arXiv:2611.32680v1 [cond-mat.quant-gas] 24 Nov 2026

探测玻色双腿梯子中的梯级莫特绝缘体

Christopher Parsonage*，Lennart Koehn*，Lorenzo Carfora、Ben Watson、Timon Hilker、Elmar Haller、Peter Kirton、ArthurLa Rooij、Stefan Kuhr*University of Strathclyde, Department of Physics, Glasgow G4 0NG, United Kingdom*

*这些作者对本研究作出了同等贡献。（日期：2026年11月25日）

莫特绝缘体通常出现在整数密度下，但某些晶格几何结构或非局域相互作用能够在分数密度下稳定莫特绝缘体。在本研究中，我们利用半填充附近的超冷玻色原子研究强相互作用的双腿梯子，并通过位点分辨测量中的特征性梯级占据数，确定梯级莫特绝缘体（RMI）相。我们通过晶格调制光谱学探测其激发谱，并利用包含驱动动力学、与多个激发态耦合以及能量偏移的数值模拟解释观测到的光谱。与其他莫特绝缘体一样，RMI 相的特征在于其不可压缩性；我们通过对密度和化学势进行位点分辨分析来探测这种不可压缩性。我们的研究直接揭示了强关联梯子系统中的激发动力学，并为研究具有可编程晶格几何结构的低维量子系统中的输运及其他动力学性质铺平了道路。

在光学晶格中实现的量子多体系统里，几何结构和维度会强烈影响其中出现的相和动力学 [1–3]。在一维情况下，量子涨落会阻止弱相互作用区出现真正的长程有序 [4]。相反，玻色子会形成准凝聚体，其关联呈代数衰减，从而描述一种 Luttinger液体。在强排斥作用下，玻色子会费米化，并趋近于强关联的托克斯-吉拉多区 [5, 6]。在晶格中，硬核玻色子极限在非公度填充下仍然无能隙，而在公度填充下则可能出现莫特绝缘相。在晶格中，这对应于非公度填充下的硬核玻色子体系，而在公度填充下，系统会成为莫特绝缘体。将两条这样的链耦合起来形成梯子几何结构后，可以支持单链中不存在的相和输运现象 [7–9]。梯形几何在各种固态和分子材料中均有实现，并表现出输运和

其磁性强烈依赖于腿与梯级耦合之间的竞争。这种相互作用产生了包括自旋能隙相、关联绝缘行为以及非常规超导性在内的效应 [10–13]。

双腿梯子由两条通过横向连接（梯级）耦合的一维链（腿）组成，使粒子能够沿每条腿以及在两条腿之间隧穿。对于这种梯子上的玻色子，位点相互作用、腿间和梯级间隧穿之间的相互作用产生了丰富的相图。在公度填充下，增强相互作用会驱动超流体到莫特绝缘体的跃迁 [14, 15]，而该跃迁如今取决于两个彼此独立的隧穿项。对于非公度填充，这类梯子系统还支持一种额外的绝缘相，称为梯级莫特绝缘体（RMI） [16–20]。在这一相中，粒子在单个梯级之间离域化，同时沿梯子的腿方向保持局域化，从而在分数填充下形成不可压缩绝缘态。在强相互作用极限下，玻色梯子可以映射为有效自旋梯子哈密顿量 [16]，，其中被原子占据的位点充当一种自旋，而空位（空穴）充当另一种自旋。因此，RMI 相为低维量子磁性系统提供了玻色子类比，也为研究强关联输运提供了平台 [21]。这种类比在超冷原子平台中特别具有吸引力，因为在那里既可以直接测量局域占据数，也可以直接测量动力学过程。

早期理论研究探讨了 RMI 相的出现，以及玻色子与费米子统计性质不同的参数区域，尤其是在存在无序的情况下 [16, 17, 22]。近期，有限相互作用

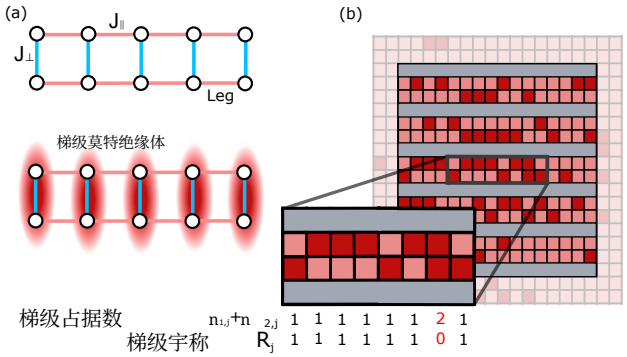


图1。**双腿梯子系统**。 (a) 双腿梯子几何结构，沿每条腿的隧穿振幅为 $J_{\parallel}$ （红色连接），沿梯级的隧穿振幅为 $J_{\perp}$ （蓝色连接）。在梯级莫特绝缘相中，原子可在梯级上离域分布，而腿方向上的隧穿则受到相互作用的抑制。(b) 重构的原子占据数（$V_{\perp} = 5\,E_{\mathrm{r}}$、$V_{\parallel} = 20\,E_{\mathrm{r}}$、$J_{\perp}/J_{\parallel} = 27$、$U/J_{\parallel} = 109$）。红色和粉色方格分别表示奇偶性投影晶格位点占据数，其中分别有一个和零个原子。排斥性光势（灰色阴影区域）将系统分隔为五个相互独立的双腿梯子。放大图显示了RMI相的形成，起始于

中心区域，以及每个梯级的梯级占据数和梯级宇称。

研究探讨了 RMI 相的范围如何同时取决于隧穿振幅和相互作用强度 [20]。在实验方面，光学晶格中的超冷原子为实现此类梯形哈密顿量提供了一个高度可控的平台 [23–25]。此前的实验已在玻色梯子中观测到手性电流和迈斯纳物理 [26], , 近期还报道了强相互作用的作用 [27], , 并观测到梯级位点之间增强的密度反关联。近期关于拓扑临界性的实验研究还显示，在由两条耦合链构成的相关系统中出现了能隙 [28]。

在本研究中，我们利用可编程光势在光学晶格中实现了耦合的双腿玻色梯子。通过测量梯级宇称随填充数和隧穿强度的变化，我们在有限相互作用强度下确认了 RMI 相；此外，还利用振幅调制光谱探测其激发能隙，进一步表征了该系统。我们还根据位点占据数随局域化学势的变化确定了压缩率。

我们的实验采用量子气体显微镜 [29–33], , 能够进行单点分辨原子成像。在每次实验中，我们将 ^{87}Rb 原子制备于五个彼此独立的双腿梯子系统中，每个系统包含 2×16 个格点，位于六个平行的排斥势垒之间 [图 1(b)]。该系统由玻色-哈伯德模型描述

$$\hat{H} = -J_{\parallel} \sum_{i,j} (\hat{a}^{\dagger}_{i,j} \hat{a}_{i,j+1} + \text{h.c.}) - J_{\perp} \sum_{j} (\hat{a}^{\dagger}_{1,j} \hat{a}_{2,j} + \text{h.c.}) + \sum_{i,j} \frac{U}{2} \hat{n}_{i,j}(\hat{n}_{i,j} - 1) + \sum_{i,j} (\epsilon_{i,j} - \mu) \hat{n}_{i,j} , \quad (1)$$

其中， $J_{\parallel}$ 和 $J_{\perp}$ 分别表示沿腿和梯级方向的隧穿振幅 [图 1(a)]。这里，$\hat{a}^{\dagger}_{i,j}$($\hat{a}_{i,j}$) 是具有梯级和腿索引 $j = 1, \ldots, N$ 以及 $i = 1, 2$ 的玻色产生（湮灭）算符，$n_i \hat{a}^{\dagger}_i \hat{a}_i$分别是相应的数算符。 U 是位点相互作用能，$\epsilon_{i,j}$ 是局域势偏移， μ 是化学势。方程 1 中隧穿与相互作用之间的竞争产生了超流体相和绝缘相。在弱相互作用区域，当 $J_{\perp}, J_{\parallel} > U$ 时，原子在梯子上离域化并形成超流态。当相互作用能为 $U \gg J_{\perp}, J_{\parallel}$时，在单位填充下可形成具有能隙 $\Delta E = U$ 的莫特绝缘相。对于腿之间的弱耦合 $J_{\perp} \ll J_{\parallel}$， 该系统

分离成近乎相互独立的一维系统。相比之下，当梯级耦合大于腿内的耦合时， $J_{\perp} > J_{\parallel}$，系统在半填充下可以进入 RMI 相。每个梯级上都有一个原子在其两端之间离域，而沿腿方向的输运受到抑制。该状态具有绝缘性，并表现出有限的能隙 $\Delta E < U$。为了识别 RMI 相，我们确定梯级占据数，并将梯级宇称定义为 $R_j = \text{mod}_2(n_{1,j} + n_{2,j})$，其中 $n_{i,j}$ 表示图 j Fig. 1] 中腿 i [上梯级的占据数。在 RMI 相中，每个梯级都被一个原子占据，从而得到 $R_j = 1$；而空梯级或包含两个原子的梯级则给出 $R_j = 0$。对于具有 N 个梯级的梯子，平均梯级宇称定义为 $R = \sum_{j=1}^{N} R_j / N$。对于半填充以上的超流体，宇称投影后的格点占据数平均为 ~ 0.5 ，从而得到 $R \simeq 0.5$。

在第一组实验中，我们通过测量不同 $J_{\perp}/J_{\parallel}$区域的梯级宇称，研究 RMI 相的出现。为确定预期在半填充条件下出现 RMI 的参数区域，我们使用密度矩阵重整化群（DMRG）计算 [20] （补充材料），在一系列晶格深度 $V_{\perp}$ 和 $V_{\parallel}$[下获得能隙，如图 2(a)]所示。根据这些预测，我们将 $V_{\parallel}$ 从5 E_{r} 改变至 30 E_{r}，同时保持 $V_{\perp} = 5\,E_{\mathrm{r}}$ 不变。在这一参数范围内，我们观察到梯级宇称从

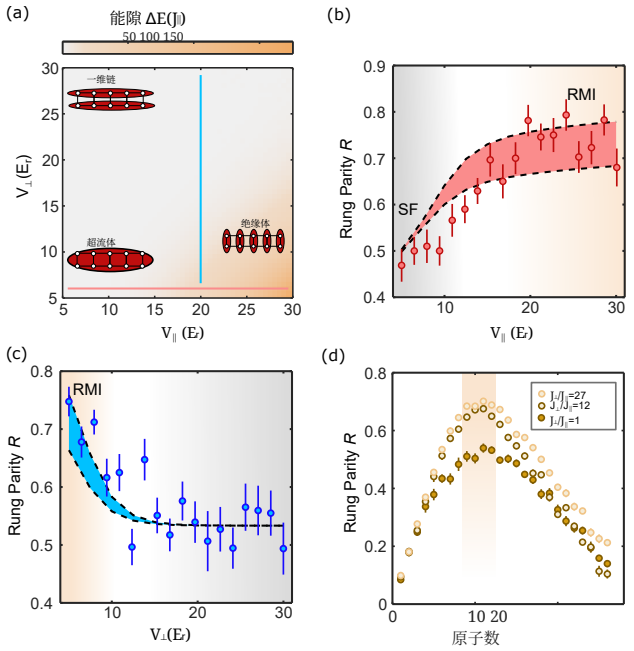


图 2. **RMI 相的观测**。(a) 半填充梯子的能隙 ΔE 随晶格深度 $V_{\perp}, V_{\parallel}$ 变化的数值计算。对于较小的 $V_{\parallel}$，存在耦合或解耦的一维超流态；而当 $V_{\perp} \ll V_{\parallel}$ 时，RMI 相出现（棕色阴影区域）。红线和蓝线表示 (b) 和 (c) 中数据集所用的参数扫描。(b) 随着 $V_{\parallel}$ 增加而变化的梯级宇称 R （$V_{\perp} = 5\,E_{\mathrm{r}}$）。阴影区域表示在一系列温度下进行 DMRG 计算的结果，对于 $V_{\parallel} = 20\,E_{\mathrm{r}}$，$10.1 J_{\parallel} < k_B T < 13.5 J_{\parallel}$ 。(c) 随着 $V_{\perp}$ 增加而变化的 R （$V_{\parallel} = 20\,E_{\mathrm{r}}$），以及相同温度下的数值计算结果（蓝色阴影区域），温度与 (b) 相同。(d) 2×16 位点梯子中梯级宇称随原子总数的变化。棕色阴影区域表示检测到的原子数范围（9–12 个原子）；我们使用该范围对数据集进行后筛选，以获得 (b) 和 (c) 所示结果。三个数据集的晶格深度分别为 $V_{\perp} = 5\,E_{\mathrm{r}}$、$V_{\parallel} = 20\,E_{\mathrm{r}}$（ $J_{\perp}/J_{\parallel} = 27$）、 $V_{\perp} = 8\,E_{\mathrm{r}}$、$V_{\parallel} = 20\,E_{\mathrm{r}}$（ $J_{\perp}/J_{\parallel} = 12$）和 $V_{\perp,\,\parallel} = 20\,E_{\mathrm{r}}$（ $J_{\perp}/J_{\parallel} = 1$）。b、c 和 d 中所示的误差棒表示统计误差。部分误差棒小于标记的尺寸。

$R \simeq 0.5$ 增加到 $R \simeq 0.75$，表明系统从超流体区间向 RMI 相发生跃迁 [，如图 2(b)]所示。由于有限的系统尺寸和温度，我们将其认定为交叉，而非突变跃迁[20]。观测到的最大梯级宇称受到有限温度效应的限制，这与我们的数值模拟结果一致。通过比较 RMI 区域（V $_{\parallel} = 20\,E_{\mathrm{r}}$、 $V_{\perp} = 5\,E_{\mathrm{r}}$）中观测到的最大$R_p$ ，我们推断温度为 $k_B T \approx 12(2) J_{\parallel}$，这对应于图 2(b) 中不确定性带的中心。该温度低于能隙能量 $\Delta E = 27 J_{\parallel}$。在第二个实验中，我们从 RMI 区域（$V_{\perp} = 5\,E_{\mathrm{r}}, V_{\parallel} = 20\,E_{\mathrm{r}}$）开始并增大 $V_{\perp}$。我们观察到梯级宇称从 $R \simeq 0.75$ 降低至 $R \simeq 0.5$[，如图 2(c)], 所示，这同样与有限温度数值计算结果一致。在这里，相互作用能对于系统而言过大，使其无法在我们的有限温度下进入超流相态；与此同时，密度仍然过低，无法形成传统的莫特绝缘体。

阱的谐振束缚使梯子上的密度随空间位置而变化。由于在远离阱中心处，RMI 的能隙小于谐振束缚造成的能量偏移，因此原子数越多，测得的梯级宇称越低。为表征这一效应，我们计算了三种不同晶格深度下，中央八个梯级的平均梯级宇称随原子数的变化，从而确定形成 RMI 的参数范围 [图2(d)]。我们发现，检测到的原子数在 9 到 12 之间时，梯级宇称最高，并据此筛选出图 2(b)和图2(c)所示的数据集。原子数更高时，我们观察到梯级宇称逐渐降至零，这与莫特绝缘体的形成一致。

为探测 RMI 的激发谱，我们调制晶格深度 $V_{\parallel}$ [34], 使一个原子隧穿过一个梯级，进入相邻的、已被一个原子占据的梯级 [图3(a)]。这一过程会产生额外的空梯级和双占据梯级，从而降低测得的梯级宇称 R。我们以 25% 的调制幅度对晶格进行正弦调制，持续时间为 30 至 100 ms，并在一系列数值范围内进行测量 $J_{\perp}/J_{\parallel}$ [图 3(b)]。对于每组参数，我们测量 R 随调制频率的变化，并根据梯级宇称的极小值位置确定共振频率 [在

在图3(b)]中设定。我们发现，测得的共振频率随 $J_{\perp}/J_{\parallel}$ 增加，但系统性地高于 DMRG 计算 [红线在图3(b)]中预测的激发能隙。为理解这一差异，我们采用时间依赖的 $V_{\parallel}(t)$ 来捕捉实验中所使用调制的影响。我们进一步纳入局域能量偏移 $\epsilon_{i,\ j} = \epsilon'_{i,\ j} + \epsilon_B$，其中 $\epsilon'_{i,\ j}$ 源于谐振束缚，而 ϵ_B 描述了由实验缺陷导致的两条腿之间的相对能量偏移（补充材料）。

当我们仅模拟 $V_{\parallel}(t)$ 的调制并

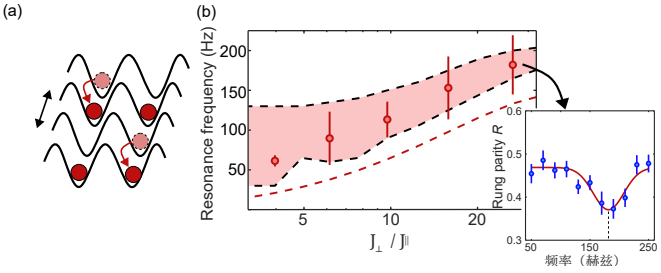


图3。**调制共振**。（a）调制晶格中诱导隧穿的示意图，其中一个原子隧穿到已被一个原子占据的相邻梯级。（b） $J_{\perp}/J_{\parallel} = 4$、6、10、16、27 的测得共振频率。对数据集进行后选择，使其包含16个梯级上一定范围内的 $6-16$原子，因为调制会导致原子数出现更大的变化。误差棒表示共振的宽度。红色阴影区域显示了在两条腿之间存在势偏置 ϵ_B （$0 < \epsilon_B/J_{\perp} < 1.1$）时数值计算得到的共振频率（补充材料）。红色虚线表示使用 DMRG方法计算得到的能隙，其对应于 $\epsilon_B = 0$。插图：梯级宇称 R 随调制频率的变化，并标出了统计误差棒。红线为用于确定共振中心的高斯拟合。

忽略局域能量偏移（$\epsilon_{i,\ j} = 0$）时，我们已经观察到共振向更高频率发生偏移，如图3(b)中较低的黑线所示。这一差异主要是由有限调制幅度导致的功率展宽造成的。晶格调制将 RMI基态与具有不同跃迁矩阵元的多个激发态耦合起来（补充材料 BII 1）。对于有限梯子，其中若干跃迁是可实现的，而观测到的光谱响应由激发态之间的能量间隔及其与驱动的耦合强度共同决定。在较弱的调制幅度下，原则上可以分辨出这些独立的共振；而对于实验中使用的较强调制幅度，它们会发生重叠并合并为一个展宽的特征。因此，共振会向耦合强度最大的跃迁方向偏移，而不是恰好出现在未将调制纳入考虑时得到的多体激发能隙处。

纳入腿依赖势偏置 ϵ_B 后，共振进一步发生偏移，使模拟结果与$0 < \epsilon_B/J_{\perp} < 1.1$的实验数据吻合良好。 ϵ_B 的上限值对应于一个能量偏移，该偏移等于相邻位点排斥性光势的 $\sim 5\%$（在 RMI 区域中为$\sim 3\,U$）。这种偏置可能源于势垒位置的波动，以及光势强度的空间非均匀性（补充材料）。

RMI 的另一个特征是可压缩性降低， $\kappa = (1/n^2)(\partial n/\partial \mu)$，其中 n是格点密度， μ 是化学势。在存在谐阱时，依赖于梯级的能量偏移 ϵ_j 导致局域化学势 $\mu_{loc} = \mu - \epsilon_j$。为可视化

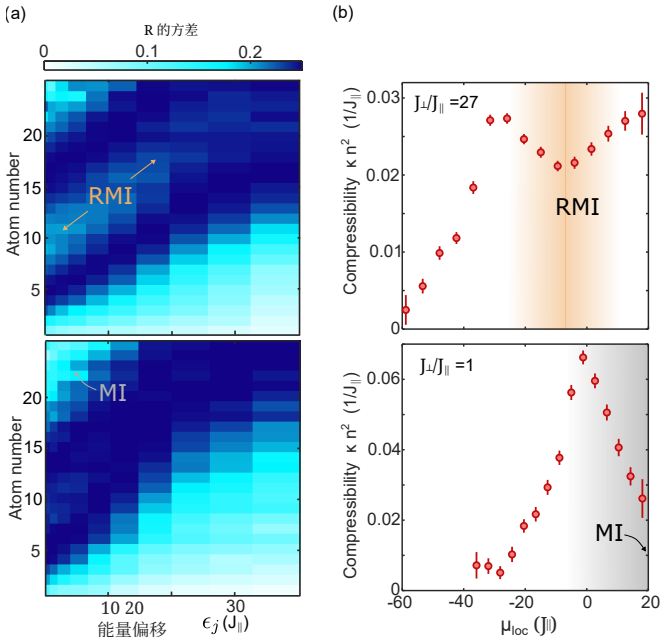


图 4。**RMI 相中不可压缩性的观测**。(a) 梯级奇偶方差随原子数和 ϵ_j for $J_\perp/J_\parallel = 27$ 的变化（上图），显示出原子数约为 10 时存在一个低方差区域，而在 $J_\perp/J_\parallel = 1$ （下图）中不存在该区域。(b) 压缩率随 $J_\perp/J_\parallel = 27$ （上图）和 $J_\perp/J_\parallel = 1$ （下图）的局域化学势变化。阴影区域突出显示了 RMI 和 MI 形成的区域。

化 ϵ_j的影响，我们绘制了梯级奇偶方差 $\mathrm{Var}(R) = R(1-R)$ 随 ϵ_j 和原子数的变化关系，结果如 $J_\perp/J_\parallel = 1$ 和 $J_\perp/J_\parallel = 27$ [图 4(a)]所示。对于原子数大于 20 的情况，两个系统的方差都很低；但 $J_\perp/J_\parallel = 27$ 还存在一个额外的低方差区域，表明在约 9–12 个原子时达到半填充，此处的 R [最高，见图 2(d)]。

为计算压缩率，我们首先通过拟合密度与 ϵ_j 之间的关系来确定化学势 μ ，所用的是在固定原子数下零隧穿极限（$J_\parallel \to 0$）中的原子数概率（补充材料，第 AV 节）。随后，我们计算导数$\partial n/\partial \mu_{loc}$ 以确定压缩率 [35] [，如图 4(b) （上图）所示]，，并观察到 RMI 在半填充（ $n = 0.5$）附近的压缩率降低 $\mu_{loc} \simeq 0$。这与 $J_\perp/J_\parallel = 1$ 的情况形成对比，后者在 $\mu_{loc} \simeq 0$ 处表现出最大压缩率，并且在更高和更低的化学势处压缩率均降低 [，如图 4(b)（下图）所示]，这与先前在有限温度区间中的观测结果相似 [36]。

我们展示了对以下系统的实验实现：

接近半填充的双腿梯子系统，并在其中制备和探测了梯级莫特绝缘体相。我们利用位点分辨占据测量推断出的梯级宇称，在相图中识别出超流体区域和绝缘区域。通过振幅调制光谱，我们探测了 RMI 的激发谱，并观察到共振相对于裸多体能隙发生了系统性偏移。我们的理论建模定量解释了这一行为，其中纳入了完整的驱动动力学和局域偏置。因此，我们的计算说明了动力学效应和多个激发多体态如何影响强关联系统中调制光谱的解释。最后，我们提取了 RMI 的可压缩率，并将其与莫特绝缘体直接比较，进一步证明了 RMI 在分数填充下的不可压缩性。

我们采用可编程光势的制备方案，无需技术上颇具挑战性的超晶格，即可灵活地构建梯形几何。除了当前的实现方式，我们还可以将系统扩展到三腿梯子、基于方格晶格的其他几何结构，或三角梯子 [20]。另一个有前景的方向是引入无序，从而能够研究低维系统中的局域化和玻璃态行为，并与理论预测进行比较。理论上已针对双腿梯子中的硬核玻色子研究过这一状态 [16, 17]。未来的工作还可以研究输运 [37] ，并直接测量沿梯级或腿方向的相位相干性，例如通过塔尔博特干涉测量 [38–40] 或量子门 [41]。这类测量有助于研究系统从一维转变为二维时，绝缘体到超流体相变过程中相干性如何恢复，以及无序如何抑制相干性。

我们感谢 Lucile Sanchez 对稿件提出的反馈。我们感谢工程与物理科学研究委员会（EPSRC）通过量子计算量子技术中心对“通过集成与互联实现进行量子计算”（QCI3） [EP/Z53318X/1], 、“量子模拟中的量子优势”（QQQS）项目资助 [EP/Y01510X/1], 以及 2020—2021 年博士培训合作项目 [EP/T517811/1]提供的支持。TH 感谢欧洲研究委员会（ERC）根据欧盟“地平线欧洲”研究与创新计划提供的资助（资助协议编号：101165353——ERC FOrbQ 初始资助）。PK 感谢 EPSRC 通过资助编号 EP/Z533713/1 提供的资助。

[1] M. Lewenstein、A. Sanpera 和 V. Ahufinger, *Ultracold Atoms in Optical Lattices: Simulating Quantum Many-Body Systems* 2012 （牛津大学出版社，）。

[2]T. Kimura、K. Kuroki 和 H. Aoki, 《三腿 Hubbard 梯子中的配对关联——重整化群与量子蒙特卡罗研究》, J. Phys.

Soc. Jpn. 67, 1377 (1998). [3] S. Hirthe、T. Chalopin、D. Bourgund、P. Bojovi´c、A. Bohrdt、E. Demler、F. Grusdt、I. Bloch 和 T. A. Hilker，《超冷原子费米子梯子中的磁介导空穴配对》，Nature 613, 463–467 (2023). [4] M. A. Cazalilla、R. Citro、T. Giamarchi、E. Orignac 和 M. Rigol，《一维玻色子：从凝聚态物质系统到超冷气体》，《现代物理评论》83, 1405 (2011). [5] B. Paredes、A. Widera、V. Murg、O. Mandel、S. F¨olling、I. Cirac、G. V. Shlyapnikov、T. W. H¨ansch 和 I. Bloch，《光学晶格中的超冷原子 Tonks–Girardeau 气体》，Nature 429, 277 (2004). [6] T. Kinoshita、T. Wenger 和 D. S. Weiss，《一维 Tonks–Girardeau 气体的观测》，Science 305, 1125 2004( ). [7] E. Dagotto 、 J. Riera 和 D. Scalapino，《梯子与耦合平面中的超导性》，Phys. Rev. B 45, 5744 (1992). [8] E. Dagotto 和 T. M. Rice，《从一维到二维量子磁体之路上的意外发现：梯子材料》，Science 271, 618 (1996). [9] V. V. Deshpande、M. Bockrath、L. I. Glazman 和 A. Yacoby，《一维电子液体与固体》，Nature 464, 209 (2010). [10] P. Abbamonte、G. Blumberg、A. Rusydi、A. Gozar、P. G. Evans、T. Siegrist、L. Venema、H. Eisaki、E. D. Isaacs 和 G. A. Sawatzky，《$Sr_{14}Cu_{24}O_{41}$, 自旋梯子中电荷空穴的结晶》，Nature 431, 1078 (2004). [11] D. Ogura、H. Aoki 和 K. Kuroki，《Ruddlesden-Popper化合物中源自隐藏梯子的初生窄带可能导致高温超导》，Phys. Rev. B 96, 184513 (2017). [12] E. Fradkin、S. A. Kivelson 和 J. M. Tranquada，《专题讨论：高温超导体中交织序的理论》，《现代物理评论》87, 457 (2015). [13] R. A. L. Silva 和 M. Almeida，《分子材料中的自旋梯子行为》，J. Mater. Chem. C 9, 10573 (2021). [14] P. Donohue 和 T. Giamarchi，《玻色梯子中的莫特-超流体相变》，Phys. Rev. B 63, 180508 (2001). [15] M. S. Luthra、T. Mishra、R. V. Pai 和 B. P. Das，《具有两条耦合链的玻色梯子相图》，Phys. Rev. B 78, 165104 (2008). [16] F. Cr´epin、N. Laflorencie、G. Roux 和 P. Simon，《洁净与无序双腿梯子上硬核玻色子的相图：莫特绝缘体–Luttinger液体–玻色玻璃》，Phys. Rev. B 84, 054517 (2011). [17] J. Carrasquilla、F. Becca 和 M. Fabrizio，《无序双腿梯子上硬核玻色子的玻色玻璃、超流体与梯级莫特相》，Phys. Rev. B 83, 245101 (2011). [18] A. Padhan、R. Parida、S. Lahiri、M. K. Giri 和 T. Mishra，《双腿 Bose-Hubbard 梯子上受限玻色子的量子相》，Phys. Rev. A 108, 013316 (2023). [19] A. Padhan、S. Mondal、S. Vishveshwara 和 T. Mishra，《Su-Schrieffer-Heeger梯子上的相互作用玻色子：拓扑相与Thouless泵浦》，Phys. Rev. B 109, 085120 (2024). [20] L. Carfora、C. W. Duncan、S. Kuhr 和 P. Kirton，《准一维梯状晶格上玻色-哈伯德模型的莫特绝缘相》，Phys. Rev. A 114, 023301 2026( ). [21] M. A. Nichols、L. W. Cheuk、M. Okan、T. R. Hartke、E. Mendez、T. Senthil、E. Khatami、H. Zhang 和 M. W. Zwierlein，超冷费米子莫特绝缘体中的自旋输运，Science **363**，383（2019）。[22] M. S. Block、R. V. Mishmash、R. K. Kaul、D. N. Sheng、O. I. Motrunich 和 M. P. A. Fisher，多腿梯子上玻色子的奇异无能隙莫特绝缘体，Phys. Rev. Lett. **106**，046402（2011）。[23] M. Aidelsburger、M. Atala、S. Nascimb`ene、S. Trotzky、Y.-A. Chen 和 I. Bloch，光学晶格中强有效磁场的实验实现，Phys. Rev. Lett. **107**，255301（2011）。[24] M. E. Tai、A. Lukin、M. Rispoli、R. Schittko、T. Menke、D. Borgnia、P. M. Preiss、F. Grusdt、A. M. Kauf- man 和 M. Greiner，二体极限下相互作用Harper–Hofstadter模型的显微学研究，Nature **546**，519（2017）。[25] P. Sompet、S. Hirthe、D. Bourgund、T. Chalopin、J. Bibo、J. Koepsell、P. Bojovi´c、R. Verresen、F. Pollmann、G. Sa- lomon、C. Gross、T. A. Hilker 和 I. Bloch，在费米–Hubbard梯子中实现对称性保护的Haldane相，Nature **606**，484（2022）。[26] M. Atala、M. Aidelsburger、M. Lohse、J. T. Barreiro、B. Paredes 和 I. Bloch，观察超冷原子在玻色梯子中的手性电流，Nat. Phys. **10**，588（2014）。[27] A. Impertro、S. Huh、S. Karch、J. F. Wienand、I. Bloch 和 M. Aidelsburger，大型玻色通量梯子中的强相互作用迈斯纳相，Nat. Phys. **21**，895（2025）。[28] L. Su、R. Sahay、M. Szurek、A. Douglas、O. Markovi´c、C. B. Dag、R. Verresen 和 M. Greiner，Hubbard量子模拟器中的拓扑相变与混合态序，Nat. Phys. **22**，1672（2026）。[29] W. S. Bakr、J. I. Gillen、A. Peng、S. F¨olling 和 M. Greiner，用于探测Hubbard区间光学晶格中单个原子的量子气体显微镜，Nature **462**，74（2009）。[30] E. Haller、J. Hudson、A. Kelly、D. A. Cotta、B. Peaude- cerf、G. D. Bruce 和 S. Kuhr，量子气体显微镜中的费米子单原子成像，Nat. Phys. **11**，738（2015）。[31] L. W. Cheuk、M. A. Nichols、M. Okan、T. Gersdorf、V. V. Ramasesh、W. S. Bakr、T. Lompe 和 M. W. Zwierlein，费米原子量子气体显微镜，Phys. Rev. Lett. **114**，193001（2015）。[32] S. Buob、J. H¨oschele、V. Makhalov、A. Rubio-Abadal 和 L. Tarruell，锶量子气体显微镜，PRX Quantum **5**，020316（2024）。[33] S. Kuhr，量子气体显微镜：冷原子量子模拟器的新工具，Natl. Sci. Rev. **3**，170（2016）。[34] R. Ma、M. E. Tai、P. M. Preiss、W. S. Bakr、J. Si- mon 和 M. Greiner，偏置强关联玻色气体中的光子辅助隧穿，Phys. Rev. Lett. **107**，095301（2011）。[35] T. Hilker，*Spin-Resolved Microscopy of Strongly Correlated Fermionic Many-Body States*，博士论文，慕尼黑大学（2017）。[36] J. F. Sherson、C. Weitenberg、M. Endres、M. Cheneau、I. Bloch 和 S. Kuhr，原子莫特绝缘体的单原子分辨荧光成像，Nature **467**，68–72（2010）。[37] S.-S. Li、Z.-Y. Ge 和 H. Fan，硬核 Bose–Hubbard梯子中梯级对的局域化，Phys. Rev. A **102**，062409（2020）。

[38] L. Koehn、C. Parsonage、C. W. Duncan、P. Kirton、A. J. Daley、T. Hilker、E. Haller、A. La Rooij 和 S. Kuhr，玻色玻璃相的量子气体显微学与塔尔博特干涉测量，Phys. Rev. A **113**，043303（2026）。[39] J. C. Br¨uggenj¨urgen、M. S. Fischer 和 C. Weitenberg，量子气体相位显微镜，Science **393**，167（2026）。[40] L. Su、M. Szurek、A. Douglas、C. B. Dag 和 M. Greiner，Hubbard区间中的量子相干显微镜（2026），arXiv:2608.09924。[41] A. I mpertro、S. Karch、J. F. Wienand、S. Huh、C. Schweizer、I. Bloch 和 M. Aidelsburger，光学晶格中电流和动能算符的局域读出与控制，Phys. Rev. Lett. **133**，063401（2024）。[42] A. La Rooij、C. Ulm、E. Haller 和 S. Kuhr，量子气体显微镜图像反卷积技术的比较研究，New J. Phys. **25**，083036（2023）。[43] A. Di Carli、C. Parsonage、A. La Rooij、L. Koehn、C. Ulm、C. W. Duncan、A. J. Daley、E. Haller 和 S. Kuhr，相称与不相称的一维相互作用量子系统，Nat. Commun. **15**，474（2024）。[44] U. Schollw¨ock，密度矩阵重整化群，《现代物理评论》**77**，259（2005）。[45] U. Schollw¨ock，矩阵乘积态时代的密度矩阵重整化群，Ann. Phys. **326**，96（2011）。[46] R. Or´us，复杂量子系统的张量网络，Nat. Rev. Phys. **1**，538（2019）。[47] M. Fishman、S. R. White 和 E. M. Stoudenmire，用于张量网络计算的ITensor 软件库，SciPost Phys. Codeb.，4（2022）。[48] M. Fishman、S. R. White 和 E. M. Stoudenmire，ITensor 0.3 代码库发布版，SciPost Phys. Codeb.，4（2022）。[49] S. R. White，量子重整化群的密度矩阵表述，Phys. Rev. Lett. **69**，2863（1992）。[50] T. Barthel，规范系综与量子数分布的矩阵乘积纯化，Phys. Rev. B **94**，115157（2016）。[51] S. Paeckel、T. K¨ ohler、A. Swoboda、S. R. Manmana、U. Schollw¨ock 和 C. Hubig，矩阵乘积态的时间演化方法，Ann. of Phys. **411**，167998（2019）。

补充材料

A. 实验详情

I. 实验序列

我们从一个约含 200 个^{87}Rb 原子的玻色–爱因斯坦凝聚体（$F=1,\ m_F=-1$）开始，该凝聚体被限制在垂直晶格（波长为$\lambda = 1064$ nm，深度为 $V_z = 25\,E_\mathrm{r}$，其中 $E_\mathrm{r} = \hbar^2/2m\lambda^2$ 为反冲能，m为 ^{87}Rb 原子的质量）中心单个反节点处的光学凹陷阱（波长 852 nm）中。将原子从凹陷阱中释放后，我们在浅水平二维晶格中制备超流体（$V = 5\,E_\mathrm{r}$，晶格间距为 $\lambda/2 = 532$ nm）。我们在 200 ms 内升高势垒，从而形成五个彼此隔离的双腿梯子系统。同时，我们调节 $V_\parallel$ 和$V_\perp$，以达到所需的隧穿振幅。为使阱中心达到半填充，我们在蒸发冷却过程中改变凹陷阱的深度，从而控制原子总数。通过使用高数值孔径显微镜物镜收集荧光光子，获得位点分辨图像。由于成像过程中的光辅助碰撞，量子气体显微镜探测到位点占据数的宇称，因此双占据位点会显示为空 [36]。利用 Lucy-Richardson反卷积算法 [42]重建晶格占据数的宇称。

II. 实验值和温度

全文中，我们用 $J_\perp$、 $J_\parallel$ 和 U 表示各物理量，它们都会随晶格深度变化。这里列出了图3所示数据集在半填充时相关的 Hubbard 参数。我们还给出了以 $J_\parallel$ 为单位的温度，以及能隙 $\Delta E/J_\parallel$。温度对应于图 2(b) 中不确定性带的中心。能隙取自图 2(a) 的 DMRG计算。

对于表中最后两个数据集（图3中最左侧的两个数据点），能隙小于温度。然而，在调制测量中，我们仍然观察到梯级宇称降低。这可以理解为，调制光谱学探测的是激发光谱中的能隙，调制光谱——学通过调制诱导的跃迁来实现这一点，而不是直接测量热占据。因此，高于多体能隙的温度并不一定会抹去与该能隙相关的光谱响应。

$V_\parallel(E_r)$	$V_\perp(E_r)$	U(赫兹)	$J_\parallel$(赫兹)	$J_\perp$(赫兹)	$T/J_\parallel$	$\Delta E/J_\parallel$
20	5	548	5	134	12(2)	27.0
20	7	615	5	80	12(2)	19.9
20	9	673	5	49	12(2)	13.0
20	11	717	5	31	12(2)	7.9
20	13	754	5	20	12(2)	4.5

表 I。图 3 中数据集的实验值和温度。

III. 可编程光势

为产生排斥势垒，我们采用数字微镜器件（DMD，型号为 ViALUX V-9001），使用波长为 666 nm 的蓝失谐光照射，该光由单模放大二极管激光器 [43] 发出。通过高分辨率物镜将光势投射到原子上；成像系统的缩小倍率使得每个晶格位点对应约 18×18 个 DMD 像素。我们利用强度反馈算法 [38]，使势垒高度在空间上保持均匀，并将其设定为 RMI 区域中的约 $3U$。选择这一数值是为了使样品制备过程中原子出现在势垒上的概率可以忽略不计。然而，势垒高度的不确定性（$<5\%$）可能会产生位点间势无序。我们估计，来自势垒的排斥光势最多有 5% 会泄漏到相邻的梯子位点上。对于 $V_\parallel = 20\,E_\mathrm{r}$，这对应于 $\Delta \simeq 2.5J_\parallel = h\times 12.5$ 赫兹的无序强度，小于 $V_\parallel = 20\,E_\mathrm{r}$ 处能隙 $\Delta E = 27J_\parallel$的 10%，$V_\perp = 5\,E_\mathrm{r}$。我们将无序强度 Δ 定义为局域化学势 [38] 的相应最大变化。

在我们的实验中，由于热效应，光势的位置会相对于水平晶格的晶格位点发生漂移，通常每小时漂移 1–4 个晶格位点。为补偿这一漂移，我们根据荧光图像中单个原子的位置确定水平晶格的相位，并通过在数字微镜器件（DMD）上将势能图案平移几个像素来相应地调整光势 [38, 43]。晶格相位测量的不确定度约为晶格间距的 5%。

IV. 填充率与不平衡度

我们确定了不同梯子系统中每个晶格位点的平均占据数$n_{i,\ j}$。为展示空间占据分布，我们使用与图 4(a) 上图分析中相同的数据集，并在图 S1 中绘制了位点分辨平均占据数。由此，我们计算两条腿之间的不平衡度 $I = \frac{n_{1,\ \ j}-n_{2\,j}\ 、、、。}{n_{1,\ j}+n_{2,\ j}}$ 对于中心梯子，该不平衡度为 <0.1，而对于外侧梯子则达到 0。35。这种行为主要是由谐振束缚引起的。垂直晶格对谐振束缚的贡献占主导地位；我们测得其俘获频率为 $\Omega_z = 2\pi\times 42$(2)赫兹，$V_z = 25\,E_\mathrm{r}$

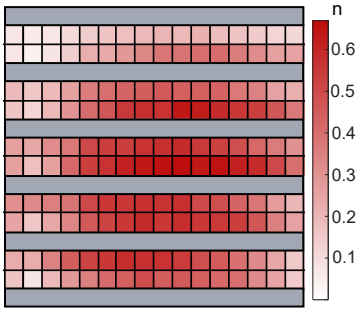


图 S1. **格点占据数**。五个双腿梯子中每个晶格位点测得的平均占据数，取自与图 4(a，上图)相同的数据集，并对 ~ 1600 次实验实现取平均值。灰色方块表示可编程光势，它们在各个梯子之间形成排斥势垒。由于谐波囚禁，两个外侧梯子各自的两条腿之间存在势偏置 $\epsilon_B \simeq 0.23 J_\perp$。该偏移量为投影光势定位误差所导致的最大偏置的 $\sim 20\%$。

光束腰斑为 $\omega_0 = 130(3)$ 米。对于 $V_\parallel = 20\, E_\mathrm{r}$，囚禁势曲率为 $\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} \simeq 1.2 J_\parallel$ 。此外，光势位置设置误差还会导致势偏移，并且这些偏移在不同实验运行之间有所变化。不过，这些偏移在平均格点占据数中并不可见。对于图 2 所示的数据，在后选择之后，五个梯子中的每一个都贡献了数量相近的数据集。

为量化粒子在梯级上的离域程度，我们通过精确对角化计算了单个原子的双位点玻色-哈伯德模型，从而推断在不同偏置势 ϵ_B 和 $V_\perp = 5\, E_\mathrm{r}$ 下，原子位于左侧和右侧格点的概率分别为 P_L 和 P_R（见表 II）。基态波函数在没有偏置的格点处具有更高的概率。

ϵ_B（赫兹）	ϵ_B $(J_\perp)$	P_L	P_R
0	0	0.50	0.50
50	0.37	0.59	0.41
100	0.75	0.67	0.33
150	1.12	0.74	0.26

表 II. 精确对角化得到的不同偏置势偏移下的布居不平衡。

V. 可压缩性测量分析 ts

为计算梯子系统的局域粒子数可压缩性 [图 4(b)], , 我们首先确定全局谐振陷阱对每个梯子产生的能量偏移。通过原子云的质心确定陷阱中心，并将局域能量偏移

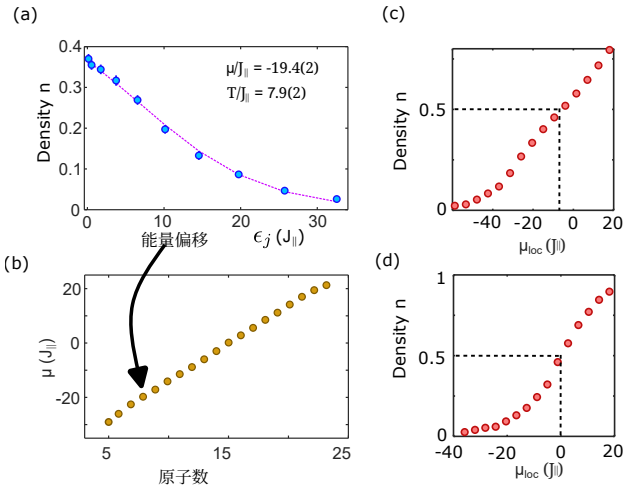


图 S2. **压缩率测量**。 (a) 对 8 原子数据集中的密度和势偏移进行拟合，并将温度和化学势作为自由参数。(b) 根据原子数为 5 至 23 的各组拟合结果提取的化学势。(c) RMI 区域内密度随局域化学势的变化。(d) 在 $J_\perp/J_\parallel = 1$ 情况下，密度随局域化学势的变化。黑色虚线标示半填充（$n = 0.5$）。误差棒小于大多数数据点。

由谐振陷阱产生的 $\epsilon_{i,\ j}$，表示为距该中心 r 晶格位点的距离的函数。对于每个梯子，对两条腿的势能取平均，以获得依赖于梯级的能量偏移 ϵ_j。我们根据观测到的原子数对梯子进行分组，使用范围$5-23$，并针对每个原子数 [计算密度关于 ϵ_j 的函数]图 S2(a)。

下一步是对该密度进行拟合，以确定每个原子数对应的全局化学势 μ 和温度 T。在零隧穿极限（$J_\parallel \to 0$）下，每个梯级都被视为一个具有本征态 k、本征能量 E_k 和占据数 N_k 的孤立双位点系统。通过在大正则系综中对所有满足 $N_k = n$、$P_n(j) = e^{\beta[\mu_{\mathrm{loc}}(j) N_k - E_k]}/Z(j)$ 的本征态求和，可以得到观测到占据数为 n 的梯级的概率，其中 $\beta = 1/(k_B T)$ 和 $Z(j) = \sum_k e^{\beta[\mu_{\mathrm{loc}}(j) N_k - E_k]}$ 是局域配分函数， k_B 是玻尔兹曼常数。能谱 E_k 通过对单个梯级进行精确对角化获得，并包含具有 $N_k = 0$、1 和 2 个原子的所有状态。具体而言，我们纳入了对应于 $N = 0$、$E_0 = 0$ 的状态、对称和反对称的单粒子态（$N = 1$、$E_1^+ = -J_\perp$ 和 $E_1^- = +J_\perp$），以及 $N = 2$ 时相关的双粒子本征态，包括相互作用 U。全局化学势 μ 和温度 T 是拟合中唯一的自由参数。对每个原子数重复这一过程，得到图 S2(b) 所示的图。利用 μ 的拟合值，我们计算局域化学势 $\mu_{loc} = \mu - \epsilon_j$，从而可以将密度分布表示为 μ_{loc} 的函数

在一张图中 [图 S2(c) 和图 S2(d)]。随后对这些数据集进行分箱，并对 $\mu_{\rm loc}$ 求导，以确定图 4(b) 和图 4(c) 所示的压缩率。

B. 数值模拟

本节介绍用于对实验系统进行数值模拟的方法。需要指出的是，此处介绍的许多方法和结果均基于参考文献 [20] 中所述的方法和结果。

I. 基态计算

为了确定由公式（1）描述的玻色–哈伯德哈密顿量的低能谱，我们采用了标准的 DMRG 算法 [44–46], ，该算法通过 ITensor 库 [47, 48] 实现。该算法返回基态能量和第一激发态能量 E_0 及 E_1，以及分别表示相应本征态的矩阵乘积态和能隙 $\Delta E = E_1 - E_0$。利用这些结果，我们得到了一个 $L = N = 10$ 梯子晶格的相图，如图 2(a) 所示。哈密顿量参数 $J_{\|}$、$J_\perp$ 和 U 根据实验晶格深度 $V_{\|}$ 和 $V_\perp$ [1] 通过数值计算获得。模拟采用开放边界条件，并忽略谐振束缚，因为对于尺寸为 $L = 10$ 的 RMI 相系统，谐振束缚在最外层格点处引起的能量偏移小于能隙。

所需的矩阵乘积算符是通过沿梯级依次标记晶格位点构造的。DMRG 算法会对描述奇异位点的相邻张量对进行收缩。优化这些收缩后，再通过奇异值分解重新获得位点张量。随后，从链的一端向另一端扫过，对所有相邻位点张量对重复这一过程 [45, 49]。为获得基态（第一激发态），分别进行了 150（250）次扫描。小于 10^{-8} 的奇异值会被舍弃，并将每个位点的最大局域占据数限制为 6 个粒子。

图 2(b) 和 2(c) 的数值结果与参考文献 [20] 中报告的结果相似，同时还纳入了有限温度的影响。我们采用了参考文献 [44], 中所述的纯化方法，即为系统中的每个物理位点引入一个辅助位点。这意味着我们的模拟所需的位点数量是原来的两倍，而哈密顿量仅作用于物理格点；在这些模拟中，可达到的最大系统尺寸约缩小为原来的
的两个。随后，我们在每个系统位点与其辅助粒子之间构造一个最大纠缠态。对该态的辅助粒子自由度进行迹运算，可以表示无限温度下的密度矩阵。为确保粒子总数守恒，我们使用 N粒子态 [50]

$$|\psi^N_{\beta=0}\rangle = \frac{(\mathcal{A})^N}{\sqrt{N!}}\,|\text{vac}\rangle\,, \quad \mathcal{A} = \sum_i a^\dagger_{i,P} a^\dagger_{i,A}, \tag{2}$$

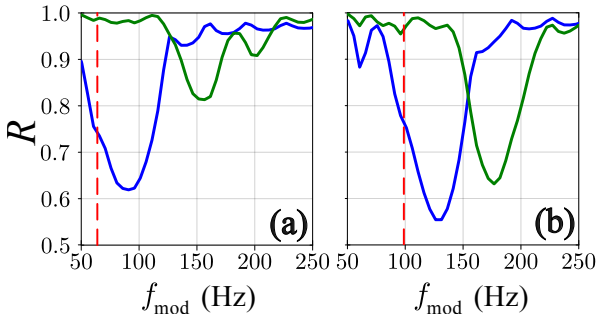
其中，$|\text{vac}\rangle$ 表示物理位点和辅助位点的真空态。算符 $\mathcal{A}$ 使用产生算符 $a^\dagger_{i,P}$ 和 $a^\dagger_{i,A}$ 分别作用于 $i^{\rm th}$ 物理位点和辅助位点。我们通过使用时间演化块解耦算法 [51]进行虚时间演化，获得有限温度热态。我们将计算限制在最大单格点占据数为4个玻色子，并获得了半填充梯子在具有 $L = 8$ 个梯级时的 $\beta = 30/E_{\rm r}$ 和 $\beta = 40/E_{\rm r}$ 解。

II. 晶格调制

在图3中，我们将实验观测到的晶格调制共振频率与系统能隙的预测结果，以及对实验晶格调制进行直接数值模拟的结果进行了比较。晶格调制的实现方式是使沿链方向的晶格深度具有时间依赖性，

$$V_{\|}(t) = V_{\|}[1 + A\sin(2\pi f_{\rm mod} t)], \tag{3}$$

其中，$V_{\|}$ 是施加调制前的初始晶格深度，A 是无量纲调制幅度。对于正文中展示的实验结果，我们使用了 $A = 1/4$。时间依赖的玻色-哈伯德参数 U（t）、$J_{\|}$（t）和 $J_\perp$ 根据晶格深度 $V_{\|}$（t）以及固定的 $V_\perp$计算得出，其中$U(0) = U$，且 $J_{\|}(0) = J_{\|}$。通过 DMRG 得到基态并将其作为初态，再使用 TEBD 在时间依赖的



图S3。**晶格调制模拟**。对于具有 $L = N = 16$ 个梯级的梯子，经过 $t = 30$毫秒的频率调制后，平均梯级宇称的变化。结果展示了 $J_{\|}/h \approx 5$赫兹（$V_{\|} = 20E_{\rm r}$）下、（a） $J_\perp/J_{\|} \approx 10$（$V_\perp = 9E_{\rm r}$）和（b）$J_\perp/J_{\|} \approx 16$ （$V_\perp = 7E_{\rm r}$）的情况。同时展示了两条链之间没有偏移（$\epsilon_B = 0$，蓝线）以及正文图3所示最大偏移（$\epsilon_B = 1.1J_\perp$，绿线）时的结果。红色虚线表示由DMRG方法预测的能隙，其值分别为（a） $\Delta E \approx 0.75J_\perp$ 和（b）$\Delta E \approx 0.49J_\perp$。

哈密顿量 $H(t) = U(t)H_U - J_\parallel(t)H_\parallel - J_\perp H_\perp$下演化 30 ms。演化结束后，我们计算梯级宇称 R，并将其绘制为调制频率 f_{mod}的函数。

模拟是在多种晶格深度下进行的，对应于不同的隧穿速率（图S3）。数值结果显示，梯级宇称明显降低；然而，实验测量和模拟结果都显示，共振频率高于通过DMRG模拟得到的能隙。这是因为调制不仅耦合到最低激发态，也耦合到更高能量的态，详情见下文B II 1节。尽管这种耦合解释了观测到的部分偏移，但数值结果中的共振位移仍小于实验测量值。我们将剩余的差异归因于实验缺陷，尤其是梯子两条腿之间存在较小的势偏置。该偏置的起源及其影响详见B II 2节。

1. *Power broadening and transition strengths*

通过完整的时间依赖模拟得到的共振位置与使用DMRG方法计算的能隙 ΔE之间存在系统性偏移。这种差异主要是由有限强度驱动导致的功率展宽造成的。对于一个双梯级系统（$L = 2$），能隙接近共振中心。然而，随着系统尺寸增加，模拟得到的能隙发生偏移，而共振频率并未显著移动（图S4）。为研究这一效应，我们考虑仅包含 $L = 2$ 或 $L = 4$ 个梯级的简化模型；对于这些模型，可以在硬核玻色子极限之外进行精确对角化。我们考虑弱调制（$A = 1/16$）和强调制（$A = 1/4$），并在图S5(a)中给出半填充下 $L = 2$、$N = 2$的调制曲线

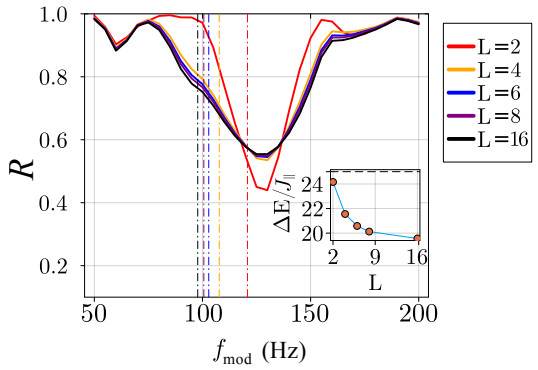


图 S4。**系统尺寸标度**。对于不同梯级数 L，$J_\parallel/h \approx 5$ 赫兹（$V_\parallel = 20E_{\mathrm{r}}$）、$J_\perp/J_\parallel \approx 16$（$V_\perp = 7E_{\mathrm{r}}$）的频率调制。虚线表示相应系统尺寸的能隙。插图展示了能隙大小随 L 的变化。

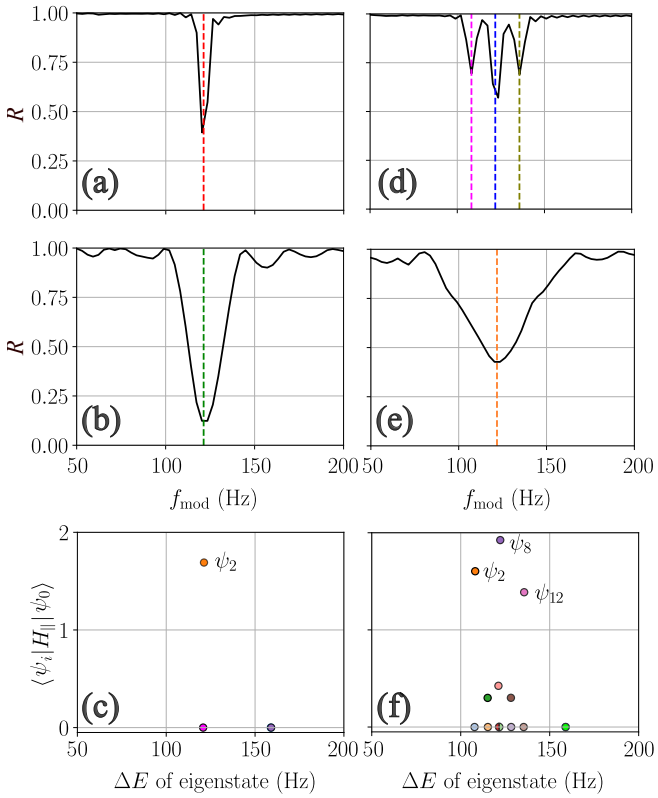


图 S5。**小系统的频率调制**。在弱驱动 [$A = 1/16$，（面板 (a) 和 (d)）] 以及强驱动 [$A = 1/4$，（面板 (b) 和 (e)）]下，$L = 2$ ((a)–(c)) 和 $L = 4$ ((d)–(f)) 频率调制的 $V_\parallel = 20E_{\mathrm{r}}$、$V_\perp = 7E_{\mathrm{r}}$ 数值结果。所有结果均取自演化 $t\hbar A/J_\parallel = 0.32$ 后。面板 (c) 中 $L = 2$ 的$H_\parallel$ 分量与基态 ψ_0 和激发态 ψ_i 之间的矩阵元，以及面板 (f) 中 $L = 4$ 的相应矩阵元，均表示为相应激发能 $\Delta E_i = E_i - E_0$ 的函数。主导矩阵元标注了与 ψ_0耦合的相应激发 ψ_i 态。面板 (c) 中的 $\langle\psi_i|H_\parallel|\psi_0\rangle$ 元按照图 S6 中相应的布居数 $|\langle\psi_i(t)|\psi_i(0)\rangle|^2$ 进行颜色编码，而面板 (f) 中的矩阵元则按照图 S7 中的布居数进行颜色编码。

以及图 S5(b)。随着驱动强度增大并趋近于实验中采用的数值，共振峰的宽度变得更宽。在这种情况下，共振位置非常接近能隙，这与标度分析的结果一致。

如图 S5(d)–(f) 所示，通过考虑一个具有 $L = 4$ 个梯级的更大系统，可以理解这一偏移的起源。在弱驱动下，调制谱显示出多个彼此分立的共振，每个共振分别对应于从基态跃迁到不同激发本征态的过程。图 S5(c) 和 (f) 展示了可访问的激发态，其中还给出了基态与各激发态之间耦合所对应的相关矩阵元。在弱驱动下，这些独立的跃迁可以分辨出来，$A = 1/16$，但随着调制强度增加，它们会展宽并合并为一个单一特征，正如调制

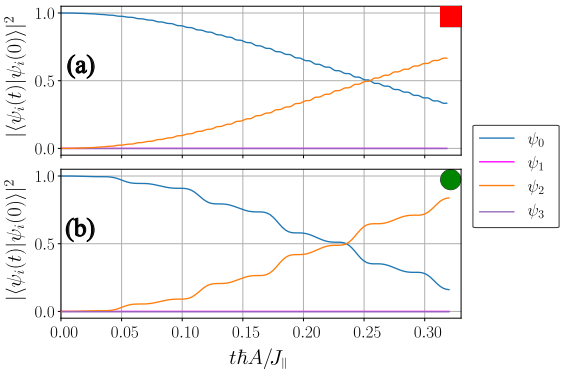


图 S6。**L 的布居动力学 = N = 2**。在 $V_\parallel = 20E_r$ $V_\perp = 7E_r$ $A = 1/16$ $A = 1/4$ 共振条件下，$V_\parallel =$ 对于 $20E_r$ $V_\perp = 7E_r$ $A = 1/16$ $A = 1/4$ ，(a) 和 (b) 中本征态布居的时间演化。时间以调制开始时的 $J_\parallel$ 为单位表示。 f_{mod} 的值在图 S5(a) 和 S5(b) 中用虚线标出，颜色与面板右上角标记的颜色相同（ $A = 1/16$ 用方形标记， $A = 1/4$ 用圆形标记）。在这两种情况下，基态 ψ_0 仅与 ψ_2 耦合。

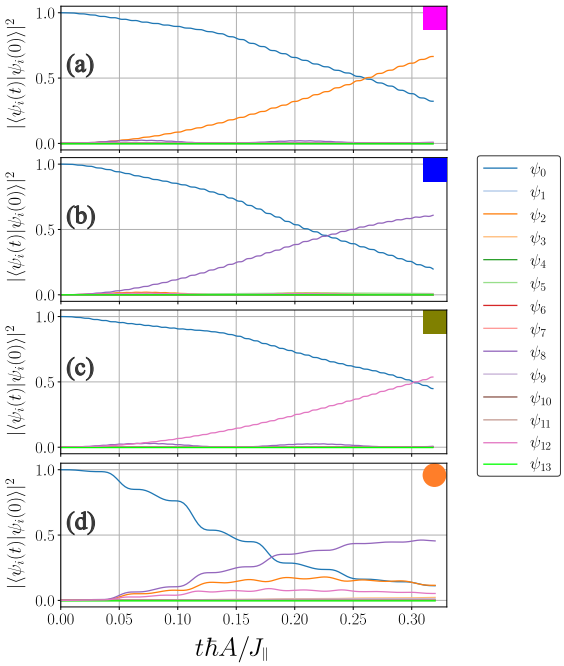


图 S7。**L = N = 4** 的布居动力学。(a)–(c) 对于 $A = 1/16$ ，在不同共振频率下进行振动时本征态布居的时间演化，其中 $V_\parallel = 20E_r$、$V_\perp = 7E_r$ 。相应的共振频率由图 S5(d) 和 S5(e) 光谱中的虚线标出，其颜色与每个面板右上角所示标记的颜色相同（ $A = 1/16$ 对应方形标记，$A = 1/4$ 对应圆形标记）。时间以 $J_\parallel$ 为单位表示，该单位在调制开始时定义。(d) $A = 1/4$ 的梯级宇称动力学，其中调制频率设为图 S5(e) 所示展宽共振的中心值。

强度增加时所发生的情况。因此，展宽共振的中心会向高于最低能量激发对应频率的方向偏移。值得注意的是，最终得到的共振频率接近相应 $L = 2$ 系统的能隙。

为确定哪些态参与了这些跃迁，我们展示了基态 ψ_0 和激发态 ψ_i 的布居动力学。对于 $L = 2$，只有第二激发态 ψ_2 的布居数增加（图 S6）。第一激发态 ψ_1 是暗态，驱动哈密顿量不会将其与基态耦合。然而，暗态和亮态的能量非常接近，因此共振位置没有发生偏移。从矩阵元中也可以明显看出这一点，因为 $\langle\psi_1|H_\parallel|\psi_0\rangle$ 为零，而 $\langle\psi_2|H_\parallel|\psi_0\rangle$ 很大 [图 S5(c)]。除布居转移动力学的细节存在差异外，强驱动和弱驱动下的行为在定性上相似（图 S6）。

现在我们考虑 $L = 4$，以研究这一机制如何扩展到更长梯子（图 S7）。对于弱驱动，我们展示了图 S5(d) 中所示各个共振频率下的布居动力学。这些共振分别对应于从 ψ_0 到状态 ψ_2、ψ_8 和 ψ_{12} 的跃迁；这些跃迁具有最大的跃迁矩阵元 [图 S5(f)]。对于强驱动，这些跃迁会被同时激发，使各个共振相互重叠，并导致共振频率向更高值偏移。

2. *Light-potential bias*

现在我们考虑每个梯级的两个位点之间存在小势偏置 ϵ_B 时的影响。这种偏置可能源于投影势垒与晶格位点对准时存在的误差。这些误差既来自晶格相位测定的不确定性（见 A III 节），也来自光学装置的机械不稳定性；后者会导致投影光势的位置在实验的不同次实现之间略有变化。在原子所在位置，这些位移仅相当于晶格间距的一小部分。我们在数值模拟中纳入这一能量偏移，发现它会使共振向更高频率移动。为量化这一效应，我们计算了具有 $\epsilon_B = 0.56J_\perp$ 和 $\epsilon_B = 1.1J_\perp$ 的 $L = N = 16$ 梯子系统的共振频率。结果给出了图3中红色阴影区域的边界。图S3还展示了更多示例，说明势偏置对频率调制谱的影响。能量偏移会产生有效的垂直跃迁率 $\tilde{J}_\perp \approx \sqrt{J_\perp^2 + \epsilon_B^2}$，并且当 $J_\perp/J_\parallel$ 较弱时，共振的界定会变得不那么清晰

（或者等价地，当 $V_\perp$ 较大时）。当 $\epsilon_B \gg U$， $J_\parallel$， $J_\perp$ 时，预期会出现这种行为。在这种情况下，系统实际上会简化为一条完全填充的一维链，其动力学对调制不敏感。如何——然而，对于实验中所考察的所有 $J_\perp/J_\parallel$ 值而言，尽管存在势偏置，原子仍保持分布在每个梯级的两个格点上，未发生局域化。