素能够吸收的面算子中。

4.2. 截断与有限表示。 对于 $n \geq 0$，令 $\mathcal{C}_n = (\Delta^{\leq n}{}_{\mathrm{inj}})^{\mathrm{op}}$，并令 $j_n\colon \mathcal{C}_n \hookrightarrow \mathcal{C}_\Delta$ 为包含。函子 $X\colon \mathcal{C}_n \to$ **集合范畴** 是截断在维数 n的半单纯集合。

定义 4.3。 截断在维数 n的半单纯幺半群为$M_n = \mathrm{Mon}(\mathcal{C}_n)$，其泛函子为 $\iota_n\colon \mathcal{C}_n \to M_n$。

函子 Mon 将 j_n 变为同态 $\mu_n =$Mon(j_n)，由此得到一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_n & \xhookrightarrow{\ j_n\ } & \mathcal{C}_\Delta \\ {\scriptstyle \iota_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_\Delta} \\ M_n & \xrightarrow[\ \mu_n\ ]{} & M_\Delta. \end{array}$$

更一般地，对于 $n \leq m$，我们得到同态 $\mu_{n,\,m}\colon M_n \to M_m$，它们与截断范畴的包含相容，并得到一个序列$M_0 \to M_1 \to M_2 \to \cdots$，其余极限为 $M_\Delta \cong \mathrm{colim}_n\, M_n$。

命题 4.4（截断幺半群的表示）。 对于每个 $n \geq 1$，幺半群 M_n 有有限表示

$$M_n = \left\langle d_i^k \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \leq k \leq n,\ 0 \leq i \leq k, \\ d_i^{k-1} d_j^k = d_{j-1}^{k-1} d_i^k, \\ 2 \leq k \leq n,\ 0 \leq i < j \leq k \end{array} \right\rangle.$$

特别地， M_n在此表示中有 $\sum_{k=1}^{n}(k+1) = n(n+3)/2$个生成元和 $\sum_{k=2}^{n}\binom{k+1}{2}$个关系。

证明。 范畴 $\mathcal{C}_n$ 由面算子 d_i^k, $1 \le k \le n$以及平行路径之间的半单纯恒等式表示。构造泛幺半群时，所有对象都被识别，但生成元和关系保持不变。维数为 k时有 $k+1$ 个生成元，而涉及维数 k、 $k-1$ 和 $k-2$ 的关系由数对 $0 \le i < j \le k$索引。□

前两个例子是 $M_0 = \{1\}$ 和 $M_1 = \langle d_0^1,\ d_1^1 \rangle$，即由两个生成元生成的自由幺半群。在二维情形下，我们得到

$$M_2 = \left\langle d_0^1, d_1^1, d_0^2, d_1^2, d_2^2 \;\middle|\; d_0^1 d_1^2 = d_0^1 d_0^2,\ \ d_0^1 d_2^2 = d_1^1 d_0^2,\ \ d_1^1 d_2^2 = d_1^1 d_1^2 \right\rangle,$$

它有五个生成元和三个关系。引理 2.3 的重写系统为 M_n中的元素提供了有效的标准形；由于 $\mathcal{C}_n$ 是有限的，这个系统也是有限且合流的，因此 M_n的字问题是可判定的。

4.3. 层级间的限制与扩张。 包含 $j_n\colon \mathcal{C}_n \hookrightarrow \mathcal{C}_\Delta$ 诱导出通常的伴随三元组 $j_{n!} \dashv j_n^* \dashv j_{n*}$。 这里， j_n^* 是截断函子，它只保留维数至多为 n的单纯形；它的伴随函子是 Kan 延拓 $j_{n!} = \mathrm{Lan}_{j_n}$ 和 $j_{n*} = \mathrm{Ran}_{j_n}$。 在半单纯情形中， $j_{n!}$ 通过在所有高于 n的维数上取空集合，将一个截断至 n的半单纯集合扩张为半单纯集合，因此其本质像由维数至多为 n的半单纯集合组成；另一方面， j_{n*} 通过在更高维数上添加所有相容的面族来补全一个截断对象，这与图的团复形填入每个完全子图的方式颇为相似。

同样，同态 μ_n 诱导出三元组 $\mu_{n!} \dashv \mu_n^* \dashv \mu_{n*}$ 限制函子严格交换， $j_n^* \iota_\Delta^* = \iota_n^* \mu_n^*$，因为两个复合函子都将 M_Δ 的作用限制到维数至多为 n的面算子上。取左伴随可得到一个典范自然同构 $\mu_{n!}\iota_{n!} \cong \iota_{\Delta!} j_{n!}$，因此该方框

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Set}^{\mathcal{C}_n} & \xrightarrow{\ j_{n!}\ } & \mathbf{Set}^{\mathcal{C}_\Delta} \\ {\scriptstyle \iota_{n!}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{\Delta!}} \\ \mathbf{Set}^{M_n} & \xrightarrow[\ \mu_{n!}\ ]{} & \mathbf{Set}^{M_\Delta} \end{array}$$

在同构意义下交换。因此，我们可以先构造M_n 的自由作用，再将其延拓到 M_Δ；也可以先延拓截断的半单纯集合，再构造 M_Δ 的自由作用：所得结果存在典范同构。类似地，取右伴随可得到 $\mu_{n*}\iota_{n*} \cong \iota_{\Delta*} j_{n*}$。 因此，初始方框同时控制 Kan演算的三个层次：限制、自由延拓和余自由扩张。

注记 4.5（与托普斯的层级关系）。对于小范畴的一个满包含，由限制以及两个 Kan 延拓构成的三元组描述了预层范畴的一个本质子托普斯。在单纯、立方和球形托普斯中，这些层级分别与维数 [18], 相一致

，而塔 **集合范畴**$^{\mathcal{C}_0} \to$ **集合范畴**$^{\mathcal{C}_1} \to$ **集合范畴**$^{\mathcal{C}_2} \to \cdots$ 可以这样理解：维数 n 决定了半单纯集合托普斯的一个层级。幺半群塔 **集合范畴**$^{M_0} \to$ **集合范畴**$^{M_1} \to$ **集合范畴**$^{M_2} \to \cdots$ 通过上述方块与这一滤子相容，但我们并不声称**集合范畴**^{M_n} 在技术意义上是**集合范畴**$^{M_\Delta}$ 的一个层级。尽管 j_n 是完全忠实的，同态 μ_n 是在所有对象都完成识别之后产生的，其 Kan 延拓未必是完全忠实的。保留下来的是截断与自由作用之间的形式相容性。

4.4. 维数普适性。 幺半群塔 M_n 不仅是半单纯截断的代数反映。每一层恰好控制同伦中的一个维数界。

定义 4.6. 设 $n \geq 0$。若一种同伦类型可以由维数至多为 n 的 CW复形表示，则称其维数至多为 n，记作 $\mathsf{hdim}(Y) \leq n$。若每一种维数至多为 n 的同伦类型都可表示为 $S/\!/M$，其中某个 M-集合 S，则称幺半群 M 是 n-普适的。

引理 4.7. *一种同伦类型的维数至多为 n，当且仅当它可以表示为维数至多为 n 的半单纯集合 Z 的几何实现 $|Z|$。*

证明。 维数至多为 n 的半单纯集合的几何实现是一个维数至多为 n的 CW复形，其中每个 k-单纯形对应一个 k-胞腔。反过来，每个维数至多为 n 的 CW复形都与一个维数至多为 n [13, 的单纯复形 K 同伦等价（定理 2C.5]）；对于可数复形，另见定理 13] [34, 。其思路是对骨架进行归纳，并将胞腔的附着映射替换为与之同伦的单纯映射。最后， K 的重心细分具有维数至多为 n，其 k-单纯形是 K 的单纯形所成的链 $\sigma_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \sigma_k$；它是一个半单纯集合，且其几何实现与 $|K|$ 同胚。□

定理4.8（维数普适性）。 *对于每个 $n \geq 1$，幺半群 M_n都是 n-普适的。*

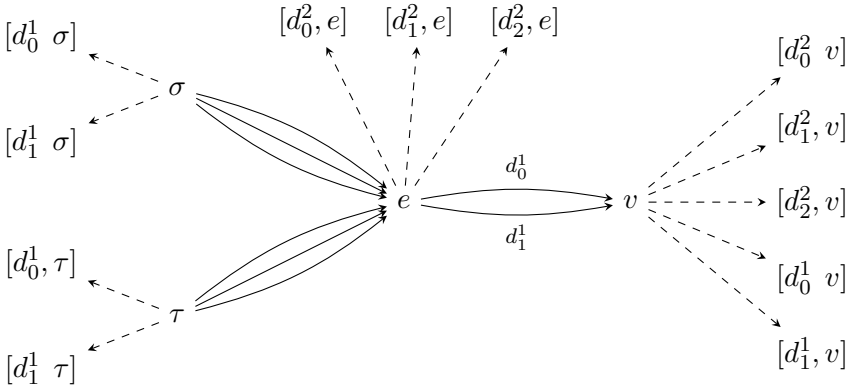
证明。 设 Y 是一个维数至多为 n的同伦类型。根据引理4.7，它由 $|Z|$ 表示，其中半单纯集合 Z 的维数至多为 n，也就是说，对于 $k > n$有 $Z_k = \varnothing$。由于 Z 在维数高于 n时为空，它由其限制 $X\colon \mathcal{C}_n \to$ **集合范畴** 确定，而元素范畴$\int_{\mathcal{C}_n} X$ 与 $\int_{\Delta^{\mathrm{op}}\ \text{单射}} Z$ 同构；因此，根据例1.7，$B\int_{\mathcal{C}_n} X \simeq |Z| \simeq Y$。将余反射定理应用于 $\iota_n\colon \mathcal{C}_n \to M_n$， M_n-集合 $S = \iota_{n!}X$满足 $S/\!/M_n = B(M_n \ltimes \iota_{n!}X) \simeq B\int_{\mathcal{C}_n} X \simeq Y$。□

情形 $n = 1$ 恢复了由两个生成元 $M_1 \cong F_2$生成的自由幺半群，其作用实现了所有图的同伦类型（例 3.4）。在二维情形中，具有五个生成元和三个关系的有限表示幺半群 M_2实现了所有维数至多为二的同伦类型，尤其是每个二维 CW复形的同伦类型。让我们来看看其中最熟悉的例子。

例 4.9（由两个圆盘构成的球面）。令 X 为如下二维半单纯集合：它有一个顶点 v、一条边 e 及 $d_0e = d_1e = v$，以及两个三角形 σ，τ，其中所有面的边界均为 e。其几何实现是圆 $|e|$，沿同一个映射附着两个圆盘；该映射绕圆一周（以同伦同胚替代此附着映射不会改变同伦类型 [13, 命题 0.18]）。沿公共边界粘合的两个圆盘构成一个球面，因此 $|X| \simeq S^2$。作为一个 M_2-集合，$S = \iota_{2!}X$ 由 σ 和 τ 生成，并满足以下关系

$$d_0^2\sigma = d_1^2\sigma = d_2^2\sigma = d_0^2\tau = d_1^2\tau = d_2^2\tau,$$

它们将六个面都与边 e 识别。无需施加关系 $d_0^1e = d_1^1e$，因为它可由半单纯恒等式 $d_0^1d_2^2 = d_1^1d_0^2$ 作用于 σ 得出。该图展示了 $M_2 \ltimes S$ 的核心，以及从其中每个对象出发的所有生成元箭头。实线箭头留在核心中，虚线箭头通向分支；我们在一步之后截断这些分支。



三角形吸收三个字母 d_j^2，并将 d_0^1、d_1^1 送入分支；边吸收字母 d_i^1，并将 d_j^2 送入分支；顶点什么也不吸收，却发出五条分支。沿着分支，这些字母仍通过半单纯恒等式相互作用，例如 $d_0^1 \cdot [d_0^2, e] = d_0^1 \cdot [d_1^2, e]$。实线部分是 $\int X$，而定理 3.1 给出 $S//M_2 \simeq |X| \simeq S^2$。两个面的识别后的三角形，在一个由五个生成元和三个关系构成的幺半群作用下，是一个球面。

层级间相容性使我们能够稳定地陈述这一构造。若 X 是维数至多为 n 的半单纯集合，则 $\mu_{n!}\iota_{n!}X \cong \iota_{\Delta!}j_{n!}X$，因此，经由 M_n 对 X 作几何实现与经由M_Δ 作几何实现，二者通过沿着 μ_n进行标量扩张而相关，且 $\iota_{n!}X//M_n \simeq |X| \simeq \iota_{\Delta!}j_{n!}X//M_\Delta$。幺半群 M_Δ 一次性实现所有层级，但每个有限维同伦类型早已出现在某个截断幺半群M_n中。

4.5. **截断主幺半群的精确性**。上述普适性只给出了一个包含关系：维数至多为 n 的每个同伦类型，都可以由 M_n的一个作用实现。而在我们的情形中，反过来也

成立：任意 M_n 作用都无法产生维数高于 n的同伦。这里仅考虑自由作用是不够的，我们需要描述泛幺半群的任意作用所对应的平移范畴。其证明依赖一个合并定理：McDuff的著作中已经出现了关于半群胚的此类论述，作为其实现定理 [26, 的证明步骤（引理 4], ）；我们采用Hurwitz给出的形式（定理 [15, 2]）。这其中自有几分公允：使McDuff得以用一个幺半群实现每个空间的工具，也正是让我们能够控制单个幺半群的所有作用的工具。

引理 4.10. 设 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴，且 S 是一个$\mathrm{Mon}(\mathcal{C})$-集合。那么

$$S/\!/\,\mathrm{Mon}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{hocolim}\left(B\textstyle\int_{\mathcal{C}} \iota^* S \longleftarrow \mathrm{Ob}\mathcal{C} \times S \longrightarrow S\right),$$

其中$\mathrm{Ob}\mathcal{C}\times S$和 S 是离散的，左边的映射是对象包含，右边的映射是投影。特别地，$B\mathrm{Mon}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{hocofib}(\mathrm{Ob}\mathcal{C} \to B\mathcal{C})$。

证明。记 $M = \mathsf{Mon}(\mathcal{C})$，并记 $O = \mathsf{Ob}\mathcal{C} \times S$。

步骤 1： $M \ltimes S$ 是 Cat 中的一个推出。投影 $P\colon M \ltimes S \to M$ 是一个离散余纤维化：对于每个对象 s 以及 M 中的每个箭头 m ， $M \ltimes S$ 中恰有一个以 s 为源、映到 m上的箭头，即 $m\colon s \to m \cdot s$。特别地， P 是一个Conduch´e 函子：若箭头 $h\colon s \to t$ 映到复合箭头 m_2m_1上，则 h 可分解为 $s \xrightarrow{m_1} m_1 \cdot s \xrightarrow{m_2} t$，并且这是 h 在 (m_1, m_2) 上的唯一分解。根据 Giraud 和 Conduch´e[11, 6],的定理，拉回函子 $P^*\colon \mathsf{Cat}/M \to \mathsf{Cat}/(M \ltimes S)$ 有一个右伴随，因而保余极限；Cat 的切片中的余极限由 Cat 中的余极限计算。将定义 $\mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ 的推出方块视为位于 M 上的方块，并应用 P^*。其各个角变为： $P^*(M) = M \ltimes S$； $P^*(*)$，即 P在唯一对象及其恒等态射上的纤维，它是离散范畴 S； $P^*(\mathsf{Ob}\mathcal{C})$，即离散范畴 O；以及 $P^*(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \times_M (M \ltimes S)$，其对象是有序对 (c, s)，其箭头是 $f\colon (c, s) \to (c', f \cdot s)$，其中 $f\colon c \to c'$ 属于 $\mathcal{C}$，也就是说， $\int_{\mathcal{C}} \iota^* S$。诱导函子分别是对象包含 $O \to \int \iota^* S$、投影 $O \to S$、由 $(c, s) \mapsto s$ 和$f \mapsto f$给出的函子 $\int \iota^* S \to M \ltimes S$，以及对象包含 $S \to M \ltimes S$。因此

$$(*) \qquad M \ltimes S \;\cong\; \textstyle\int_{\mathcal{C}} \iota^* S \sqcup_O S.$$

步骤 *2*：用群胚替代 S。令 Ch 为如下群胚：对象集合为 O ，当 $s = s'$ 时恰有一个箭头 $(c,\ s) \to (c',\ s')$，其他情况下没有箭头。函子 $q\colon \mathsf{Ch} \to S$，$(c,\ s) \mapsto s$，是完全忠实的且对象满射，因而是范畴等价；而 $Bq\colon B\mathsf{Ch} \to S$ 是同伦等价，因为 Ch 的每个连通分支都是不可分范畴。$(*)$ 的投影 $O \to S$ 是对象包含 $O \to \mathsf{Ch}$ 与 q 的复合。

步骤 *3*：合并。令$\mathbf{Cat}_O$ 为对象集为 O 且态射为对象上恒等的函子的范畴；它的始对象是离散范畴 O。 $\int \iota^* S$ 和 Ch 都是对象

属于$\mathbf{Cat}_O$，我们令 $E = \int \iota^* S *_O \mathsf{Ch}$ 为它们在$\mathbf{Cat}_O$中的推出；由于从 O 出发的两个函子在对象上都是双射， E 也是它们在$\mathbf{Cat}$中的推出。按照 Hurwitz 的术语， [15, §2], 在$\mathbf{Cat}_O$中的包含 $L \hookrightarrow N$ 是右自由的，当且仅当 N 的箭头在对 L的箭头进行前复合后分解为互不相交的陪集，并有一组固定的代表元；当$L = O$ 是离散范畴时， N 的每个箭头各自构成一个陪集，因此包含$O \hookrightarrow \int \iota^* S$ 和 $O \hookrightarrow \mathsf{Ch}$ 都是右自由的。于是 Hurwitz 的合并定理[15, 定理 2] 表明，典范映射

$$B\textstyle\int \iota^* S \cup_O B\mathrm{Ch} \longrightarrow BE$$

是一个同伦等价，其中并集是沿着作为顶点集合的 $O = BO$ 的两个包含取的。这些是子复形的包含，因此该并集是一个同伦推出；又由于 Bq 在O下是一个同伦等价，我们得到

$$BE \simeq \mathrm{hocolim}\left(B\textstyle\int \iota^* S \longleftarrow O \longrightarrow S\right).$$

步骤 *4*：从 E到 $M \ltimes S$。令 j: $\mathsf{Ch} \to E$为典范函子，并构造沿着 j的 q 的推出：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ch} & \xrightarrow{\ j\ } & E \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q'} \\ S & \longrightarrow & E \sqcup_{\mathrm{Ch}} S. \end{array}$$

根据推出的粘合，$E \sqcup_{\mathrm{Ch}} S \cong \int \iota^* S \sqcup_O S$，这由（$*$）可得。我们在$\mathbf{Cat}$上使用 folk 模型结构，其中弱等价是范畴等价，余纤维化是对象上单射的函子，而纤维化是等纤维化 [16, 28]。这里 q 是弱等价，而 j由于在对象上双射，是一个余纤维化。此模型结构中的每个小范畴都是余纤维的，因为从空范畴出发的函子在对象上是单射；而每个对象都是余纤维的模型范畴是左适当的 [14, 命题 13.1.2]。因此 q': $E \to M \ltimes S$ 是范畴等价。范畴等价会诱导分类空间的同伦等价，因为自然同构会诱导同伦；因此，folk 结构的弱等价尤其是诱导神经的同伦等价的函子，而这正是我们所需的，Thomason 模型结构并不起作用。因此 $S//M = B(M \ltimes S) \simeq BE$，这就证明了第一个结论。对于 $S = *$，我们有$M \ltimes * = M$，并且 $\int \iota^*(*) = \mathcal{C}$；$B\mathcal{C} \leftarrow \mathrm{Ob}\mathcal{C} \to *$的同伦推出是将对象作为顶点包含进去所得的同伦余纤维。□

这个引理在某种意义上与余反射定理对偶。我们从一个 a $\mathcal{C}$-集合 X 出发，其中的元素都带有类型，并问：将它视为 Mon($\mathcal{C}$) 的一个作用时，它是什么样的？答案是自由作用$\iota_! X$，其中类型仅以字母的形式保留下来，每个元素都可以吸收这些字母。这里我们则反其道而行之。我们从一个任意的 Mon($\mathcal{C}$)-集合 S 出发，其中的元素完全没有类型，再通过

这个 $\mathcal{C}$-集合 ι^*S 来观察它。限制并不会为每个元素选定一种类型：它会赋予每个元素所有类型，因此每个 $s \in S$ 都会针对 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 c 出现一次，成为 $\int_{\mathcal{C}} \iota^*S$ 中的对象 $(c,\ s)$，而这些带类型副本 s通常是彼此不同的对象。要恢复这个作用，我们必须撤销这种副本的倍增，也就是抹去 $\mathcal{C}$ 中各对象之间的区别。推出 $(*)$ 严格地做到了这一点，而范畴的推出未必具有任何同伦意义；这个引理的要旨就在于，这个推出确实具有同伦意义。从几何上说，$S//\mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ 是通过对每个 $s \in S$，在点 $(c,\ s)$，$c \in \mathsf{Ob}\mathcal{C}$ 上附加一个锥而得到的：新增一个点，并用一条弧将它与 s的每个带类型副本相连。这些副本并未粘合在一起，而是由路径连接起来，因此对象之间的区别只是在同伦意义下被抹去。这就是为何遗忘类型在同伦意义上只会损失 1-胞腔。

定义 4.11. 如果一个幺半群 M 是 n-精确的，那么它是 n-普适的，并且对于每个M-集合 S，其同伦商 $S//M$ 的维数至多为 n。

定理 4.12 (截断层级的精确性)。对于每个 $n \geq 1$，幺半群 M_n 都是 n-精确的。因此，其同伦商恰好是维数至多为 n的同伦类型：

$$\mathcal{T}(M_n) = \{[Y] \mid \mathrm{hdim}(Y) \leq n\}.$$

证明。普适性由定理 4.8 给出；接下来只需证明上界。设S 是一个 M_n-集合，设 $Z = \iota_n^* S$是一个维数至多为 n的半单纯集合，并设 $O = \mathsf{Ob}(\mathcal{C}_n) \times S$。由引理 4.10，

$$S//M_n \simeq \mathrm{hocolim}\left(B\int_{\mathcal{C}_n} Z \longleftarrow O \longrightarrow S\right),$$

并由例1.7可知。$\int Z$ 中的对象（$[k]$，s）接收一个来自（$[0]$，v（s））的箭头，其中 v（s）$= Z$（ϵ）（s）是单纯形s的第 0 个顶点，$\epsilon\colon\ [k] \to [0]$ 是 $\mathcal{C}_n$ 中与 0 到 $[k]$的包含相反的箭头；而根据例1.7中等价的自然性，将映射$\Delta^0 \to Z$（其分类对象为 v（s））应用于此，对象（$[0]$，v（s））在同伦意义下对应于 $|Z|$ 的顶点 v（s）。由于从离散空间出发的映射的同伦推出仅取决于这些映射在同伦意义下的取值，$S//M_n$ 与由 $O \to |Z|$、（$[k]$，s）$\mapsto v$（s）以及投影 $O \to S$构成的双重映射圆柱同伦等价。这个双重映射圆柱是这样一个半单纯集合的几何实现：该集合由 Z 添加新顶点得到，对每个$s \in S$ 添加一个新顶点 $\bar{s}$，并且对每个（$[k]$，s）$\in O$，添加一条从 v（s）到 $\bar{s}$的边。其维数至多为 $\max\{n, 1\} = n$，因此其几何实现是维数至多为 n的 CW复形，故 $\mathrm{hdim}(S//M_n) \leq n$。□

推论 4.13。对于每个 $n \geq 1$，幺半群 M_n 都不是$(n+1)$-通用的。

证明。每个同伦商 $S//M_n$ 的维数都不超过 n。球面 S^{n+1} 则不然。因此，M_n 无法实现 S^{n+1}。□

精确性使我们能够将塔 $M_1 \to M_2 \to \cdots \to M_\Delta$ 视为按维数划分的同伦代数滤过。层级 M_n 恰好包含实现 n 维同伦类型所需的实现能力，而余极限 M_Δ 则汇集了所有层级：

$$\mathcal{T}(M_1) \subseteq \mathcal{T}(M_2) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{T}(M_\Delta) = \{\text{all CW homotopy types}\}.$$

注 4.14（有限无环范畴）。 该构造可直接应用于有限无环范畴；有关内容请参阅读者指南中的 [19, 第 10]章。回顾一下，若一个范畴 $\mathcal{C}$ 的唯一自同态和唯一同构都是恒等态射，则称其为无环的。 $c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \to \cdots \xrightarrow{f_k} c_k$ 非恒等态射组成的链 $\mathcal{C}$ 构成一个半单纯集合 $N_+\mathcal{C}$ （按照 [19, 第 10]章的术语，即一个三单纯体），其面算子会删去链的一端，或复合两个相邻的态射；无环性保证了非恒等态射的复合永远不会是恒等态射。 $N_+\mathcal{C}$的元素范畴就是细分 $\mathsf{sd}\ \mathcal{C}$，并且 $B(\mathsf{sd}\,\mathcal{C}) \simeq B\mathcal{C}$ [7]。如果 $\mathcal{C}$不含有超过 n个可复合的非恒等态射组成的链，则 $N_+\mathcal{C}$ 的维数至多为 n，而余反射定理给出

$$B\mathcal{C} \simeq \iota_{n!} N_+\mathcal{C} /\!/ M_n.$$

因此，每个有限无环范畴都可由有限表示幺半群 M_n的有限生成作用来实现：链的类型得到识别，且分类空间保持不变。

5. From test categories to master monoids: realizing but notmodelling

任何关注当前同伦论的人都会注意到，拓扑空间这一概念，正如一般拓扑学课程中所呈现的那样，很少被明确提及。同伦更多地与组合模型有关，而且通常用模型范畴的语言来表达，而不是用空间的语言来表达。重新表述我们理解同伦类型的方式，其中最雄心勃勃的尝试之一归功于 Grothendieck 的 *PursuingStacks* [12], ，它被称为测试范畴理论（参见 [25, 4],和 [35] ，其中有易于理解的介绍）。它颠倒了通常的视角。我们不再把空间作为基本对象，然后寻找它的组合描述，而是从一个小范畴 $\mathcal{A}$ 出发，其中的对象扮演基本形状的角色，例如单纯形、立方体、球体或树。 $\mathcal{A}$ 上的预层是一个由这些形状构成的空间，其元素范畴汇集了这些形状的所有出现，而其分类空间则以同伦方式将它们组装起来。测试范畴是一个形状范畴，其丰富程度足以使这种语言完备。

这使我们能够区分普适性的两个层次。第一层是表示性质：每种同伦类型都能由$\mathcal{A}$上的某个预层实现。第二层是建模性质：将预层范畴中那些诱导同伦等价的态射局部化后，所得范畴与空间的同伦范畴等价。第二个陈述包含第一个，

但它还要求预层及其态射能够正确重现同伦论，而不只是重现其对象的集合。泛幺半群保留了第一层，却没有保留第二层。这是一种普遍现象：余反射定理表明，每个小范畴 $\mathcal{C}$ 都会将其实现同伦类型的能力转移到 $\mathrm{Mon}(\mathcal{C})$，$\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{T}(\mathrm{Mon}(\mathcal{C}))$；因此，若 $\mathcal{A}$ 是弱测试范畴，$M_{\mathcal{A}} = \mathrm{Mon}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$便能通过其在集合上的作用实现每种同伦类型，前一节的半单纯幺半群也就并非孤例。然而，转到幺半群后，$\mathcal{A}$ 的所有形状都被归并为单个对象，而所有 $M_{\mathcal{A}}$-集合构成的范畴中包含许多并非来自预层的作用；这些作用的同伦行为不再受 $\mathcal{A}$的测试性质支配。由此我们将看到一个根本区别：幺半群可以通过其作用实现每种同伦类型，却不建模同伦论。

5.1. 测试范畴与同伦类型。令 $\mathcal{A}$ 为一个小范畴，令 $\widehat{\mathcal{A}} = \mathrm{Set}^{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}$ 为其预层范畴；我们将 a 的每个对象$\mathcal{A}$ 视为可表预层 $\mathcal{A}(-, a)$，并用 e 表示终预层。对于预层 X，其元素范畴 $\mathcal{A}/X$ 的对象是满足 $x \in X(a)$的有序对(a, x)，而态射$(a, x) \to (b, y)$是 $\mathcal{A}$ 中的一个态射$f\colon a \to b$，满足 $X(f)(y) = x$。按照我们对协变元素范畴的约定，有自然同构$\mathcal{A}/X \cong (\int_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}} X)^{\mathrm{op}}$；又由于一个范畴及其对偶范畴的分类空间典范地同胚，故 $B(\mathcal{A}/X) \cong B\int_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}} X$。函子 $i_{\mathcal{A}}\colon \widehat{\mathcal{A}} \to \mathrm{Cat}$，$X \mapsto \mathcal{A}/X$有一个右伴随 $i_{\mathcal{A}}^*$，它将小范畴 $\mathcal{B}$ 映为预层 $a \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{A}/a, \mathcal{B})$ [25, 1。2.1和1.2.2]。我们遵循Maltsiniotis [25]„并将其中给出的一些等价刻画作为定义。

定义 5.1。设 $\mathcal{A}$ 为一个小范畴。
(1) 若预层的一个态射 $u\colon X \to Y$满足 $B(\mathcal{A}/X) \to B(\mathcal{A}/Y)$ 是同伦等价，则称其为弱等价。我们用 $W_{\mathcal{A}}$ 表示弱等价类。(2) 范畴 $\mathcal{A}$ 是无球的，如果 $B\mathcal{A} \simeq *$。若预层 X 满足 $\mathcal{A}/X$ 是无球的，则称预层 X 是无球的；如果对于 $\mathcal{A}$ [25, 1的每个对象 a，预层 $a \times X$ 都是无球的，则称其为局部无球面的。2.6]。(3) 若对于每个带有终对象 [25, 的任意小范畴 $\mathcal{B}$，预层 $i_{\mathcal{A}}^*(\mathcal{B})$ 都是无球的，则称 $\mathcal{A}$ 为弱测试范畴。Prop. 1.3.9]。(4) 如果对于每个对象 a，切片范畴 $\mathcal{A}/a$ 都是弱测试范畴，则称 $\mathcal{A}$ 为局部测试范畴；若它同时是弱测试范畴和局部测试范畴，则称其为测试范畴 [25, Def. 1.5. 2]。(5) 如果 $\mathcal{A}$ 是无球的，并且对于所有对象 a，b [25, ，预层 $a\times b$都是无球的，则称 $\mathcal{A}$ 是全无球面的 2]Def. 1.6. [25,。严格测试范畴是全无球面的测试范畴7]Def. 1.6}。

若 $\mathcal{A}$ 是弱测试范畴，则函子 $X \mapsto \mathcal{A}/X$ 诱导出一个等价$W_{\mathcal{A}}^{-1}\widehat{\mathcal{A}} \simeq \mathbf{Hot}$，其中 $\mathbf{Hot}$ 是空间的同伦范畴 [25, §1.3]；这正是说，$\mathcal{A}$ 上的预层能够刻画同伦类型的确切含义。一个

弱测试范畴是无球的 [25, 命题 1.3.9]。我们可以通过考察终预层来理解这一点：它的元素范畴是 $\mathcal{A}/e \cong \mathcal{A}$，因此，若要使 $\mathcal{A}$ 的终对象表示一个点，就必须有 $B\mathcal{A} \simeq *$。

注记 5.2。 测试范畴理论通常使用预层，也就是反变函子 $X\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to$ **集合范畴**。我们认为，这似乎更多是历史原因。奠基性例子是单纯形范畴；只有取其对偶范畴时，它才恰好能对空间建模，因为拓扑单形之间的面映射与单纯集合的面算子方向相反。此外，层和预层的构造以开集偏序集为基础，在其中，包含 $U \hookrightarrow V$ 会变成限制 $X(V) \to X(U)$；而使用 Yoneda 嵌入时，通常采用反变形式。

检验条件很难直接验证。Grothendieck 找到了一个判据，将全部重心放在单个对象上。

定义 5.3 ([25, 1.4.1])。 一个区间 是 $\mathcal{A}$上的一个预层 I，连同两个整体截面 $\partial_0,\ \partial_1\colon e \to I$。若 ∂_0 和∂_1 的等化子是空预层，则称其为分离的 。

定理 5.4 （Grothendieck）。 设 $\mathcal{A}$ 为一个小范畴。

（*1*） $\mathcal{A}$是局部测试范畴，当且仅当它具有一个 I局部无球面的分离区间；等价地，当且仅当其 *Lawvere* 对象$\widehat{\ }$（ $\mathcal{A}$的子对象分类器）是局部无球面的 [25, 定理 1.5。6]。（*2*） $\mathcal{A}$ 是测试范畴，当且仅当它是无球面的，并且具有一个分离的、局部无球面的区间 [25,注 1.5。4]。（*3*）如果 $\mathcal{A}$ 是全无球面的，那么 $\mathcal{A}$ 是弱测试范畴，当且仅当它是严格测试范畴；而这又当且仅当 $\mathcal{A}$ 具有一个 I 无球面的分离区间 [25, 命题 1.6。8]。

有必要暂停一下，思考一下我们对区间提出了什么要求。它扮演单位区间 $[0,1]$, 的角色 $[0,1]$, 也就是说，扮演点的圆柱体的角色：对于每个预层 X，积 $X \times I$是 X的一个圆柱体，其两个端点 $X \rightrightarrows X \times I$分别由$\partial_0$ 和 ∂_1给出，而同伦则是从 $X \times I$出发的映射。这两个条件分别维护了这一角色的一半。局部无圆性恰恰意味着，每个投影 $X \times I \to X$ 都是弱等价 [25, 1。2.6]：与 I 作积不会改变同伦类型，因此，从同伦的角度看，区间就是一个点。分离性意味着，两个端点以最强的可能方式彼此不同：不存在 a 这样的 $\mathcal{A}$的形状，使得 ∂_0 和 ∂_1 在那里相等。可以用我们在谈到扬弃 [22], 时已经遇到的 Lawvere 的辩证词汇来理解这一点：它是对立面的统一与区别。两个端点是从不被识别的对立面，甚至在局部也不被识别；然而，它们又被保持在同一个对象中，而这个对象在同伦意义下是一个点。单独任何一半都不够：带有 $\partial_0 = \partial_1$ 的点 e 是统一的，却没有区别；而两个点 $e \sqcup e$ 彼此有区别，却没有统一，因为 $a \times (e \sqcup e) = a \sqcup a$ 具有一个不连通的元素范畴。同伦就存在于这种张力之中

二者之中：路径使两个不同的事物在同伦意义下相同，却不将它们彼此识别。这在某种意义上恰好与我们对泛幺半群所做的事情相反；在那里，一个范畴的对象被识别了。我们将在第 5.5 节看到，具有良区间的幺半群——其中两个常数 0 和 1 扮演相对端点的角色——确实能够刻画同伦论。

例 5.5。 单纯范畴 Δ 是测试范畴的基本例子。Joyal 的范畴 Θ也是测试范畴，这一点由 Cisinski 和 Maltsiniotis [5]证明。这些例子为通过预层表示同伦类型提供了不同的组合形状系统。上一节中使用的半单纯范畴 Δ_{inj} 是一个弱测试范畴 [25,命题 1.7。25], ，尽管它不是测试范畴（参见 [25]的引言）。

本文主要使用弱测试条件的一个重要推论：每个同伦类型都由某个在 $\mathcal{A}$上的预层的元素范畴表示。因此，如果 $\mathcal{A}$ 是一个弱测试范畴，则 $\mathcal{T}$($\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$)由所有同伦类型组成。这个等式仅表达了在 **Hot**的对象上的本质满射性；弱测试范畴的定义包含更强的陈述，因为它还要求通过将 $\mathcal{A}$在 $W_{\mathcal{A}}$处局部化来恢复同伦^范畴的态射。

5.2. **从测试范畴到主幺半群**。 现在设 $\mathcal{A}$为一个弱测试范畴。我们将泛幺半群的构造应用于对偶范畴 $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{\mathrm{op}}$，并记作 $M_{\mathcal{A}} = \mathrm{Mon}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$，其泛函子为$\iota_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to M_{\mathcal{A}}$。每个预层 X 都是一个 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$-集合，而沿着$\iota_{\mathcal{A}}$ 的自由延拓是 $M_{\mathcal{A}}$-集合 $\iota_{\mathcal{A}!}X = M_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}} X$。

定理 5.6 (从测试范畴到主幺半群)。 若 $\mathcal{A}$ 是一个弱测试范畴，则 $M_{\mathcal{A}} = \mathrm{Mon}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 是一个主幺半群。

证明。 设 Y 为一个同伦类型。由于 $\mathcal{A}$是一个弱测试范畴，存在一个预层 X ，使得 $B(\mathcal{A}/X) \simeq Y$。对$\iota_{\mathcal{A}}$ 应用余反射定理，我们得到 $B(\mathcal{A}/X)$ $\cong B\int_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}} X \simeq B(M_{\mathcal{A}} \ltimes \iota_{\mathcal{A}!}X)$，因此 $M_{\mathcal{A}}$-集合 $S = \iota_{\mathcal{A}!}X$满足 $S//M_{\mathcal{A}} \simeq Y$。□

推论 5.7。幺半群 $\mathrm{Mon}(\Delta^{\mathrm{op}})$ 和$\mathrm{Mon}(\Theta^{\mathrm{op}})$ 都是主幺半群。此外， $M_{\Delta} = \mathrm{Mon}(\Delta^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{inj}})$ 根据定理 *4.2* 是一个主幺半群；由定理 *5.6* 也可得到这一结论，因为 Δ_{inj} 是一个弱测试范畴 [25,命题 1.7。25]。

特别地， M_{Δ} =Mon($\Delta^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{inj}}$) 是一个主幺半群，正如我们已经利用半单纯集合和重心细分直接证明的那样。定理 5.6 表明，这一现象并不依赖于单纯形的特殊性质，而是两个事实的形式推论：

(1) 弱测试范畴上的预层可以实现每一种同伦类型；(2) 余反射定理将每一种几何实现从一个小范畴转移到其泛幺半群。

5.3. **对象逐点普适性**。 值得明确说明，上述证明中用到了检验条件的哪一部分。我们只用到了$X \mapsto B(\mathcal{A}/X)$ 对同伦类型本质满射，而没有用到更强的陈述 $W_{\mathcal{A}}^{-1}\widehat{\mathcal{A}} \simeq \mathbf{Hot}$。由此引出一个中间概念。

定义 5.8。 小范畴 $\mathcal{C}$ 是对象逐点普适的，如果 $\mathcal{T}(\mathcal{C})$由所有同伦类型组成；也就是说，对于每个同伦类型 Y，都存在一个函子$X\colon \mathcal{C} \to$ **集合范畴**，使得 $B\int_{\mathcal{C}} X \simeq Y$。

如果 $\mathcal{A}$ 是弱测试范畴，那么 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 是对象逐点普适的，但反过来未必成立。对象逐点普适性只表示$\mathbf{Hot}$ 的所有对象都作为几何实现出现；它并未描述这些对象之间的态射，也没有声称**集合范畴**$^{\mathcal{C}}$ 的某个局部化等价于 $\mathbf{Hot}$。

命题 5.9。 如果小范畴 $\mathcal{C}$ 是对象逐点普适的，那么$\mathrm{Mon}(\mathcal{C})$也是。

证明。 由余反射定理， $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{T}(\mathrm{Mon}(\mathcal{C}))$。 □

余反射定理给出的不只是不同类之间抽象的包含。它定义了一个显式变换 $X \mapsto \iota_! X$，而原来的元素范畴作为一个满余反射子范畴出现在平移范畴中，因此可以在自由作用内部规范地恢复原来的范畴模型。对于弱测试范畴 $\mathcal{A}$，我们可以用下图概括这种情形：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Set}^{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}} & \xrightarrow{\iota_{\mathcal{A}!}} & \mathbf{Set}^{M_{\mathcal{A}}} \\ {\scriptstyle X\mapsto B(\mathcal{A}/X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S\mapsto S/\!/M_{\mathcal{A}}} \\ \mathbf{Hot} & = & \mathbf{Hot}, \end{array}$$

它在自然同伦等价意义下交换。上方的函子传递同伦类型的代表元，但这种交换性并不意味着它会在两个作用范畴的局部化之间诱导出等价。

5.4. **无圆性的失效**。 当我们考察泛幺半群自身的分类空间时，便会发现它成为弱测试范畴的第一个障碍。即使 $\mathcal{A}$ 无球，幺半群 $\mathrm{Mon}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 也未必无球。将对象识别起来可能会在一维产生新的上同调类。

命题 5.10。 设 $\mathcal{C}$ 是一个至少有两个对象的连通小范畴。那么 $H^1(B\,\mathrm{Mon}(\mathcal{C}); \mathbb{Z}) \neq 0$。特别地，$\mathrm{Mon}(\mathcal{C})$ 不是无球的，也不是弱测试范畴。

证明。 根据引理 4.10， $B\mathrm{Mon}(\mathcal{C})$ 是将对象作为顶点的包含 $\mathrm{Ob}\mathcal{C} \to B\mathcal{C}$ 的同伦余纤维。其约化同调的长正合序列包含

$$H_1(B\mathcal{C}) \longrightarrow H_1(B\,\mathrm{Mon}(\mathcal{C})) \longrightarrow \tilde{H}_0(\mathrm{Ob}\mathcal{C}) \longrightarrow \tilde{H}_0(B\mathcal{C}).$$

˜ ˜由于 $\mathcal{C}$ 是连通的， $H_0(B\mathcal{C}) = 0$, 因此 $H_1(B\mathrm{Mon}(\mathcal{C}))$ 映射到 $H_0(\mathrm{Ob}\mathcal{C})$ 上，后者是增广映射 $\mathbb{Z}^{(\mathrm{Ob}\mathcal{C})} \to \mathbb{Z}$的核；由于 $\mathcal{C}$ 至少有两个对象，这是一个非零自由阿贝尔群。因此，根据泛系数定理， $H^1(B\mathrm{Mon}(\mathcal{C}); \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_1(B\,\mathrm{Mon}(\mathcal{C})), \mathbb{Z}) \neq 0$。因此， $B\mathrm{Mon}(\mathcal{C})$ 不可缩；又由于每个弱测试范畴都是无球的， [25, 命题 1.3。9],$\mathrm{Mon}(\mathcal{C})$ 不是弱测试范畴。□

更准确地说，同伦余纤维是 $B\mathcal{C}$ 加上一个新点 p ，以及从 p 到每个顶点 c的一条弧。选取一个对象 c_0 ，并对每个其他对象c，选取一条从 c 到 c_0、位于 $B\mathcal{C}$ 中的路径，然后沿该路径滑动每条弧在 c处的端点[13, 由命题 0.18], 可得一个非典范的同伦等价

$$B\,\mathrm{Mon}(\mathcal{C}) \simeq B\mathcal{C} \vee \bigvee_{c\in \mathrm{Ob}\mathcal{C}\setminus\{c_0\}} S^1.$$

将 $\mathcal{C}$ 的所有对象认同起来，会为除一个对象之外的每个对象添上一条圆：这些圆记录了类型信息的丢失，而它们正是引理 4.10 沿之擦除对象之间区别（模去同伦）的路径。

推论 5.11。 设 $\mathcal{A}$ 是一个至少有两个对象的弱测试范畴。那么$\mathrm{Mon}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 是一个并非弱测试范畴的主幺半群。

证明。 定理 5.6 表明，$\mathrm{Mon}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 是一个主幺半群。另一方面， $\mathcal{A}$是无球的，因而是连通的；将命题 5.10 应用于$\mathcal{C} = \mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 可知，$\mathrm{Mon}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 并非无球的，因而不是弱测试范畴。□

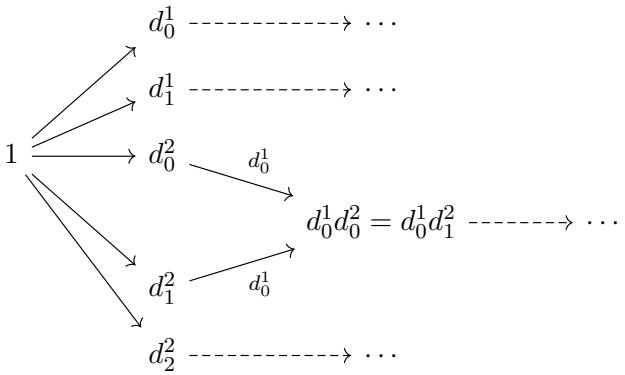
推论 5.12。 半单纯主幺半群 $M_\Delta = \mathrm{Mon}(\Delta^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{inj}})$ 实现每一种同伦类型，但它不是弱测试范畴： $\Delta^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{inj}}$ 是连通的，并且具有无穷多个对象，因此根据 $H^1(BM_\Delta; \mathbb{Z}) \neq 0$ 命题 *5.10* 可知。

实现与建模之间的差异可以精确地表述如下。对于幺半群 M，考虑函子 $\mathcal{R}_M$： **集合范畴**$^M \to$ **Hot**， $S \mapsto S//M$。如果M 是一个主幺半群，那么 $\mathcal{R}_M$ 是本质满射的：每一种同伦类型都在**Hot** 中与某个 M-集合 S的 $\mathcal{R}_M(S)$同构。然而，本质满射性并不意味着 $\mathcal{R}_M$ 将**Hot** 表示为**集合范畴**^{M} 的局部化。对于单对象范畴 M 要成为弱测试范畴，至少必须满足 $BM \simeq *$; 而附属于测试范畴的泛幺半群并不满足这一条件[1]。情况可以概括如下：如果 $\mathcal{A}$ 是一个弱测试范畴，那么 $\mathrm{Mon}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$实现每一种同伦类型；但一般而言，$\mathrm{Mon}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$不是弱测试范畴，这一失败甚至已经可以在终对象处检测到。

注记 5.13（点所在之处）。终端 M-集合，即带有平凡作用的单点集，并不表示一个点，因为 $*//M = BM$。该

[1]严格来说， M 上的预层是右 M-集合，而我们的 M-集合是左作用，也就是说，是 M^{op} 上的预层；由于 $BM \cong BM^{\mathrm{op}}$ 和 $\mathrm{Mon}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{Mon}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$，这一障碍与所作的选择无关。

点尽管如此仍可由一个生成元上的自由作用实现，也就是由正则 M-集合 M 实现。在其平移范畴中，单位元 1 是一个始对象：从这个唯一的根出发，对 M 的每个生成元各生出一条分支；接着，从每条分支的每个元素出发，又分别对应每个生成元产生一条箭头，如此不断； M 的关系只会使其中一些分支相交。因此$M/\!/M \simeq *$。对于泛幺半群，这是由可表函子生成的自由作用， $\iota_1\mathcal{C}(c, -) \cong M$，根据余 Yoneda 引理；而对于 M_Δ，它是由一个顶点，或任意单纯形生成的自由作用。该图展示了 $M_2 \ltimes M_2$ 的开头，其中半半单纯恒等式 $d_0^1 d_1^2 = d_0^1 d_0^2$ 使两条分支相交：



若 $\mathcal{A}$ 是一个弱测试范畴，那么点也由终预层 1 生成的自由作用实现：根据余反射定理，$\iota_{\mathcal{A}!}1/\!/M_{\mathcal{A}} \simeq B\int_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}} 1 \cong B\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \simeq *$。因此，在 **集合范畴**$^{M_{\mathcal{A}}}$ 中，点由自由作用表示，而终对象在测试范畴中扮演点的角色，它表示 $BM_{\mathcal{A}}$。

5.5. **以分裂取代识别**。上述障碍或许会让人以为，单个幺半群可以实现同伦类型，却永远无法对其建模。事实并非如此。推论 5.11 中失效的并不是化约为单个对象这一步，而是实现这一化约的方式。将测试范畴中的对象识别为同一个对象时，形状便被抹去，而 $B\mathrm{Mon}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 中的圆记录了它们的消失。

还有另一种将范畴化约为幺半群的方法，在这种方法中，形状不会被抹去，而是作为幂等元保留下来。若范畴 $\mathcal{C}$ 的每个对象都是单个对象 g的收缩，那么 $\mathcal{C}$ 上的预层范畴就等价于幺半群 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(g)$ 上的预层范畴，因为每个对象都可以恢复为 g 的某个幂等自同态的像。[2]

经典的例子来自 Lawvere：自反图是一个含有三个元素的幺半群的右作用，即恒等态射和两个幂等元，它们

[2]等价地， $\mathcal{C}$ 与单对象范畴 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(g)$ 具有等价的 Karoubi 包络。由于取值于**集合范畴**的预层范畴在 Karoubi 完备化下保持不变，因此它们的预层范畴等价（参见 [3, 定理 1]）。

分别将一条边映射到其源点和目标点 [21]。沿着这第二条路径，单个幺半群也可以为同伦论建模。

回想一下，幺半群 E 上的预层（将其视为单对象范畴）就是右 E-集；按照我们对作用的约定，它们是 E^{op}-集，并且当且仅当 $\mathcal{R}_{E^{\mathrm{op}}}$：**集合范畴** $^{E^{\mathrm{op}}} \to$ **同伦论** 是作为局部化的呈现时，E 才是弱测试范畴。

命题 5.14. 设 X 是一个无限集，并设 $E = \mathrm{End}(X)$ 是所有映射 $X \to X$ 构成的幺半群，其积为 $gf = g \circ f$。那么，将 E 视为单对象范畴，它是一个严格测试范畴。特别地，E^{op} 是一个主幺半群，其作用也能为同伦论建模。

证明。 我们在 ZFC 中工作：选择公理仅用于将 $X \times X$ 和 $X \times \{0,1\}$ 识别为 X，这正是用到 X 为无限集这一假设之处。我们按照定义 5.1 中的概念检验定理 5.4 的条件： E 是无球的；它具有一个局部无球面的分离区间；并且它是全无球面的。回想一下， E 上的预层是右 E-集，终预层是单点集，唯一的可表预层是带有右乘的 E ，并且当预层 F 的元素范畴 E/F 是无球的时，该预层也是无球的。

E 是无球的。令 $K\colon E \to E$ 为将每个元素映到 1 的函子；它经由平凡幺半群分解。元素 $z \in E$，视为唯一对象上的一个自同态，当且仅当对每个 $f \in E$，自然性方块交换，也就是说，$K(f) \circ z = z \circ \mathrm{Id}_E(f)$，或者按我们的约定 $z = z \circ f$ $gf = g \circ f$，它是自然变换 $\mathrm{Id}_E \Rightarrow K$。每个常值映射 z 都满足 $z \circ f = z$ ，对所有 f 均如此（而 $f \circ z$ 是常值的，但通常不同于 z）。因此，常值映射给出一个自然变换 $\mathrm{Id}_E \Rightarrow K$，所以 BE 的恒等态射与一个常值映射同伦，而 BE 是可缩的。

一个分离区间。令 I 为映射 $\varphi\colon X \to \{0,1\}$ 的集合，带有右作用 $\varphi \cdot f = \varphi \circ f$。两个常值映射在 E 的作用下保持不变，因此它们定义整体截面 $\partial_0,\ \partial_1\colon * \to I$；由于它们不同，其等化子是空预层，因此 $(I,\ \partial_0,\ \partial_1)$ 是一个分离区间（定义 5.3）。

积。 由于 X 是无限集，选择公理保证存在双射 $\beta\colon X \times X \to X$ 和 $\gamma\colon X \times \{0,1\} \to X$。这些映射

$$E \times E \to E,\ (a,b) \mapsto \beta \circ (a,b), \qquad E \times I \to E,\ (a,\varphi) \mapsto \gamma \circ (a,\varphi),$$

是双射，其逆映射为

$$m \mapsto (\mathrm{pr}_1\beta^{-1}m,\ \mathrm{pr}_2\beta^{-1}m), \qquad m \mapsto (\mathrm{pr}_1\gamma^{-1}m,\ \mathrm{pr}_2\gamma^{-1}m),$$

并且它们是右 E-集合的同构，因为积上的对角作用满足 $(a,b)\circ f = (a\circ f,\ b\circ f)$ 给出 $\beta\circ(a\circ f, b\circ f) = (\beta\circ(a,b))\circ f$，对 γ 也同理。

可表预层是无球的，因为它的元素范畴有一个终对象。由于 E 是唯一的可表预层， $E \times E$ 是两个可表对象的积中的唯一一个，并且第一个同构使其

成为可表对象，因而是无球的；再加上 E 的无圆性，这意味着 E 是全无球面的（定义 5.1）。同样， $E \times I \cong E$ 是无球的；由于 E 是唯一的可表预层，这恰好就是 I 局部无球面的条件。根据定理 5.4(2)， E 是一个测试范畴；又因为它是全无球面的，所以它是一个严格测试范畴（定义 5.1）。□

证明只使用常值映射、取值于 $\{0,1\}$ 的映射，以及双射 β， γ，再加上它们逆映射的投影。这给出了一个可数的例子。

推论 5.15。令 P 为原始递归函数 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 在复合运算下构成的幺半群。那么，将 P 视为单对象范畴时，它是一个严格测试范畴。

证明。集合 P 在复合运算下封闭，并且包含常值映射，因此命题 5.14 的无圆性论证适用。令 $I_P \subseteq P$ 为取值于 $\{0,1\}$ 的原始递归函数所成的右 P-集合，其作用为前复合；常值 0 和 1 是整体截面，并且由于它们彼此不同，它们的等化子为空，因此 I_P 是一个分离区间。我们使用两个不同的双射：康托配对函数和另一个更简单的双射，

$$\begin{aligned} &\beta\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}, && \beta(a,b) = \tfrac{1}{2}(a+b)(a+b+1)+b,\\ &\gamma\colon \mathbb{N}\times\{0,1\}\to\mathbb{N}, && \gamma(a,i) = 2a+i. \end{aligned}$$

二者都是原始递归的，因为它们由求和、积以及对偶数减半构造而成。γ 的逆映射是 $m \mapsto (\lfloor m/2 \rfloor,\ m \bmod 2)$，其分量都是原始递归的。对于 β，写作 $T(k) = k(k+1)/2$，并令

$$w(z) = \sum_{k=1}^{z} \chi\big(T(k) \le z\big), \qquad \beta^{-1}(z) = \big(w(z) - z + T(w(z)),\ z - T(w(z))\big),$$

其中， χ 是关系 $\le$的特征函数。原始递归函数的有界求和仍是原始递归函数，因此 β^{-1} 的两个连通分支都是原始递归函数。该公式是正确的：如果 $z = \beta(a,b)$且 $w = a+b$，那么$T(w) \le z \le T(w)+w < T(w+1)$，所以 w是满足$T(k) \le z$的 $k \ge 1$的数量，而这些数都满足 $k \le T(k) \le z$；也就是说， $w = w(z)$，接着$b = z - T(w)$并且 $a = w - b$。

现在，对于 a、$b \in P$和 $\varphi \in I_P$，函数 $\beta \circ (a,b)$与 $\gamma \circ (a,\varphi)$是原始递归函数的复合箭头，因而属于 P；对于 $m \in P$， $\beta^{-1} \circ m$的两个连通分支属于 P， $\gamma^{-1} \circ m$的第一个连通分支属于 P，而第二个连通分支 m模2在 $\{0,1\}$ 中取值并属于 I_P。因此，映射 $P \times P \to P$， $(a,b) \mapsto \beta \circ (a,b)$，以及 $P \times I_P \to P$， $(a,\varphi) \mapsto \gamma \circ (a,\varphi)$，都是双射，其逆映射由$\beta^{-1} \circ m$与 $\gamma^{-1} \circ m$的连通分支给出，并且它们对前复合是等变的，恰如命题 5.14的证明中那样。由于 P是唯一的可表预层，该

证明的其余步骤仍然适用： P 是无球的且全无球面的，而 I_P 是一个分离的、局部无球的区间。□

备注 5.16。 该命题背后存在一个具有许多对象的测试范畴。取基数不超过 X 的非空集合范畴的一个小骨架，并赋予其所有映射；该范畴具有有限积和一个可表分离区间 $\{0,1\}$，因此是一个严格测试范畴 [25, 例 1.6.4 及推论 1.6.9]；每个对象都是 X的一个收缩，其预层是右E-集合。其形状，即有限集 $\{0,\dots,n\}$，尚未得到识别：它们作为 E 中 X 到其有限子集的幂等回缩而存在。这里我们没有使用泛幺半群，而是采用了更简单的构造，即取单个对象的自同态幺半群。

我们不知道是否存在一个有限生成、有限表示或有限的幺半群，同时又是一个测试范畴。

5.6. **没有可测试性的普适性**。上述结果区分了两个不同层次的普适性：

(1) 实现的普适性：每种同伦类型都能表示为某个集合上 M 的作用所对应的 $S//M$。(2) 作为同伦模型的普适性：将**集合范畴**^{M} 沿由元素范畴检测到的等价进行局部化，所得范畴等价于**Hot**。

第二个性质蕴含第一个，但反过来不成立。附属于弱测试范畴的幺半群 $\mathsf{Mon}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 提供了一族自然的反例：它们能实现每种同伦类型，但当 $\mathcal{A}$ 具有多个对象时，它们甚至不是无球的。

这种正向关系可以通过复合**集合范畴**$^{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{A}!}}$**集合范畴**$^{M_{\mathcal{A}}} \xrightarrow{\mathcal{R}_{M_{\mathcal{A}}}}$**Hot**来表达。对于每个预层 X，余反射定理给出自然等价 $\mathcal{R}_{M_{\mathcal{A}}}(\iota_{\mathcal{A}!}X) \simeq B(\mathcal{A}/X)$，因此 $\iota_{\mathcal{A}!}$ 将预层在 $\mathcal{A}$上提供的所有同伦代表传递到 $M_{\mathcal{A}}$ 的作用中。然而，**集合范畴**$^{M_{\mathcal{A}}}$ 包含许多不在 $\iota_{\mathcal{A}!}$本质像中的作用，而这些作用的同伦行为并不受 $\mathcal{A}$的测试理论控制。

这种差异的原因在于类型遗忘。在 $\mathcal{A}$上的预层中，每个元素都保留着其所属 $\mathcal{A}$ 的形状。应用$\iota_{\mathcal{A}!}$后，所有元素都成为同一个集合的一部分，而那些无法作用于某个元素的运算则会生成新的分支。对于来自预层的自由作用，余反射定理表明，这些分支在同伦意义上不可见：元素范畴仍然是平移范畴中的一个满且余反射的核心。相反，对于幺半群的任意作用，未必存在一个带类型核心可对其进行余反射。

因此，篇章 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \mapsto \mathsf{Mon}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 仍保有实现同伦类型的能力，但通常不再具备测试性质。换言之，它保留了同伦论的对象，即所有对象都能被

表示出来，但未必保留它们之间的关系，而这些关系使我们能够将同伦论重建为一个局部化。实现所有空间还不等于对同伦进行建模。这一区别也阐明了上文所用术语扬弃 的含义。当一个范畴的所有对象都被认同后，类型便不再作为显式信息存在，但并未彻底消失。在自由作用中，它们仍铭刻在每个元素能够吸收的运算里，并且可以通过核反射恢复。这个构造并非单纯遗忘类型，而是将类型从对元素的外部分类，转变为其作用的内部结构。

从这一观点来看，主幺半群并不是一个取代单纯形、立方体或测试范畴中对象的新形状范畴。相反，它是将所有这些形状压缩为单一对象的结果，同时保留足够的运算，以便通过逐个作用重建任意同伦类型。这种压缩的代价是，对于任意作用而言，形状的全局组织不再可用。然而，这个代价是识别的代价，而不是统一的代价：当这些形状以幂等元的形式保留下来，而不是彼此识别时，单个幺半群既可以实现同伦类型，也可以对其进行建模（命题 5.14）。

因此，关于拓扑学能够为代数做些什么这一最初问题，得到了一个暂时性的答案，或者至少得到了一条可能的发展路径。拓扑学使我们能够赋予幺半群的作用以有趣的结构。我们不仅能够将一个拓扑空间附加到一个代数结构上；我们还知道如何将一个拓扑空间附加到幺半群的每个作用上。我们的贡献在于研究哪些同伦类型会出现，以及在某些情况下如何检验每一种同伦类型都能以这种方式出现。

反过来，这也为拓扑空间和同伦论提供了一些启示，使我们能够从新的视角看待它们。在纯粹对象层面上，同伦是关于某个特定幺半群如何作用于集合的理论，例如，附属于某个测试范畴的任意幺半群。拓扑则是变换的动力学，其中这些变换由对象按照某个测试范畴进行粘合的方式所产生。测试范畴区分形状，而幺半群区分作用的可能性。例如，维数不再表现为附着于每个元素的标签；它潜藏在元素能够吸收的运算之中。

形状并非只是被遗忘：在新的语言中，对维数和基本图形的研究，转变成了对不同部分如何变换与组合的研究。幺半群依然只有一个，但它的作用却有许多种。它无比庞大，包含着无数种同伦类型。

References

1. D. Ara、A. Burroni、Y. Guiraud、P. Malbos、F. M ´ *Polygraphs:* etayer *from rewriting to higher categories* 495, 和 S. Mimram, ，伦敦数学学会讲义丛书，第 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2025。2. G. Baumslag、E. Dyer 和 A. Heller, *The topology of discrete groups*, 《纯粹与应用代数杂志》16（1980），1–47。3. Francis Borceux 和 Dominique Dejean, *Cauchy completion in category theory*, 《拓扑学与范畴微分几何札记》27（1986），第2期，133–146。4. D.-C. Cisinski, *Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie*, Ast´erisque，第308卷，法兰西数学会，巴黎，2006。5. D.-C. Cisinski 和 G. Maltsiniotis, *La catégorie* Θ *de Joyal est une catégorie test*, 《纯粹与应用代数杂志》215（2011），962–982。6. F. Conduch ´ *Au sujet de l'existence d'adjoints à droite aux foncteurs "image* e, ，巴 *réciproque" dans la catégorie des catégories* ´ **275** 黎科学院报告，A-B辑（1972），A891–A894。7. Mat´ıas L. del Hoyo, *On the subdivision of small categories*, 《拓扑学及其应用》155（2008），第11期，1189–1200。8. S. Eilenberg 和 S. Mac Lane, *General theory of natural equivalences*, 《美国数学会会刊》58（1945），231–294。9. Z. Fiedorowicz, *Classifying spaces of topological monoids and categories*, 《美国数学杂志》106（1984），301–350。10. B. Fong 和 D. I. Spivak, *An invitation to applied category theory: seven sketches in compositionality* 2019 ，剑桥大学出版社，剑桥，。11. J. Giraud, *Méthode de la descente*，法国数学会回忆录，第2卷，法国数学会，巴黎，1964。12. A. Grothendieck, *Pursuing stacks (à la poursuite des champs). Volume I*, 《文献数学》（巴黎），第20卷，法国数学会，巴黎，2022，由 G. Maltsini- otis 编；手稿写于1983年。13. A. Hatcher, *Algebraic topology*，剑桥大学出版社，剑桥，2002。14. P. S. Hirschhorn, *Model categories and their localizations*，数学调查专著，第99卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003。15. C. M. Hurwitz, *On the homotopy theory of monoids*, 《澳大利亚数学会杂志》A辑47（1989），171–185。16. A. Joyal 和 M. Tierney, *Strong stacks and classifying spaces*, 《范畴论》（科莫，1990），数学讲义，第1488卷，施普林格，柏林，1991，第213–236页。17. D. M. Kan 和 W. P. Thurston, *Every connected space has the homology of a* $K(\pi, 1)$，《拓扑学》15（1976），253–258。18. C. Kennett、E. Riehl、M. Roy 和 M. Zaks, *Levels in the toposes of simplicial sets and cubical sets* **215** 2011 949 961 ，《纯粹与应用代数杂志》（），–。19. Dmitry Kozlov, *Combinatorial algebraic topology*，算法与计算数学丛书，第21卷，施普林格，柏林、海德堡，2008。20. R. Kr¨omer, *Tool and object: a history and philosophy of category theory*，科学网络历史研究丛书，第32卷，Birkh¨auser，巴塞尔，2007。21. F. W. Lawvere, *Qualitative distinctions between some toposes of generalized graphs*, 《计算机科学与逻辑中的范畴》（科罗拉多州博尔德，1987），当代数学，第92卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1989，第261–299页。22. , *Some thoughts on the future of category theory*, 《范畴论》（科莫，1990），数学讲义，第1488卷，施普林格，柏林，1991，第1–13页。23. M.-J. Lee, *Homotopy for functors*, 《美国数学会会刊》36（1972），571–577。24. , *Erratum to: "Homotopy for functors"*, 《美国数学会会刊》42（1974），648–650。

25. G. Maltsiniotis, *La théorie de l'homotopie de Grothendieck*, 《Ast´erisque》第301卷，法国数学会，巴黎，2005年。26. D. McDuff, *On the classifying spaces of discrete monoids*, 《拓扑学》**18** （1979年），313–320。27. J. Milnor, *On spaces having the homotopy type of a CW-complex*, 《美国数学会会刊》**90** （1959年），272–280。28. C. Rezk, *A model category for categories*, 预印本，2000年。29. E. Riehl, *Category theory in context*, Dover Publications，米尼奥拉，纽约州，2016年。30. O. Schreier, *Die Untergruppen der freien Gruppen*, 《汉堡大学数学研讨会论文集》**5** （1927年），161–183。31. D. I. Spivak, *Functorial data migration*, 《信息与计算》**217** （2012年），31–51。32. , *Database queries and constraints via lifting problems*, 《数学结构与计算机科学》**24** （2014年），第e240602号文章，共55页。33. R. W. Thomason, *Homotopy colimits in the category of small categories*, 《剑桥哲学会数学会刊》**85** （1979年），91–109。34. J. H. C. Whitehead, *Combinatorial homotopy. I*, 《美国数学会通报》**55** （1949年），213–245。35. M. Zawadowski, *Introduction to test categories*, C. Kapulkin 整理的 M. Zawadowski 演讲笔记，见 https://www.math.uwo.ca/faculty/kapulkin/notes/ test_categories.pdf。

Isaac Carcacía-Campos、 Departamento de Matemáticas、 Universidade de Santiago de Compostela、 15782-SPAIN*Email address*: isaac.c.campos@usc.es