平衡 Voronoi 划分、自趋近序列及其在高效可导航图中的应用

Jonathan Conroy* Mohammadreza Daneshvaramoli† Cameron Musco†Christopher Musco‡ JackSpalding-Jamieson§

arXiv:2611.32667v1 [cs.CG] 24 Nov 2026

摘要

我们研究以下几何问题：给定欧几里得 d 维空间中的一个点集 X，是否总能选取两点 $a, b \in X$，使其诱导的 Voronoi 划分近似平衡？也就是说，令 $X_a, X_b \subseteq X$ 分别为距离 a 和 b 更近的点所组成的子集，我们能否选取 a 和 b，使得 $\min(|X_a|, |X_b|) \geq \alpha \cdot |X|$，其中某个 $\alpha > 0$?

我们的主要结果表明，始终可以达到 $\Omega(1/d)$ 的平衡度 $\alpha =$，且该结果在常数因子范围内是紧的。证明通过归约到关于自趋近序列 （SAS）的另一个自然问题：在 d 维欧几里得空间中，满足每个后续点都更靠近所有其他点的点序列最长能有多长？我们证明，如果不存在平衡度为 α 的平衡 Voronoi 划分，那么就能找到一个长度为 $\Omega(1/\alpha)$ 的 SAS。接着，我们证明在 d 维欧几里得空间中，任意 SAS 的长度至多为 $O(d)$，由此推出我们的平衡划分结果。我们还讨论了欧几里得空间之外的推广：令人惊讶的是，对于任意常数 $p \neq 2$，在 ℓ_p 范数下，我们证明无法实现优于 $\exp(-\Omega(d))$ 的平衡度。不过，对于长宽比有界的点集，我们确实证明了 $1/\text{poly}(d)$ 界。

虽然我们似乎是首批正式研究上述精确问题的学者，但这两个问题都与可导航搜索图的研究密切相关。这类图支持基于贪心搜索的高效路由，并构成许多现代近似最近邻搜索系统的基础。早在 20 世纪 90 年代，关于低维欧几里得空间中可导航图的研究结果就可用于为平衡 Voronoi 划分问题给出 $\alpha = 1/2^{O(d)}$ 的界。我们的主要结果将这一界呈指数级提升至 $\Omega(1/d)$。进而，我们利用这一界，在经典贪心路由的一种自然变体下，首次构造出可导航图，其路由时间为 $O(d \log |X|)$。所有现有构造在最坏情况下都需要 $\exp(d)$ 的路由时间。

1 引言

在这项工作中，我们研究两个相关的几何问题。第一个涉及平衡 *Voronoi* 划分的概念:

定义 1（平衡 Voronoi 划分）。设 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 是度量空间中由 $n \geq 2$ 个点构成的集合，其距离函数为 $D(\cdot, \cdot)$。若存在.....，则 X 具有一个 α-平衡 Voronoi 划分
不同点 $a,\ b \in X$ 使得，令 $S(a,\ b)$ 表示 X 中距离 a 更近的点集，而 $S(b,\ a)$ 表示距离 b 更近的点集（若距离相同，则按标识符打破平局），

$$\min\{|S(a,b)|, |S(b,a)|\} \geq \alpha \cdot n.$$

*达特茅斯学院。jonathan.conroy.gr@dartmouth.edu
†马萨诸塞大学阿默斯特分校。mdaneshvaram@cs.umass.edu，cmusco@cs.umass.edu
‡纽约大学。cmusco@nyu.edu§独立研究者。jacksj@uwaterloo.ca

我们要探讨的主要问题是：

问题 1。 对于每个 d 维欧几里得空间中的点集，都存在一个 α 平衡的 Voronoi 划分时， α 的最大值是多少?

当 $d=1$ 时，答案显然是明确的：假设 n 为偶数，我们可以取 a 和 b 为中位数两侧相邻的两个值，并始终实现平衡 $\alpha=1/2$。如果 n 为奇数，则可以实现平衡 $\alpha=\frac{n-1}{2n}\approx 1/2$。然而，在更高维的欧几里得空间中，这种均分通常是不可能的：存在一些最坏情况的点集，对于任何 $\alpha>1/(2d)$，都不存在 α 平衡的 Voronoi 划分。事实上，一类自然的困难点集是自接近序列：

定义 2（自接近序列（SAS））。 考虑任意度量空间 $(\mathcal{X},D)$。互异点序列 $(x_1,\ldots,x_\ell)\in\mathcal{X}$是一个自接近序列（*SAS*），当且仅当对于每个 k 和 $i<j$，满足 $i\neq k$,

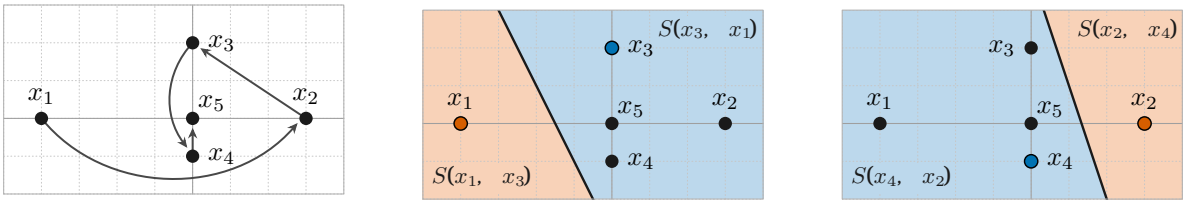
$$D(x_k,x_j)\leq D(x_k,x_i).$$

换句话说，对于任意选取的“基点” x_k，点序列 $(x_1,\ldots,x_\ell)\setminus\{x_k\}$会单调地逐渐接近 x_k。示例见图1（a）。

容易看出，在 d 维欧几里得空间中，存在长度为 Ω(d) 的 SAS。例如，考虑任意缩放因子 $r_1>r_2>\ldots>r_d>0$ 下的一列（经缩放的）标准基向量 $x_1=r_1\cdot e_1, x_2=r_2\cdot e_2,\ldots,x_d=r_d\cdot e_d$。对于任意 $k\neq j$，有 $\|x_k-x_j\|_2^2=r_k^2+r_j^2$，因此，只要 $i<j$ 满足 $i\neq k$，就有$\|x_k-x_j\|_2^2<\|x_k-x_i\|_2^2$。事实上，可以验证，序列 $e_1,-\frac{1}{2}e_1,\frac{1}{4}e_2,-\frac{1}{8}e_2,\ldots$构成一个长度为 $2d$ 的 SAS。

此外，这样的序列给出了上述问题的 $\alpha\leq\frac{1}{2d}$ 上界~~1~~：对于任意选定的一对 x_i，x_j 其中 $i<j$，距离 x_i (x_i 自身)最近的点只有 1 个，而距离 $2d-1$ 最近的所有其他点都是x_j。也就是说，自趋近序列似乎是平衡沃罗诺伊划分的最坏情况。见图1。基于此，我们提出：

问题 2. d维欧几里得空间中 SAS 的最大长度是多少?



(a) $\mathbb{R}^2$ 中的 SAS　　(b) $a=x_1, b=x_3$　　(c) $a=x_2, b=x_4$

图 1：（a） $\mathbb{R}^2$ 中的一个自趋近序列（x_1、……、 x_5）。对于每个基点 x_k，随着序列推进，其余点到 x_k 的距离单调减小。（b）–（c）由两对不同的点 a、 b 诱导出的该 SAS 的沃罗诺伊划分。SAS 为 Voronoi 划分提供了一个困难情形：所有划分都完全不平衡，其中一侧仅包含一个点。

1.1 我们的贡献

我们的主要贡献是给出问题 1 和 2 的界，该界关于维度呈线性 d，因此在常数因子范围内是紧的。我们首先证明问题2:

定理 1 (线性欧几里得 SAS 界)。 令 L_d 表示在欧几里得距离下， $\mathbb{R}^d$ 中 *SAS* 的最大可能长度。对于每个 d, $L_d \leq 8d$.

如上所述，不难看出 $L_d \geq 2d$，因此定理 1 在常数因子意义下是紧的。显然， $1/L_d$ 为一般 α 维欧几里得点集的最优 Voronoi 划分平衡度 d提供了一个上界：给定一个长度为 L_d的 SAS，该序列中任意两个点所诱导的 Voronoi 划分中，仅有一个点被分配给较早的点（即其自身），其余所有点都被分配给较晚的点（假设为序列中较晚的点赋予更小的标识符，因此距离相等时将其判给较晚的点）。

接下来，我们将针对一般度量空间证明一个（在常数意义下的）逆向结论 s.

定理 2 （平衡划分到 SAS 的归约）。 考虑任意度量空间 $(\mathcal{X}, D)$ 以及任意点集 $X \subseteq \mathcal{X}$。令 L_X 表示由 X 中的点组成的最长 *SAS* 的长度。那么，对于 $\alpha \geq 1/(4L_X)$， X 存在一个 α-平衡的 *Voronoi* 划分。

也就是说，SAS 最大长度的上界意味着最坏情况 Voronoi 划分平衡度的下界。为证明这一点，我们表明，如果 X 的 Voronoi 划分不够平衡，那么其中必然包含一个点子集，这些点构成一个很长的 SAS。结合定理 2 和定理 1 （注意，对于任意 $L_X \leq L_d$ 和 $X \subseteq \mathbb{R}^d$），即可得到我们关于欧几里得空间中平衡 Voronoi 划分的主要结果：

定理 3 （欧几里得平衡划分界）. 设 X 是 $\mathbb{R}^d$ 中的任意点集，距离采用欧几里得距离。那么，对于 $\alpha \geq \frac{1}{32d}$， X 存在一个 α-平衡 *Voronoi* 划分。 —

正如我们在附录 D中所示，计算几何领域关于低维空间中可导航图 [AM93] 的既有研究可用于证明一个 $\alpha = 1/2^{O(d)}$的界，进而得到 $L_d = 2^{O(d)}$。定理3 将这一基准以指数级幅度提升；如前所述，该结果在常数因子范围内是紧的。

1.1.1 对其他度量的扩展

自然会考虑将定理 1（进而将定理 3）扩展到其他度量空间。特别地，我们研究 $\mathbb{R}^d$ 在 ℓ_p 范数下的情形，其中 $p \neq 2$。或许令人意外的是，我们证明在这种情况下，定理 *1* 不存在类似结论：存在长度关于 d呈指数增长的SAS。

定理 4 （ ℓ_p 空间中的指数级SAS长度下界）。 对于每个固定的 $0 < p \leq \infty$ 且满足 $p \neq 2$，在 $\mathbb{R}^d$ 中取 ℓ_p 范数时，都存在一个长度为 $\exp(\Omega_p(d))$ 的*SAS*。

为了直观理解定理 4，考虑 $p = \infty$的情形。在这里，我们可以采用与长度为 d 的欧几里得SAS类似的构造：取超立方体 $\{-1, 1\}^d$的 2^d 个顶点，并按唯一的数值 $r_1 > r_2 > \ldots > r_{2^d} > 0$进行缩放。任意一对点之间的 ℓ_∞距离 $x_i \neq x_j$恰好为 $r_i + r_j$。因此， $\|x_k - x_j\|_\infty < \|x_k - x_i\|_\infty$只要 $i < j$ 满足 $i \neq k$，我们就得到了一个SAS。

或者，考虑 $p = 1$。我们的每个向量都将对应于 $N = \exp(\Omega(d))$ 个子集 $X_1, \ldots, X_N \subseteq [d]$，每个子集的大小为 $m = \Theta(d)$，且对于所有 $i \neq j$ 都有 $|X_i \cap X_j| \leq m/4$。构造这样的集合族很容易——例如，随机集合以高概率就足够了。令 $r_i = 3^{-i}$ and$x_i = r_i \cdot \mathbf{1}_{X_i}$，其中 $\mathbf{1}_{X_i} \in \{0, 1\}^d$ 是 X_i 的指示向量。对于 $k < j$，我们可以验证：

$$\begin{aligned}\|x_k - x_j\|_1 &= m \cdot r_k + m \cdot r_j - 2|X_k \cap X_j| \cdot r_j \\ &\in [m(r_k + r_j/2), m(r_k + r_j)].\end{aligned}$$

由于各点采用几何递减缩放，上述界确保 $k < i < j$满足 SAS 条件（定义 2），其基点为 k: $\|x_k - x_i\|_1 > \|x_k - x_j\|_1$因为 $r_i \geq 3r_j > 2r_j$。

不难检验其余情况（即 $i < k < j$ 和 $i < j < k$），从而证明 SAS 条件一般成立。在第 5 节中，我们使用类似的构造将下界扩展到所有常数 $p \neq 2$，得到定理 4。

通过有界长宽比获得正面结果。 尽管定理 4给出了指数下界，但我们确实证明了，在 ℓ_p 空间中，对于固定的 $1 \leq p < \infty$，SAS 的长度受 d 中的多项式因子和长宽比的对数因子所界定

$$\Delta(X) := \frac{\max_{x \neq y \in X} D(x,y)}{\min_{x \neq y \in X} D(x,y)}. \tag{1}$$

长宽比是一个常见参数，例如在最近邻搜索和其他几何问题的快速算法研究中 [IM98、KL04]中就会出现。对于 $\mathbb{R}^d$ 空间中的 SAS，在任意 ℓ_p 范数下，令 $O_p(\cdot)$ 和 $\Omega_p(\cdot)$ 隐含依赖于 p的常数，我们证明：

定理 5（有界纵横比 SAS 界—— ℓ_p 空间）。对于每个固定的 $1 \leq p < \infty$，令 $q_p = \frac{2p+2}{2p-1} \leq 4$。在 ℓ_p 范数下的每个 *SAS* $X \subseteq \mathbb{R}^d$，满足 $\Delta(X) < b$，其长度为 $O_p\left(d^{3q_p/2}\lceil \log(b) \rceil\right)$。进而，根据定理 *2*，每个满足 $\Delta(X) < b$ 的 $X \subseteq \mathbb{R}^d$，都存在一个 α平衡的 *Voronoi* 划分；该划分在 ℓ_p 范数下满足 $\alpha = \Omega_p\left(\frac{1}{d^{3q_p/2}\lceil \log(b) \rceil}\right)$。

定理 5 可由一个更一般的 SAS 上界推出：该上界适用于任何能够证明近似等距集 大小上界的度量空间——也就是说，点集中所有两两距离都近似相等 [AP03、Swa04a]。事实上，这个一般上界也可用于证明定理 1 的一个版本，其界为较弱的 poly(d)，方法是证明一般的 SAS 必须由 $O(d)$ 个长宽比为 $O(d)$ 的 SAS 组成（见第3.2节）。

定理 6（有界纵横比 SAS 界——一般度量）。考虑任意度量空间$(\mathcal{X}, D)$，并假设对于某个 $\varepsilon > 0$，该空间中长宽比为 $\leq 1+\varepsilon$ 的任意点集大小至多为 N_ε。对于任意 $b > 1$，度量空间$(\mathcal{X}, D)$ 中的每个 *SAS* X，若其满足 $\Delta(X) < b$，则其长度至多为

$$N_\varepsilon \cdot \lceil \log_{1+\varepsilon} b \rceil .$$

定理 5 可通过将定理 6 应用于 $\varepsilon = O(1/d^{q_p/2})$ 得出——在 ℓ_p 空间 [AP03] 中关于严格等距集的现有界限可以扩展，从而证明本例中的 $N_\varepsilon = O(d^{q_p})$。

我们指出，对于 ℓ_1 范数而言，我们用于建立定理 4 所述指数级 SAS 长度下界的困难实例具有双指数长宽比——鉴于定理 5和 6，这是必要的。我们还指出，我们针对 ℓ_∞ 的困难实例源自一个指数规模的等边集，这凸显了能够界定 N_ε 对于界定 SAS 长度的重要性。

1.1.2 在可导航搜索图中的应用

尽管平衡 Voronoi 划分和自接近序列本身就是自然的几何对象，但我们对二者的研究都受到了它们与可导航搜索图[AM93、KL04、DGM+24、KPW26、CDFC+26、AM26]的联系的推动。这类图构成了当前许多最先进近似最近邻搜索方法的基础，其中包括广受欢迎的 HNSW、DiskANN 和 NSG 算法 [SDS+19、FXWC19、MY20]。

在标准设定中，我们构建一个有向图 G，其顶点分别对应数据集 X 中的每个点。针对查询 q 的贪心搜索从某个节点开始，并反复移动到当前节点中距离 q 最近的出邻居；如果没有邻居能使当前距离缩短，搜索便终止。若对于任意 $q \in X$（属于数据集的查询），从任意起始点开始进行贪心搜索，最终都会在 q 处终止，则称 G 是可导航的。

Diwan 等人 [DGM+24] 证明，对于任意度量空间中的任意一组 n 点，都存在一个平均度为 $O(\sqrt{n}\log n)$ 的可导航图。另一方面，即使对于 $\overline{O(\log n)}$ 维欧几里得空间中的随机点集，该下界也几乎是紧的：对于任意固定的 $\delta > 0$，可导航性要求平均度为 $\Omega(n^{1/2-\delta})$。因此，执行贪心路由所需的总期望运行时间下界为 $\Omega(n^{1/2-\delta})$，因为它至少需要进行相应数量的距离比较，而这也至少是贪心路径上任一顶点的度数。Daliri 等人 [DDD+26] 证明，即使选择最理想的起始顶点，这一下界仍然成立。

一个关键问题是，尤其鉴于基于贪心图的搜索在实际应用中的成功，能否针对上述理论模型的变体证明更强的理论界。例如，[DDD+26] 证明了，如果搜索图 G 加入斯坦纳点，就可以为近似最近邻搜索给出强次线性运行时间界。其他工作给出了强有力的理论保证，但其对数据集维度（或倍增维数）的依赖是指数级的 [AM93、Cla94、IX23、LT25]。事实上，如前所述，我们在附录D中证明，这类结果可用于证明 $\alpha = 1/2^{O(d)}$ 对于d维欧几里得空间的平衡 Voronoi 划分界。我们的定理3 将该界改进为 $\Omega(1/d)$。

通过平衡 Voronoi 划分实现高效机会式可导航图。 我们关于平衡 Voronoi 划分的结果表明，如果考虑一种略有不同的搜索规则，那么可导航图的现有界可以得到显著改进：机会式贪心搜索。在该搜索过程中，即使某个邻居距离 $q \in X$更远，搜索仍会继续移动到距离查询 q 最近的出邻居。当 q 被找到时，搜索终止（或者当前顶点没有出邻居时也终止）。事实上，这种搜索规则更接近实践中常用的搜索规则，例如束搜索 [AJDG+25]。我们证明：

定理 7 （高效的机会式可导航图）。 *对于欧几里得距离下的任意点集 X of n points in $\mathbb{R}^d$，存在一个有向图 G，其顶点与 X中的点相对应，且最大出度为 2，使得机会式贪心搜索能够从任意起始顶点 O经过（$d\log n$）步和距离计算到达任意目标点 $q \in X$。*

定理 7 的构造很简单：它就是一棵利用平衡 Voronoi 划分递归拆分 X 的搜索树。对于 X 的 α-平衡 Voronoi 划分，根节点有两个子节点，分别对应点 a 和 b。当查询点 q 更接近 a（即 $q \in S(a,b)$）时，搜索进入 a；否则进入 b。这些节点随后分别拥有子节点，将 $S(a,b)$ 和 $S(b,a)$ 进行划分，依此类推。定理 3 的平衡性保证意味着该树的深度至多为 $O(\log n/\alpha) = O(d \log n)$，从而限定了路由时间和距离计算次数。为了允许从任意顶点开始搜索，我们只需从每个叶节点添加一条指向根节点的边。随后，从任意点开始在树中的第一次下行搜索若未成功，便会返回根节点；之后，搜索沿整棵树下行并找到查询点 q。

定理 7 显著改进了使用标准贪心搜索的可导航图的现有结果——仅需对数据集大小具有对数依赖 n，并且对维度呈线性依赖。我们注意到，通过定理 5 和 6，该结果可直接推广到 ℓ_p 空间，以及具有有界自趋近序列的其他度量空间。一个有趣的开放问题是，这类递归划分技术能否在查询 q 不属于数据集时，为近似最近邻搜索提供相应结果。Haghiri 等人 [HGvL17]研究了一种非常相似的算法，但正如我们将在下一节讨论的那样，他们只在对数据集作出强假设的情况下给出了界。

1.2 相关工作

下面我们将讨论与研究结果相关的几个不同研究领域中的工作。

平衡 Voronoi 划分与聚类。 不出所料，许多研究都考虑构造平衡 Voronoi 划分或聚类，使分配给每个 Voronoi 单元或聚类中心的点数大致相等 [BH08、 PAM17、 ZF21]。相关应用包括政治选区划分 [RSS08], 、图形学 [BSD09],和数据分析 [BG06、 MF14]。通常，这些研究考虑选择 $k \geq 2$ 聚类中心，而不是像我们在定义 1中那样恰好选择两个中心。就我们所知，现有研究中没有任何一项能够像定理 3那样，为任意点集提供平衡性保证。或者，为了给出更强的保证，先前的研究会利用额外的自由度，例如为聚类中心设置权重，从而影响分配给它们的点数 [AHA98]。

与我们的工作理念相近， [HHS09、DCKK+15、HPKMR16]研究了必须选择多少个中心，才能使其 Voronoi 划分中的所有 Voronoi 单元都包含输入点的 $O(1/k)$ 比例。˜ 粗略地说，这些论文表明， $O(k)$ 个中心就足够了。然而，它们界中的常数依赖于维度 d，且呈指数增长。更进一步，鉴于我们在 $k = 2$ 情形下取得的正面结果，这种依赖或许令人意外，但却是必需的：存在一些位于 d 维欧几里得空间中的点集，即使只要求将任一 Voronoi 单元中的点数上界限制为 $|X|/4$ ，也必须选择 $\Omega(\exp(d))$ 个中心——证明见附录 C。鉴于这一障碍，本文聚焦于 $k = 2$ 情形，并将 Voronoi 单元中点的最小比例下界限定为 $1/\text{poly}(d)$—— 即，将最大比例上界限定为 $(1 - 1/\text{poly}(d))$。

中心点定理。 从较高层次来看，我们关于平衡 Voronoi 划分的结果让人联想到 中心点定理，该定理保证：对于任意点集 X 在 $\mathbb{R}^d$中，都存在一个点 x 位于 X 的凸包内，使得 每个 经过 x 的超平面都会将 X 分成两个大小大致平衡的集合——其中较小集合的大小至少为 $|X|/(d + 1)$。中心点在计算几何中有诸多应用，因为它们为高维空间中的中位数提供了一种概念 [CEM+93, JM93]。一个关键区别在于，划分超平面只需经过中心点即可，而该中心点本身可能并不属于 X，而不必像平衡 Voronoi 划分那样，成为两点 a之间的垂直平分面 $b \in X$。因此，我们并不知道这两个概念之间存在任何形式上的联系。

自接近曲线。 我们的自接近序列概念可以被视为连续 自接近曲线的离散对应物，这类曲线已在几何学中得到研究[Rot94、IKL99]。然而，这项工作采用了比我们更弱的概念——曲线上每个连续点只需更加接近其后的所有点即可。在这一概念下，显然存在满足该性质的无限点集：例如，直线上的任意点集。有趣的是，关于自接近曲线的研究已被用于可导航图稀疏子图的研究——例如参见 [ACG+12]。

基于比较的最近邻搜索。我们将其应用于可导航图，这与基于比较的最近邻搜索研究密切相关。这类研究的目标是：在只能进行距离比较查询的情况下（即，对于数据集点 x_i、x_j，检查 $D(x_i, q)$ 是否 $\leq D(x_j, q)$），为查询 q 找到一个近邻 [GLS08, LZ09, TDDM11, HGvL17, CAdG+26]。我们的算法属于这一框架，并保证在 $q \in X$ 时能准确找到 q 。已有研究还在 $q \notin X$ 的情况下给出了界，其方法是假设数据集的秩紊乱存在上界[GLS08, LZ09, TDDM11]。粗略地说，它们要求：如果 x 是 y 的最近邻之一，且 y 是 z 的最近邻之一，那么 x 也必须是 z 的一个相当近的邻居。遗憾的是，即使在一维欧几里得空间中，这样的界也可能不成立。例如， $x = 1$、 $y = 2$、 $z = 4$，以及其他恰好略大于 6 的点。此时， x 是 y 的最近邻，而 y 是 z 的最近邻。但 x 是离 z 最远的点（距离为 3，而其他所有点的距离均为 ≈ 2）。

与我们的可导航图构造非常接近，Haghiri 等人 [HGvL17] 研究了一种二叉树方法：递归地选择两个随机点，并将其他每个点分配给距离较近的那个点。他们证明，该树的高度以高概率为 $O(\log n)$，并在满足强扩展条件时给出了最近邻搜索保证。同样，即使在一维欧几里得空间中，该条件也可能不成立。具体而言，该条件意味着，位于 X 距离以内的点的数量

距离 $2r$ 内的任意 $x \in X$ 的数量，都被限制为距离 r内点数的某个常数倍。如果我们在 $x = 0$处有一个点，在其上方紧邻着 $n-1$ 个点，并取 $r = 1$，就会违反这一条件。

最后，Cohen-Addad 等人 [CAdG+26] 研究了基于比较的线性优化，并证明：对于一个 n 点集，可以通过 $O(k \log k \log n)$ 次比较，将线性目标函数最小化，其中 k 是该点集的锥维数，是 [KLMZ17]提出的推断维数的一种变体。通过提升 $x \mapsto (x, \|x\|_2^2)$ 并改写为 $\|q-x\|_2^2 = \|q\|_2^2 + \langle(-2q, 1), (x, \|x\|_2^2)\rangle$.，可以将欧几里得距离重新表述为线性目标函数。锥维数是该点集中点的序列 $(y_1, \ldots, y_k)$ 的最大长度，且对每个 $t \le k$，$y_t - y_1$ 都位于由以下各点生成的锥之外：$\{y_j - y_i : 1 \le i < j < t\}$。一般而言，在低维欧几里得空间中，锥维数没有上界；不过，[CAdG+26] 证明，对于 $\{0,1\}^d$中的点，其锥维数有 $O(d \log d)$ 的上界。他们还针对具有有界长宽比的一般点集，给出了相关近似锥维数概念的界。值得探究的是，锥维数或推断维数的界是否与自趋近序列长度的界有关——这些概念至少表面上看起来存在关联。

2 归约 从平衡 Voronoi 划分到有界 SAS

如前所述，我们的平衡划分结果的证明分为两个步骤。在本节中，我们首先证明从平衡划分到自趋近序列的归约（定理 2）：如果一个点集没有足够平衡的 Voronoi 划分，那么它包含一个较长的 SAS。然后，我们在第 d维欧几里得和 ℓ_p 空间中证明 SAS 长度的界，详见第 3节。

在全文中，我们记作 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$，并按照定义 1 根据标识符打破距离相等的情况。形式化地，对于 $x \in X$ 和不同的 x_i、$x_j \in X$，如果 $D(x, x_i) < D(x, x_j)$，或者 $D(x, x_i) = D(x, x_j)$ 且 $i < j$，则称 x 更偏好 x_i 而不是 x_j。注意，对于每个 $x \in X$，x 的偏好在 X 上构成一个全序，其中 x 本身排在首位，因为 $D(x, x) = 0$。对于不同的 a、$b \in X$，我们记作$S(a, b) = \{x \in X : x$ 更偏好 a 而不是 $b\}$。注意，$S(a, b)$ 和 $S(b, a)$ 将 X 划分为两个部分，且 $a \in S(a, b)$。

我们对定理 2 的证明使用下面这个简单命题。该命题表明，要检验一个序列是否为 SAS，只需检验其连续 点对是否满足 SAS 条件。

命题 1（SAS 连续点对刻画）。任取度量空间 $(\mathcal{X}, D)$。互异点序列 $(x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathcal{X}$是 *SAS*，当且仅当，对于每个 $i \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$和每个 $k \ne i$,

$$D(x_k, x_{i+1}) \le D(x_k, x_i). \tag{2}$$

证明。如果 $(x_1, \ldots, x_\ell)$ 是 SAS，那么（2）只是定义 2 在 $j = i + 1$ 时的特例。反之，假设（2）成立，并固定 $i < j$ 和 $k \ne i$。如果 $k \notin \{i+1, \ldots, j-1\}$，那么 k 与连续点对 (x_{j-1}, x_j)、(x_{j-2}, x_{j-1}) ...、(x_i, x_{i+1}) 中每一对的第一个索引都不同。因此，以 x_k 为基点对这些点对分别应用（2），得到 $D(x_k, x_j) \le D(x_k, x_{j-1}) \le \ldots \le D(x_k, x_i)$。如果 $i < k < j$，则将相同论证应用于从 x_i 到 x_{k-1} 以及从 x_{k+1} 到 x_j 的连续点对，可得 $D(x_k, x_{k-1}) \le D(x_k, x_i)$ 以及 $D(x_k, x_j) \le D(x_k, x_{k+1})$。

此外，将（2）分别应用于以基点 x_{k+1} 的数对 (x_{k-1}, x_k)，以及以基点 x_{k-1} 的数对 (x_k, x_{k+1})，可得 $D(x_k, x_{k+1}) \le D(x_{k+1}, x_{k-1}) \le D(x_{k-1}, x_k)$。将这些不等式串联起来可得

$$D(x_k, x_j) \le D(x_k, x_{k+1}) \le D(x_k, x_{k-1}) \le D(x_k, x_i),$$

如定义2所要求的。 □

现在开始证明定理2，定理重述如下。

定理 2。 考虑任意度量空间 $(\mathcal{X},\ D)$ 以及任意点集 $X \subseteq \mathcal{X}$。令 L_X 表示由 X 中的点组成的最长 *SAS* 的长度。则 X 存在一个 α-平衡 *Voronoi* 划分，其中参数为 $\alpha \geq 1/(4L_X)$。

证明。令 $n = |X|$。定义

$$M := \max_{\{a,b\} \subseteq X} \min\{|S(a,b)|, |S(b,a)|\}.$$

我们的目标是证明 $M \geq n/(4L_X)$。注意，如果 $M \geq n/3$，则结论显然成立，因为$L_X \geq 1$，因此 $n/(4L_X) \leq n/4$。所以假设 $M < n/3$。

在 X 中的点上构造一个竞赛图如下。对于每个无序对 $\{a,b\}$，当 $|S(a,\ b)| \leq M$时画出弧 $a \to b$——见图 2(a)。恰好选择一个定向：$S(a,\ b)$ 和 $S(b,\ a$划分了 X，因此它们不可能都具有大小 $\leq M < n/3$。

此外，竞赛图中不可能存在有向三角形。事实上，如果 $a \to b \to c \to a$，则必有 $S(a,b) \cup S(b,c) \cup S(c,a) = X$；否则 $x \in X \setminus (S(a,b) \cup S(b,c) \cup S(c,a))$ 会更偏好b 而非 a、c 而非 b，以及 a 而非 c，这是不可能的，因为 x 的偏好构成全序。但我们不可能有 $S(a,b) \cup S(b,c) \cup S(c,a) = X$，因为 $|S(a,b) \cup S(b,c) \cup S(c,a)| \leq 3M < n = |X|$，从而导致矛盾。

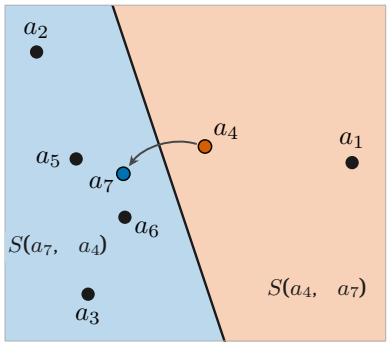
众所周知，不含有向三角形的锦标赛图是传递的，因此我们可以将点重新标记为 X、a_1，a_2，...，a_n，使得

$$a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_n.$$

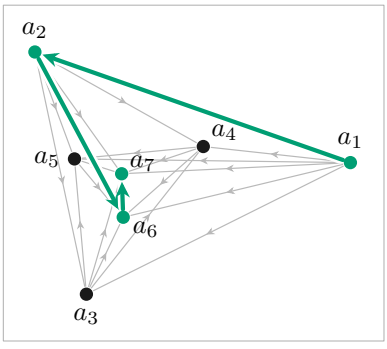
由于该锦标赛图是传递的，每当 $i < j$、$a_i \to a_j$，因此 $|S(a_i,\ a_j)| \leq M$。

为证明该定理，我们将构造出 $(a_1,\ \ldots\ldots,\ a_n)$ 的一个子序列，它构成一个 SAS，且长度至少为 $n/(4M)$——见图2(b)。重新排列即可得到 $M \geq n/(4L_X)$，如所需。

一个简单二次界。 我们首先注意到，对大约 $\sqrt{n/M}$ 个随机点进行采样，已经可以得到一个较弱界 $M \geq n/(4L_X^2)$。如果 a_i、a_j、a_k满足 $i < j$且 $k \neq i$为违反，则称三元组（$a_k \in S(a_i$、$a_j)$，也就是说，定义2 中的 SAS 条件被违反。根据上述排序，最多存在 $M\binom{n}{2}$ 个违反。若以概率



(a) $|S(a_4,\ a_7)| = 2 < |S(a_7,\ a_4)| = 5$，因此 $a_4 \to a_7$



(b) 锦标赛图与 SAS $(a_1,\ a_2,\ a_6,\ a_7)$

图2：定理2的证明中构造的竞赛图。(a) 每条边 $(a,\ b)$ 的方向均指向 Voronoi 划分中较大一侧的端点。(b) 若不存在平衡度为 $\alpha \geq 1/3$ 的 Voronoi 划分，则该锦标赛图不含有向三角形，因此是传递的。因此，可以将这些点按某个全序排列，使其符合锦标赛图中边的方向。证明从该顺序中提取出一个较长的 SAS 子序列。此处提取出的 SAS 为 $(a_1,\ a_2,\ a_6,\ a_7)$。

$p = 1/\sqrt{Mn}$，则期望保留 $pn = \sqrt{n/M}$ 个点，同时期望至多有 $p^3 M\binom{n}{2} \le \frac{1}{2}\sqrt{n/M}$ 个违反仍然存在。因此，从每个幸存的违反中删除一个点后，对于某种结果，至少剩下 $\frac{1}{2}\sqrt{n/M}$ 个点，且其中不存在违反。按照顺序a_1、……、a_n，这些点构成一个 SAS：对于任意这样的 a_i、a_j、a_k，若 $i < j$ 且 $k \neq i$，则 a_k 更偏好a_j 而非a_i，因此 $D(a_k, a_j) \le D(a_k, a_i)$。所以，$L_X \ge \frac{1}{2}\sqrt{n/M}$，整理得 $M \ge n/(4L_X^2)$。

为了使其对 L_X呈线性依赖，我们改为只统计 连续保留点之间的违反；根据命题1，这足以验证其为 SAS。

统计连续违反。对于 $(w_1, \ldots, w_m)$ 这一 $(a_1, \ldots, a_n)$ 的子序列 $R =$，将其连续违反数定义为

$$V(R) := \sum_{i=1}^{m-1} \left(|S(w_i, w_{i+1}) \cap R| - 1\right). \tag{3}$$

每一项统计 R 中除 w_i 本身以外，偏好 w_i 而非 w_{i+1} 的点数。如果 $V(R) = 0$，那么对于所有 $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ 和 $k \neq i$，w_k 都偏好 w_{i+1} 而非 w_i，因此 $D(w_k, w_{i+1}) \le D(w_k, w_i)$。由命题 1 可知，$R$ 是一个 SAS。接下来我们证明，一般而言，R 包含一个长度为 $|R| - V(R)$ 的 SAS。

删除违反。假设 $V(R) > 0$。那么存在某个 i，以及某个 $w_k \in S(w_i, w_{i+1})$，使得 $k \neq i$。由于 $w_{i+1} \notin S(w_i, w_{i+1})$，我们也有 $k \neq i+1$。令 R' 为删除了 w_k 的 R。我们声称，$V(R') \le V(R) - 1$。点对 (w_i, w_{i+1}) 在 R' 中仍然连续，且其在式 (3) 中对应的项至少减少一。所有其他不涉及 w_k 的连续点对对应的项都不会增加。最后，如果 $1 < k < m$，点对 (w_{k-1}, w_k) 和 (w_k, w_{k+1}) 对应的项将被新连续点对 (w_{k-1}, w_{k+1}) 对应的单项取代。我们有

$$S(w_{k-1}, w_{k+1}) \subseteq S(w_{k-1}, w_k) \cup S(w_k, w_{k+1}),$$

否则，某个点就会更偏好 w_{k-1} 而非 w_{k+1}、w_k 而非 w_{k-1}，以及 w_{k+1} 而非 w_k，但这是不可能的，因为每个点的偏好都构成一个全序。由于 $w_k \in S(w_k, w_{k+1})$ 且 $w_k \in R$ 但$w_k \notin R'$，因此

$$|S(w_{k-1}, w_{k+1}) \cap R'| \le |S(w_{k-1}, w_k) \cap R| + |S(w_k, w_{k+1}) \cap R| - 1.$$

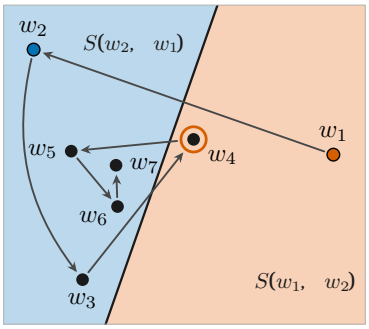
因此，新项至多等于它所替换的两个项之和，且 $V(R') \le V(R) - 1$。由于$|R'| = |R| - 1$，我们有 $|R'| - V(R') \ge |R| - V(R)$。重复删除，直至不再有违反，我们便得到一个长度为 $\ge |R| - V(R$ 的 SAS。图 3 展示了这一过程。

寻找良好子序列。现在我们展示如何从 $(a_1, \ldots, a_n)$ 中找到一个子序列 R，使得$|R| - V(R) \ge n/(4M)$，从而得到长度符合要求的 SAS。

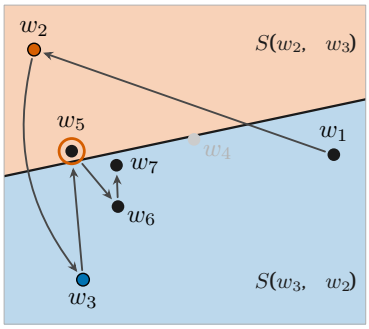
令 R 为 $(a_1, \ldots, a_n)$ 的随机子序列，其中每个点都以概率 $q = \frac{1}{2M}$ 独立保留。我们有 $\mathbb{E}[|R|] = qn$。考虑任意 $i < j$。当且仅当 a_i 和 a_j 都被抽取，且 $a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}$ 均未被抽取时，它们才是在 R 中相邻的点。若此情况发生，则 (3) 中对应相邻点对 (a_i, a_j) 的项所计入的点 a_k 必须位于 $S(a_i, a_j)$ 中，必须被抽取，且必须满足 $k \notin \{i, i+1, \ldots, j-1, j\}$。因此，由于对所有 $i < j$，$|S(a_i, a_j)| \le M$，

$$\mathbb{E}[V(R)] \le \sum_{i<j} |S(a_i, a_j)| \cdot q^3 (1-q)^{j-i-1} \le Mq^3 \cdot n \sum_{g=0}^{\infty} (1-q)^g = Mq^2 n.$$

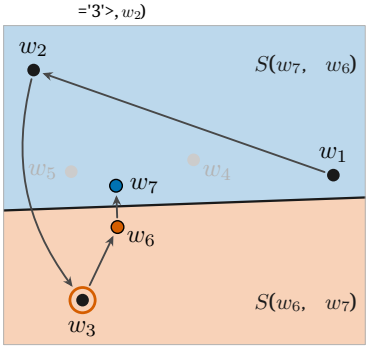
因此，根据期望的线性性，$\mathbb{E}[|R| - V(R)] \ge qn - Mq^2 n = \frac{n}{2M} - \frac{n}{4M} = \frac{n}{4M}$。于是，对于某个结果，$|R| - V(R) \ge \frac{n}{4M}$，因此 X 包含一个长度至少为 $\frac{n}{4M}$ 的 SAS。也就是说，$L_X \ge \frac{n}{4M}$。整理得 $M \ge \frac{n}{4L_X}$，即得所需结论。 □



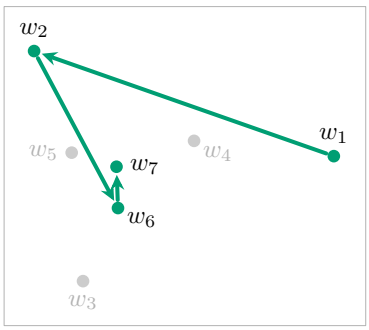
(a) $w_4 \in S(w_1$<style 标识符 ='3'>, $w_2)$



(b) 删除 w_4 后： $w_5 \in S(w_2,\ w_3)$



(c) 删除 w_5 后： $w_3 \in S(w_6,\ w_7)$



(d) 删除 w_3 后：SAS $(w_1,\ w_2,\ w_6,\ w_7)$

图3：从全序 $R = (w_1,\ \ldots\ldots,\ w_m)$ 的子序列中删除连续违反项$a_1,\ \ldots\ldots,\ a_n)$，以构造 SAS。这里，$R$ 由图 2 中的点的完整顺序组成。(a)–(c) 在每一步中，一对连续点 $w_i,\ w_{i+1}$ 的 Voronoi 划分中有一个点 w_k 满足 $k \neq i$，且该点位于 $S(w_i,\ w_{i+1})$ 内，违反了 SAS 条件。删除该点后，违反的总数至少减少一个；重复此过程，直到不再有违反，剩余点便构成一个 SAS。

3 自趋近序列的界

在定理 2 的归约完成后，我们现在开始证明 SAS 长度的上界。在第 3.1 节中，我们证明定理 6，该定理给出了具有有界长宽比的度量空间中 SAS 长度的一般上界，其中这些度量空间对近似等边点集的大小存在上界。我们应用该上界，给出欧几里得空间和 d中具有有界长宽比的 ℓ_p SAS 的 poly(d) 上界。在第 3.2 节中，我们证明对于欧几里得空间，可以去除有界长宽比这一假设，从而得到定理 1 的一个较弱版本：对于 d维欧几里得空间中的 SAS，具有 poly(d) 上界（定理8）。最后，在第3.3节中，我们展示如何使用专门针对欧几里得空间的论证，证明定理 $O(d)$ 的紧上界 1。

3.1 有界长宽比 SAS 的上界

我们首先证明定理 6，该定理给出了在任何满足“近似等边点集大小存在上界”这一条件的度量空间中，长宽比有界的 SAS（1）的长度上界。

定理 6： 考虑任意度量空间 $(\mathcal{X}, D)$，并假设对于某个 $\varepsilon > 0$，该空间中长宽比为 $\leq 1+\varepsilon$ 的任意点集的大小至多为 N_ε。对于任意 $b > 1$，在 中$(\mathcal{X}, D)$ 且满足 $\Delta(X) < b$ 的每个 *SAS* 的长度至多为

$$N_\varepsilon \cdot \lceil \log_{1+\varepsilon} b \rceil .$$

证明。 令 $(x_1, \ldots, x_\ell)$ 为一个长宽比小于 b的 SAS，并令 $L_i = D(x_i, x_{i+1})$ 对于 $1 \le i < \ell$。SAS 条件（定义 2）以 x_i 为基点并使用有序索引 $i-1 < i+1$ 可得$D(x_{i-1}, x_i) \ge D(x_i, x_{i+1})$。 也就是说， L_i 是非递增的。

令 m 表示 SAS 中各点之间的最小两两距离，因此根据长宽比界，所有两两距离都落在 $[m, mb)$ 内。特别地，对于所有 i，都有 $L_i \in [m, mb)$。将 L_i 分成$\lceil \log_{1+\varepsilon} b \rceil$ 个桶，使得第 k^{th} 个桶包含所有 L_i，其取值范围为 $[(1+\varepsilon)^{k-1}m,\ (1+\varepsilon)^k m)$。由于 L_i的单调性，每个桶都包含一个连续的序列 L_s， L_{s+1}、...、...、 L_{t-1}，其中 $1 \le s < t \le \ell$。我们声称，对于所有满足 $s \le i < j \le t$ 的 $i < j$，

$$(1+\varepsilon)^{k-1} m \le D(x_i, x_j) \le (1+\varepsilon)^k m. \tag{4}$$

即，点 x_s、 x_{s+1}、.....、 x_t的长宽比至多为 $1+\varepsilon$。假设（4）成立，根据我们关于度量空间中近似等距点的假设，每个桶包含 $\le N_\varepsilon$ 个点。由于共有$\lceil \log_{1+\varepsilon} b \rceil$ 个桶，SAS 的总长度至多为 $N_\varepsilon \cdot \lceil \log_{1+\varepsilon} b \rceil$，如需证明。

现在证明（4）。对于上界， $j \ge i+1$，因此根据以 x_i为基点的 SAS 条件，

$$D(x_i, x_j) \le D(x_i, x_{i+1}) = L_i \le (1+\varepsilon)^k m.$$

类似地，对于下界，由于 $i \le j-1$，根据以 x_j 为基点的 SAS 条件，

$$D(x_i, x_j) \ge D(x_{j-1}, x_j) = L_{j-1} \ge (1+\varepsilon)^{k-1} m.$$

上述不等式共同给出（4），从而完成证明。 □

3.1.1 定理 6 在欧几里得和 ℓ_p 空间中的应用

定理 6 将度量空间中具有有界长宽比的 SAS 的长度界定问题，转化为界定该度量空间中（近似）等边点集大小的问题。此前已有大量重要工作研究了此类界，参见例如 [AP03、Swa04a、Swa04b以及 Alo09]。例如，众所周知，在欧几里得空间中，对于 $\varepsilon = \Theta(1/\sqrt{d})$，我们可以界定 $N_\varepsilon = O$（d）。特别地，在附录 A 中，我们利用 [Alo09] 的结果证明：

引理 1（近似等边点集——欧几里得空间）。 存在普适常数c_1、 $c_2 > 0$，使得如果 $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^d$ 满足

$$1 \le \|x_i - x_j\|_2 \le 1 + \frac{c_1}{\sqrt{d}} \quad \textit{for all } i \ne j$$

那么 $N \le c_2 d$。

将引理 1代入定理 6 可得：

推论 1（有界长宽比 SAS——欧几里得空间）。 对于任意 $b > 1$，在 $\mathbb{R}^d$ 中，任何在欧几里得距离下长宽比小于 b 的 *SAS*，其长度为 O（$d^{3/2}$[对数 b]）。

在附录 A 中，我们还证明了 ℓ_p^d 中近似等边集的一个界，该界适用于任意 $p \ge 1$。此界采用了 Alon 和 Pudl´akAP03], 的方法，该方法着眼于严格等边情形。

引理 2（近似等边点集—— ℓ_p 空间）。 对于任意固定的 $1 \le p < \infty$，令 $q_p = \frac{2p+2}{2p-1} \le 4$。存在常数 $c_{p,\ 1}$和 $c_{p,\ 2}$（取决于 p），使得若 $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^d$ 满足

$$1 \le \|x_i - x_j\|_p \le 1 + c_{p,1} \cdot d^{-q_p/2} \quad \textit{for all } i \ne j,$$

则 $N \le c_{p,\ 2} \cdot d^{q_p}$。

将引理 2 代入定理6可得：

推论 2 (有界纵横比 SAS – ℓ_p 空间)。 对于任意 $b > 1$，在固定 $1 \le p < \infty$ 且长宽比小于 b 的条件下， $\mathbb{R}^d$ 中依据ℓ_p 范数定义的每条 *SAS* 的长度为 $O_p(d^{3q_p/2}\lceil \log b \rceil)$，其中 $q_p = \frac{2p+2}{2p-1} \le 4$。

根据定理 2，推论 1 和 2 可推出相应的 $1/\mathrm{poly}(d)$ 平衡 Voronoi 划分界，适用于欧几里得空间或 ℓ_p 长宽比有界的空间中的点集（因为，集合 X 中的任意 SAS 的长宽比至多为 $\Delta(X)$）。尤其是，推论2 给出了定理 5中所述的 SAS 长度界和平衡划分界。

3.2 欧几里得空间中一般 SAS 的多项式界

现在我们证明定理 1 的一个较弱版本，通过将欧几里得空间中的一般情形归约为上一节定理 6 和推论 1 所分析的有界长宽比情形，得到一个 poly(d) 上界。我们的证明只依赖于一个关于 d维欧几里得空间的基本事实（附录 A中给出了完整证明）：两两内积有界于 $O(d$的单位向量至多有 $1/($ $2d)$ 个——也就是说，它们的两两夹角都接近 90° 或更大。

引理 3 (方向打包)。 若单位向量 $u_1, \ldots, u_N \in \mathbb{R}^d$ 满足 $\langle u_i, u_j \rangle \le 1/(2d)$ 对所有 $i \ne j$ 均成立，则 $N \le 4d$。

有了这个引理，我们可以证明：

定理 8 (欧几里得 SAS 多项式界)。 设 L_d 表示欧几里得距离下 $\mathbb{R}^d$ 中 *SAS* 可能达到的最大长度。存在一个普适常数 C，使得对每个 d,

$$L_d \le C \cdot d^{2.5} \cdot \log(d+1).$$

证明。 在证明中，我们假设 $d > 1$。对于 $d = 1$，该界可由 $d = 2$ 的界推出。设 $(x_1, \ldots, x_\ell)$ 是一个 SAS。平移这些点，使得 $x_\ell = 0$，然后对它们进行统一缩放，使得 $\|x_{\ell-1}\|_2 = 1.$。这样，根据以基点 x_ℓ 应用的 SAS 条件，我们有$\|x_1\|_2 \ge \|x_2\|_2 \ge \ldots \ge \|x_{\ell-1}\|_2 = 1.$

设 $\bar{x}_i = x_i/\|x_i\|_2$。对于任意 $i < j < \ell$，以 x_i 为基点对有序对 $j < \ell$ 应用 SAS 条件，可得

$$\|x_i\|_2^2 \le \|x_i - x_j\|_2^2 = \|x_i\|_2^2 + \|x_j\|_2^2 - 2 \cdot \|x_i\|_2 \cdot \|x_j\|_2 \cdot \langle \bar{x}_i, \bar{x}_j \rangle. \tag{5}$$

重新整理可得

$$\langle \bar{x}_i, \bar{x}_j \rangle \le \frac{\|x_j\|_2}{2\|x_i\|_2}. \tag{6}$$

现在，对这些点进行分桶，使得 k^{th} 桶包含所有满足 x_i 且 $\|x_i\|_2 \in [d^{k-1}, d^k$的点。一个桶中的点构成一个长宽比为 $< 2d$的 SAS。事实上，与式（5）中一样，对于 $i < j$，有 $\|x_i - x_j\|_2 \ge \|x_i\|_2 \ge d^{k-1}$。另一方面，由三角不等式可得 $\|x_i - x_j\|_2 \le \|x_i\|_2 + \|x_j\|_2 < 2d^k$。因此，应用推论1，每个桶中有 O（$d^{3/2}$ 对数 d）个点。

接下来需要界定非空桶的数量。从每个非空偶数桶中选取一个代表点 x_i。任意两个选出的点 x_i的x_j 范数相差的因子大于 d。因此，式（6）给出 $\langle \bar{x}_i,\ \bar{x}_j \rangle < 1/$（$2d$）。由引理3可知，非空偶数桶至多有 $4d$ 个。对奇数桶应用相同的论证。将桶的数量与每个桶内的界相乘，即得 $L_d = O$（$d^{2.5} \log d$）。 □

3.3 欧几里得空间中 SAS 的线性上界

现在我们证明定理1，该定理将定理d所给出的多项式8欧几里得SAS界改进为关于 d的线性界。如前所述，$L_d \geq 2d$，因此该界在常数因子意义下是紧的。

定理 1. 令 L_d 表示在 $\mathbb{R}^d$ 中按欧几里得距离计算的 *SAS* 可能达到的最大长度。对于每个 d，$L_d \leq 8d$.

我们的证明考察 SAS 中各点之间的连续差分 $x_{i+1} - x_i$，并论证这些差分在平均意义下近似正交。这体现了这样的直觉：SAS 中的点不可能在逐渐接近所有先前点的同时，始终沿同一方向移动。形式化地说：

引理 4（连续 SAS 差分近似正交）。令（x_1、...、x_ℓ）为 $\mathbb{R}^d$ 中的一个 *SAS*。对于每个 $i \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$，令 u_i：=（$x_{i+1} - x_i$）$/\|x_{i+1} - x_i\|_2$ 表示序列中第（$i + 1$）th 点与 i^{th} 点之间的单位归一化差分。那么对于每个 $i \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$，

$$\sum_{j=i+1}^{\ell-1} \langle u_i, u_j \rangle^2 \leq 3.$$

引理 4 几乎可直接通过一个线性代数论证推出定理 1，该论证与我们在引理 $\mathbb{R}^d$ 中关于两两夹角接近 $90°$ 或更大的单位向量数量上界的证明非常相似3。在引理 3 中，我们对每个 $\langle u_i,\ u_j \rangle$ 都有一个上界。在引理 4 中，我们得到的是一个较弱的整体上界，但同样的基本思路仍然适用。

定理 1 的证明。设 $(x_1, \ldots, x_\ell)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个 SAS，并假设 $\ell \geq 3$。否则，$\ell \leq 8d$ 显然成立。令 $G \in \mathbb{R}^{(\ell-1)\times(\ell-1)}$ 为 Gram矩阵，其中 $G_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$，而 u_i,u_j 是引理 4 中定义的归一化差向量。与引理 3 的证明（见 (15)）一样，由于 G 是半正定的，且秩(G) $\leq d$，并且 tr(G) $= \ell - 1$，我们有 $\|G\|_F^2 \geq (\ell - 1)^2/d$。另一方面，根据引理 4，

$$\|G\|_F^2 = (\ell - 1) + 2\sum_{i=1}^{\ell-1} \sum_{j=i+1}^{\ell-1} \langle u_i, u_j \rangle^2 \leq (\ell - 1) + 2 \cdot 3(\ell - 1) = 7(\ell - 1).$$

结合 $\|G\|_F^2$的上界和下界可得 $\ell \leq 7d + 1 \leq 8d$。 □

3.3.1 引理 4 的证明4

接下来只需证明引理 4。根据 SAS 条件，每一步 $x_j \to x_{j+1}$ 都会更接近之前的每个点 x_i，满足 $i < j$。换言之，如果我们考虑 x_j 与 x_{j+1} 的垂直平分面（到 x_j 与 x_{j+1} 距离相等的点所构成的超平面），其法向量为 u_j，则每个之前的点都位于该超平面的 x_{j+1}一侧。

如果我们考虑一个更早的 $i < j - 1$，则 x_i 和 x_{i+1} 到 j^{th} 垂直平分面的（带符号）距离恰好相差 $\langle x_{i+1} - x_i,\ u_j \rangle = \|x_{i+1} - x_i\|_2 \cdot \langle u_i,\ u_j \rangle$。由于根据 SAS 条件二者都非负，因此其中一个至少为 $\|x_{i+1} - x_i\|_2 \cdot |\langle u_i,\ u_j \rangle|$。也就是说，如果 $|\langle u_i,\ u_j \rangle|$ 很大，则 j^{th} 垂直平分面必定远离 x_i 或 x_{i+1}。见图4。然而，不断接近某个点 a 的序列的垂直平分面不可能一直远离 a：在下面的引理 5 中，我们将证明，从 a 到连续垂直平分面的距离平方之和至多等于其到第一个点的距离平方。这意味着，之后至多只有 O(1) 个步骤能与 u_i具有较大的内积，从而得到引理 4。

我们的证明反复使用点到序列中各个垂直平分面的有向距离，下面给出其记号定义。

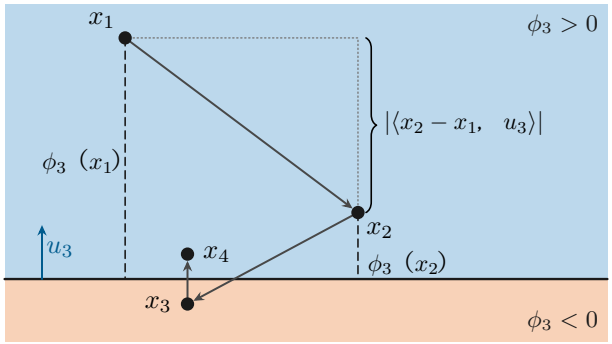


图4：$\mathbb{R}^2$中的一个 SAS（x_1，x_2，x_3，x_4）、x_3和 x_4的垂直平分面，以及单位法向量 u_3。根据 SAS 条件，ϕ_3（x_1）和 ϕ_3（x_2）到垂直平分面（定义3）的有向距离均为非负。它们相差 $|\langle x_2 - x_1$、$u_3\rangle| = \|x_2 - x_1\|_2 \cdot |\langle u_1$、$u_3\rangle|$，因此，如果 $|\langle u_1$、$u_3\rangle|$ 很大，则垂直平分面必定至少远离 x_1 和 x_2中的一个。

定义3（有向垂直平分面距离）。设（x_1，.. .，x_ℓ）是 $\mathbb{R}^d$ 中的互异点序列。对于每个 $i \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$，令 $L_i := \|x_{i+1} - x_i\|_2$ 表示第 i^{th} 个点与（$i+1$）th个点之间的距离，因此 $u_i =$ （$x_{i+1} - x_i$）$/L_i$，并定义 ϕ_i： $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 为

$$\phi_i(a) := \frac{\|a - x_i\|_2^2 - \|a - x_{i+1}\|_2^2}{2L_i}.$$

展开平方范数可得

$$\phi_i(a) = \langle a - x_i, u_i\rangle - \frac{L_i}{2} = \left\langle a - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, u_i \right\rangle. \tag{7}$$

由于 x_i 和 x_{i+1} 的垂直平分面是经过（$x_i + x_{i+1}$）/2 且单位法向量为 u_i的超平面，因此 ϕ_i（a）恰好是 a 到该垂直平分面的有向距离，该距离在 x_{i+1}一侧为正。

采用上述记号后，我们现在证明：如果一个 SAS 不断接近点 a，那么该序列的垂直平分面到 a 的距离平方和有界。

引理 5 (等分超平面距离界)。 设 $(x_1, \ldots, x_\ell)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个 *SAS*，且 $a \in \mathbb{R}^d$ 满足 $\|a - x_1\|_2 \geq \|a - x_2\|_2 \geq \cdots \geq \|a - x_\ell\|_2$。那么

$$\sum_{i=1}^{\ell-1} \phi_i(a)^2 \leq \|a - x_1\|_2^2.$$

证明。根据定义 3，有 $\phi_i(a) \geq 0$ 当且仅当 $\|a - x_{i+1}\|_2 \leq \|a - x_i\|_2$。因此，根据该序列趋近于 a这一假设，可得 $\phi_i(a) \geq 0$ 对所有 $i \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$均成立。

我们对 ℓ进行归纳。若 $\ell = 1$，则该和为空。若 $\ell = 2$，则由柯西-施瓦茨不等式和（7）得 $\phi_1(a) = \langle a - x_1$，$u_1\rangle - L_1/2 \leq \|a - x_1\|_2$，如所需。现在，设 $\ell \geq 3$，并假设该引理对所有长度为 $\ell - 1$的 SAS 均成立。

情况 1： $\phi_k(a) = 0$ **对于某个** $k \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$。从序列中移除 x_k 后得到一个长度为 $\ell - 1$ 的 SAS（SAS 的任意子序列都是 SAS），并且 a 仍然会与该序列中的每个后继点逐渐靠近。如果 $k = 1$，那么 $\|a - x_1\|_2 = \|a - x_2\|_2$。因此，由于 $\phi_1(a) = 0$，将归纳假设应用于 $(x_2$、.....、$x_\ell)$ 可得

$$\sum_{i=1}^{\ell-1} \phi_i(a)^2 = \sum_{i=2}^{\ell-1} \phi_i(a)^2 \leq \|a - x_2\|_2^2 = \|a - x_1\|_2^2.$$

如果 $k \geq 2$，则缩短后的序列 $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_\ell)$ 具有相同的第一个点 x_1。其在 a 处的垂直平分面距离为 $\phi_i(a)$（对于 $i \notin \{k-1, k\}$），并且还满足

$$\phi'(a) := \frac{\|a - x_{k-1}\|_2^2 - \|a - x_{k+1}\|_2^2}{2\|x_{k+1} - x_{k-1}\|_2}$$

对于新的相邻点对（x_{k-1}, x_{k+1}）。由于 $\phi_k(a) = 0$, $\|a - x_{k+1}\|_2 = \|a - x_k\|_2$，因此 $\phi'(a)$ 的分子与 $\phi_{k-1}(a)$ 相同。此外，$\phi'(a)$ 的分母更小（或相等），因为以 x_{k-1} 为基点的 SAS 条件给出 $\|x_{k+1} - x_{k-1}\|_2 \leq \|x_k - x_{k-1}\|_2 = L_{k-1}$。因此，$\phi_{k-1}(a) \leq \phi'(a)$。所以，利用 $\phi_k(a) = 0$ 这一点，并对缩短后的序列应用归纳假设，

$$\sum_{i=1}^{\ell-1} \phi_i(a)^2 = \sum_{i \notin \{k-1,k\}} \phi_i(a)^2 + \phi_{k-1}(a)^2 \leq \sum_{i \notin \{k-1,k\}} \phi_i(a)^2 + \phi'(a)^2 \leq \|a - x_1\|_2^2.$$

情况 2：对所有 $i \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$, $\phi_i(a) > 0$。在这种情况下，我们沿着方向 u_1 移动 a，直到到达一个适用于情况 1 的点。具体而言，对于 $t \in \mathbb{R}$，令 $a_t := a + tu_1$。由 (7)，$\phi_i(a_t) = \phi_i(a) + t\langle u_1, u_i\rangle$。令 T 为所有满足下述条件的 t 的集合：a_t 满足引理的假设，即该序列趋近于 a_t，因此对所有 i, $\phi_i(a_t) \geq 0$。这些条件中的每一个都定义了一个闭半直线（或整个 $\mathbb{R}$），所以 T 是一个包含 0 的闭区间。此外，T 有界。由于 $\phi_1(a_t) = \phi_1(a) + t$，每个 $t \in T$ 都满足 $t \geq -\phi_1(a)$。由于 $\phi_2(a_t) = \phi_2(a) + t\langle u_1, u_2\rangle$，并且以 x_1 为基点的 SAS 条件给出

$$L_1^2 = \|x_2 - x_1\|_2^2 \geq \|x_3 - x_1\|_2^2 = \|L_1 u_1 + L_2 u_2\|_2^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \langle u_1, u_2\rangle,$$

我们有 $\langle u_1, u_2\rangle \leq -L_2/(2L_1) < 0$，因此每个 $t \in T$ 都满足 $t \leq \phi_2(a)/|\langle u_1, u_2\rangle|$。令 $t_- \leq 0 \leq t_+$为 T的端点。在每个端点处，所有 $\phi_i(a_t)$ 都是非负的，并且根据连续性，至少有一个等于 0。因此根据情况 1，引理对a_{t_-} 和a_{t_+}成立。

要将其扩展到 $a = a_0$，考虑所需不等式两边之间的差距随 t变化的情况：

$$g(t) := \sum_{i=1}^{\ell-1} \phi_i(a_t)^2 - \|a_t - x_1\|_2^2.$$

我们已经证明 $g(t_-) \leq 0$ 且 $g(t_+) \leq 0$，现在必须证明 $g(0) \leq 0$。这是因为 g 是凸的。特别地，$\frac{\mathrm{d}\phi_i(a_t)}{\mathrm{d}t} = \langle u_1, u_i\rangle$。因此—

$$g''(t) = 2\sum_{i=1}^{\ell-1} \langle u_1, u_i\rangle^2 - 2\|u_1\|_2^2 = 2\sum_{i=2}^{\ell-1} \langle u_1, u_i\rangle^2 \geq 0,$$

从而 $g(0) \leq \max\{g(t_-), g(t_+)\} \leq 0$。 □

现在我们可以利用引理4证明引理5。

引理4的证明。对于 $i = \ell - 1$，该总和为空。因此固定 $i \leq \ell - 2$。由于引理陈述对于点的缩放保持不变，我们可以假设 $L_i = 1$，从而 $x_{i+1} - x_i = u_i$。注意，根据以 x_{i+1}为基点的 $L_{i+1} = \|x_{i+2} - x_{i+1}\|_2 \leq \|x_i - x_{i+1}\|_2 = 1$SAS 条件。

由（7）可得：

$$\langle u_i, u_j\rangle = \langle x_{i+1} - x_i, u_j\rangle = \phi_j(x_{i+1}) - \phi_j(x_i).$$

根据 SAS 条件，$(x_{i+2}, \dots, x_\ell)$ 同时趋近于 x_i 和 x_{i+1}。因此，对于所有$j \geq i+2$，$\phi_j(x_i)\ \phi_j(x_{i+1}) \geq 0$，并且由于对于 $\alpha, \beta \geq 0$，$(\alpha - \beta)^2 \leq \alpha^2 + \beta^2$

$$\langle u_i, u_j \rangle^2 \leq \phi_j(x_i)^2 + \phi_j(x_{i+1})^2. \tag{8}$$

我们使用引理 5 对这些项的和进行界定。首先，将该引理应用于 $a = x_i$ 和 SAS（x_{i+1}，……，x_ℓ），得到

$$\sum_{j=i+2}^{\ell-1} \phi_j(x_i)^2 \leq \sum_{j=i+1}^{\ell-1} \phi_j(x_i)^2 \leq \|x_i - x_{i+1}\|_2^2 = 1.$$

类似地，将引理 5 应用于 $a = x_{i+1}$ 和 SAS（x_{i+2}，……，x_ℓ）可得

$$\sum_{j=i+2}^{\ell-1} \phi_j(x_{i+1})^2 \leq \|x_{i+1} - x_{i+2}\|_2^2 = L_{i+1}^2 \leq 1.$$

将这些界代回（8），并注意到由柯西-施瓦茨不等式可直接得到 $\langle u_i,\ u_{i+1} \rangle^2 \leq 1$

$$\sum_{j=i+1}^{\ell-1} \langle u_i, u_j \rangle^2 \leq 1 + 1 + 1 = 3. \qquad \square$$

4 机会贪心搜索下的高效可导航图

现在我们证明定理 7，这是我们关于通过平衡 Voronoi 划分构造高效可导航图的结果。如第 1.1.2 节所述，我们将构造在“机会式”贪心搜索下可导航的图：该搜索总是移动到当前顶点的最近出邻居，即使该邻居到查询点的距离比当前顶点更远。

定义 4（机会式贪心搜索）。设 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 是度量空间（$\mathcal{X}$，D）中的一组 n 个点，并设 G 是一个有向图，其顶点与 X 中的点一一对应。给定查询 $q \in X$ 和起始顶点 $s \in X$，机会式贪心搜索 在 G 上从 $v = s$ 开始，并重复执行以下步骤。如果 $v = q$，则成功终止。如果 $v \neq q$ 在 G 中没有出邻居，则失败终止。否则，它移动到使 D（q，w）最小的 w 的出邻居 v；若存在多个，则按标识符打破平局。

请注意，按照上述定义，搜索可能永远不会终止。如果只考虑此前未访问过的出邻居，或者直接设置最大步数限制，就可以确保搜索始终终止。

4.1 平衡 Voronoi 划分树

如第 1.1.2 节所述，我们的搜索图 G 将基于一棵树构建，该树使用平衡 Voronoi 划分递归地分割 X。回顾第 2 节，若 $D(x,a) < D(x,b)$，则 x 优先选择 a 而不是 b；或者若 $D(x,a) = D(x,b)$，且 a 的标识符小于 b，则 x 也优先选择 a 而不是 b；此外，$S(a,b)$ 是 X 中优先选择 a 而不是 b 的点集。对于 $Y \subseteq X$ 以及不同的 a、$b \in Y$，令 $S^Y(a,b) := S(a,b) \cap Y$ 表示 Y 中优先选择 a 而不是 b 的点集。$S^Y(a,b)$ 和 $S^Y(b,a)$ 将 Y 划分为两部分。我们按如下方式构建路由树。

定义 5 (Voronoi路由树)。设 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 为度量空间 $(\mathcal{X}, D)$ 中的一个 n 点集。Voronoi路由树 T 是一棵顶点集为 X 的有根树，其中每个顶点 v 都关联着其后代的一个集合 $Y_v \subseteq X \setminus \{v\}$。任取一个根 $r \in X$ 并设定$Y_r = X \setminus \{r\}$。然后递归地，对每个顶点 v:

- 若 $Y_v = \emptyset$，则 v 是一个叶节点。

- 如果 $Y_v = \{x\}$，v 有一个子节点 x，且 $Y_x = \emptyset$（即，x 是叶节点）。

- 如果 $|Y_v| \geq 2$，选择互不相同的 a，$b \in Y_v$ 使 $\min\{|S^{Y_v}(a, b)|, |S^{Y_v}(b, a)|\}$ 最大。于是，v 有子节点 a 和 b，其中 $Y_a = S^{Y_v}(a, b) \setminus \{a\}$ 以及 $Y_b = S^{Y_v}(b, a) \setminus \{b\}$。

相应的 Voronoi 搜索图 G 与 T 完全相同，但从每个叶节点到根节点 r 都有一条边。

不难论证，在 Voronoi 搜索图 G 上进行机会式贪心搜索时，从任意起始节点出发，都能在步数不超过 T 深度的范围内到达任意目标点 $q \in X$。具体而言：

引理 6（Voronoi 搜索图路由保证）。设 T 和 G 如定义 5 所述，并设 h 为 T 的深度。对于任意查询 $q \in X$ 和起始顶点 $s \in X$，在 G 上进行机会式贪心搜索（定义 4）将在 $2h + 1$ 步内到达 q，每一步最多需要进行两次距离计算。

证明。我们首先证明，如果搜索位于顶点 v 且满足 $q \in \{v\} \cup Y_v$，那么它会沿着 v 到 q 在 T 中的路径前进。如果 $v = q$，则证明完毕。否则 $q \in Y_v$，因此 v 不是叶节点，其出邻居就是它的子节点。如果 v 有单个子节点，则该子节点为 q，搜索会移动到该节点。否则，由于 $S^{Y_v}(a, b)$ 和 $S^{Y_v}(b, a)$ 划分了 Y_v，不妨设 $q \in S^{Y_v}(a, b)$。于是，q 更偏好 a 而不是 b。因此，搜索会移动到 a，即通往 q 的路径上的下一个顶点。由于 $q \in S^{Y_v}(a, b) = \{a\} \cup Y_a$，在 a 处同样成立；根据归纳法，搜索会沿着通往 q 的路径前进。

由上可知，如果 $q \in \{s\} \cup Y_s$，搜索会在 h 步内到达 q。否则，搜索首先从 s 沿 T 向下移动，因为任何非叶节点的出邻居都是其子节点。由于 q 不在以 s 为根节点的子树中，搜索会在 h 步内到达叶节点 $\ell \neq q$，然后移动到 ℓ 的唯一出邻居，即根节点 r。由于 $q \in \{r\} \cup Y_r = X$，搜索随后沿着从 r 到 q 的路径前进，并在额外 h 步内到达 q——总计至多 $2h + 1$ 步。最后，由于 G 的每个顶点的出度至多为二，每一步至多需要进行两次距离计算。 □

为了应用引理 6 并给出高效贪心路由的最终界（定理 7），还需要界定 T 的深度。

引理 7（平衡沃罗诺伊树深度界）。设 T 如定义 5 所述，并设 $\alpha > 0$ 满足：每个 $Y \subseteq X$ 具有 $|Y| \geq 2$ 个互异的 a，b 其中

$$\min\{|S^Y(a, b)|, |S^Y(b, a)|\} \geq \alpha |Y|. \tag{9}$$

则 T 的深度至多为 $\lceil \ln n / \alpha \rceil$。

证明。设 x 是 v 的一个子节点。要么 $Y_x = \emptyset$，要么 $x \in \{a, b\}$。不失一般性，假设 $x = a$。在这种情况下，由于根据定义 5，a 和 b 被选为使（9）式左侧最大化，我们有 $|S^{Y_v}(b, a)| \geq \alpha |Y_v|$，因此 $|Y_x| = |S^{Y_v}(a, b)| - 1 \leq (1 - \alpha)|Y_v| - 1 < (1 - \alpha)|Y_v|$。所以，深度为 k 的每个顶点 v 都有 $|Y_v| \leq (1 - \alpha)^k (n - 1) < e^{-\alpha k} n$。当 $k \geq \lceil \ln n / \alpha \rceil$ 时，该值至多为 1，因此 $Y_v = \emptyset$，且 v 是一个叶节点。 □

结合引理 6 和 7 以及定理 1 和 2，我们现在可以证明定理 7：

定理 7。对于任意点集 X，其中 n 个点位于 $\mathbb{R}^d$ 欧几里得距离空间中，都存在一个有向图 G，其顶点分别对应于 X 中的点，且最大出度为二，使得机会式贪心搜索能够从 $O(d \log n)$ 步和距离计算内，从任意起始顶点到达任意目标点。

证明。令 T 为Voronoi路由树，并令 G 为相应的搜索图，如定义5所述。将定理 3 应用于每个 $Y \subseteq X$，可得 $|Y| \geq 2$，则（9）成立，其中 $\alpha = \frac{1}{32d^2}$。因此，根据引理7，T的深度至多为 $h = \lceil \ln n/\alpha \rceil = O(d \log n)$，并且根据引理 6，在 G上进行的机会式贪心搜索能够在 $2h+1$ 步内从任意起始顶点到达任意目标点，每步至多需要进行两次距离计算。 □

其他度量的扩展。引理 6 和引理 7 适用于任何度量空间。如果由 X 中的点组成的每个 SAS 的长度至多为 L，那么根据定理 2，我们可以取 $\alpha = 1/(4L)$，从而在 $O(L \log n)$ 步内完成路由和距离计算。例如，对于固定 $1 \leq p < \infty$ 的 ℓ_p 范数下的 $X \subseteq \mathbb{R}^d$，包含于 X 中的每个 SAS 的长宽比至多为 $\Delta(X)$。因此，根据定理 2 和定理 5，机会式贪心搜索可以从任意起始顶点出发，在 $O_p\big(d^{3q_p/2} \log(2\Delta(X)) \log n\big)$ 步（以及距离计算）内到达任意目标 $q \in X$。

度量空间中的 5 个指数级 SAS 下界

我们将平衡 Voronoi 划分归约为 SAS（定理 2）的方法适用于任何度量空间——只有在界定 SAS 的长度时，具体的距离函数才会发挥作用。在第 3 节中，我们展示了，在固定 $\mathbb{R}^d$ 中的 ℓ_p 范数下，对于固定的 $1 \leq p < \infty$，SAS 的长度关于 d 是多项式级的，并且关于长宽比是对数级的（定理 5）。在本节中，我们证明定理 4，该定理表明，在不限制长宽比的情况下，对于每个固定的 d，SAS 的长度都可能关于$p \neq 2$呈指数级增长。我们通过两个独立的定理来证明这一点：定理 9，涵盖 $1 < p < \infty$（其中 $p \neq 2$）；以及定理 10，涵盖 $0 < p \leq 1$。第 1.1.1 节中介绍的一个简单构造，为 d 给出了指数级的 $p = \infty$下界，即使长宽比可以任意接近于 1。

5.1 $1 < p < \infty$（$p \neq 2$）的指数下界

我们首先给出 $1 < p < \infty$ 且 $p \neq 2$ 时的下界。形式化地，我们证明：

定理 9（关于 $1 < p < \infty$ 的指数 SAS 下界）。对于每个固定的 $1 < p < \infty$，当$p \neq 2$时，在 ℓ_p 范数下的 $\mathbb{R}^d$ 中存在一个长度为 $\exp(\Omega_p(d))$ 的 *SAS*。

我们的证明使用 ℓ_p 范数的梯度向量，该向量对 $u \in \mathbb{R}^d$ 定义如下：

$$J_p(u)[i] := |u[i]|^{p-2} u[i], \qquad i \in [d],$$

其中 $J_p(u)[i] = 0$ 当 $u[i] = 0$时。注意，$J_2(u) = u$。在附录 B 中，我们证明（引理 9），存在指数多个单位向量 $u_1, \ldots, u_N$，满足 $\langle J_p(u_i) \; u_j \rangle < 0$ 对所有 $i \neq j$成立。也就是说，从 u_i 沿着 $-u_j$ 的方向移动足够小的距离，会增大 ℓ_p 范数。我们注意到，在欧几里得空间中无法实现这样的构造——这将要求存在指数多个两两内积为负的向量，而引理3排除了这种可能。

与第 ℓ_1 节中描述的范数构造1.1.1类似，我们以几何递减的数值对向量进行缩放，并利用这种一阶增长来论证：对于基点 k 和比较点 i，j 当 $k < i < j$时，SAS 条件（定义2）成立。至于 ℓ_1 范数，当 $i < k < j$ 且 $i < j < k$时，只需利用 $\|r_i u_i - r_j u_j\|_p \approx \|r_i u_i\|_p$ 这一事实，即可检查该条件在其余情形下同样成立 $i < j$。下面给出正式证明。

定理 9 的证明。固定 $p \in (1, \infty) \setminus \{2\}$。根据引理 9，存在 $N = \exp(\Omega_p(d))$ 个单位向量$u_1, \ldots, u_N \in \mathbb{R}^d$ 以及一个常数 $\gamma_p > 0$，使得对于所有 $i \neq k$，

$$\langle J_p(u_k), u_i \rangle \leq -\gamma_p. \tag{10}$$

令 $f_{k,\,i}(t) := \|u_k - tu_i\|_p$。根据引理 8，$f'_{k,\,i}(0) = -\langle J_p(u_k)\ u_i\rangle \geq \gamma_p$。此外 $f_{k,\,i}(0) = \|u_k\|_p = 1$。因此，存在某个 $\delta_{k,\,i} > 0$ 使得 $f_{k,\,i}(t) \geq 1 + \frac{\gamma_p}{2}t$ 对于所有 $0 < t \leq \delta_{k,\,i}$。令 $\delta = \min_{k\neq i} \delta_{k,\,i} > 0$，则对于所有 $k \neq i$ 和 $0 < t \leq \delta$，

$$\|u_k - tu_i\|_p \geq 1 + \frac{\gamma_p}{2}t. \tag{11}$$

取缩放因子 $\eta > 0$，其中 $\eta <$ 最小值$\{1/3, \delta, \gamma_p/2\}$，并令 $x_i = \eta^i u_i$。现在我们将证明x_1、……、x_N构成一个 SAS。固定 $i < j$和一个基准索引 $k \neq i$。为满足定义 2，我们必须证明$\|x_k - x_j\|_p < \|x_k - x_i\|_p$. 相对于 k 、 i 和 j 而言，有三种可能的位置。第一种情况使用（ 11 ）处理。另外两种情况由三角不等式可直接推出。

情况 1： $k < i < j$。根据（11），

$$\|x_k - x_i\|_p = \eta^k \|u_k - \eta^{i-k} u_i\|_p \geq \eta^k \left(1 + \frac{\eta^{i-k}\gamma_p}{2}\right).$$

另一方面，根据三角不等式，我们有 $\|x_k - x_j\|_p \leq \eta^k(1 + \eta^{j-k}) \leq \eta^k(1 + \eta \cdot \eta^{i-k})$。由于我们选取了 $\eta < \gamma_p/2$，这表明 $\|x_k - x_j\|_p < \|x_k - x_i\|_p$，正如所需。

情况 2： $i < k < j$。根据三角不等式，我们有：

$$\|x_k - x_j\|_p \leq (1 + \eta)\eta^k \qquad \text{and} \qquad \|x_k - x_i\|_p \geq (\eta^{-1} - 1)\eta^k.$$

由于我们选取了 $\eta < 1/3$，因此有 $1 + \eta < \eta^{-1} - 1$，从而得到 $\|x_k - x_j\|_p < \|x_k - x_i\|_p$，正如所需。**情况 3：** $i < j < k$。类似地，

$$\|x_k - x_j\|_p \leq (1 + \eta)\eta^j \qquad \text{and} \qquad \|x_k - x_i\|_p \geq (\eta^{-1} - \eta)\eta^j.$$

再次地，$\eta < 1/3$ 意味着 $1 + \eta < \eta^{-1} - \eta$，从而再次得到 $\|x_k - x_j\|_p < \|x_k - x_i\|_p$.

这些情况涵盖了所有可能性（除去 $k = j$ 时 $\|x_k - x_j\|_p = 0 <\|x_k - x_i\|_p$这一平凡情况）。因此，$(x_1, \ldots\ldots, x_N)$ 是一个长度为 $\exp(\Omega_p(d))$ 的 SAS，正如所需。 □

我们指出，上述构造的 SAS 的长宽比大约为 η^{-N}，其关于 d呈双指数增长。这是定理 5 中有界长宽比 SAS 的上界所要求的。

5.2 $0 < p \leq 1$ 的指数下界

现在，我们将指数级 SAS 构造扩展到任意 $0 < p \leq 1$，同样沿用第 ℓ_1 节中针对1.1.1所概述的方法。我们注意到，对于 $0 < p < 1$，$\|x - y\|_p$ 实际上并不是一个度量——它可能不满足三角不等式。不过，$\|x - y\|_p^p$ 是一个度量，因此我们将改用这个度量。由于 SAS 的定义只涉及距离比较，且在 $\|x - y\|_p$ 和 $\|x - y\|_p^p$下，这些比较完全相同，因此这不会产生任何影响。我们正式表述如下：

定理 10 （ $0 < p \leq 1$的指数级 SAS 下界）。对于每个固定的 $0 < p \leq 1$，在 $\mathbb{R}^d$ 中存在一个长度为$\exp(\Omega(d))$ 的 *SAS*，采用 ℓ_p 范数。

证明。令 $m = \lfloor d/8 \rfloor$。众所周知，存在 $N = \exp(\Omega(d))$ 个集合 $X_1, \ldots, X_N \subseteq [d]$，每个集合的大小为 m，且满足 $|X_i \cap X_j| \leq m/4$ 对所有 $i \neq j$均成立。例如，这可由吉尔伯特–瓦尔沙莫夫界推出；也可以通过随机选取集合族 [Gur10]来证明。令 $r_i = 3^{-i/p}$，于是 $r_i^p = 3^{-i}$，并令 $x_i = r_i \cdot \mathbf{1}_{X_i}$，其中 $\mathbf{1}_{X_i} \in \{0, 1\}^d$ 是 X_i的指示向量。对于 $p = 1$，这恰好就是第 1.1.1 节中概述的构造。

我们先界定任意一对点之间的距离。固定 $s < t$。 $X_s \setminus X_t$ 中的 $m - |X_s \cap X_t|$ 个坐标各自对 $\|x_s - x_t\|_p^p$ 贡献 r_s^p， $X_t \setminus X_s$ 中的 $m - |X_s \cap X_t|$ 个坐标各自贡献 r_t^p，而 $X_s \cap X_t$ 中的每个坐标贡献 $(r_s - r_t)^p$。因此，

$$\begin{aligned}\|x_s - x_t\|_p^p &= (m - |X_s \cap X_t|) \cdot (r_s^p + r_t^p) + |X_s \cap X_t| \cdot (r_s - r_t)^p \\ &\in \left[m\left(r_s^p + \frac{r_t^p}{2}\right),\ m\left(r_s^p + r_t^p\right) \right]. \end{aligned} \tag{12}$$

上界利用了 $(r_s - r_t)^p \le r_s^p$。下界利用了 $(r_s - r_t)^p \ge r_s^p - r_t^p$，以及以下事实： $|X_s \cap X_t| \le m/4$。

现在，固定 $i < j$和一个基索引 $k \neq i$。要使 $(x_1, \ldots, x_N)$ 成为 SAS（定义 2），我们必须证明 $\|x_k - x_j\|_p^p < \|x_k - x_i\|_p^p$。如定理 9的证明中一样， k 相对于 i 和 j有三种可能的位置。我们分别证明每种情况下的界。

情况 1： $k < i < j$。由于 $r_j^p \le r_i^p/3 < r_i^p/2$,

$$\|x_k - x_j\|_p^p \le m(r_k^p + r_j^p) < m\left(r_k^p + \frac{r_i^p}{2}\right) \le \|x_k - x_i\|_p^p.$$

情况 2： $i < k < j$。由于 $r_j^p \le r_k^p/3$ 和 $r_k^p \le r_i^p/3$,

$$\|x_k - x_j\|_p^p \le m(r_k^p + r_j^p) \le \frac{4}{3} m r_k^p < m r_i^p \le \|x_k - x_i\|_p^p.$$

情况 3： $i < j < k$。由于 $r_k^p \le r_j^p/3$ 和 $r_j^p \le r_i^p/3$,

$$\|x_k - x_j\|_p^p \le m(r_j^p + r_k^p) \le \frac{4}{3} m r_j^p < m r_i^p \le \|x_k - x_i\|_p^p.$$

因此，$(x_1, \ldots\ldots, x_N)$ 是一个长度为 $N = \exp(\Omega(d))$ 的 SAS，符合预期。 □

AI 致谢

在构思证明和撰写本文的过程中，我们使用了多种 AI 工具。具体而言，将平衡 Voronoi 划分问题归约为自接近序列（SAS）问题这一主要证明思路，以及欧几里得空间中 SAS 的 poly(d) 和 $O(d)$ 上界，均是在与 ChatGPT 的交流中得到的。附录 D 中给出的较弱 exp(d) 上界，是作者此前在未借助大语言模型的情况下得到的。定理 1 中的线性上界，是使用 GPT 5.5 和 5.6 经过约 101 小时的“思考时间”，对定理 8 中的初始上界进行改进后得到的。本文所呈现的简化证明还需要大量进一步的人工工作。

关于其他度量的推广与下界，以及关于使用k-中心进行划分的下界（附录 C），主要由作者证明，并得到了一些大语言模型的辅助。作者已核验并重写了所有证明，并对已发表内容承担全部责任。

形式化。 我们的大多数结果都在 Claude Opus 5.5 的帮助下使用 Lean 完成了形式化。请参见 https://github.com/jacketsj/formalized-sas-and-voronoi-partitions/。这些定义和陈述均经过人工检查。部分形式化结果相比论文中的表述改进了常数。论文中的证明侧重于简化的论证，但代价是使用了更差的常数。

参考文献

[ACG+12] Soroush Alamdari、Timothy M. Chan、Elyot Grant、Anna Lubiw 和 Vinayak Pathak。自趋近图。在第 20 届国际图形绘制研讨会（GD）论文集，2012年。[AHA98] Franz Aurenhammer、Friedrich Hoffmann 和 Boris Aronov。Minkowski 型定理与最小二乘聚类。Algorithmica，20(1)：61–76，1998年。[AJDG+25] Yousef Al-Jazzazi、Haya Diwan、Jinrui Gou、Cameron Musco、Christopher Musco 和 Torsten Suel。用于可证明准确的基于图的最近邻搜索的距离自适应束搜索。在神经信息处理系统进展第 38 卷（NeurIPS）论文集，2025年。[Alo09] Noga Alon。扰动单位矩阵具有高秩：证明与应用。组合学、概率与计算，18(1-2)：3–15，2009年。[AM93] Sunil Arya 和 David M. Mount。固定维度中的近似最近邻查询。在第 4 届年度 ACM-SIAM 离散算法研讨会（SODA）论文集，1993年。[AM26] Pratyush Avi 和 Christopher Musco。几乎可导航图。arXiv:2607.14564，2026年。[AP03] Noga Alon 和 Pavel Pudl´ak。 l_p^n中的等边集。几何与泛函分析，13(3)：467–482，2003年。[BG06] Arindam Banerjee 和 Joydeep Ghosh。带平衡约束的可扩展聚类算法。数据挖掘与知识发现，13(3)：365–395，2006年。[BH08] Michael Balzer 和 Daniel Heck。有限空间中的容量约束 Voronoi 图。在第 5 届年度 Voronoi 图科学与工程国际研讨会（ISVD）论文集，2008年。[BSD09] Michael Balzer、Thomas Schl¨omer 和 Oliver Deussen。容量约束点分布：Lloyd 方法的一种变体。ACM 图形学汇刊，28(3)：86:1–86:8，2009年。[CAdG+26] Vincent Cohen-Addad、Tommaso d'Orsi、Anupam Gupta、Guru Guruganesh、Eui-woong Lee、Renato Paes Leme、Debmalya Panigrahi、Madhusudhan Reddy Pittu、Jon Schneider 和 David P. Woodruff。使用比较预言机进行组合优化。在第 58 届年度 ACM 计算理论研讨会（STOC）论文集，2026年。+26] CDFC+26] Alex Conway、Laxman Dhulipala、Martin Farach-Colton、Rob Johnson、Ben Landrum、Christopher Musco、Yarin Shechter、Torsten Suel 和 Richard Wen。高效构造稀疏可导航图。在第 37 届年度 ACM-SIAM 离散算法研讨会（SODA）论文集，2026年。[CEM+93] Kenneth L. Clarkson、David Eppstein、Gary L. Miller、Carl Sturtivant 和 Shang-Hua Teng。使用迭代 Radon 点近似中心点。在第 9 届年度计算几何研讨会（SCG）论文集，1993年。

[Cla94] Kenneth L. Clarkson。近似最近点查询算法。载于第10届年度计算几何研讨会（SCG）论文集，1994年。[DCKK+15] Jean-Lou De Carufel、Matthew J. Katz、Matias Korman、Andr´e van Renssen、Marcel Roeloffzen 和 Shakhar Smorodinsky。关于移动传感器之间的干扰及相关问题。arXiv:1507.02130，2015年。初步版本发表于第24届欧洲算法研讨会（ESA），2016年。[DDD+26] Majid Daliri、Mohammadreza Daneshvaramoli、Purna Dutta、Edo Liberty、Cameron Musco、Christopher Musco 和 Torsten Suel。关于基于图的最近邻搜索的最坏情况保证。载于《神经信息处理系统进展》第39卷（NeurIPS），2026年。[DGM+24] Haya Diwan、Jinrui Gou、Cameron Musco、Christopher Musco 和 Torsten Suel。用于高维最近邻搜索的可导航图：构造与局限。载于《神经信息处理系统进展》第37卷（NeurIPS），2024年。[FXWC19] Cong Fu、Chao Xiang、Changxu Wang 和 Deng Cai。利用导航扩散图实现快速近似最近邻搜索。《VLDB基金会会刊》，12(5):461–474，2019年。[GLS08] Navin Goyal、Yury Lifshits 和 Hinrich Sch¨utze。无序不等式：一种最近邻搜索的组合方法。载于第1届国际网络搜索与数据挖掘会议（WSDM）论文集，2008年。[Gur10] Venkatesan Guruswami。笔记2：吉尔伯特–瓦尔沙莫夫界。《编码理论导论》课程讲义，卡内基梅隆大学，2010年。[HGvL17] Siavash Haghiri、Debarghya Ghoshdastidar 和 Ulrike von Luxburg。基于比较的最近邻搜索。载于第20届国际人工智能与统计学会议（AISTATS）论文集，2017年。[HHS09] Shinichi Honiden、Michael E. Houle 和 Christian Sommer。平衡图维诺图。载于第6届国际维诺图研讨会（ISVD）论文集，2009年。[HPKMR16] Sariel Har-Peled、Nirman Kumar、David M. Mount 和 Benjamin Raichel。通过邻近搜索进行空间探索。《离散与计算几何》，56(2):357–376，2016年。[IKL99] Christian Icking、Rolf Klein 和 Elmar Langetepe。自接近曲线。《剑桥哲学学会数学论文集》，125(3):441–453，1999年。[IM98] Piotr Indyk 和 Rajeev Motwani。近似最近邻：迈向消除维数灾难。载于第30届年度ACM计算理论研讨会（STOC）论文集，1998年。[IX23] Piotr Indyk 和 Haike Xu。常见近似最近邻搜索实现的最坏情况性能：保证与局限。载于《神经信息处理系统进展》第36卷（NeurIPS），2023年。

[JM93] Shreesh Jadhav 和 Asish Mukhopadhyay。在线性时间内计算有限平面点集的中心点。载于第9届年度计算几何研讨会（SCG）论文集，1993年。[KL04] Robert Krauthgamer 和 James R. Lee。导航网：用于邻近搜索的简单算法。载于第15届年度ACM-SIAM离散算法研讨会（SODA）论文集，2004年。[KLMZ17] Daniel M Kane、Shachar Lovett、Shay Moran 和 Jiapeng Zhang。基于比较查询的主动分类。载于第58届年度IEEE计算机科学基础研讨会（FOCS）论文集，2017年。[KPW26] Sanjeev Khanna、Ashwin Padaki 和 Erik Waingarten。用于最近邻搜索的稀疏可导航图：算法与困难性。载于第37届年度ACM-SIAM离散算法研讨会（SODA）论文集，2026年。[LS25] Hung Le 和 Shay Solomon。真正最优的欧几里得伸展器。《SIAM计算杂志》，54(4):FOCS19-135–FOCS19-199，2025年。[LT25] Shangqi Lu 和 Yufei Tao。用于相似性搜索的邻近图：快速构造、下界与欧几里得分离。《ACM数据管理会刊》，3(5):1–25，2025年。[LZ09] Yury Lifshits 和 Shengyu Zhang。用于最近邻、近重复项和小世界设计的组合算法。载于第20届年度ACM-SIAM离散算法研讨会（SODA）论文集，2009年。[MF14] Mikko I. Malinen 和 Pasi Fr¨anti。平衡 k-均值聚类。载于IAPR统计模式识别技术（SPR）与结构和句法模式识别（SSPR）联合国际研讨会论文集，2014年。[MY20] Yu. A. Malkov 和 D. A. Yashunin。利用分层可导航小世界图实现高效、稳健的近似最近邻搜索。《IEEE模式分析与机器智能汇刊》，42(4):824–836，2020年。[PAM17] Artem Pyatkin、Daniel Aloise 和 Nenad Mladenovi´c。平衡最小平方和聚类的NP-困难性。《模式识别快报》，97:44–45，2017年。[Rot94] G¨unter Rote。具有递增弦的曲线。《剑桥哲学学会数学论文集》，115(1):1–12，1994年。[RSS08] Federica Ricca、Andrea Scozzari 和 Bruno Simeone。用于政治选区划分的加权 Voronoi 区域算法。《数学与计算机建模》，48(9-10):1468–1477，2008年。[SDS+19] Suhas Jayaram Subramanya、Fnu Devvrit、Harsha Vardhan Simhadri、Ravishankar Krishnaswamy 和 Rohan Kadekodi。DiskANN：在单节点上进行快速、精确的十亿点最近邻搜索。载于《神经信息处理系统进展》第32卷（NeurIPS），2019年。[Swa04a] Konrad J. Swanepoel。有限维赋范空间中的等边集。载于《数学分析研讨会》，第195–237页。塞维利亚大学出版秘书处，塞维利亚，2004年。

[Swa04b] Konrad J. Swanepoel. 关于 Kusner 的等边集问题。《数学档案》，83(2):164–170，2004。

[TDDMH11] Dominique Tschopp、Suhas Diggavi、Payam Delgosha 和 Soheil Mohajer。用于基于比较的搜索的随机算法。发表于神经信息处理系统进展 *24*（*NeurIPS*），2011 年。[ZF21] Zhen Zhang 和 Qilong Feng。针对平衡k中位数的改进参数化近似。发表于第 *15* 届组合优化与应用国际会议（*COCOA*）论文集，2021 年。

基本几何事实的证明

本节中，我们将证明一些关于欧几里得空间和 ℓ_p 空间的基本事实，并在证明中加以运用。

第一条指出，在 d 维欧几里得空间中，任意一组单位向量若两两内积不超过 $1/(2d)$——也就是说，两两夹角接近 90° 或更大——那么其大小为 $O(d)$。

引理 3。 若单位向量 $u_1, \dots, u_N \in \mathbb{R}^d$ 满足 $\langle u_i,\ u_j \rangle \le 1/(2d)$ 对所有 $i \neq j$ 均成立，则 $N \le 4d$。

证明。 考虑 $N \times N$ Gram矩阵 G，其中 $G_{ij} = \langle u_i,\ u_j \rangle$。由于 $u_1, \dots, u_N$ 是单位向量，G 的非对角线元素位于范围 $[-1, 1/(2d)]$ 内。对于该范围内所有的 x，$(x+1)(x-1/(2d)) \le 0$。因此 $x^2 \le \frac{1}{2d} - (1 - \frac{1}{2d})x$。将此界应用于非对角线元素，可得：

$$\begin{aligned} \|G\|_F^2 &= \sum_{i=1}^N G_{ii}^2 + \sum_{i \neq j} G_{ij}^2 \\ &\le N + \frac{N(N-1)}{2d} - (1 - \frac{1}{2d}) \sum_{i \neq j} G_{ij}. \end{aligned} \tag{13}$$

现在，令 $\mathbf{1}$ 表示长度为 N 的全 $\mathbf{1}$ 向量。注意，由于 G 是半正定的，$\sum_{i,\ j} G_{ij} = 1^T G 1 \ge 0$。这给出：

$$\sum_{i \neq j} G_{ij} = 1^T G 1 - \sum_{i=1}^N G_{ii} \ge -N. \tag{14}$$

此外，再次利用 G 是半正定的以及 $\mathrm{rank}(G) \le d$，

$$\|G\|_F^2 \ge \frac{\mathrm{tr}(G)^2}{d} = \frac{N^2}{d}. \tag{15}$$

将（14）和（15）代入（13），即可得到：

$$\begin{aligned} \frac{N^2}{d} &\le N + \frac{N(N-1)}{2d} + (1 - \frac{1}{2d})N \\ &\le 2N + \frac{N^2}{2d}. \end{aligned}$$

重新整理即可得到所声称的界。 □

第二个引理指出，在 d 维欧几里得空间中，至多存在 $O(d)$ 个近似等距点，其两两距离介于 $\mathbf{1}$ 和 $1 + O(1/\sqrt{d})$ 之间。

引理 1. 存在普适常数 $c_1, c_2 > 0$ 使得若 $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$ 满足

$$1 \le \|x_i - x_j\|_2 \le 1 + \frac{c_1}{\sqrt{d}} \quad \textit{for all } i \neq j$$

则 $N \le c_2 d$。

证明。 Alon [Alo09，命题 3。1]证明存在一个普适常数 $c > 0$ 使得 $N = n + 1$ 两两距离属于 $[1, 1+\varepsilon]$ 的点，其中 $1/\sqrt{n} \le \varepsilon \le 1/10$，需要

$$d \ge c \frac{\log n}{\varepsilon^2 \log(1/\varepsilon)}.$$

选取 c_1，使得 $c_1 \le 1/10$ 且 $c_1^2 < 2c$。若 $n \le d/c_1^2$，则 $N = n+1 \le d/c_1^2 + 1$，且该界对 $c_2 = 1/c_1^2 + 1$成立。否则，若 $n \ge d/c_1^2$，取 $\varepsilon = c_1/\sqrt{d}$。于是条件成立，由该界可得 $\log n \le \frac{c_1^2}{c}$ $\log(\sqrt{d}/c_1) < 2\log(\sqrt{d}/c_1)$。这就得到 $n \le \frac{d}{c_1^2}$，与假设 $n > \frac{d}{c_1^2}$. 矛盾。因此，对 $c_2 = 1/c_1^2 + 1$，有 $N = n+1 \le d/c_1^2 \mp 1 \le c_2 d$，证毕。 □

引理 1 也可以扩展到 ℓ_p 空间。Alon 和 Pudl´ak [AP03] 研究了要求所有点之间的 ℓ_p 距离都相等的情形（即这些点构成一个正好等距集）。对于任意 $p \ge 1$，他们给出了此类点数量的上界 $O(d^{q_p})$，其中

$$q_p := \frac{2p+2}{2p-1} \le 4. \tag{16}$$

将他们的方法扩展到与等距情形足够接近的点集并不困难。具体来说，我们证明：

引理 2。对于任意固定的 $1 \le p < \infty$，设 $q_p = \frac{2p+2}{2p-1} \le 4$。存在常数 $c_{p,1}$ 和 $c_{p,2}$（取决于 p），使得若 x_1、……、$x_N \in \mathbb{R}^d$ 满足

$$1 \le \|x_i - x_j\|_p \le 1 + c_{p,1} \cdot d^{-q_p/2} \quad \textit{for all } i \ne j,$$

则 $N \le c_{p,2} \cdot d^{q_p}$。

证明。反设 $N > c_{p,2} \cdot d^{q_p}$。只保留这些点中的 $m = \lfloor c_{p,2} \cdot d^{q_p} \rfloor$，并考虑矩阵 $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$，其中 $M_{ij} = 1 - \|x_i - x_j\|_p^p$。$M$ 是近单位矩阵，因此我们可以论证 $\mathrm{rank}(M) = \Theta(m) = \Theta(d^{q_p})$。接下来我们将证明，由于这些点位于 d维空间中，这是不可能的。

秩下界　　界。对于所有 $i \ne j$，我们都有 $1 - (1 + c_{p,\,1} \cdot d^{-q_p/2})^p \le M_{ij} \le 0$。我们可以界定 d

$$1 - (1 + c_{p,1} \cdot d^{-q_p/2})^p \ge 1 - e^{pc_{p,1} \cdot d^{-q_p/2}} \ge -2pc_{p,1} d^{-q_p/2}.$$

只要我们将 $c_{p,\,1}$ 设得足够小，使得 $pc_{p,\,1} d^{-q_p/2} \le 1$，最后一个界就成立，因为对于 $x \le 1$，$1 - e^x \ge -2x$。因此总体而言，对于所有 $i \ne j.$，$|M_{ij}| \le 2pc_{p,\,1} d^{-q_p/2}$。如果我们设 $c_{p,\,1} < 1/(4p \cdot \sqrt{c_{p,\,2}})$，则有：

$$|M_{ij}| < \frac{1}{2\sqrt{c_{p,2}}} d^{-q_p/2} \le \frac{1}{2\sqrt{m}} \quad \text{for all } i \ne j \quad \text{and } M_{ii} = 1 \quad \text{for all } i. \tag{17}$$

现在，令 g 为一个偶数阶k 多项式，用于逼近函数 $|x|^p$。特别地，满足 $\max_{x \in [-2,2]} |g(x) - |x|^p| \le \frac{1}{2d\sqrt{m}}$。根据 Jackson定理, 为达到这一误差界，如 [AP03][1], 的引理 4.1 所述，只需取

$$k \le c_p d^{1/p} m^{1/(2p)}, \tag{18}$$

其中，c_p 是取决于 p的常数。考虑矩阵 $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$，其

$$\widehat{M}_{ij} = 1 - \sum_{r=1}^{d} g(x_i[r] - x_j[r]).$$

[1] [AP03] 存在一个小问题：其中没有要求 g 为偶数，而后续需要矩阵 $\widehat{M}$ 是对称的。不过，我们总能将 g 对称化，而不会增加其度数，并且只会得到更优的误差界，因为 $|x|^p$ 本身就是偶数。

注意，由于 g 为偶数， M 是对称的。令 $c_{p,\ 足够小}$，则我们关于两两范数的假设保证 $\|x_i - x_j\|_p \le 2$ 对所有 i均成立， j从而 $|x_i[r] - x_j[r]| \le 2$对所有 i均成立， j， r。因此，根据上述多项式逼近界，$|\widehat{M}_{ij} - M_{ij}| \le \frac{1}{2\sqrt{m}}$对所有 i均成立， j。结合三角不等式，通过(17)，我们得到：

$$|\widehat{M}_{ij}| < \frac{1}{\sqrt{m}} \quad \text{for all } i \neq j \quad \text{and} \quad \widehat{M}_{ii} \in \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{m}}, 1 + \frac{1}{2\sqrt{m}}\right] \quad \text{for all } i. \tag{19}$$

设 $c_{p,\ 2}$ 足够大，使得 $\sqrt{m} \ge 2$。那么结合（19）中的上界可得

$$\mathrm{tr}(\widehat{M}) \ge 3m/4 \quad \text{and} \quad \|\widehat{M}\|_F^2 \le m \cdot (5/4)^2 + m^2 \cdot (1/\sqrt{m})^2 \le 3m. \tag{20}$$

令 λ_1，……， $\lambda_{\mathrm{rank}(\widehat{M})}$ 为 M 的非零特征值，根据柯西-施瓦茨不等式，

$$\mathrm{tr}(\widehat{M})^2 = \left(\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}(\widehat{M})} \lambda_i\right)^2 \le \mathrm{rank}(\widehat{M}) \cdot \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}(\widehat{M})} \lambda_i^2 = \mathrm{rank}(\widehat{M}) \cdot \|\widehat{M}\|_F^2$$

由（20），我们因此有 $\frac{3^2 m^2}{4^2} \le$秩（$\widehat{M}$）$\cdot 3m$，因此

$$\mathrm{rank}(\widehat{M}) \ge 3m/16. \tag{21}$$

秩上界。 同时， M是以下 $d+1$ 个矩阵之和：全一矩阵，以及d个包含 k 次多项式 g（$x_i[r] - x_j[r]$）在 $r = 1$，……， d处的取值的矩阵。每个矩阵的秩至多为 $k+1$，因此由（18）可得，

$$\mathrm{rank}(\widehat{M}) \le 1 + d(k+1) \le (2 + c_p) d^{1+1/p} m^{1/(2p)}. \tag{22}$$

结合（21）和（22），我们得出

$$3m/16 \le (2 + c_p) d^{1+1/p} m^{1/(2p)}.$$

重新整理可得，对于某个固定常数 c_p'，有 $m \le c_p' \cdot d^{q_p}$。这与以下事实矛盾：当我们令 $c_{p,\ 2}$ 足够大时，$m = \lfloor c_{p,\ 2} \cdot d^{q_p} \rfloor$，从而完成证明。 □

B ℓ_p SAS 下界的辅助引理

本节证明若干事实，这些事实将用于定理 9和10的证明；这两个定理共同给出了我们在任意 d-长度 SAS 的构造，其中 ℓ_p 空间满足 $p \neq 2$，详见定理 4。

引理 8（范数的一阶展开）。固定 $1 < p < \infty$。对于 $u \in \mathbb{R}^d$，令 $J_p(u) \in \mathbb{R}^d$由 $J_p(u)[i]$ 给出：$= |u[i]|^{p-2} u[i]$，其中当 $u[i] = 0$时 $J_p(u)[i] = 0$。考虑满足$\|u\|_p = \|v\|_p = 1$的 u、$v \in \mathbb{R}^d$。令 $f(t)$：$= \|u - tv\|_p$。则 f在 0 处可微，且 $f(0) = 1$以及

$$f'(0) = -\langle J_p(u), v \rangle.$$

证明。设

$$g(t) = f(t)^p = \|u - tv\|_p^p = \sum_{i=1}^{d} |u[i] - tv[i]|^p.$$

由于 $p > 1$，求和中的每一项在 $t = 0$ 处都可微，其导数为 $-p|u[i]|^{p-2}u[i]v[i]$。因此，

$$g(0) = 1 \qquad \text{and} \qquad g'(0) = -p\sum_{i=1}^{d} |u[i]|^{p-2}u[i]v[i] = -p\langle J_p(u), v\rangle.$$

现在 $f(t) = g(t)^{1/p}$，且 $f(0) = g(0)^{1/p} = 1$。应用链式法则可得 :

$$f'(0) = \frac{1}{p} \cdot g(0)^{1/p-1} \cdot g'(0) = \frac{1}{p} \cdot 1 \cdot -p\langle J_p(u), v\rangle = -\langle J_p(u), v\rangle.$$

□

引理 9（具有负 ℓ_p 导数的方向）。固定 $1 < p < \infty$，满足 $p \neq 2$。存在$N = \exp(\Omega_p(d))$ 个单位向量 u_1、……、$u_N \in \mathbb{R}^d$ 以及一个常数 $\gamma_p > 0$，其仅依赖于 p，使得对于所有 $i \neq j$，

$$\langle J_p(u_i), u_j\rangle \leq -\gamma_p.$$

证明。令 Z 为随机变量

$$Z = \begin{cases} a, & \text{with probability } 1/3, \\ -1, & \text{with probability } 2/3, \end{cases} \tag{23}$$

其中 $a > 0$ 将在稍后选取。我们可以计算：

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{a-2}{3} \qquad \text{and} \qquad \mathbb{E}[|Z|^{p-2}Z] = \frac{a^{p-1}-2}{3}. \tag{24}$$

第一个表达式在 $a = 2$处为零，而第二个表达式在 $a = 2^{1/(p-1)}$处为零。这两个值不同，因为 $p \neq 2$。选取 a 严格位于二者之间。于是（24）中的两个期望符号相反。

我们选取随机向量 v_1、……、$v_N \in \{a, -1\}^d$，其各条目均按照（23）独立同分布。对于 $i \neq j$ 我们有：

$$\langle J_p(v_i), v_j\rangle = \sum_{r=1}^{d} |v_i[r]|^{p-2}v_i[r]v_j[r].$$

对于相互独立且 Z 服从 Z' 分布（23）的随机变量，我们有

$$\mu_p := \mathbb{E}\left[|Z|^{p-2}ZZ'\right] = \mathbb{E}[|Z|^{p-2}Z] \cdot \mathbb{E}[Z] < 0,$$

这是因为（24）中的期望符号相反。也就是说，上述求和中的所有项的均值均为μ_p。因此，根据标准的 Bernstein/Hoeffding 界，存在一个常数 $c_p > 0$，它仅取决于p，使得

$$\Pr\left[\langle J_p(v_i), v_j\rangle > \frac{\mu_p}{2}d\right] \leq e^{-c_p d}. \tag{25}$$

如果我们取 $N = e^{c_p d/3}$，对至多 N^2 对点应用并合界，则至少有一对点满足 (25) 的概率至多为 $N^2 e^{-c_p d} < 1$，当 d足够大时。因此，总能选取 $v_1, \ldots, v_N$使得对所有 $i \neq j$

$$\langle J_p(v_i), v_j\rangle \leq \frac{\mu_p}{2}d. \tag{26}$$

将每个向量归一化，令 $u_i := \frac{v_i}{\|v_i\|_p}$。由于我们选择的 a 严格介于 2 和 $2^{1/(p-1)}$之间，而这两个数都大于 1，因此有 $a > 1$，所以 $\|v_i\|_p \le ad^{1/p}$. 此外，

$$\langle J_p(u_i), u_j\rangle = \frac{\langle J_p(v_i), v_j\rangle}{\|v_i\|_p^{p-1}\|v_j\|_p}.$$

因此，根据（26）以及 $\|v_i\|_p^{p-1}\|v_j\|_p \le a^p d$这一事实，我们有

$$\langle J_p(u_i), u_j\rangle \le \frac{\mu_p}{2a^p}.$$

这就以常数 $\gamma_p := \frac{-\mu_p}{2a^p} > 0$. 得到了该引理 —— □

C 个 Voronoi 单元的平衡划分

如前所述，有几项工作 [HHS09、DCKK+15、HPKMR16] 研究了一个与我们关于平衡 Voronoi 划分的问题相关的问题。他们研究的是，必须选取多少个中心，才能使其 Voronoi 划分中的每个单元都至多包含输入点的 $O(1/k)$。粗略地说，这些~论文表明，$O(k)$ 个中心就足够了。然而，他们界中的常数取决于维度的指数函数 d ——参见例如 [DCKK+15] 的定理 4 以及 [HPKMR16] 的引理 5.2。[HHS09] 考虑了有界度图上的 Voronoi 划分，并证明对于一个具有 n 个节点且最大度为 Δ 的图，总能选出 $O(k \log n)$ 个节点，使得其 Voronoi 划分中的每个单元（相对于图上的最短路径距离）至多包含 $n\Delta/k$ 个节点。可以将这一结果应用于欧几里得伸展器，从而得到欧几里得空间中的平衡划分结果。然而，这类伸展器要求最大度按 $\Delta = \exp(d)$ [LS25] 的规模增长。

鉴于我们已得到肯定结果（定理 3），针对 $k = 2$ 的情形，人们或许会希望通过改进这些已有工作，使其对 d 呈多项式依赖。或许令人意外的是，事实并非如此：在 d 维欧几里得空间中，存在这样的点集：即使要求任意 Voronoi 单元中的点数上界为 $|X|/4$，也必须选取 $\Omega(\exp(d))$ 个中心。我们将在下文证明这一事实。

定理 11（平衡 k 中心 Voronoi 划分的下界）。对于任意 $d \ge 1$，存在一个包含 $2^{\Omega(d)}$ 个点的点集 X，位于 $\mathbb{R}^d$ 中，使得对于任意子集 $P \subset X$，若满足 $|P| \le |X|/4$，令 $S(p) = \{x \in X : \|x - p\|_2 < \min_{q\in P\setminus\{p\}} \|x - q\|_2\}$ 为分配给 p 的 *Voronoi* 单元中的点集，

$$\max_{p\in P} |S(p)| > |X|/4.$$

证明。取 $d \ge 2$ ——否则，只需令 X 仅包含一个点，结论便显然成立。令 $d' = \lfloor d/2 \rfloor$。众所周知，存在由 $2^{\Omega(d')} = 2^{\Omega(d)}$ 个 $\mathbb{R}^{d'}$ 单位向量组成的集合，其两两内积的绝对值均不超过 $1/4$，因此两两距离均至少为 $\sqrt{3}/2$。例如，这可由吉尔伯特–瓦尔沙莫夫界推出；也可以通过取一个由单位向量构成的随机集合 [Gur10]来证明。令 $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_{|U|}\}$ 为这样一个集合。取标量 $r_1 > r_2 > \ldots > r_{|U|} > 0$ 并考虑点集 $U' = \{r_1 u_1, \ldots, r_{|U|}u_{|U|}\}$。我们将选择这些缩放因子，使其任意接近 1——也就是说，使 U' 中的向量几乎都是单位向量。

令 X_1 为 $\mathbb{R}^d$ 中的点集：取 U' 中的点作为前 d' 个坐标，并将其余所有坐标设为 0。类似地，令 X_2 为 $\mathbb{R}^d$ 中的点集：取 U' 中的点作为第 $d'+1$、……、$2d'$ 个坐标，将其缩放 $1/2$ 倍，并将其余所有坐标设为 0。令 $X = X_1 \cup X_2$。

根据构造，任意 $y \in X_1$ 与 $z \in X_2$ 彼此正交。因此，通过使缩放因子 $r_1 > r_2 > \ldots > r_{|U|}$ 任意接近 1，我们可以确保 $\|y-z\|_2 = \sqrt{\|y\|_2^2 + \|z\|_2^2}$ 任意接近 $\sqrt{5}/4$。与此同时，对于任意 y，$y' \in X_1$，同样通过使这些缩放因子任意接近 1，我们可以使 $\|y-y'\|_2$ 任意接近以下界：$\sqrt{3}/2 > \sqrt{5}/4$。换言之，X_2 中的所有点到 X_1 中所有点的距离，都小于 X_1 中各点彼此之间的距离。

现在，考虑两种情况。**情况 1：**中心集合 P 不包含 X_2中的任何点。在这种情况下，$|S(p)| \geq |X_2| = |X|/2$ 对于缩放比例最小的点 $p \in P$（因此 $p \in X_1$也如此），因为 p将是 X_2中所有（正交）点距离最近的中心。**情况 2：**中心集合 P包含 X_2中的一个点。在这种情况下，令 X_2 中缩放比例最小的中心为 $p \in P \cap X_2$，则$|S(p)| \geq |X_1| - |X_1 \cap P|$——也就是说，$p \in X_2$ 将是 X_1中所有点距离最近的中心，但这些点本身被选为中心的情况除外。根据假设，$|X_1 \cap P| < |P| \leq |X|/4$，因此可得$|S(p)| > |X|/4$。所以在两种情况下，$\max_{p \in P} |S(p)| > |X|/4$，如所要求的。 □

D 通过可导航图得到指数界

在本节中，我们将说明，d维欧几里得空间中度数按指数级增长的经典可导航图构造 d [AM93] 可用于证明存在 α-平衡 Voronoi 划分，其 $\alpha = 1/2^{O(d)}$。关于平衡划分的主要结果——定理 3——将此界改进为 $\Omega(1/d)$。

回顾一下，点集上的有向图 X 若可导航，是指从任意起始点开始的贪心搜索都能成功导航至任意目标点 $q \in X$。等价地，对于每一对不同点 x，$q \in X$，存在一个出邻居 y属于 x，满足 $D(y, q) < D(x, q)$。Arya 和 Mount [AM93，第 3 节和引理 3。1] 给出了欧几里得空间中可导航图的以下界：

引理 10 ($\exp(d)$-度可导航图)。 每个集合 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ 在欧几里得距离下都存在一个可导航图，其最大出度至多为 3^d。

下面给出证明，以便完整起见，并去除 [AM93] 中关于各点处于一般位置的假设。

证明。 对于每个 $x \in X$，按如下方式构造其出邻域。初始时，$X \setminus \{x\}$中的所有点都是候选点。重复选择使 $\|x-y\|_2$ 最小的候选点 y，加入边 $x \to y$，并移除 y 以及满足 $\|z-y\|_2 < \|z-x\|_2$. 的每个其余候选点 z。选择 y时，任意平局均可 arbitrarily 处理。每个目标点 $q \in X \setminus \{x\}$ 要么被选为 x 的出邻居，要么被一个比 q 更接近的出邻居移除。因此，所得的图是可导航的。

为界定出度，考虑 x 的两个被选邻居 y，z，其中 y 先被选中。记 $\frac{y-x}{\|y-x\|_2} = u$ 和 $\frac{z-x}{\|z-x\|_2} = v$。由于在选择 y 时 ~~z 未~~被移除，因此 $\|(z-x) - (y-x)\|_2 = \|z-y\|_2 \geq \|z-x\|_2$。两边平方得

$$\|z-x\|_2^2 + \|y-x\|_2^2 - 2 \cdot \|z-x\|_2 \cdot \|y-x\|_2 \cdot \langle u, v \rangle \geq \|z-x\|_2^2.$$

重新整理可得

$$\langle u, v \rangle \leq \frac{\|y-x\|_2}{2\|z-x\|_2} \leq \frac{1}{2}.$$

因此，任意两个出邻居的单位方向之间的距离至少为 1。以这些方向为中心、半径为 $1/2$ 的开球两两不相交，且都包含在以原点为中心、半径为$3/2$ 的球内。比较体积可将它们的数量限制在 3^d以内，证毕。 □

下一个引理给出了一种通用转换：将出度有界的可导航图转换为平衡的 Voronoi 划分。

引理 11（有界度可导航性蕴含平衡划分）。令 X 为度量空间 $(\mathcal{X}, D)$ 中的 $n \geq 2$个点的集合。若 X拥有一个最大出度至多为M的可导航图，其中 $M \geq 2$，则 X 拥有一个对于 $\alpha = 1/(2M)$ 的 α-平衡 *Voronoi* 划分。

证明。回顾第 2 节可知，$S(a, b)$ 是 X 中比 a 更接近 b的点集，若距离相同则按标识符打破平局。假设反之，没有 $\frac{1}{2M}$-平衡 Voronoi 划分。固定任意一个 $x \in X$。根据可导航性，中的每个点都属于 $S(y, x)$ y的某个出邻居 x对应的集合。由于最多有 M 个出邻居，因此至少有一个这样的 y 满足

$$|S(y,x)| \geq \frac{n-1}{M} \geq \frac{n}{2M}.$$

因此，我们关于不存在 $\frac{1}{2M}$-平衡 Voronoi 划分的假设意味着 $|S(x, y)| < \frac{n}{2M}$。

为每个 x选择一个这样的出邻居。从任意点出发并不断沿着所选的边前进，最终必然会形成一个有向环。用 a_1、……、a_m表示其顶点，并令$a_{m+1} = a_1$。于是有

$$|S(a_i, a_{i+1})| < \frac{n}{2M} \qquad \text{for all } 1 \leq i \leq m. \tag{27}$$

我们将证明，环上的某个点与 a_1一起给出一个平衡划分。对于 $2 \leq i \leq m$，令

$$O_i := \frac{|S(a_i, a_1)|}{n}.$$

由于 $S(a_1, a_2) \cup S(a_2, a_1) = X$，（27）给出$O_2 > 1 - \frac{1}{2M}$。有向环的最后一条边给出 $O_m < \frac{1}{2M}$。此外，对于 $2 \leq i < m$，

$$S(a_i, a_1) \setminus S(a_i, a_{i+1}) \subseteq S(a_{i+1}, a_1).$$

事实上，x 左侧集合中的点到 a_{i+1} 的距离小于到 a_i 的距离，并且到 a_i 的距离小于到 a_1的距离，因此到 a_{i+1} 的距离小于到 a_1的距离。于是，由（27），

$$O_{i+1} \geq O_i - \frac{|S(a_i, a_{i+1})|}{n} > O_i - \frac{1}{2M}.$$

换句话说，O_i 在任意一步中减少的幅度都不超过 $\frac{1}{2M}$。令k为满足 $O_k \leq 1/2$的第一个索引。这样的索引存在，因为 $O_m < \frac{1}{2M} \leq 1/4$（根据我们关于 $M \geq 2$的假设），并且$k \geq 3$，因为 $O_2 > 1 - \frac{1}{2M} \geq \frac{3}{4}$。前述界限意味着

$$\frac{|S(a_k, a_1)|}{n} = O_k > O_{k-1} - \frac{1}{2M} > \frac{1}{2} - \frac{1}{2M} \geq \frac{1}{2M}.$$

此外，$S(a_1, a_k) \cup S(a_k, a_1) = X$，因此

$$\frac{|S(a_1, a_k)|}{n} \geq 1 - O_k \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2M}.$$

因此 a_1，a_k 构成一个 $\frac{1}{2M}$-平衡的 Voronoi 划分（定义 1），这与不存在此类划分的假设相矛盾。□

结合引理 10和 11 最终得到：

定理 12（通过可导航图得到的指数平衡划分界）。在欧几里得距离下，$\mathbb{R}^d$ 中的任意点集 X都存在一个 α-平衡的 *Voronoi* 划分，其中 $\alpha = 1/(2 \cdot 3^d)$。