高余秩 Kac–Moody 代数的系统构造

Simon Beaudoin[1⋆]、Quentin Bonnefoy[1†]、Alessio Marrani[2‡]、Michel Rausch de Traubenberg[1§] 和 Victor Saulquin[1¶]

1 斯特拉斯堡大学、法国国家科学研究中心、IPHC UMR7178，F-67037 斯特拉斯堡 Cedex，法国**2** 数学与理论物理中心，赫特福德大学，哈特菲尔德，英国

⋆ simon.beaudoin@iphc.cnrs.fr † quentin.bonnefoy@iphc.cnrs.fr ‡ a.marrani@herts.ac.uk
§ michel.rausch@iphc.cnrs.fr ¶ victor.saulquin@iphc.cnrs.fr

Group ICGTMP

第*36*届物理学群论方法国际研讨会 巴利亚多利德，*2026*年*7*月*13*日至*17*日doi:10.21468/SciPostPhysProc.?

arXiv:2611.32666v1 [math.RA] 24 Nov 2026

摘要

我们由两个六边形环构成一个六角棱柱，并以固定的正整数边重数迭代倍增构造，从而生成一族不定 Kac–Moody 代数。该棱柱的谱决定了这一族中每个代数的确切余秩。在每个非消失的奇偶类中，余秩呈指数增长，而其与矩阵大小之比趋于零。对于十二节点代数，我们确定了两个中心方向，描述了前两个分次层级，并刻画了其酉最高权模的整数中心荷。

作者署名版权声明。本作品投稿至 SciPost Phys. Proc. 许可证信息将在发表时公布。出版信息将在发表时公布。

收稿日期 接受日期 发表日期

目录

1 引言 2 Cartan 矩阵、中心和零向量 2 3 修正立方体的谱 3 3.1 种子与倍增操作 3 3.2 精确重数与奇偶性 4

4 十二节点代数 **7**
4.1 最小实现 7 4.2 双分次的前两个层级 8 4.3 幺正最高权与中心特征 10

5 结论 11 参考文献 12

1 引言

广义卡坦矩阵 A 的余秩可以从两个方面理解。在李代数方面，它是中心的维数。当 $A = (a_{ij})$ 为对称矩阵时，其余秩等于无环多重图 G 的邻接特征值 2 的重数。令 G 的每一对不同顶点 i、j 之间恰有 $-a^{ij}$ 条边，则其邻接矩阵 $\mathrm{Adj}(G)$ 满足

$$A = 2I - \mathrm{Adj}(G)\,, \qquad \dim(\ker(A)) = \mathrm{mult}_{\mathrm{Adj}(G)}(2)\,. \tag{1}$$

连通有限型图的余秩为零，而仿射图的余秩为一。在不定型中，不存在独立于顶点数的上界。哪些连通图会产生许多中心方向？当余秩超过一时，仿射零根又会如何变化？

我们的出发点是 [1]的修正立方体构造。前两个图分别是一个三顶点路径和一个六边形环。将两个环图的对应顶点连接起来，就得到一个六角棱柱。其 Cartan矩阵的阶为十二，秩为十，并且有一个负特征值。在棱柱之后，固定一个正整数L。在每一步中，取前一个图的两个副本，并用L 条平行边连接每一对对应顶点。每个旧特征值都会分裂成两个平移后的特征值。它们的重数给出了余秩的精确表达式，并解释了从一条边变为两条边为何会改变后续各步的行为。参考文献 [1] 还讨论了另一个由加权立方体构成的族。对于该族中的普通偶维立方体，同一个二项式余秩公式由 Terence C 于一月 2025 [2]记录。

棱柱还提供了一个足够小的例子，以便沿着李代数考察两个中心方向。在第 4 节中，我们标记两个相邻的顶点。它们的单根系数给出一个双分次，而它们的邻点决定了最初几个分次分量的极端权。在第二层级，标记顶点之间的边决定了可能出现哪些 Serre 关系。这给出了混合分量的直接计算。随后，我们考察酉最高权模中会出现哪些中心荷对，并展示每个整数对之上都有无穷多个支配权。

研究不定图的一项动机，源于 Kac–Moody 对称性在引力和超引力中的应用，这项工作始于 Julia 的研究 [3]。E_{10} 对应关系将陪集模型的低层级与十一维超引力在类空奇点附近的方程进行比较 [4,5]。West 提出了 E_{11} 作为 M 理论的基础对称性 [6]。这里，物理上的对应之处在于采用了层分解。对于下文所研究图，是否存在场论实现仍是一个开放问题。

2 Cartan矩阵、中心与零向量

设$A = (a_{ij})$ 为一个阶数为r的不可分解可对称化广义卡坦矩阵。因此，$a_{ii} = 2$，$a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\le 0}$ 对于$i \neq j$成立，并且当$a_{ji} = 0$时，$a_{ij} = 0$ 。不可分解意味着其关联图是连通的。固定一个正对角矩阵D ，使得DA为对称矩阵。当DA为正定时，该类型为有限型；当其为半正定且奇异时，该类型为仿射型。在后一种情况下，其核是一维的。在所有其他情况下，注意该类型是不定的 [7–10]。

令 $s = \dim(\ker(A))$。一个最小实现由一个维数为$r + s$的空间 $\mathfrak{h}$ 、线性无关的简单余根$h_i \in \mathfrak{h}$ 以及线性无关的单根 $\alpha_j \in \mathfrak{h}^*$ 组成，其中 $\alpha_j(h_i) = a^{ij}$ 对$1 \le i, j \le r$成立。记$\mathfrak{h}' = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}\, h_i$ 为余根张成空间。复代数 $\mathfrak{g}(A)$ 由以下元素生成

由 $\mathfrak{h}$ 和e_i、f_i 生成，并满足

$$\begin{aligned} [h,h'] &= 0\,, & [e_i,f_j] &= \delta_{ij}h_i\,, \\ [h,e_i] &= \alpha_i(h)e_i\,, & [h,f_i] &= -\alpha_i(h)f_i\,, \\ (\mathrm{ad}(e_i))^{1-a_{ij}}e_j &= 0\,, & (\mathrm{ad}(f_i))^{1-a_{ij}}f_j &= 0 \qquad (i\neq j)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

这里 $h, h' \in \mathfrak{h}$。对于可对称化的 A，这些关系给出了 Chevalley–Serre 表示[9, 11]。关于这一构造及其根系的介绍也可见 [12, 13]。 $\mathfrak{g}(A)$ 的中心由满足 $Au = 0$ 的元素 $u = \sum_{i=1}^{r} u_i h_i \in \mathfrak{h}'$ 组成。在根格 $Q = \bigoplus_i \mathbb{Z}\alpha_i$ 上，我们用 $\langle \cdot,\cdot \rangle$ 表示不变对称双线性形式，并将其归一化为 $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = (DA)_{ij}$。其在 $Q \otimes \mathbb{R}$ 中的根基由满足 $Av = 0$ 的 $\delta_v = \sum_i v_i \alpha_i$ 构成。因此，中心对应左核，而根根式对应右核。对于 (1) 中的对称矩阵，同一个系数向量同时适用于两者。

命题2.1。 对于不可分解可对称化广义 *Cartan* 矩阵，若其核中存在非零实向量 $v \geq 0$，则必为仿射型。对于不可分解不定广义 *Cartan* 矩阵，每个非零实核向量的系数都同时具有正负号。因此，在不定型中，整数根式不包含任何根。

证明。 $N = 2I - A$ 是不可约非负矩阵，并且 $Nv = 2v$ 因为 $v \in$ 核(A)。如果 $v \geq 0$ 的一个坐标为零，则每个相邻坐标也都为零，从而所有坐标均为零。因此 $v > 0$，而 Perron–Frobenius 定理给出 $\rho(N) = 2$ 是一个简单特征值。在可对称化情形下，N 与一个实对称矩阵相似。因此 $D^{1/2}AD^{-1/2}$，从而其合同矩阵 DA是余秩为一的半正定矩阵。这就是仿射判据 [9, 14]。任意根的系数向量在单根基中要么非负，要么非正。关于整数根式的断言随即成立。

□

一个向量的平方可以为零，但它不一定属于根基。这一区别在棱柱中便已显现：六边形环承载着一个各向同性虚根，它与另一层的配对非零（第 4.1节）。

3 修正立方体的谱

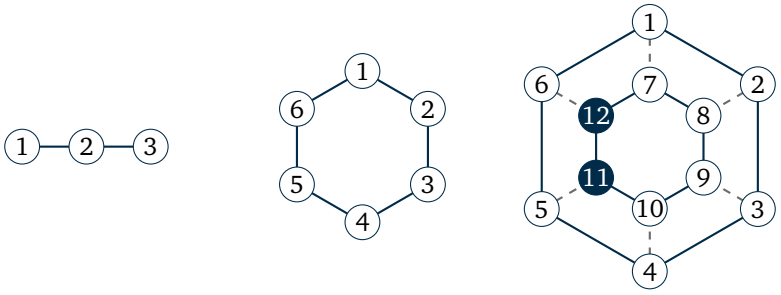
3.1 种子与加倍操作

记 C_6 为六边形环，记 $K_2^{(L)}$ 为一张双顶点多重图，其两个顶点之间有 $L \geq 1$ 条边。我们记作 $K_2 = K_2^{(1)}$。从一个正方形中删除一个顶点，得到三顶点路径 G_1。在下一步中，将这条路径的两个副本在相对的端点处连接，形成 $G_2 = C_6$，；它也可以通过删除立方体的两个对跖顶点得到。这条路径对应有限代数 $\mathfrak{a}_3 \simeq \mathfrak{sl}_4$，六边形环则具有非扭曲仿射型 $\widehat{\mathfrak{a}}_5$ [15]。全文中，矩阵 A_n 的下标表示构造步骤。在第三步中，用一条边连接两个六边形环中相对应的节点。由此得到棱柱 $G_3 = C_6 \,\square\, K_2$，，其编号见图1。棱柱的每个正方形面都具有仿射型 $\widehat{\mathfrak{a}}_3$。参数 L 在棱柱之后的第一次加倍中引入。

对于笛卡尔积 $G \square H$，邻接矩阵是 $\mathrm{Adj}(G)\otimes I$ 与 $I \otimes \mathrm{Adj}(H)$[16]之和。如果 A 是 G的Cartan矩阵，则 $G \,\square K_2^{(L)}$ 的 Cartan矩阵按层序排列为

$$\begin{pmatrix} A & -LI \\ -LI & A \end{pmatrix}. \tag{3}$$

对于$Ax = \mu x$，向量 $(x、x)$ 和 $(x、-x)$ 的特征值分别为 $\mu - L$ 和 $\mu + L$。它们涵盖了整个谱。因此，如果 $P(z) = \det(zI - A)$，则特征多项式



G_1 $G_2 = C_6$ $G_3 = C_6 \square K_2$

图1：三个种子图。棱柱的虚线边连接 i 与 $i+6$，且重数为一。填充顶点是在第 4.2 节中用于双分次的顶点。

经过一次倍增后为$P(z-L)P(z+L)$。同样的论证适用于任意初始连通无环多重图。棱柱构造明确固定了初始重数。

对于环图，$A_2 = 2I_6 - \mathrm{Adj}(C_6)$的特征值为 $2-2\cos(2\pi j/6)$，其中 $0 \le j < 6$。将这些值平移 ± 1 后得到

$$A_3 = \begin{pmatrix} A_2 & -I_6 \\ -I_6 & A_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{c|ccccccc} \mu & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline d_3(\mu) & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{array} \tag{4}$$

其中 $d_3(\mu)$为重数。因此，A_3的惯性指数为 $(9,1,2)$，因为它有 9 个正特征值（按重数计）、1 个负特征值和 2 个零特征值。第 $n = q+3$ 步的图为

$$G_n^{(L)} = C_6 \square K_2 \square (K_2^{(L)})^{\square q}, \qquad |V(G_n^{(L)})| = 12 \cdot 2^q \tag{5}$$

其中 V(G) 表示 G 的顶点集。我们将其 Cartan矩阵记为 $\mathrm{A}^{(L)}\mathrm{n} = 2\mathrm{I} - \mathrm{Adj}(\mathrm{G}^{(L)}\mathrm{n})$。特别地，对每个 L，$\mathrm{A}_3^{(L)} = \mathrm{A}_3$。当 q = 0 时，空乘积给出棱柱。为直观地看出修改后的立方体，将普通 (n + 1) 维立方体的顶点标记为 $\{0,1\}^3 \times \{0,1\}^{n-2}$。删除前三个坐标为 000 或 111 的顶点。所得导出子图就是 (5) 中的底层简单图。在最后 n − 2 个坐标方向中，一个方向对应单重边，其余 q 个方向对应重数为 L 的边。(5) 中的每个图都是连通且正则的，其度为 3+q L（按重数计边）。其常向量是 $\mathrm{A}^{(L)}$ n 的特征值为−1−qL 的特征向量。因此，这些矩阵全都是不定矩阵，包括该族中可逆的矩阵。

3.2 精确重数与奇偶性

对于 $q \ge 0$，设

$$b_q(t) = \begin{cases} \binom{q}{(q+t)/2}, & (q+t)/2 \in \{0,1,\dots,q\}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6}$$

特别地，$b_q(t) = b_q(-t)$。这一约定允许给出一个简洁的统一公式，该公式结合$d_3(\mu)$刻画整个谱。它包含奇偶性和取值范围条件，因为当$t \not\equiv q$ 模 2 或 $|t| > q$时，该公式为零。

命题 3.1（[1]）。令 $S = \{-1,0,1,2,3,4,5\}$ 为 A 的谱[3]。在第 $n = q+3$步，λ的谱重数和余秩 $c_n(L)$ 分别为

$$d_n^{(L)}(\lambda) = \sum_{\mu \in S} d_3(\mu)\, b_q\big((\lambda-\mu)/L\big), \tag{7}$$

$$c_n(L) = \sum_{\mu \in S} d_3(\mu)\, b_q(\mu/L). \tag{8}$$

证明。种子特征向量与 q 个对称或反对称二分量向量的每一个张量积，都是该乘积的特征向量。取 q 个移位中的 j 个为 +L，可得$\lambda = \mu + L(2j - q)$，其重数为 $d_3(\mu)\binom{q}{j}$。将同一 λ 谱的贡献相加即可证明（7）。在（7）中令 $\lambda = 0$，并利用 $b_q(-t) = b_q(t)$，即得（8）。□

等价地，所有重数都是以下表达式的 Laurent 系数

$$\sum_{\lambda} d_n^{(L)}(\lambda) x^{\lambda} = \left(x^{-1} + 2 + x + 4x^2 + x^3 + 2x^4 + x^5\right)\left(x^{-L} + x^{L}\right)^{q} . \tag{9}$$

例如，在$n = 4$处，可读出$c_4(1) = d_3(-1) + d_3(1) = 2$和$c_4(2) = d_3(-2) + d_3(2) = 4$，其中$d_3$在$S$之外取零。

对于余秩，只需保留可被L整除的种子特征值。表1 将由此得到的五种可能情况区分开来。对于$L = 3$ 和 5，唯一保留下来的非零种子特征值是L 本身，其重数为一。因此，这两个序列逐项相同。对于$L \geq 6$，只有零特征值保留下来。特别是

$$c_{q+3}(L) = \begin{cases} 2\binom{q}{q/2}, & q \text{ even}, \\ 0, & q \text{ odd}, \end{cases} \qquad L \geq 6 . \tag{10}$$

这也解释了为什么随着顶点不断增加，连通不定图可以在正余秩和满秩之间交替变化。

表 1：每个 L 的精确余秩和渐近系数。在第二列中，b^j 表示 $b_q(j)$，其中 $q = n - 3$。最后两列分别给出了推论 3.2 中 q 为偶数和奇数时的系数。

L	$c_{q+3}(L)$	$M_{L,0}$	$M_{L,1}$
1	$2b_0 + 2b_1 + 4b_2 + b_3 + 2b_4 + b_5$	8	4
2	$2b_0 + 4b_1 + 2b_2$	4	4
3, 5	$2b_0 + b_1$	2	1
4	$2b_0 + 2b_1$	2	2
≥ 6	$2b_0$	2	0

在取极限之前，连续步骤之间的一些差异更容易看出。将帕斯卡恒等式应用于表 1的前两行可得

$$c_n(1) = \begin{cases} \binom{n-2}{(n-2)/2} + \binom{n-2}{(n-6)/2}, & n \text{ even}, \\ 2\binom{n-1}{(n-3)/2}, & n \text{ odd}, \end{cases} \tag{11}$$

$$c_n(2) = \begin{cases} 2\binom{n-2}{(n-2)/2}, & n \text{ even}, \\ \binom{n-1}{(n-1)/2}, & n \text{ odd}. \end{cases} \tag{12}$$

这些公式对 $n \geq 3$成立；当二项式系数的下标超出其范围时，将其视为零。对于 $m \geq 2$，可得

	$c_{2m+1}(L)/c_{2m}(L)$	$c_{2m+2}(L)/c_{2m+1}(L)$
$L = 1$	$\dfrac{2m(2m-1)}{m^2 - m + 1}$	$\dfrac{m^2 + m + 1}{m(m+2)}$
$L = 2$	$\dfrac{2m-1}{m}$	2

(13)

因此，对于 $L = 1$，余秩在从 $2m + 1$ 到 $2m + 2$ 的每次转变中都下降，其中 $m \geq 2$，并在其间的步骤中上升。对于 $L = 2$，它从棱柱开始在每一步都增加。

表2：前十二个步骤。步骤一和步骤二先于L的引入。从步骤三开始，阶数为 $12\cdot 2^{n-3}$。

n	阶数	$L=1$	$L=2$	$L=3,\ 5$	$L=4$	$L\geq 6$
1	3	0	0	0	0	0
2	6	1	1	1	1	1
3	12	2	2	2	2	2
4	24	2	4	1	2	0
5	48	8	6	4	4	4
6	96	7	12	3	6	0
7	192	30	20	12	12	12
8	384	26	40	10	20	0
9	768	112	70	40	40	40
10	1536	98	140	35	70	0
11	3072	420	252	140	140	140
12	6144	372	504	126	252	0

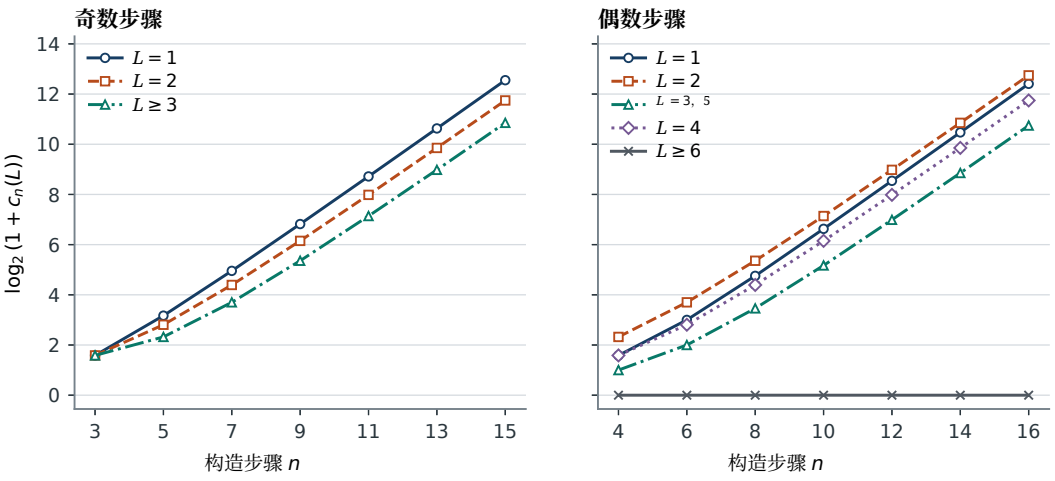


图2：奇数和偶数构造步骤中修正立方体的余秩。在每个步骤 n，标记点的纵坐标为 $\log_2(1+c_n(L))$，其中 $c_n(L)$ 是由（8）给出的精确整数余秩。余秩为零时绘制在零点处。所有 $L\geq 3$ 在奇数步骤上重合。

表 2 给出了整数值，而图2 展示了每种边重数对应的两个奇偶序列。

推论 3.2。 固定 L。在奇偶类 $q \equiv p \pmod 2$ 上，令 $M_{L,p} = \sum_{\mu \in S,\ \mu/L \in 2\mathbb{Z}+p} d_3(\mu)$。若 $M_{L,p} > 0$，则沿该奇偶类，

$$c_{q+3}(L) = M_{L,p}\, 2^q \sqrt{\frac{2}{\pi q}}\,(1 + O(q^{-1}))\,. \tag{14}$$

若 $M_{L,p} = 0$，则整个奇偶类上的余秩均为零。特别地，对每个 L，$c_n(L)/|V(G^{(L)}\ n)| \to 0$ 。

证明。 固定一个与 q 奇偶性相同的整数 t 。斯特林公式给出

$$b_q(t) = 2^q \sqrt{2/(\pi q)}\,\big(1 + O(q^{-1})\big)\,. \tag{15}$$

奇偶性相反或 t 在（8）中取非整数值的所有项均消失。只有七个种子特征值，因此可以逐项求和该估计式。除以 $12 \cdot 2^q$ 即可得到最后一个断言。

□

因子 $q^{-1/2}$ 具有简单的解释。倍增构造中有 2^q 种符号选择。只有当 q 个符号之和等于由种子特征值确定的有限多个值之一时，才可能出现核向量。该和的任意一个给定值，仅对应大约 $q^{-1/2}$ 比例的 2^q 符号选择。

4 十二节点代数

4.1 最小实现

我们采用图 1中的编号方式，其中顶点 11 和 12 已标出。A_3 的核是特征值为 1 时 $(u,\ u)$ 的特征空间的对称提升。事实上，反对称提升要求 -1 是 A_2的一个特征值。定义两个列向量如下：

$$\begin{aligned} v_1 &= (u_1, u_1)\,, & u_1 &= (-1,-1,0,1,1,0)\,,\\ v_2 &= (u_2, u_2)\,, & u_2 &= (1,0,-1,-1,0,1)\,. \end{aligned} \tag{16}$$

两者都满足 $A_2 u_a = u_a$，此处六元组按列读取。矩阵 $(v_1\ v_2)$ 的最后两行构成 I_2，因此 v_1，v_2 线性无关并张成二维核。一个核向量在该基中的系数即为其最后两个坐标。因此 v_1，v_2 也构成 $\ker(A_3) \cap \mathbb{Z}^{12}$ 的一个 $\mathbb{Z}$- 基。在此选取下，中心元与根基向量具有相匹配的坐标，

$$K_a = \sum_{i=1}^{12} (v_a)_i h_i\,, \qquad \delta_a = \sum_{i=1}^{12} (v_a)_i \alpha_i \qquad (a = 1,2)\,. \tag{17}$$

K_a 张成 $\mathfrak{g}(\mathrm{A}_3)$ 的中心，而 δ_a 张成根根式。根据命题2.1，后者的任何非零整数线性组合都具有混合符号。和 $\eta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_6$展示了零向量的另一种可能性。节点1、…、6上的子图具有仿射型 $\widehat{\mathfrak{a}}_5$，其六个切瓦莱三元组生成了它的导出仿射代数。该仿射根系的本原正虚根是 η，因此 η 是 $\mathfrak{g}(\mathrm{A}_3)$的一个根。令$\mathrm{c}_\eta = \binom{\mathbf{1}_6}{0_6}$ 为它在单根基中的系数列，其中 $\mathbf{1}_6 = (1,\ldots,\ 1)^{\mathrm{T}}$。由等式(4)可得$\mathrm{A}_3 \mathrm{c}_\eta = \binom{0_6}{-\mathbf{1}_6}$。因此

$$\langle \eta, \eta \rangle = c_\eta^{\mathsf{T}} A_3 c_\eta = 0\,, \qquad \langle \eta, \alpha_{6+j} \rangle = -1 \quad (1 \le j \le 6)\,. \tag{18}$$

每个横档都将 η与另一层的一个顶点配对，因此这个各向同性根位于整个根格的根基之外。

令H为节点 1、...、10 上的主子矩阵，并记为

$$A_3=\begin{pmatrix} H & B \\ B^{\mathsf{T}} & C \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{C}=\begin{pmatrix} H & B & 0 \\ B^{\mathsf{T}} & C & I_2 \\ 0 & I_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

这里，$C = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$。若 ϵ_i 表示 i在 $\mathbb{R}^{10}$中的第 B 个坐标向量，则其列为$-(\epsilon_5+\epsilon_{10})$以及 $-(\epsilon_6+\epsilon_7)$。直接计算可得 $\det H = -80$。(16) 的坐标为建立非退化性的另一种方法。前十个单根的张成空间是根基的补空间，而将该形式限制在其根基补空间上是非退化的。根据（$(9,1,0)4$），其惯性指数为。

将d_1,d_2 添入余根张成空间，并令 $\alpha_i(d_a)=\delta_{i,10+a}$。将基排序为先放置全部十二个$h_i$，随后是$d_1$,$d_2$。在此基下，Cartan 子代数上的不变形式可选取为具有 Gram 矩阵 $\mathcal{C}$ 的形式。以K_1,K_2 替代h_{11},h_{12} 后，得到

$$H \oplus \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

特别地，$\langle K_a, d_b\rangle = \delta_{ab}$以及 $\delta_a(d_b)=\delta_{ab}$。扩展形式在该基的实张成空间上的惯性指数为 $(11,3,0)$。十二个单根在由此得到的十四维 Cartan 子代数上彼此独立。这是一个最小实现。它还确定了分次算子的符号，

$$[d_a,e_i]=\delta_{i,10+a}e_i\,, \qquad [d_a,f_i]=-\delta_{i,10+a}f_i\,. \tag{21}$$

K_a 与整个代数交换。次数算子 d_a 属于 $\mathfrak{g}(A_3)$，并通过导子作用于其导出代数 $\mathfrak{g}'(A_3)$。事实上，$\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}'(A_3)=\mathfrak{h}'$，且每个 δ_b 在 $\mathfrak{h}'$上消失，而 $\delta_b(d_a)=\delta_{ab}$。因此，$d_a$ 位于导出代数之外。

4.2 双分次的前两个层级

对于根 $\beta=\sum_i t_i\alpha_i$，令 $\deg\beta=(t_{11},t_{12})$，并将 $\mathfrak{h}$ 置于零度。记 $\mathfrak{g}_{u,v}$ 为 $\mathfrak{g}(A_3)$中相应的直和项。根空间只出现在 u、v 同为非负或同为非正的情形。十个未标记节点上的代数 $\mathfrak{l}=\mathfrak{g}(H)$ 是不定 Kac–Moody 代数，其 Cartan矩阵非奇异。零分量是

$$\mathfrak{g}_{0,0}=\mathfrak{l}\oplus\mathbb{C}K_1\oplus\mathbb{C}K_2\oplus\mathbb{C}d_1\oplus\mathbb{C}d_2\,. \tag{22}$$

事实上，零度的正根完全支撑在未标记节点上，对其负根也适用同样的推理。其余的 Cartan 方向与 $\mathfrak{l}$ 对易。

令 p_a 表示 v_a 的前十个条目，并令 ω_i 表示 $\mathfrak{l}$ 的基本权，其中对于 i 和 $j\le 10$，有 $\omega_i(h_j)=\delta_{ij}$。利用 H^{-1} 将这些权与前十个单根张成空间中的元素对应起来。定义 $J_1=\{5,10\}$ 以及 $J_2=\{6,7\}$。用 $B_{\bullet a}$ 表示 (19) 中 B 的第 a 列。由于 $Hp_a=-B_{\bullet a}$，权 $\psi_a=\sum_{i=1}^{10}(p_a)_i\alpha_i$ 为

$$\psi_1=\omega_5+\omega_{10}\,, \qquad \psi_2=\omega_6+\omega_7\,, \qquad \alpha_{10+a}=\delta_a-\psi_a\,. \tag{23}$$

因此，$x_a=e_{10+a}$ 的 $\mathfrak{l}$-权为 $-\psi_a$。例如，$[h_5,e_{11}]=-e_{11}$，尽管 $\psi_1(h_5)=1$。这个符号直接由边 5–11 得出。

将极端权为 $-\psi_a$ 的不可约可积最低权模记为V_a，将其限制对偶最高权模记为$V^\vee{}_a$（即在逆变作用下对偶权空间的直和）。于是，作为 $\mathfrak{l}$-模，

$$\mathfrak{g}_{1,0}\simeq V_1\,, \qquad \mathfrak{g}_{0,1}\simeq V_2\,, \qquad \mathfrak{g}_{-1,0}\simeq V_1^\vee\,, \quad \mathfrak{g}_{0,-1}\simeq V_2^\vee\,. \tag{24}$$

(24) 中的每个正分量作为 $\mathfrak{l}$-模，均由其标记简单生成元生成。双次数为 $(1,0)$ 的正括号词恰好包含一次 e_{11} 。反复运用雅可比恒等式，可将其写成由未标记生成元与 e_{11}构成的迭代括号之和。在 $(0,1)$ 处运用同样的论证，则从e_{12}开始。特别地，

$$\mathfrak{g}_{1,0} = U(\mathfrak{n}_+(\mathfrak{l}))\cdot e_{11}\,, \qquad \mathfrak{g}_{0,1} = U(\mathfrak{n}_+(\mathfrak{l}))\cdot e_{12}\,. \tag{25}$$

每个 f_j 满足 $j \le 10$ 会消去 x_a，而 Serre 关系给出 $(\mathrm{ad}\, e_j)^{1-(A_3)_{j,\ 10+a}} x_a = 0$。结合权 $-\psi_a$，这些就是 V_a [9, 第 9–10]章的定义性最低权关系。它们给出从 V_a 到由 x_a生成的分量的满射。由于 $x_a \neq 0$ 和 V_a 不可约，该映射是同构。负次数部分可由 Chevalley 对合得到，也可利用相反根空间之间的非退化不变配对得到。

前六个节点区分了V_a 与其对偶。它们的余根和$h_{\mathrm{cyc}} = \sum_{i=1}^{6} h_i$ 作用于x_a 时的特征值为 -1。我们有 $\alpha_j(h_{\mathrm{cyc}}) = 0$ 对应于$j \le 6$，而 $\alpha_j(h_{\mathrm{cyc}}) = -1$对应于 $7 \le j \le 10$。因此，未标记生成元的升算作用会使h_{cyc} 在V_a 上的谱保持在 $\mathbb{Z}_{\le -1}$内。在限制对偶上，所有特征值均为正，因此这两个模不同构。

同一个表示决定了总层级二时的情形。用 $e_j x_a$ 表示伴随作用 $[e_j, x_a]$ 在 V_a中的作用，并令 $U(\mathfrak{l})$ 在张量上按对角方式作用。下面的描述既说明了关系子模，也说明了相应的环境张量积。

命题 4.1。 作为 $\mathfrak{l}$-模，李括号诱导出如下同构

$$\mathfrak{g}_{1,1} \simeq V_1 \otimes V_2\,, \tag{26}$$

$$\mathfrak{g}_{2,0} \simeq \bigwedge^2 V_1/R_1\,, \qquad \mathfrak{g}_{0,2} \simeq \bigwedge^2 V_2/R_2\,, \tag{27}$$

$$R_a = \sum_{j\in J_a} U(\mathfrak{l})\big(x_a \wedge (e_j x_a)\big)\,. \tag{28}$$

R_a 的所示生成元是权为 $-2\psi_a + \alpha_j|_{\mathfrak{h}_\mathfrak{l}}$ 的最低权向量。

证明。从正 Serre 表示开始，首先施加未标记生成元之间的关系。将所得的未标记代数记为 $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_+(\mathfrak{l})$。此阶段的正代数为 $\mathfrak{n} \ltimes \mathrm{F}(W)$，其中 F 表示自由李代数，而 $W = U(\mathfrak{n}) \otimes (\mathbb{C}x_1 \oplus \mathbb{C}x_2)$。事实上，$\mathfrak{n}$在 W 上的左作用通过导子延拓到 $\mathrm{F}(W)$。反过来，满足未标记关系的生成元的任意像都会将 $u \otimes x_a$ 映射为 u 作用于 x 的像所得到的迭代伴随作用a。于是，$\mathrm{F}(W)$的泛性质给出了逆表示。仅含有一个标记生成元的关系在 W 中是线性的。将其 $\mathfrak{n}$-张成空间商掉后，根据 (24)，$\mathrm{F}(W)$被替换为 $\mathrm{F}(V_1 \oplus V_2)$。其余的 Serre 关系连同它们的 $\mathfrak{n}$-平移生成其中的一个齐次理想。

在总次数二中，自由分量为 $\bigwedge^2 V_1$, $V_1 \otimes V_2$ 和 $\bigwedge^2 V_2$。两个相同标记生成元之间的定义关系具有如下形式：$[x_a, [x_a, e_j]] = 0$，其中 $j \in J_a$。它在外平方中的像（相差一个符号）为 $x_a \wedge (e_j x_a)$。所有未标记的正向平移都必须商去。这个关系空间的每个生成元都被所有 f_i（其中 $i \le 10$）湮灭，因为 $f_i(e_j x_a) = -\delta_{ij} h_j x_a$ 是 x_a的倍数。因此，它的正向平移张成了其整个$\mathfrak{l}$-子模。最后，这两个标记顶点相邻。它们之间的 Serre 关系的双次数分别为 $(2,1)$和 $(1,2)$。在正向表示中，括号运算只会增大标记系数，因此这些关系对双次数 $(1,1)$ 没有贡献。

□

定义每个 R_a 的两个直和项本身也可以加以识别。由于 $j \in J_a$，穿过 x_a 的根串给出 $e_j x_a \neq 0$，因此命题中的外积非零。其最低权为 $-\gamma_{a,j}$，其中 $\gamma_{a,j} = 2\psi_a - \alpha_j|_{\mathfrak{h}_\mathfrak{l}}$ 是支配的。每个向量都生成一个不可约可积最低权模

。对于固定的 a，这两个权不同，因为 H 是非奇异的，所以该和是直和。在基本权坐标中，这两对为

$$(\gamma_{1,5},\gamma_{1,10}) = (\omega_4+\omega_6+2\omega_{10},\ \omega_4+2\omega_5+\omega_9)\,,$$
$$(\gamma_{2,6},\gamma_{2,7}) = (\omega_1+\omega_5+2\omega_7,\ \omega_1+2\omega_6+\omega_8)\,. \tag{29}$$

在混合分量中，$[e_{11},e_{12}]$ 是$x_1\otimes x_2$ 的像，并生成权为 $-\psi_1-\psi_2$的最低权成分。负分量具有相应的对偶描述。

4.3 酉最高权与中心特征

我们使用如下定义的共轭线性反自同构：$e^*{}_i = f_i$，$h^*{}_i = h_i$ 以及$d^*{}_a = d_a$。紧实形式由满足 Xsatisfying $X^* = -X$</style>的元素X 组成。酉最高权模是指带有正定厄米形式的代数最高权模，其中X^*的作用是X的伴随算子。令$L(\Lambda)$为最高权为Λ的不可约的 模，令v_Λ 为单位最高权向量。对于所有十二个Dynkin标号，令 $\ell_i = \Lambda(h_i)$，并使用坐标

$$n_i = \ell_i\ (1\le i\le 10)\,,\qquad k_a = \Lambda(K_a)\,,\qquad m_a = \Lambda(d_a)\quad (a=1,2)\,. \tag{30}$$

方程（17）给出 $\mathrm{h}_{10+a} = \mathrm{K}_a - \sum^{10}\mathrm{i}{=}1(\mathrm{p}_a)_i\mathrm{h}_i$。因此，两个缺失的Dynkin标号为$\ell_{10+a} = \mathrm{k}_a - \mathrm{pT\ a\ n}$，其中 $\mathrm{n} = (\mathrm{n}_1,\ldots,\mathrm{n}_{10})\mathrm{T}$。每个 K_a 在整个模上都按标量 k_a 作用。将降算子单项式作用于 v_Λ所得向量的 d_a特征值为 $\mathrm{m}_a - \mathrm{q}_a$，其中 q_a 表示 f_{10+a}出现的次数。

命题 4.2。 $L(\Lambda)$对于紧形式是酉的，当且仅当

$$n_i\in\mathbb{Z}_{\ge 0}\ (1\le i\le 10)\,,\qquad k_a - p_a^{\mathsf T}n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}\,,\qquad m_a\in\mathbb{R}\quad (a=1,2)\,. \tag{31}$$

特别地，$k_a\in\mathbb{Z}$。中心荷可以取任一符号。

证明。 对每个简单 $\mathfrak{sl}_2$，置 $\ell = \Lambda(h_i)$。厄米性使 ℓ 为实数。将 e_i 穿过f_i 的幂，得到

$$\|f_i^r v_\Lambda\|^2 = r!\,\ell(\ell-1)\cdots(\ell-r+1)\,,\qquad r\ge 1\,. \tag{32}$$

对 $r = 1$ 的正定性迫使 $\ell\ge 0$。如果 ℓ 不是整数，$r = \lfloor\ell\rfloor+2$ 就会给出负的范数平方。因此，全部十二个简单标签都是非负整数，并且根据自伴性，m_a 为实数。反之，这些条件给出了一个在所选实Cartan子代数上取实值的支配整最高权。可对称化Kac–Moody代数的可积不可约最高权模的酉化定理给出一个正定的逆变厄米形式 [9,定理 11。7]（另见 [17]）。在坐标（30）中，这些条件恰好就是（31）。

□

如果十二个标号全都为零，那么该不可约模就是一维酉特征χ_m，它在 $\mathfrak{g}'(A_3)$ 上平凡，并满足 $\chi_m(d_a) = m_a$。对于一个一般的酉最高权模，若其最高权线上度算子的特征值为 $m = (m_1,m_2)$，则与 χ_{-m}张量相乘会使两个特征值都变为零。这是一种通过与一维酉特征张量相乘实现的规范化。对于选定了 d_a的整个代数，在 Dynkin标号固定时，不同的数对 m 对应不等价的最高权模。事实上，$\chi_{(0,0)}$ 与$\chi_{(1,0)}$ 已经可由 d_1的作用区分。只要至少有一个Dynkin标号为正，该模就是无限维的。事实上，此时两个仿射六边形环中至少有一个在 v_Λ 上具有正层级，因为其典范中心元是六个余根之和。在该仿射导出代数的循环模上

子代数中，这个和作用为正标量。在有限维情形下，每个 $h_i = [e_i、 f_i]$的迹都为零，这与它们之和的迹相矛盾。

对于该棱柱，无需解任何不等式即可直接读出可能的中心荷。 $(v_1\ v_2)^{\mathsf{T}}$ 在节点 11 和 2 处的荷列分别为 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$；在节点 12 和 3 处分别为 $(0,1)$和 $(0,-1)$。给定任意 $(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2$，赋予 Dynkin 标号

$$\ell_{11}=\max(k_1,0)\,,\quad \ell_2=\max(-k_1,0)\,,\qquad \ell_{12}=\max(k_2,0)\,,\quad \ell_3=\max(-k_2,0) \tag{33}$$

，并令所有其他标号均为零。这给出了 (k_1,k_2) 的一个支配提升。两个 v_a 的坐标和都为零，因此，即使固定 m_1,m_2，给十二个标号都加上同一个正整数，仍可得到无穷多个不同的支配提升。例如，标号 $\ell_2 = 1$ 本身给出的荷为$(-1,0)$。这正是中心余根的混合符号产生表示论效应之处。在仿射六边形环中，中心余根的系数均严格为正；在层级固定时，非负 Dynkin 标号的元组只有有限多个 [9,18]。

同样的论证也可表述为格公式，且在每一步$n \geq 3$都成立。令$r = 12\cdot 2^{n-3}$，并将$Z_{\mathbb{Z}} = \ker(A^{(L)}{}_n)\cap\mathbb{Z}^r$视为单余根格中的整中心。商群$\mathbb{Z}^r/Z_{\mathbb{Z}}$是自由群，因为它同构于某个整数矩阵的像。因此，整特征$Z_{\mathbb{Z}}\to\mathbb{Z}$可扩张为整个余根格上的整值泛函。其系数起初不一定非负。常向量与$Z_{\mathbb{Z}}$正交，因为它是对称矩阵$A^{(L)}{}_n$的特征向量，且对应非零特征值$-1-(n-3)L$。因此，只需给系数都加上一个足够大的整数，就能得到具有相同特征的支配整扩张。改变这个整数，便可得到无穷多个这样的扩张。

5 结论

从棱柱构造出发，该方法的阶数每一步都翻倍，而余秩只统计种子谱中移至零点的谱值。这解释了$L = 2$处的单调增长、$L = 1$处的交替下降，以及当$L \geq 6$时偶数$n \geq 4$处恰为零的情形。这也说明了非零余秩呈指数增长，却同时具有趋于零的密度。

在十二节点代数中，同一对核向量决定了根格的中心和根基。仿射环提供了实际的各向同性根，而它们与对向环的配对则将其与根基区分开来。标记两个相邻节点后，图与表示论之间便以两种不同的方式建立联系。每个未标记的标记节点邻点都会给出一个总标记次数为二的纯 Serre关系。两个标记节点之间的边已经在双次数 $(1,1)$ 中给出了 $[e_{11},e_{12}]\neq 0$。它们之间的 Serre 关系首次出现在双次数 $(2,1)$ 和 $(1,2)$ 中。确定在这两个次数中保留下来的不可约成分，是下一个自然的问题。在最高权层面，整中心已经完全显现。每个整特征都会对应于无穷多个不同的支配权。

致谢

资助信息 SB 和 VS 得到了跨学科主题研究院 QMat 的支持，该研究院隶属于斯特拉斯堡大学、法国国家科学研究中心和法国国家健康与医学研究院的 ITI 2021–2028 计划；此外，他们还曾获得斯特拉斯堡卓越计划（ANR-10-IDEX-0002）、SFRI STRAT'US 项目（ANR-20- SFRI-0012）以及 EUR QMAT（ANR-17-EURE-0024）的支持。这些资助均是在法国未来投资计划框架内提供的。QB 得到了斯特拉斯堡卓越计划的支持

“吸引力 2025”资助。AM 的工作得到了由欧洲科学与技术合作组织资助的 COST行动 CaLISTA CA21109 的支持。

参考文献

[1] S. Beaudoin、Q.Bonnefoy、A.Marrani、M.Rausch de TraubenbergandV.Saulquin，论一类新的高余秩卡茨–穆迪代数，arXiv:2607.00792 [math.RA],doi：10.48550/arXiv.2607.00792 （2026）。

[2] Terence C，对“广义卡坦矩阵何时可逆？”的回答，MathOverflow，回答 484485，超立方体示例添加于2025年1月29日（2025）。

[3] B. Julia，引力与超引力理论的卡茨–穆迪对称性，载于 M. Flato ，P. Sally, Jr. 和 G.Zuckerman 编，《群论在物理学与数学物理中的应用》，《应用数学讲义》第21卷，第355–373页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯（1985年）。

[4] T. Damour、M. Henneaux 和 H. Nicolai，E_{10} 以及 *M*理论的“小张力展开”，《物理评论快报》**89**，221601（2002），doi：10.1103/PhysRevLett.89.221601。[5] T. Damour、M. Henneaux 和 H. Nicolai，宇宙学弹球，《经典与量子引力》**20**（9），R145（2003），doi：10.1088/0264-9381/20/9/201。

[6] P. West，E_{11} 以及 *M*理论，《经典与量子引力》**18**（21），4443（2001年），doi：10.1088/0264-9381/18/21/305。

[7] V. G. Kac，有限增长的简单分次李代数，《泛函分析及其应用》**1**(4), 328（1967年），doi：10.1007/BF01076014。

[8] R. V. Moody，一类新的李代数，《代数杂志》**10**(2), 211（1968年），doi：10.1016/0021-8693(68)90096-3。

[9] V. G. Kac，无限维李代数，剑桥大学出版社，剑桥，第三版，doi：10.1017/CBO9780511626234 （1990年）。

[10] R. V. Moody 和 A. Pianzola，带三角分解的李代数，约翰·威立 & 父子公司，纽约，ISBN 978-0-471-63304-4（1995年）。

[11] O. Gabber 和 V. G. Kac，关于某些无限维李代数的定义关系，《美国数学会通报》（新刊）**5**(2), 185（1981年），doi：10.1090/S0273-0979-1981-14940-5。

[12] I. G. Macdonald，《*Kac–Moody*代数》，载于 D. J. Britten、F. W. Lemire 和 R. V. Moody 编，《李代数及相关主题》，*CMS*会议论文集第5卷，第69–109页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯（1986年）。

[13] T. Marquis，《域上的*Kac–Moody*群导论》，欧洲数学会，苏黎世，doi：10.4171/187（2018年）。

[14] S. Berman、R. Moody 和 M. Wonenburger，含零根的 *Cartan* 矩阵与有限*Cartan*矩阵，《印第安纳大学数学杂志》**21**(12)，1091（1972年），doi：10.1512/iumj.1972.21.21087。

[15] R. Carter，有限型与仿射型李代数，第 96 卷，载于剑桥高等数学研究丛书，剑桥大学出版社，剑桥，doi：10.1017/CBO9780511614910 （2005）。

[16] A. E. Brouwer 和 W. H. Haemers，《图的谱》，施普林格，纽约，doi：10.1007/978-1-4614-1939-6 （2012）。[17] V. G. Kac 和 D. H. Peterson，《无限维群的表示中的酉结构与凸性定理》，《数学发明》 **76**（1），1（1984），doi：10.1007/BF01388487。[18] P. Goddard 和 D. I. Olive，《*Kac–Moody*代数和*Virasoro*代数与量子物理学的关系》，《现代物理学国际杂志A辑》**1**（2），303（1986年），doi：10.1142/S0217751X86000149。