Draft version November 25, 2026年使用 LaTeX 预印本 样式排版，采用 AASTeX631

arXiv:2611.32699v1 [astro-ph.SR] 24 Nov 2026

W变换：天体物理时间序列分析的另一种强大工具

P. D. S. de Lima, [1, 2] D. O. Fontinele, [1] R. L. Gomes, [1] B. L. Canto Martins, [1] J. M. de Araújo, [1] Y. Wang, [3] J. R. De Medeiros, [1] and I. C. Leão[1]

[1]北里奥格兰德联邦大学理论与实验物理系，大学城，纳塔尔，*RN*，*59072-970*，巴西[2]物理学院，都柏林圣三一学院，都柏林，爱尔兰[3]伦敦帝国学院，资源地球物理学院，伦敦 *SW72BP*，英国

（收稿日期：2025年1月22日；修订日期：年 月 日；接收日期：年 月 日）

投稿至《天体物理学杂志》

摘要

本文介绍了用于天体物理学应用的 W变换（WT），并探讨了它与连续小波变换（CWT）在恒星测光光变曲线（LCs）中的异同。我们在合成数据上测试了这两种技术，生成了噪声水平和间隙数量各不相同的光变曲线，并将其应用于凌日系外行星巡天卫星空间任务的光变曲线。分析聚焦于六颗恒星：太阳类似星 TIC 276293046、超冷矮星 TIC 359892714、 γ Dor 脉动变星 TIC 164173105、食双星 TIC 355151781、宿主行星恒星 TIC 142276270，以及褐矮星 TIC 102076870。总体而言，两种方法的结果一致；但对于光变曲线在不同观测扇区间结构存在差异，或间隙数量发生变化的恒星，结果有所不同。这反映了同一目标中的时间动态效应，这些效应会影响时频表示中时间依赖性变化特征的呈现方式。对于此类光变曲线，与 CWT 映射相比，WT 谱在恢复信号振幅方面更加稳定、准确；CWT 映射则会出现失真和局限。这表明，WT 方法在调整主频方面固有的灵活性，能够提升时间分辨率，即便光变曲线的结构复杂多变也是如此。我们得出结论，WT 是分析恒星光变曲线的稳健工具，而两种方法可以相互补充，用于深入分析周期性天体物理信号。当前结果表明，WT 是一种稳健且准确的恒星光变曲线分析工具，拓展了可用于通过测光观测分析不同恒星周期现象的数值技术范围。

关键词： 计算方法（1965）； 天文学数据分析（1858）； 恒星测光（1620）； 空间天文台（1543）； 低质量恒星（2050）

通讯作者：I. C. Leão

aoizan@fisica.ufrn.br

1. 引言

得益于空间任务带来的超高精度测光，过去25年来，《科学》见证了我们在深化对恒星大气和恒星内部理解方面取得的根本性突破。从截至2010年样本数量仅有几十条的光度曲线（光变曲线）开始，空间任务借助 CoRoT（Baglin 等，2009）和 Kepler（Borucki 等，2010）任务，将光变曲线扩展至数万颗恒星，并通过凌日系外行星巡天卫星任务扩展至数千万颗恒星[1]（Ricker 等，2015）。数据量的不断增长需要投入大量精力进行处理，并使用各种算法提取塑造光变曲线的不同恒星物理现象的信息。其中包括自相关函数（例如，McQuillan 等，2014）、离散傅里叶变换和快速傅里叶变换（例如，Cooley & Tukey，1965）、Lomb-Scargle周期图（Lomb，1976；Scargle，1982）、Hilbert-Huang变换（Huang 等，1998）以及小波变换（Torrence & Compo，1998）。凌日系外行星巡天卫星任务于2018年发射，其观测策略能够在一年内完成对整个半球的测绘。大部分天空区域接受27天的连续观测，而极地周围的一小片区域则在全年获得或多或少的连续覆盖。凌日系外行星巡天卫星于2024年7月完成了为期6年的全天区名义巡天，大幅增加了拥有高质量光变曲线的恒星数量。因此，凌日系外行星巡天卫星使我们能够在前所未有的时间尺度上研究各种恒星现象。

恒星光变曲线可分解为功率谱中呈现的多个频率，从而使我们能够确定数据中的周期成分，这些成分可能与不同的物理现象有关，包括旋转调制、脉动、耀斑和行星凌日。对信号应用傅里叶变换后，我们可以得到其频率—振幅表示。然而，由于恒星光变曲线中会出现非周期性事件，例如活动区的生长和消退，因此，除获取能揭示旋转行为和脉动模信息的谱组成外，主要关注点之一是追踪这些事件的时频行为，并识别特定恒星变异的特征信号，即使光变曲线中存在噪声或异常。正如 Bravo 等(2014) 所示，谱成分的时间定位对于更全面地分析光变曲线至关重要。对信号应用小波变换，生成其时频图，是关键的一步，其中包括确定某种物理现象在光变曲线中持续的时间。事实上，已有多项研究将经典小波变换（连续小波变换）应用于恒星光度曲线的分析（例如，Fontinele 等，2024；Gomes 等，2024；Santos 等，2021；Bravo 等，2014；de Lira等（2019））。文献还报道了Ram´on-Ballesta 等人(2022) 的研究，他们将同步挤压小波变换（Daubechies 等，2011）应用于两颗 δ 盾牌座δ型恒星的光变曲线时频分析；以及 Dorn-Wallenstein 等人(2020) 的研究，他们应用小波Z变换（Foster，1996）分析演化的大质量恒星的短期变异。除识别周期性和特定的变异特征（如自转和脉动）外，Fontinele 等(2024)、Gomes 等(2024) 和Bravo 等

[1]凌日系外行星巡天卫星。 https://tess.mit.edu/。

(2014)、deLira 等人(2019) 以及Dorn-Wallenstein 等人(2020) 的研究也旨在量化这些特定变异特征的持续程度。

本研究利用 W 变换（WT）（Wang 2021，2022；Wang 等（2024））对凌日系外行星巡天卫星采集的光变曲线进行了详细分析。这些光变曲线呈现了多种恒星物理现象的特征，包括自转和脉动。该变换具有若干相关特性：谱能量集中在主频附近；由于避免了潜在的频率奇异性，其数值实现稳定；高斯窗函数则通过非平稳频率权重定义。W变换已成功应用于各种地球物理问题的处理。总体而言，在检测地震异常和近地表地球物理学中的异常特征时，它能提高低频谱的时间分辨率（例如，Wang2021；Chen等（2022）；Li等（2022）；Luo和Zong（2023）；Wu等（2024））。本研究的一项重要动机，是拓展用于分析恒星测光光变曲线的数值方法的范围，从而能够揭示光变曲线中存在的更多特征。为此，我们选取了凌日系外行星巡天卫星空间任务观测的六颗恒星作为样本，该任务提供了独特的高质量测光数据。本文结构安排如下。第2节介绍小波变换的理论框架。第3 节展示基于合成数据得出的初步结果，第4 节则给出基于TESS数据的主要结果。最后，第5节进行总结。

2. W变换

时频分析（TFA）提取时间序列数据中的非平稳特征，以研究时间序列中的信号如何随时间变化。由于时频映射并非唯一过程，文献中提出了多种时频分析方法。大多数方法通过将时间序列与给定的核函数进行卷积，在时间序列的不同时间窗口内计算经典傅里叶变换。其中包括开创性的 Gabor 变换（GT）（Gabor1946；Cohen 1995）、连续小波变换（CWT）（Addison2018）和 S 变换（ST）（Stockwell 等，1996；Mansinha 等，1997；Pinnegar 与 Mansinha，2003；Simon 等，2007）等。对于这些方法，时频域中的分辨率取决于窗函数如何用于卷积信号，也就是说，取决于局部核函数如何定义。在这方面，GT 固定窗长，导致时频分辨率较差。另一方面，ST 和 CWT 可以改变窗长，从而提供更好的多分辨率分析工具。后两种变换确实密切相关（Ventosa 等，2008）。

连续小波变换中的自适应时频分辨率，是通过以子小波的形式考察窗函数获得的

$$\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t}{a}\right), \tag{1}$$

这些函数由母小波构造而成，是时间局部化的零均值函数 ψ（t），并通过膨胀参数进行变形 $a > 0$。根据 a的取值，小波会发生膨胀（收缩），从而提高频率（时间）分辨率，但代价是降低时间（频率）分辨率（Mallat（1999））。此外，方程 $\sqrt{a}$ 中的因子（1）确保具有不同膨胀参数的小波之间能量守恒。因此，对于给定信号 s（t）$\in L^2$（$\mathbb{R}$），连续小波变换定义为

$$\mathrm{CWT}(t,a) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\psi_a^{\star}(\tau - t)\,d\tau\,, \tag{2}$$

其中，符号 $\star$ 表示复共轭。此外，根据方程（2）计算得到的谱图可以利用伪频率表示法转换到时频域（Rioul & Vetterli 1991），本文采用二阶Morlet小波。关于使用连续小波变换分析恒星光变曲线的更多细节，参见Bravo等（2014）。

尽管连续小波变换在探测天体物理事件方面取得了成功（例如，Ghosh等（2023）；Gurgenashvili等（2022）；Canto Martins等（2020）；de Lira等（2019）；Bravo等（2014）），其构造仍存在一些局限。例如，在低频频带中，时间分辨率会降低，因而可能抑制光变曲线中的特定恒星事件。为克服这一局限，近期提出的小波变换（Wang2021）通过生成时变窗函数纳入主频信息。这一改进将谱能量向信号在每个时刻的瞬时频率移动，从而提升低频和高频下的时间分辨率。基于此，小波变换定义如下（Wang 2021，2022）

$$\mathrm{WT}(t,f)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)w_{k,p}(\tau-t,f;t)\exp\left(-i2\pi f\tau\right)d\tau\,, \tag{3}$$

其中 $w_{k,\ p}(\tau,\ f;\ t)$ 是高斯窗函数

$$w_{k,p}(\tau,f;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{k,p}(t,f)}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2\sigma_{k,p}^2(t,f)}\right), \tag{4}$$

其时间-频率相关的标准差 $\sigma_{k,\ p}(t,\ f)$ 定义为

$$\sigma_{k,p}(t,f)=k\left(f_0^p(t)+|f_0(t)-f|^p\right)^{1/p}\,, \tag{5}$$

其中，$f_0(t)$是信号的主频，$k\in\mathbb{R}$ 和 $p\in\mathbb{R}$ 分别是缩放因子和展宽因子。值得一提的是，当式（3）中的 $p=1.0$ 时，可恢复 Wang（2021）提出的规范加权小波变换；而如 Wang（2022）所示，可以利用 $p>1.0$ 调节高斯窗随频率变化的速率。就此而言，小波变换（式（3））中的自由参数可调整高斯窗函数（式（4）的形状，并可用于优化谱图所包含的信息量（Stankovi´c 2001；Chen等（2022）；Zhao等（2024）；de Souza等（2025）），因此本文采用 $k=2.0$ 和 $p=5.0$。因此，小波变换与传统连续小波变换的区别在于：（i）采用非平稳窗函数；（ii）将谱能量局部化于主频附近；（iii）消除了时频谱中与零频率有关的奇异性问题。特别地，在式（4）中取主频依赖性消失时的极限（相差一个相位因子），即可由小波变换恢复连续小波变换。

主频 f_0 是小波变换的核心组成部分，其计算本身就是一个研究课题（Boashash 1992a，b；Barnes1992；Poggiagliolmi2014；Hu等（2022）；Yu等（2023））。直接将瞬时频率 f_{inst} 视为主频 f_0 可能会产生强烈的数值噪声，使其超过奈奎斯特极限（Wang 2006）。为此，我们遵循 Wang (2022) 的方法，将信号的瞬时频率加权平均后估算主频，即：

$$f_0(t)=\frac{\rho\int_{-\infty}^{\infty}L(t-\tau)a_{\mathrm{inst}}(\tau)f_{\mathrm{inst}}(\tau)\,d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty}L(t-\tau)a_{\mathrm{inst}}(\tau)\,d\tau}\,, \tag{6}$$

其中， ρ为缩放因子， $L(t)$是扩散参数为 $\sigma = 10^7 \times \Delta t$的高斯低通滤波器， Δt 为时间采样率。瞬时振幅 a_{inst} 和 f_{inst} 通过希尔伯特变换对信号进行解析表示后计算得出。考虑到我们关注的光变曲线主要是周期信号，我们调整缩放因子 ρ ，使观测时段内的平均主频与频谱中出现的平均频率一致。最后，计算连续小波变换和小波变换图后，我们将各自图中的系数除以该图的最大幅值进行归一化，使每幅图中的最强响应值为 1。本文的讨论均采用由此得到的归一化图。

3. 小波变换和W变换的比较

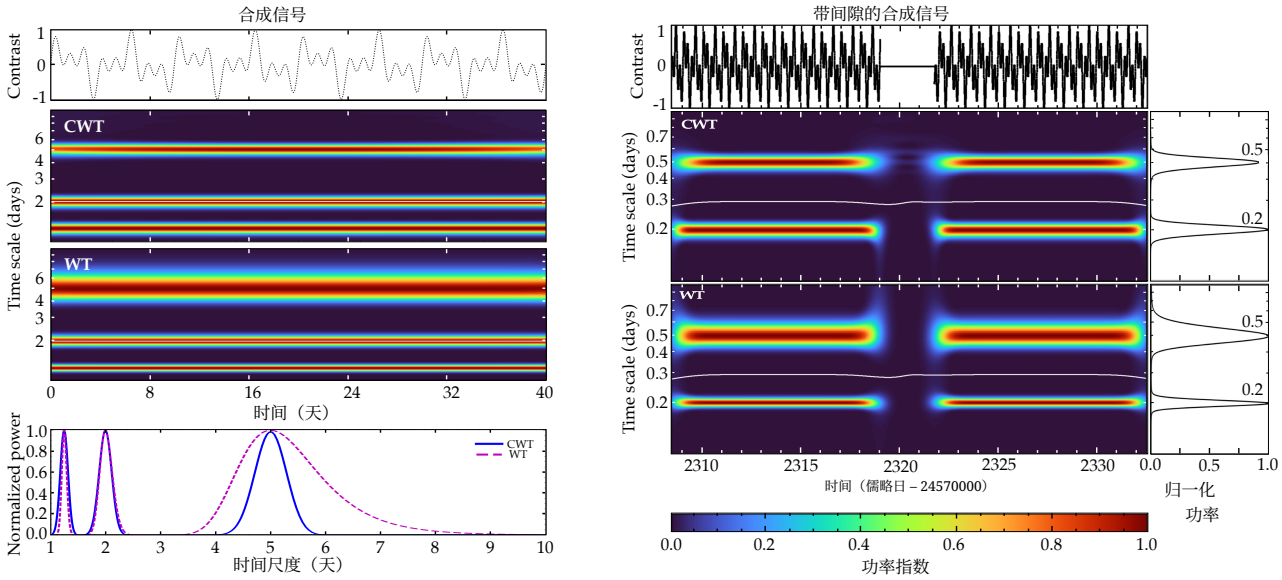

图1. 左侧面板：合成周期信号的 WT 和连续小波变换比较。左侧顶部的三个面板分别显示时间序列、CWT 映射和 WT 映射。左侧底部面板展示连续小波变换（蓝色）和 WT（紫色）的全局谱。全局谱按照各自变换的最大幅值进行归一化。映射中的色彩调色板表示归一化功率指数水平，如右下方的色标所示。WT 和 CWT 映射中的白色实线表示主周期，该周期使用第2节中所述的 W变换基计算得到。右侧面板：具有典型间隙的合成凌日系外行星巡天卫星类 LC 的 WT 和 CWT 比较。右侧顶部面板显示时间序列，第二行和第三行的面板则分别显示 CWT 和 WT 的局部图及其相应的全局谱。全局谱中每个峰值旁的数字表示其对应的周期（单位为天）。映射中的色彩调色板和白色实线遵循左侧面板所述的相同惯例。

本研究旨在应用小波变换分析恒星光变曲线典型时间尺度内的周期信号。为说明在此情境下小波变换与连续小波变换的差异，图1左侧面板展示了一个教学示例：无噪声合成信号由三个叠加的正弦函数组成，其振幅均为 1.0、相位均为零，周期分别为 1.25、

2.0 和 5.0 天。特意选择这些周期，是因为它们在时间尺度上相距较远，并且能代表以下各节所分析恒星光变曲线的变化时间尺度。该信号使用 5.0×10^3 个时间采样点生成，覆盖 40 天，对应的采样间隔为 0.008 天。我们强调，奈奎斯特周期远短于信号中最短的周期。在此示例中，连续小波变换和小波变换均成功识别出信号的三个周期成分。在较短时间尺度上，两者的响应几乎相同，但小波变换在最短周期处呈现出尖锐的定位。对于最长周期成分，两种变换都正确地将主导尺度定位在约 5 天处，不过小波变换将相关功率分布在更宽的邻近尺度范围内。这种较宽的响应反映了小波变换不同的时间—尺度定位方式，并对主导尺度周围的谱成分提供了更广泛的表示。

此外，本研究将小波变换应用于实际时间序列数据，具体用于研究凌日系外行星巡天卫星光变曲线中的恒星变异性。虽然凌日系外行星巡天卫星数据大多是规则采样的，但其中可能存在较长的数据间隙，从而妨碍信号周期的准确计算。本研究中用于小波变换和连续小波变换的计算工具均针对规则采样的时间序列进行了优化，因此必须对观测数据进行插值，使其成为规则采样，以便进行适当分析。为评估数据间隙对周期恢复的影响，我们针对具有已知周期成分的模拟光变曲线，测试了三种简单的间隙处理方法：(i) 线性插值，(ii) 样条插值，以及 (iii) 用对应于静息水平的常数值填补间隙。对于连续小波变换和小波变换，插值方法往往会在间隙处的时频图中引入伪影，并使相应全局谱的峰值产生小幅偏移，通常约为 1–2%。事实上，众所周知，简单插值方法会影响恢复出的频率成分（例如，Pascual-Granado等（2018））。相比之下，用常数值填补间隙基本不会在间隙处产生人为信号，而且在我们的测试中，全局谱的峰值与注入的周期吻合，没有可测量的偏移。原则上，可以使用 MIARMA（Pascual-Granado等（2015））等更先进的方法重建缺失数据，同时更好地保留频率成分。然而，为了只在有观测数据的区域保留信号信息，我们发现常数填补法已经足够。图1右侧面板展示了一个合成信号示例，该信号由两个振幅均为 1.0、相位均为零、周期分别为 0.2 天和 0.5 天的正弦波组成，生成时使用了 1.0603×10^4 个时间采样点，时间跨度约为 25 天（奈奎斯特周期约为 0.0048 天），这与 TESS 观测扇区的典型情况相符，且中间存在一个较长的间隙。与图1左侧面板中的合成信号类似，该信号的振幅为 1.0、相位为零，且无噪声。用常数值填补间隙后，小波变换和连续小波变换均能准确恢复合成信号的真实周期性。不过，小波变换在保留信号振幅方面尤其有效，这一点体现在全局谱的归一化功率水平上。小波变换对 0.2 天和 0.5 天信号均保持一致的功率水平，而连续小波变换对于 0.5 天信号则倾向于给出低于实际值的功率水平。这是因为与小波变换相比，连续小波变换对边界效应更为敏感（Mallat（1999）；Arts与van den Broek（2022））。

为了补充这项比较分析，我们生成了一系列跨越典型凌日系外行星巡天卫星观测扇区的合成光变曲线，以研究数据间隙、噪声和模拟自转周期值对周期恢复的综合影响（见补充材料）。第一组（图A1–A3）采用固定的 0.2 天和 0.5 天周期生成，包含分别有 3、6 和 12 个间隙的示例，以及三种

高斯噪声水平：高（0.05）、中（0.005）和低（0.00005），旨在涵盖广泛的信噪比条件，包括与凌日系外行星巡天卫星光变曲线中观测到的水平相当的情况。间隙数量的选择旨在模拟凌日系外行星巡天卫星观测中的典型情形：早期区段通常只有一个较大的中央间隙。相比之下，较新的区段通常有三个间隙；而有 6 个和 12 个间隙的情况，则对应于在连续两个或四个区段中观测到的恒星。第二组（图 B1–B3）模拟光变曲线采用固定的最低噪声水平生成，同时考虑 3、6 和 12 个间隙，以及从 0.05–0.2 天、0.5–1.0 天到 1.0–5.0 天不等的周期对，涵盖具有代表性的恒星自转周期值。

这些额外的合成信号组展现了一些有趣的特征：在第一组（图 A1–A3）中，即使存在多个间隙，仍可通过 WT 和连续小波变换恢复 0.2 天和 0.5 天的周期性。然而，随着间隙数量增加，WT 映射逐渐变得更加零碎，而连续小波变换图则保留了更清晰的结构。噪声水平是主要影响因素。在这种情况下，WT 对所有情形下的两种周期性都保持稳定的功率水平，而连续小波变换则表现出衰减，尤其是在高噪声条件下较长周期（0.5 天）的衰减更为明显。我们还注意到，在这些示例中，连续小波变换图的功率扩散小于 WT。这表明，在我们的测试中，仅有间隙并不会妨碍周期恢复。然而，噪声显著放大了这两种方法之间的差异。在第二组（图 B1–B3）中，即使存在多个间隙，对于所有周期组合，都可以通过 WT 和连续小波变换恢复输入周期性。在这些情况下，在测试的所有间隙配置中，连续小波变换中的 5.0 天峰值始终弱于 WT。

4. 将W变换应用于TESS恒星光变曲线

本研究将W变换方法应用于六个天体物理对象的测光时间序列：一颗褐矮星、一颗超冷矮星、一颗太阳孪生星、一颗 γ Dor脉动星、一颗拥有行星的G型恒星和一颗食双星，所使用的数据来自 TESS 空间任务。TESS是一台空间望远镜，于2018年4月发射，被置于高椭圆轨道上，每13.7天完成一周运行。该任务的主要目标是对天球中一个重要区域进行不间断的测光观测，该区域被划分为26个区段，每个区段覆盖$24^\circ \times 96^\circ$。在监测指定目标时，卫星在每个区段约27天的监测期间采用2分钟采样周期（称为短采样周期）和20秒采样周期（称为快速采样周期）。此外，TESS还根据全幅图像生成30分钟采样周期的光变曲线。为确保数据分析的一致性，我们使用了质量标志设为0的2分钟短采样周期光变曲线，以确保采用最准确、最可靠的数据。TESS光变曲线的采样几乎均匀，但可能包含间隙，这些间隙通常与数据下传、望远镜运行错误或宇宙射线事件有关（例如，Colman等（2024））。由于本研究所使用的WT和连续小波变换算法仅支持均匀采样的数据，本节分析的光变曲线被重新分箱为固定的20分钟采样周期。短间隙（$\lesssim 1$ 天）采用线性插值填补，长间隙（$\gtrsim 1$ 天）则以恒定值填补（对应于宁静通量水平）。

以下恒星被选用于对 W变换和 CW变换进行比较分析：太阳孪生星 TIC 276293046（Lehmann等（2023））、褐矮星 TIC 102076870（Gagn´e 等（2015））、超冷矮星 TIC 359892714（Fontinele 等（2024））、 γ Dor 脉动星 TIC 164173105（Gomes 等（2024））、食双星 TIC 355151781（Prˇsa 等（2022）），以及宿主行星恒星 TOI 1136，即 TIC 142276270（Dai 等（2023））。为突出

W变换的细节，我们通过以下两种情形展示分析结果，并将其与连续小波变换进行比较：首先分析只有一条光变曲线的恒星，然后分析具有两条光变曲线、但其结构存在差异的恒星。

图 2 展示了仅有一条光变曲线的恒星的 WT 和 CWT 分析结果，即太阳孪生星 TIC 276293046、褐矮星 TIC 102076870、超冷矮星 TIC 359892714，以及 γ Dor 脉动星 TIC 164173105。对于每组顶部标有 TESS 编号的面板，上方面板展示光变曲线，而光变曲线下方的面板则在中央显示局部图、在右侧显示全局谱，其中顶部为 CWT，底部为 WT。使用 WT 和 CWT 对样本中的恒星光变曲线进行分析，得出了重要结果。

恒星 TIC 276293046 是一颗太阳类似星，其有效温度为 $T_{\rm eff} = 6197 \pm 80$ K，表面重力 $\log [g/({\rm cm\ s^{-1}})] = 4.273 \pm 0.062$ dex，金属丰度为 $[Fe/H] = 0.090 \pm 0.042$ dex（Lehmann等（2023））。本研究基于高质量的凌日系外行星巡天卫星光变曲线，首次给出了这颗恒星的变化周期。图 2左上方的 WT 和 CWT 全局谱，以及图 4左上方所示的 Lomb-Scargle功率谱，均给出了 0.324 天的主周期。WT 和 CWT 映射显示，该信号在整个时间跨度内都具有持续性。总体而言，WT 和 CWT 映射中呈现的特征与旋转调制模式一致（例如，Canto Martins等（2020）），而相对较快的自转表明这颗恒星是一颗年轻的类太阳恒星（例如，Le˜ao等（2015））。

褐矮星 TIC 102076870 拥有首个直接成像的行星伴星（Chauvin等（2004）），其估计自转周期约为 1 天（例如，Scholz等（2005）；Stelzer等（2007））。本文基于TESS数据，对该恒星的自转周期进行了更精确的测定。图 2右上方的面板所示的全局谱显示，WT 和 CWT 的主要周期均为 0.987 天，这与先前的研究结果一致。这些周期与图 4 （右上方面板）所示的 Lomb-Scargle 周期 0.975 天相符，偏差为 2%。此外，在 WT 和 CWT 全局谱中还存在一个半周期的第二峰，该峰通常与恒星表面的非对称星斑分布有关，这种分布可能在每个自转周期内产生双凹陷片段（Basri和Nguyen（2018））。在所研究的时间序列中，第二峰特征出现在 WT 和 CWT 映射的特定时间区间内，大约从儒略日 24570002315 一直到光变曲线末端。对于该时间序列，WT 映射中的特征看起来比 CWT 映射中的相应特征更清晰，尤其是在高频（短周期）处。

最近由Fontinele 等 (2024)分析的超冷矮星 TIC 359892714，在图2（左下图）中的 WT 和 CWT 全局谱显示出 0.473 天的主周期，该周期与恒星自转有关。这一数值与相应的 Lomb-Scargle 周期 0.446 天相符（见图4，左下图），偏差约为 6%。WT 和 CWT 映射呈现出双凹陷特征（Basri和Nguyen（2018）），主周期和半周期在整个时间范围内均持续存在，并在各自的全局谱中表现为两个明显的峰。值得注意的是，WT 映射对高频（短周期）特征的分辨效果更好，而 CWT 映射中的低频（长周期）特征则更加突出。

Gomes 等最近利用凌日系外行星巡天卫星的光变曲线研究了 TIC 164173105 Gomes 等(2024)，并将其分类为 γ Dor 脉动星，脉动周期为 0.57 天。图2 （右下图）中的 WT 和 CWT 全局谱均显示主周期为 0.587 天，该周期在 WT 中持续存在

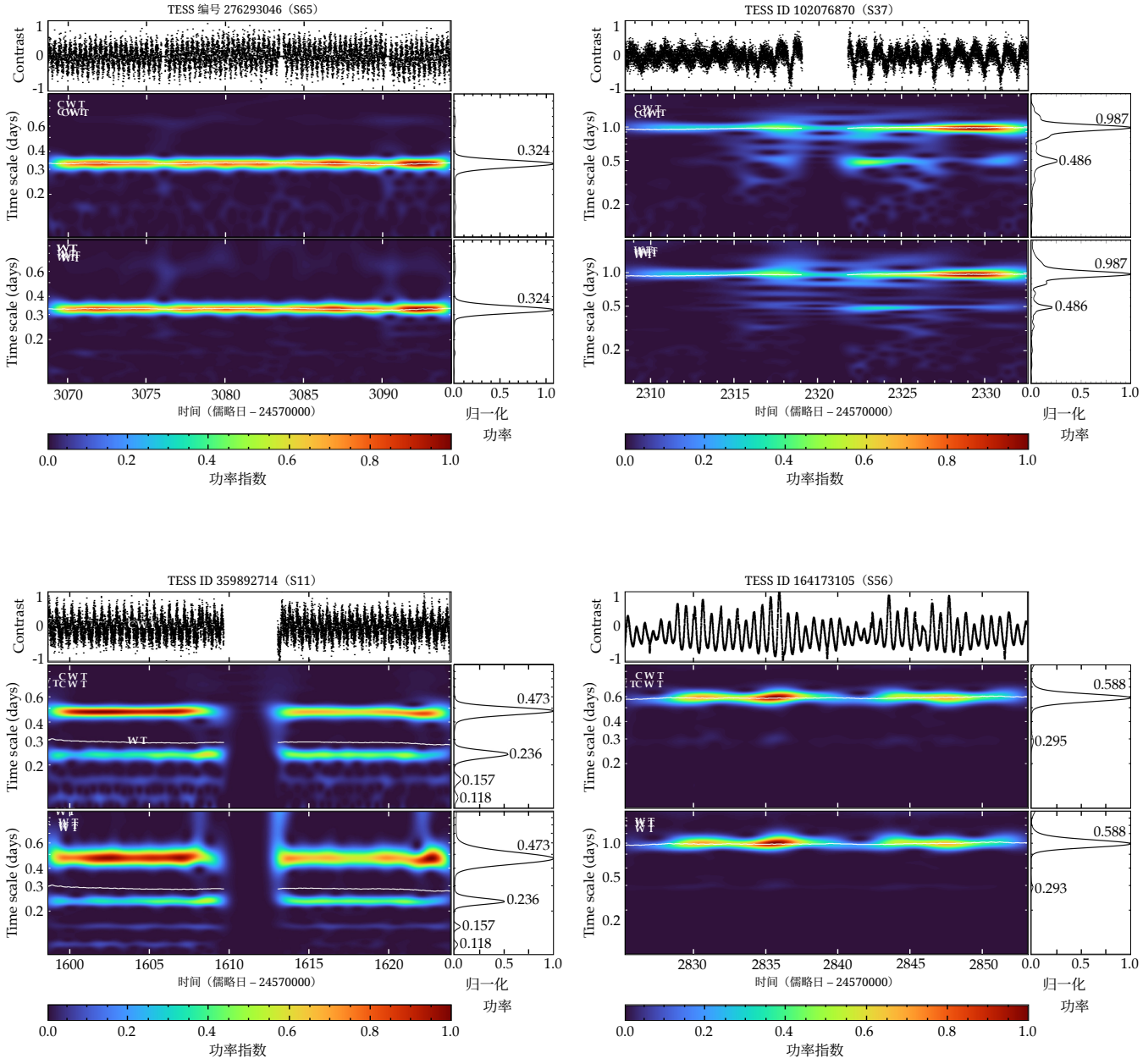

图2. 将小波变换和连续小波变换方法应用于凌日系外行星巡天卫星光变曲线的比较。 左上面板：TIC 276293046 的结果，取自第65扇区。 右上面板：TIC 102076870 的结果，取自第37扇区。 左下面板：TIC 359892714 的结果，取自第11扇区。 右下面板：TIC 164173105 的结果，取自第56扇区。每组面板的布局（顶部标有 TESS编号）以及颜色、线条和符号的使用，均遵循图右侧面板所述的相同惯例，见图1。

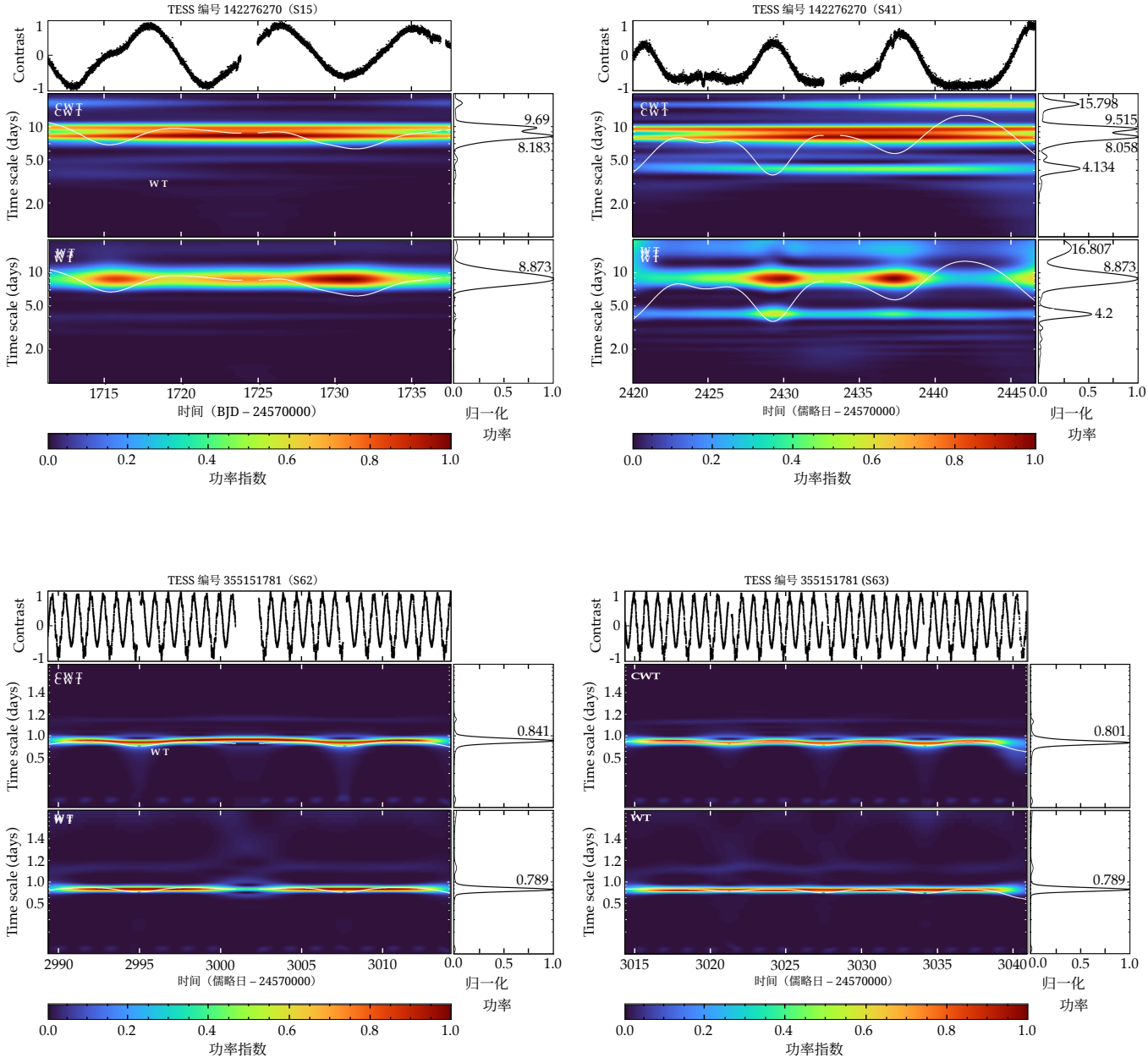

图 3. 将 W 变换和连续小波变换方法应用于 TESS光变曲线的比较。 上方各面板：TIC 142276270 的结果，分别来自第15扇区（左）和第41扇区（右）。下方各面板：TIC 355151781 的结果，分别来自第62扇区（左）和第63扇区（右）。在每组面板中，顶部子面板显示光变曲线，中部和底部子面板分别显示连续小波变换图和小波变换图，并在右侧显示相应的全局谱。每组面板的布局（顶部标有 TIC 标识符），以及颜色、线条和符号的使用，均遵循图右侧面板所述的相同惯例。1。

以及贯穿整个时间跨度的连续小波变换图。该周期与相应的 0.585 天 Lomb- Scargle 周期一致（见图4，右下方各面板），偏差小于 1%。

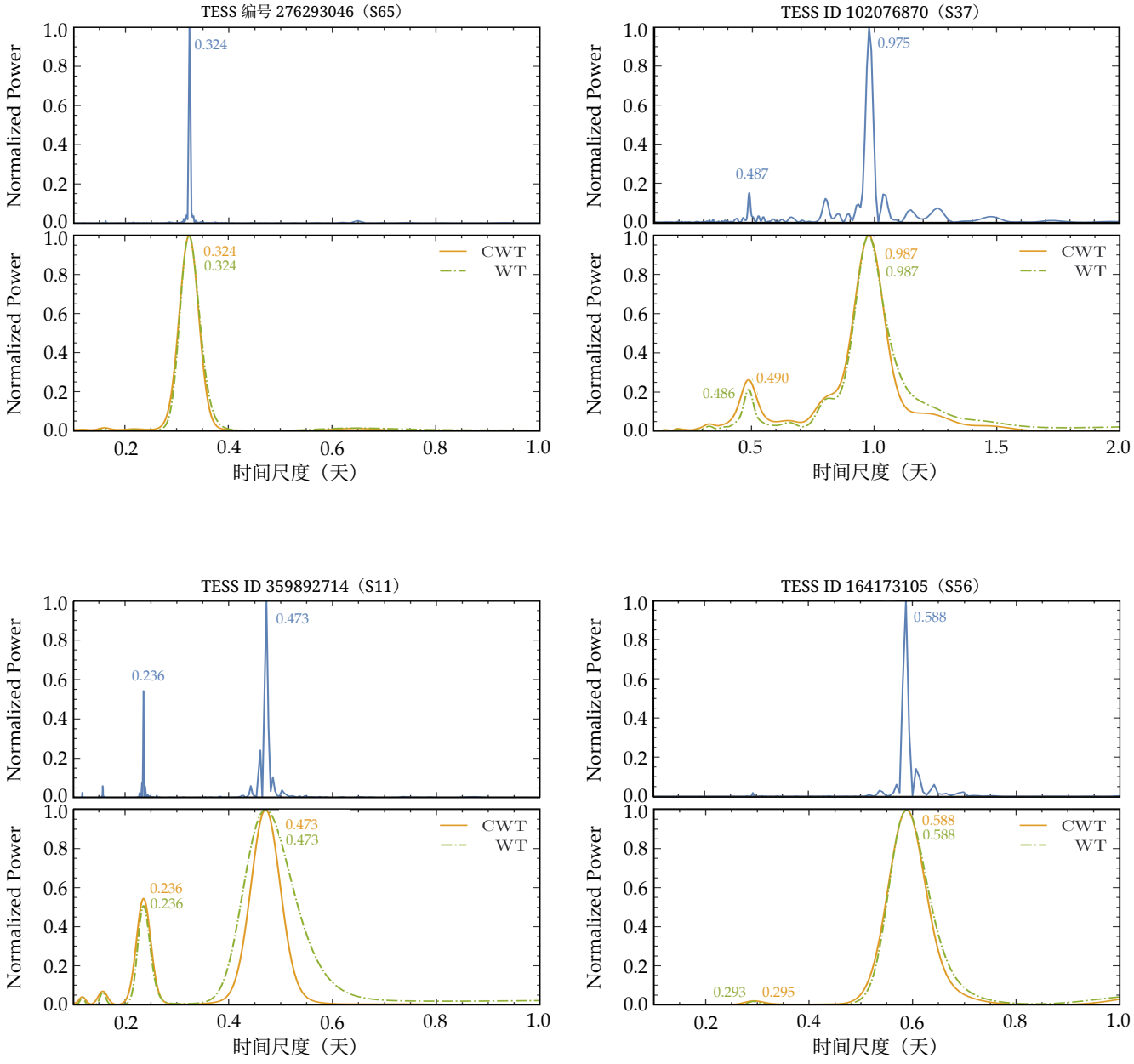

图4。 图2中分析的四条凌日系外行星巡天卫星光变曲线的 WT 方法与连续小波变换方法比较。 2每组面板均标有相应的 TESS标识符，上方面板显示时间序列的 Lomb-Scargle周期图，下方面板显示连续小波变换，并叠加 WT全局谱。图例中所示的线型突出显示了 WT 方法与连续小波变换方法之间的差异。峰值附近的数字表示相应的峰值周期（单位：天）。

4.1. 具有多个间隙且光变曲线结构不同的恒星

在前面的示例中，我们只考虑了在单个扇区内观测到的恒星，因此无法识别同一颗恒星光变曲线中的时间动态变化的影响，即，

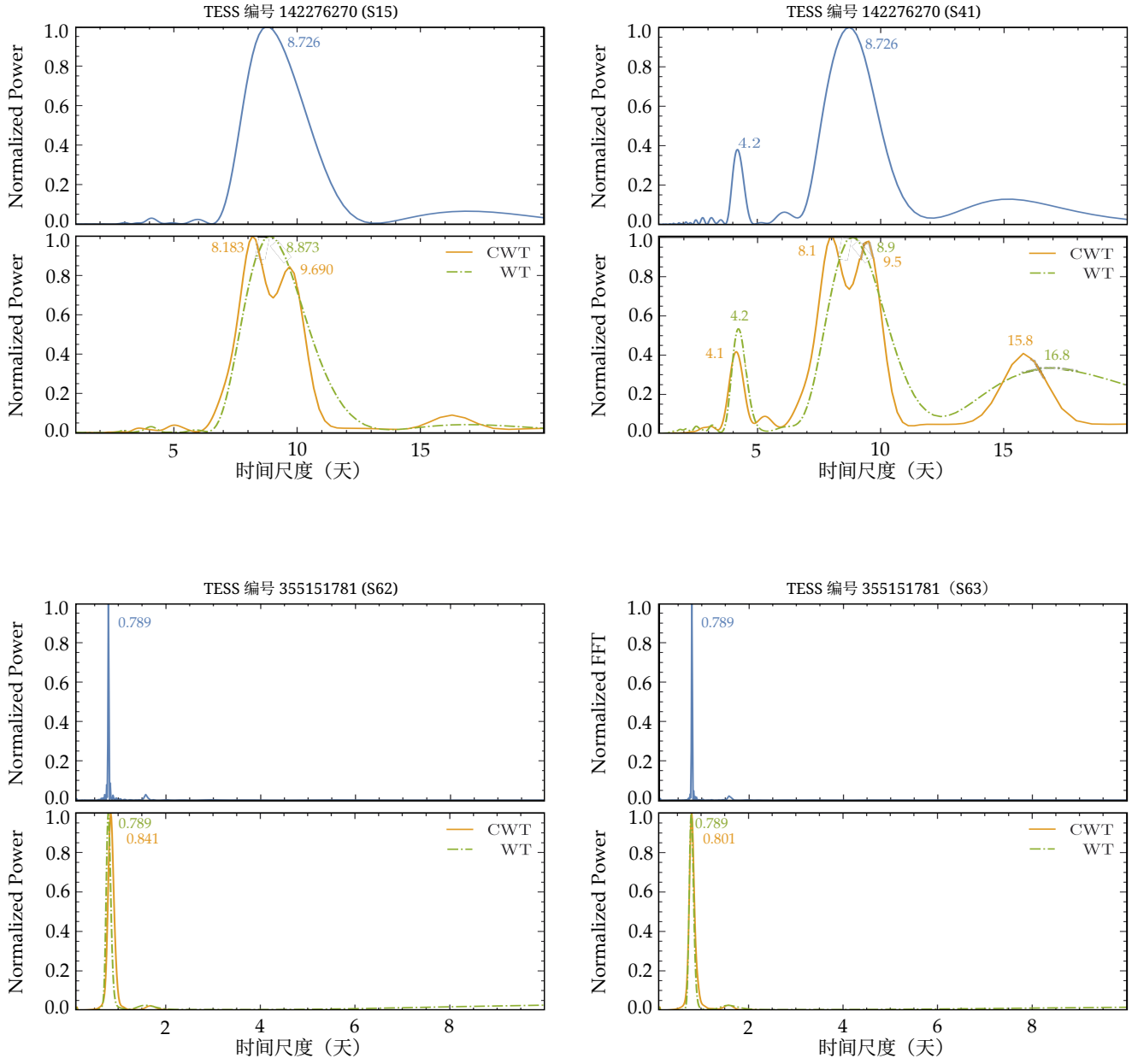

图5. 图3中分析的四条凌日系外行星巡天卫星光变曲线的 WT 方法与 CWT 方法比较。3。每组面板均以相应的 TESS 标识符标注，上方面板展示时间序列的 Lomb-Scargle周期图，下方面板则展示叠加了 WT全局谱的连续小波变换。图例所示的线型突出了 WT 方法与 CWT 方法之间的偏差。峰值附近的数字表示相应的峰值周期，单位为天。

在多个区段观测到的一颗恒星。以下恒星 TIC 142276270 和 TIC 355151781 受益于多个可用的 TESS 扇区，使我们能够分析这些效应，尤其是光变曲线结构以及间隙数量随时间的变化。

TIC 142276270，即 TOI 1136，是一颗G型恒星，至少拥有六颗凌日行星，其半径介于 ∼2 和 5 $R_\oplus$ (Dai 等（2023）) 之间。对于这一目标，我们分析了来自两个不同 TESS 扇区（15 和 41）的光变曲线（图 3，上方各图）。这些光变曲线呈现出准周期变化模式，但其结构存在明显差异。第15扇区（左上）中的光变曲线显示出界限清晰的峰和谷。相比之下，第41扇区呈现出界限清晰的峰和更宽的谷，从而原则上使其结构更加复杂。WT 和连续小波变换的全局谱（图 5，上排）清楚地反映了这些差异所产生的影响。在两个扇区中，小波变换均恢复出一个 8.873 d 的单一主周期，该周期贯穿整个时间跨度，并与 Lomb-Scargle 结果一致。该数值也与 Dai 等 （2023）独立测定的 8.7 ± 0.1 d 自转周期一致。尽管连续小波变换全局谱显示出两个相近的峰（第15扇区为 8.183 和 9.690 d，第41扇区为 8.058 和 9.515 d），但这给周期性的确定带来了歧义。连续小波变换图呈现出更加连续且连贯的功率分布，而小波变换图则显得更加碎片化，尤其是在第41扇区，其中加宽的谷表现为图中的额外复杂性。这种碎片化现象，加上小波变换全局谱和Lomb-Scargle周期图恢复出的单一主周期，充分表明存在两个接近但未被分辨的峰，这正是连续小波变换图中所呈现的情况。这种行为与合成测试所揭示的更广泛图景一致：即使光变曲线结构发生变化，小波变换仍倾向于保留唯一且稳定的周期性。与此同时，连续小波变换对这些变化表现出更高的敏感性。该示例还说明，小波变换特别适合追踪主频随时间的变化，而这正是该方法真正擅长之处，如图 3上右图中的结构所示。

TIC 355151781 是一颗轨道周期为 1.5807272 d 的食双星（Prˇsa 等（2022））。对于这颗目标星，我们分析了来自两个不同 TESS 扇区（62 和 63，图3，底部面板）的光变曲线，两条光变曲线都显示出深而窄、规律重复出现的食，但实际采样到的事件数量（遗漏或部分食）有所不同。事实上，间隙数量的增加会直接减少检测到的食的数量，也就是事件频率；这一因素可能改变光变曲线的时频内容。从全局谱可以看出，WT 和 CWT 都恢复了与轨道信号相关的主周期（在强谐波$P/2 \approx 0.79$ d 处可见）。然而，WT 在两个扇区中都得到相同的周期 ~ 0.789 d。与此同时，CWT 的峰值略有差异，从第 62 扇区的 0.841 d 变为第 63 扇区的 0.801 d，这表明 CWT 对间隙分布和光变曲线结构的差异更为敏感。这一结果也与合成测试一致：测试表明，即使有效事件数量减少，WT 仍能保留振幅，并在周期性不变的情况下保持稳定。相比之下，CWT 更容易受到间隙数量变化所引入的失真的影响。

5. 结论

本研究采用一种较新的方法——W变换，对凌日系外行星巡天卫星的光变曲线进行时频研究。本文首次探索了该方法在天体物理数据处理中的应用，并将其作为连续小波变换的一种改进方法。研究使用合成数据和观测数据，探讨了这两种方法的异同，尤其关注周期信号。此外，还将结果与Lomb-Scargle方法进行了比较，以供参考。观测数据包括六颗恒星的凌日系外行星巡天卫星光变曲线，分别是太阳类似星

TIC 276293046、褐矮星 TIC 102076870、超冷矮星 TIC 359892714、 γ Dorpul- sator TIC 164173105、多行星宿主星 TIC 142276270，以及食双星 TIC 355151781。

总体而言，两种方法计算得到的全局谱和局部谱在大多数情况下相似。然而，对于光变曲线在不同 sector 之间的结构或间隙数量发生变化的恒星，我们发现了显著差异，从而揭示出恒星变异的时间动态效应；特别是，这些效应可能会影响与相应光变曲线相关事件的发生频率。这些后者方面通过合成光变曲线得到揭示，并由观测数据加以证实；其中，WT 谱在恢复信号振幅方面更加稳定且准确。相比之下，对于光变曲线呈现不同结构或间隙数量发生变化的恒星，CWT 映射显示出一定的失真，尤其是在低频和高频端点处，并且在恢复信号振幅方面也存在局限。从本质上说，在中等噪声水平下，间隙较多时 CWT 的表现优于 WT；而在高噪声水平下，间隙较少时 WT 的表现优于 CWT。事实上，对于观测数据，WT 方法能够以更高的细节分辨率解析高频（短周期）信号特征，而 CWT 方法在解析低频（长周期）特征方面表现更好。这表明，在对周期性天体物理信号进行深入分析时，两种方法可以相互补充。因此，WT 方法在调整主频方面固有的灵活性，即使在 CWT 方法表现更好的光变曲线中，也可能提高时间分辨率。主周期并不总是与全局谱中的峰值相一致。这是因为主周期是一个局部量，对应于每个时刻小波功率达到最大值的尺度。相比之下，全局谱中的峰值定位的是时间平均功率最大的尺度。只有当信号是平稳的且具有单一周期性时，这两个量才会相一致；一般而言，它们会有所不同，这是因为功率分布经过了时间平均，而且已知小波功率谱会偏向较长尺度（Liu 等，2007）。在此背景下，我们的结果表明，WT 也是分析恒星光变曲线的一种稳健且准确的工具，相较于 CWT 可提供更精细的改进，并扩大了可用于通过测光观测分析不同恒星周期现象的数值技术范围。

如前所述，凌日系外行星巡天卫星空间任务提供的、具有观测光度曲线的恒星数量大幅增加，极大地拓展了我们对恒星动力学的认识。然而，如此海量的信息需要在数据处理方面付出巨大努力，包括识别并实施新的计算程序。与此同时，覆盖数千万条光变曲线的丰富数据揭示了许多此前未知的复杂性，包括相关现象的时间行为和持续性，以及与间隙和噪声水平等仪器问题有关的意外影响。在这种情况下，并受本研究启发，对文献中报道的不同小波变换进行比较研究，包括加权小波 Z 变换（Foster，1996）和同步挤压小波变换（Daubechies 等，2011；Ram´on-Ballesta 等，2022），可能为光度曲线的处理与分析开辟新的视野。特别是，这类研究有助于确定与特定变异性相关现象的持续性水平，并判定所检测到的频率和振幅是否稳定。尽管这两种变换都基于经典小波形式体系，但它们均进行了改进，使其能够在处理上述复杂性时发挥互补作用。例如，加权小波 Z 变换并不只是将小波视为投影到一组试验函数上，而是将其视为加权投影；这种策略增强了其检测频率和振幅波动以及估计其

参数的能力，并提高了精度和一致性。提出同步挤压小波变换的目的是通过在保留时间分辨率的同时，将能量重新分配到中心频率附近，从而减小经典小波变换频带的宽度，并提供更高的频率分辨率。鉴于 TESS数据所揭示的复杂性，稳健的时频分析工具（例如本文讨论的工具）对于探索即将开展的 PLATO 空间任务（Rauer 等（2025））将至关重要。预计该任务将成为光度数据的新金矿，为不同天体物理对象产生数千万条光变曲线。

北里奥格兰德联邦大学观测与仪器天文学委员会（NAOS）的研究活动得到巴西国家科学技术发展委员会持续拨款的支持。本研究部分由巴˜西高等教育人员提升协调会。（CAPES）´– 巴西（CAPES）– 财务代码001以及CAPES/Print项目资助。P.D.S.L.感谢UFRN/CAPES/Print奖学金，项目编号88887.838338/2023-00。D.O.F.感谢CAPES研究生奖学金，R.L.G.感谢CNPq PDE奖学金。J.M.A.感谢巴西国家科学技术发展委员会提供的经费支持（拨款编号311589/2021-9）。B.L.C.M.（拨款编号305804/2022-7）、J.R.M.（拨款编号308928/2019-9）和I.C.L.（拨款编号313103/2022-4）感谢CNPq研究奖学金。本研究包含由凌日系外行星巡天卫星任务收集的数据。NASA探索者计划为凌日系外行星巡天卫星任务提供经费支持。本文使用的所有TESS数据均可在MAST中找到：10.17909/0kat-v379。

参考文献

Addison，P. S. 2018，《英国皇家学会哲学汇刊 A》，376，20170258。doi：10.1098/rsta.2017.0258 Arts，L. P. A.，& vanden Broek，E. L. 2022，《自然·计算科学》，2，47。doi：https://doi.org/10.1038/s43588-021-00183-zBaglin，A.，Auvergne，M.，Barge，P. 等。2009，《凌日行星》，71 Barnes，A. E. 1992，《地球物理学》，57(11)，1520–1524。doi：https://doi.org/10.1190/1.1443220Basri，G.，Nguyen，H. T. 2018，《天体物理学杂志》，863，190 Boashash，B. 1992，《IEEE学报》，80(4)，520–538。doi：https://doi.org/10.1109/5.135376Boashash，B. 1992，《IEEE学报》，80(4)，540–568。doi：https://doi.org/10.1109/5.135378Borucki，W. J.，Koch，D.，Basri，G. 等。2010，《科学》，327，977 Bravo，J. P.，Roque，S.，Estrela，R.，Le˜ao，I. C.，& De Medeiros，J. R. 2014，《天文学与天体物理学》，568，A34。doi：10.1051/0004-6361/201323032 Canto Martins，B. L.，Gomes，R. L.，Messias，Y. S.，等。2020，《天体物理学杂志增刊》，250，20。doi:10.3847/1538-4365/aba73f Chauvin，G.，Lagrange，A. -M.，Dumas，C. 等。2004，《天文学与天体物理学》，425，L29 Chen，H.，Peng，L.，Chen，X.，Hu，Y.，Li，R.，& Fang，Y. 2022，《地球物理学》，87(5)，V521–V532。doi：https://doi.org/10.1190/geo2021-0803.1Cohen，L. 1995，时频分析，普伦蒂斯·霍尔公司。Colman，I. L.，Angus，R.，David，T. 等。2024，《天文学杂志》，167，189 Cooley，J. W.，& Tukey，J. W. 1965，《数学计算》，19，297 de Lira，S. R.，Bravo，J. P.，Le˜ao，I. C.，等。2019，《皇家天文学会月报》，484，3935 Fontinele，D. O.，de Lima，P. D. S.，Messias，Y. S. 等。2024，《天体物理学杂志》，已接收 [arXiv:2406.07154]Dai，F.，Masuda，K.，Beard，C.，等。2023，《天文学杂志》，165，2，33。doi:10.3847/1538-3881/aca327 Daubechies，I.C.，Lu,J.，Wu，H. T.2011，《应用与计算谐波分析》，30，243，261。DOI: 10.1016/j.acha.2010.08.002

deSouza, D. C.C., de Lima,P.D.S., deAra´ujo, J. M., & Corso, G. 2025，Physica A，665，130462，https://doi.org/10.1016/j.physa.2025.130462 Dorn-Wallenstein, T. Z., Levesque, E. M., Neugent, K. F., 等。2020，《天体物理学杂志》，902，1，24。doi:10.3847/1538-4357/abb318 Foster, G. 1996，《天文学杂志》，112，1709。doi:10.1086/118137 Gabor, D. 1946，电气工程师学会期刊，93，429–441。doi:10.1049/ji-3-2.1946.0074Gagn´e, J., Faherty, J. K., Cruz, K. L. 等。2015，《天体物理学杂志增刊》，219，33 Ghosh, A., Gallo, L. C., & Gonzalez, A. G. 2023，《皇家天文学会月报》，524，1，1478。doi:10.1093/mnras/stad1955 Gomes, R. L., Canto Martins, B. L., Fontinele, D. O. 等。2024，《天体物理学杂志》，961，55 Gurgenashvili, E., Zaqarashvili, T. V., Kukhianidze, V., 等。2022，《天文学与天体物理学》，660，A33。doi:10.1051/0004-6361/202142696 Hu, C.-P., Lin, L. C.-C., Pan, K.-C., Li, K.-L., Yen, C.-C., Kong, A. K. H., & Hui, C. Y. 2022，《天体物理学杂志》，935(2)，127。
d
o
i:https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac8165 Huang, N. E., Shen, Z., Long, S. R., 等。1998，RSPSA，454，903 Jenkins, J. M., Twicken, J. D., McCauliff, S., 等。2016，SPIE会议录，99133E Le˜ao, I. C., Pasquini, L., Ferreira Lopes, C. E. 等。2015，《天文学与天体物理学》，582，A85 Lehmann, C., Murphy, M. T., Liu, F. 等。2023，《皇家天文学会月报》，521，148 Li, R., Zhu, X., Zhou, Y., Chen, H., Chen, X., & Hu, Y. 2022，IEEE地球科学与遥感快报，19，1–5，文章编号3004205。doi:10.1109/LGRS.2021.3108836Liu, Y., San Liang, X., & Weisberg, R. H. 2007，大气与海洋技术杂志，24，12，2093。doi:10.1175/2007JTECHO511.1 Lomb, N. R. 1976，Ap&SS，39，447 Luo, C., & Zong, Z. 2023，IEEE地球科学与遥感快报，20，1–5，文章编号7502005。doi: 10.1109/LGRS.2023.3262637Mallat, S. 1999，信号处理小波之旅，第2版，学术出版社，爱思唯尔。Mansinha, L., Stockwell, R. G., Lowe, R. P., Eramian, M.，和 Schincariol, R. A. 1997，《地球与行星内部物理学》，103(3–4)，329–336。doi:
h
ttps://doi.org/10.1016/s0031-9201(97)00047-2 McQuillan, A.、Mazeh, T. 和 Aigrain, S. 2014，《天文学与天体物理学杂志增刊》，211，24；Paegert, M.、Stassun, K. G.、Collins, K. A. 2021，arXiv:2108.04778；Pascual-Granado, J.、Garrido, R. 和 Su´arez, J. C. 2015，《天文学与天体物理学》，575，A78。doi:10.1051/0004-6361/201425056；Pascual-Granado, J.、Su´arez, J. C.、Garrido, R. 等 2018，《天文学与天体物理学》，614，A40。doi:10.1051/0004-6361/201732431；Pinnegar, C. R. 和 Mansinha, L. 2003，《数字信号处理》，13(4)，588–603。doi:
h
t
t
p
s://
doi.org/10.1016/s1051-2004(03)00022-8Poggiagliolmi, E. 和 Vesnaver, A. 2014，《国际地球物理学杂志》，199(3)，1544–1553。doi:
https://doi.org/10.1093/gji/ggu352Pr˘sa, A.、Kochoska, A.、Conroy, K. E. 等 2022，《天文学与天体物理学杂志增刊》，258，1，16。doi:10.3847/1538-4365/ac324a；Ram´on-Ballesta, A.、Pascual-Granado, J. 和 Garrido, R. 2022，《天文学与空间科学前沿》，9，948979。doi:10.3389/fspas.2022.948979；Rauer, H.、Aerts, C.、Cabrera, J. 等 2025，《实验天文学》，59，3，26。doi:10.1007/s10686-025-09985-9；Ricker, G. R.、Winn, J. N.、Vanderspek, R. 等 2015，《天文望远镜、仪器与系统杂志》，1，014003；Rioul, O. 和 Vetterli, M. 1991，《IEEE信号处理杂志》，8(4)，14–38。doi:
https://doi.org/10.1109/79.91217Santos, A. R. G.、Breton, S. N.、Mathur, S. 等 2021，《天文学与天体物理学杂志增刊》，255，1，17。doi:10.3847/1538-4365/ac033f；Scholz, A.、Jayawardhana, R. 和 Brandeker, A. 2005，《天体物理学杂志》，629，L41；Stankovi´c, L. 2001，《信号处理》，81(3)，621–631。doi:
https://doi.org/10.1016/S0165-1684(00)00236-XStelzer, B.、Scholz, A. 和 Jayawardhana, R. 2007，《天体物理学杂志》，671，842

Stockwell, R. G.、Mansinha, L. 和 Lowe, R. P. 1996, IEEE信号处理汇刊，44(4)，998–1001。doi：https://doi.org/10.1109/78.492555Scargle, J. D. 1982, 《天体物理学杂志》，263，835；Simon, C. 等 2007, IEEE信号处理汇刊，55(10)，4928–4937。doi：https://doi.org/10.1109/TSP.2007.897893Torrence, C. 和 Compo, G. P. 1998, 《美国气象学会公报》，79, 1，61。doi:10.1175/1520- 0477(1998)079<0061: APGTWA>2.0.CO;2；Ventosa, S.、Simon, C.、Schimmel, M.、Danobeitia, J. J. 和 Manuel, A. 2008, IEEE信号处理汇刊，56(7)，2771–2780。doi：https://doi.org/10.1109/TSP.2008.917029Wang, Y. 2006, 《地球物理学》，72(1)，V13–V20，doi：https://doi.org/10.1190/1.2387109。Wang, Y. 2021, 《地球物理学》，86(1)，V31–V39。doi：https://doi.org/10.1190/geo2020-0316.1Wang, Y. 2022, 《地震信号的时频分析》，John Wiley & Sons, Ltd，ISBN：9781119892366

Wang、Y、Rao、Y. 和 Zhao、Z. 2024。《石油勘探与开发》51，886。doi：https: // doi.org/10.1016/S1876-3804(24)60513-6。Wu、Y.、Huang、H.、Tian、X.、Liao、J. 和 Cheng、S. 2024，IEEE地球科学与遥感快报，21，1–5。doi：10.1109/LGRS.2024.3402747Yu、W.、Bu、Q.-C.、Yang、Z.-X.、Liu、H.-X.、Zhang、L.、Huang、Y.、Zhou、D.-K.、Qu、J.-L.、Zhang、S.-N.、Zhang、S.、Song、L.-M.、Jia、S.-M.、Ma、X.、Tao、L.、Ge、M.-Y.、Liu、Q.-Z. 和 Yan、J.-Z. 2023，《天体物理学杂志》，951(2)，130。doi：https://doi.org/10.3847/1538-4357/acd756Zhao、Z.、Rao、Y. 和 Wang、Y. 2024，IEEE地球科学与遥感快报，21，1–5。doi：https://doi.org/10.1109/LGRS.2023.3340161

补充材料A. 数据间隙和噪声水平对凌日系外行星巡天卫星模拟光变曲线中周期恢复的影响

图 A1、A2和A3展示了凌日系外行星巡天卫星模拟的光变曲线，其周期固定为 0.2 天和 0.5 天，分别包含 3、6 和 12 个间隙。每幅图均展示了三种高斯噪声水平下的结果：σ=0.05、0.005 和 0.00005。各面板展示了通过小波变换和连续小波变换获得的相应光变曲线、时频图和全局谱，说明间隙数量和噪声水平如何影响输入周期的恢复。

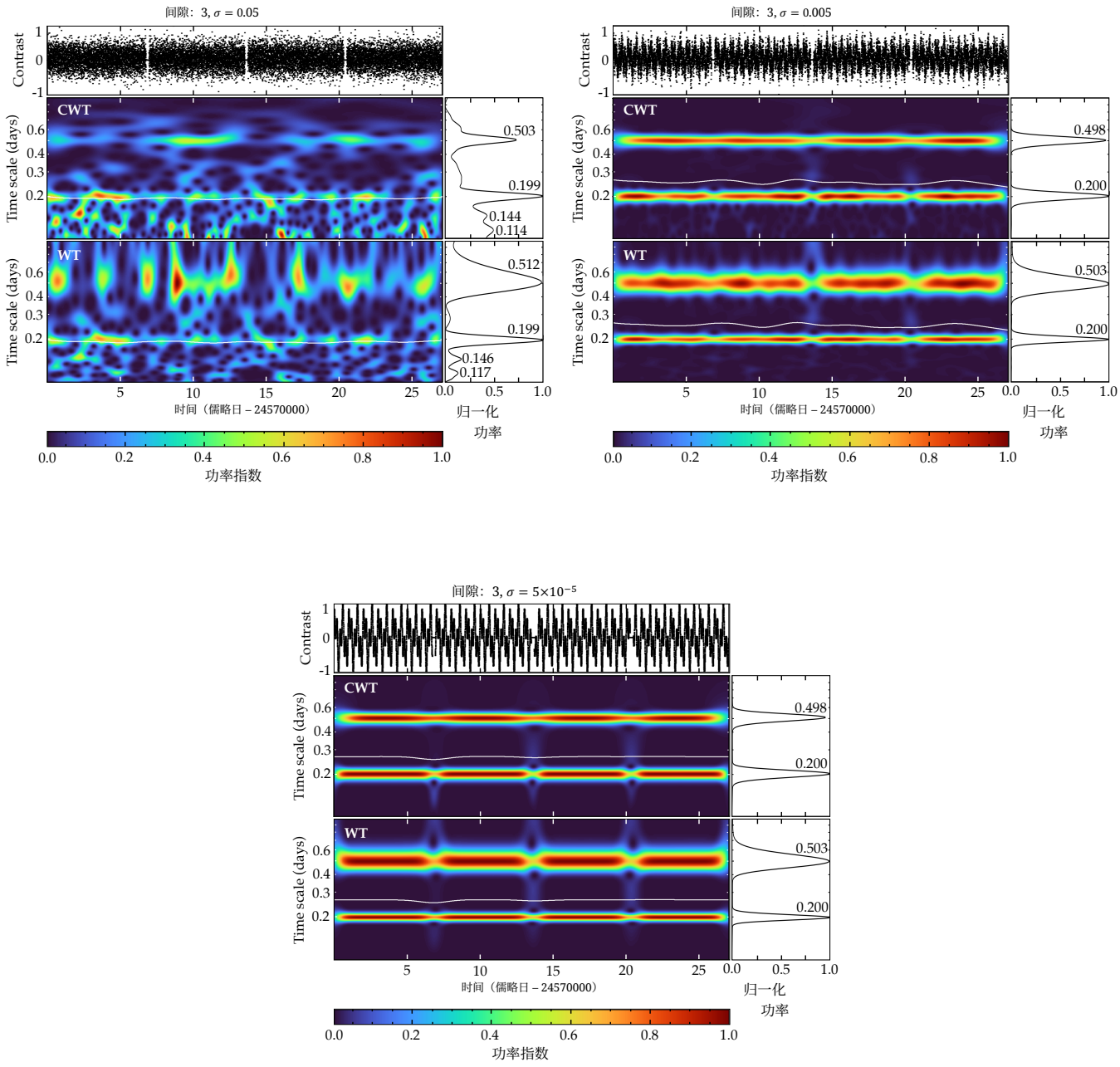

图 A1. 具有 3 个间隙且周期固定为 0.2 和 0.5 d 的类凌日系外行星巡天卫星模拟光变曲线。顶部面板显示光变曲线，第二行和第三行分别显示连续小波变换和小波变换局部图。最右侧面板展示对应的全局谱。结果展示了三种高斯噪声水平： σ=0.05、0.005 和 0.00005。色彩调色板表示归一化功率指数水平，实白线表示主导周期。

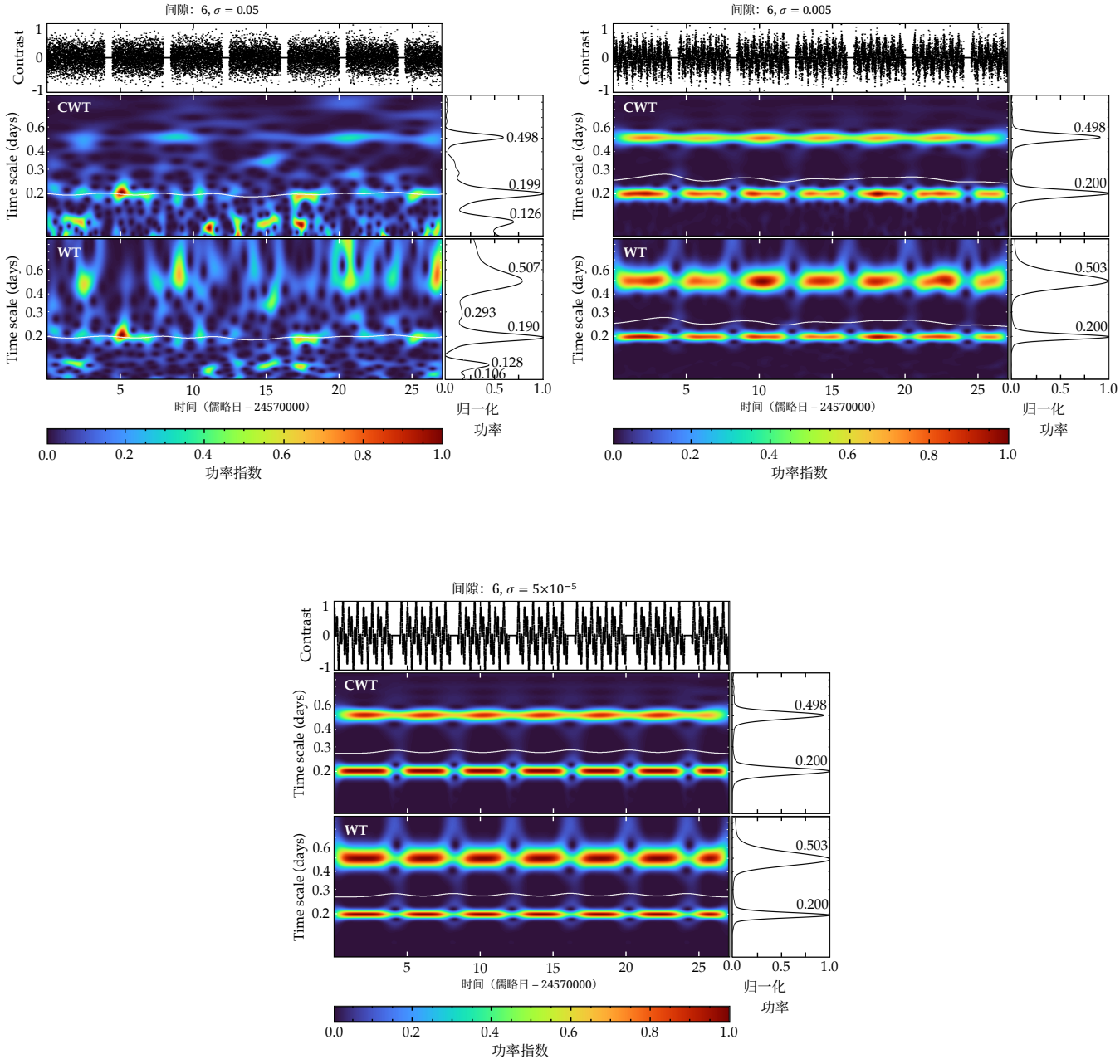

图 A2. 与图A1相同，但针对包含 6 个间隙的模拟光变曲线。

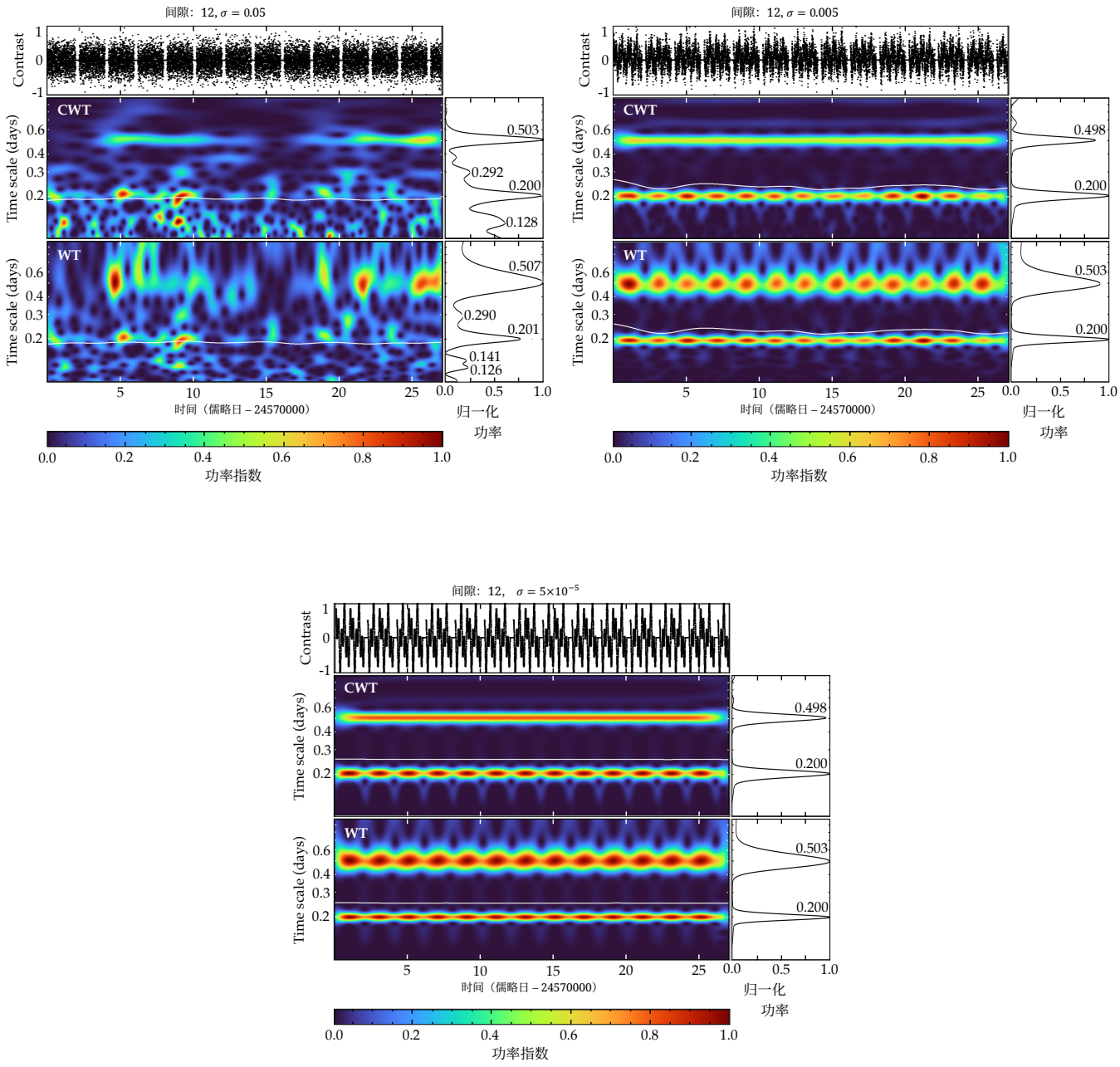

图 A3。 与图 A1相同，但针对具有 12 个间隙的模拟光变曲线 s.

B. 不同周期值对凌日系外行星巡天卫星模拟光变曲线的影响

图B1、B2和B3 分别展示了噪声水平固定为最低值（σ=0.00005）且分别设置3个、6个和12个间隙的凌日系外行星巡天卫星模拟光变曲线。每幅图均展示了三种不同周期对的结果：0.05–0.2天、0.5–1.0天和1.0–5.0天。

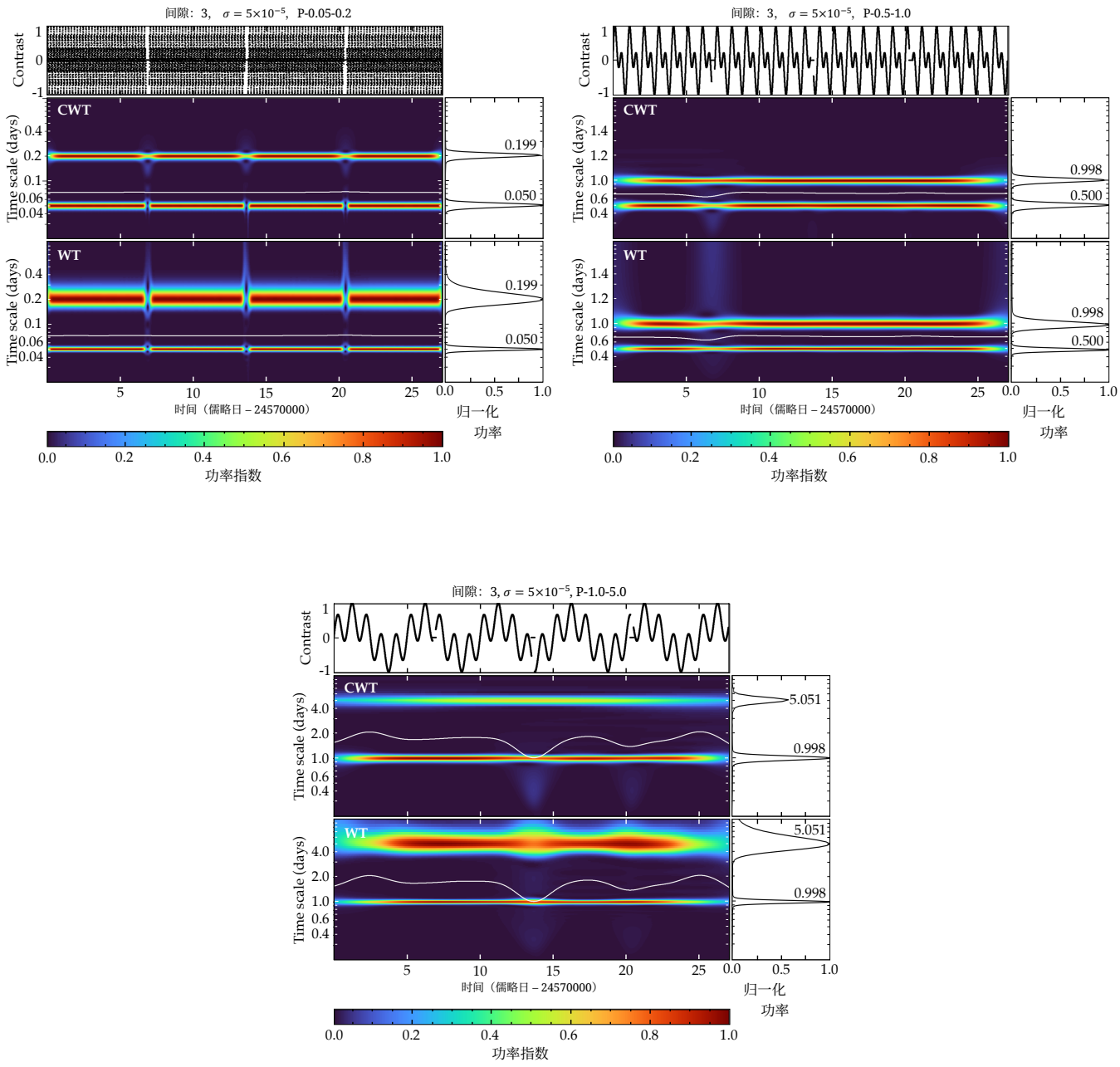

图 B1。 具有 3 个间隙且噪声水平固定为 σ=0.00005 的类凌日系外行星巡天卫星模拟光变曲线。顶部面板显示光变曲线，第二行和第三行分别显示连续小波变换和小波变换局部图。最右侧面板展示相应的全局谱。三个面板分别展示不同周期对的测试结果：0.05-0.2 天、0.5-1.0 天和 1.0-5.0 天。色彩调色板表示归一化功率指数水平，实心白线表示主导周期。

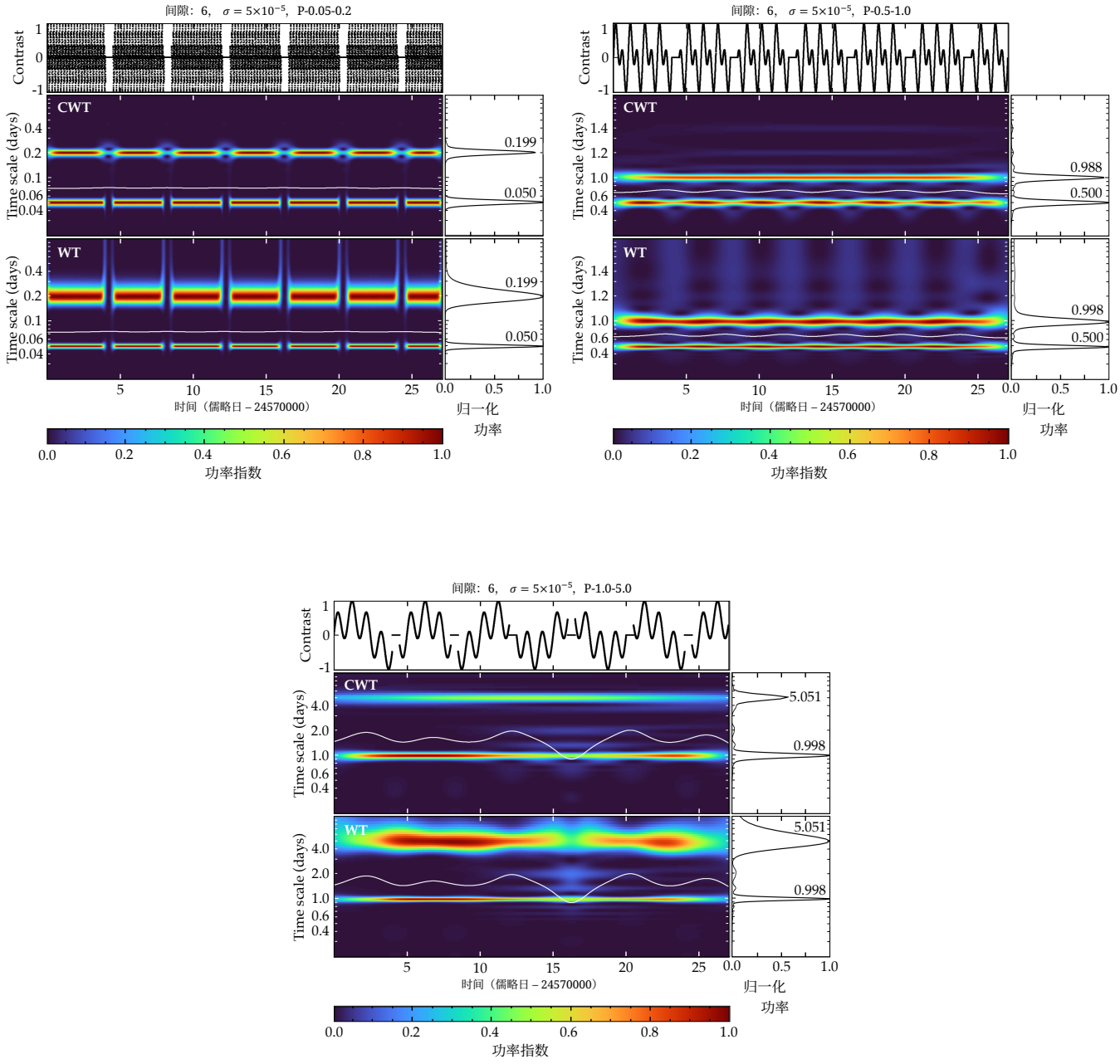

图 B2. 与图 B1相同，但针对模拟的光变曲线，含 6 个间隙 s.

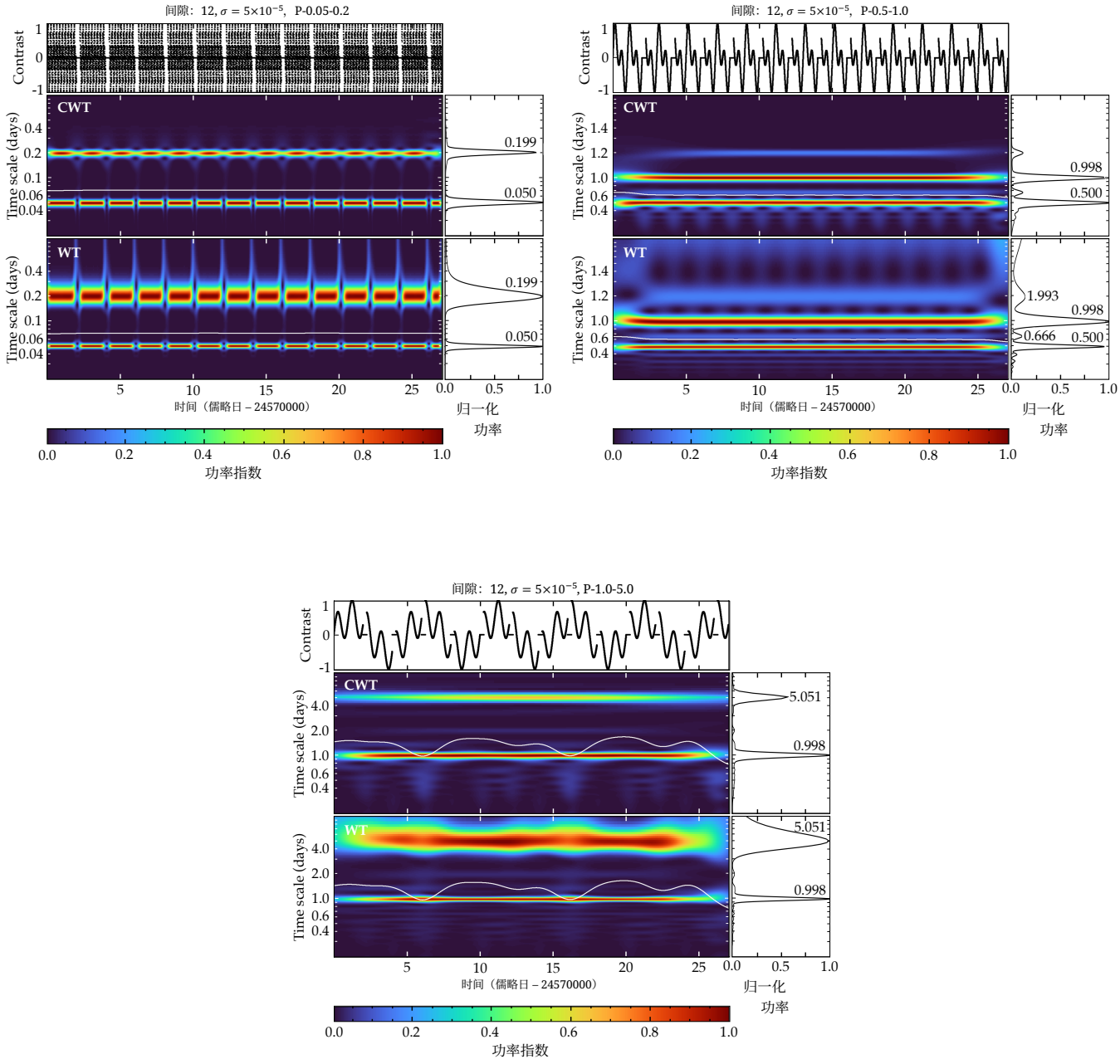

图 B3. 与图 B1相同，但针对具有 12 个间隙的模拟光变曲线 s.