arXiv:2611.32702v1 [physics.optics] 24 Nov 2026

偏振例外点处本征态的非互易态选择性分裂

ZHUOFAN YU,[1,†] SOOJEONGBAEK,[2,†] PUXUAN JIANG,[1] JUNQING LI,[1] TEUN-TEUN KIM,[2,*] XINGGUANG LIU,[1,3,*] 以及 YONGKANG DONG[4,5]

[1]哈尔滨工业大学物理学院，中国哈尔滨 *150001*[2]蔚山大学物理与能源采集储存研究中心，大韩民国蔚山南区大学路 *93* 号，邮编 *44610*[3]黑龙江省先进量子功能材料与传感器件重点实验室，中国哈尔滨 *150001*[4]哈尔滨工业大学激光空间信息国家重点实验室，中国哈尔滨 *150001*[5]哈尔滨工业大学郑州研究院，中国郑州 *450007*

[†]这些作者对本研究的贡献相同。

ttkim@ulsan.ac.kr, Liu_xg@hit.edu.cn

摘要： 非厄米光子系统可经设计呈现例外点（EP），此时特征值与本征态合并。尽管人们主要通过本征值分裂来表征例外点附近的扰动，但对于可调互易性破缺扰动下合并本征态各分支的演化，系统性研究仍较少。在此，我们展示，可调非互易耦合能够在二阶偏振例外点附近引发合并本征态的态选择性分裂。利用时域耦合模理论，我们发现，相应的非对角微扰会在圆偏振基下产生三角哈密顿量。在理想极限下，一个本征态保持固定于例外点态，而另一个则随扰动连续改变方向。在实际散射系统中，残余的反向偏振转换会使名义上固定的分支发生微小偏移，从而形成准钉扎。我们通过数值方法，在一种反射式磁光超表面中展示了这一机制；该超表面在约 582 nm 处支持反射矩阵的圆偏振例外点。全波仿真表明，垂直磁光偏置使一个反射本征态保持在例外点态附近，同时使另一个反射本征态在庞加莱球上可逆地偏移。这种不对称的本征态演化表现为可由磁场调谐的圆二色性反射响应。我们的研究确立了一种在偏振

EPs.

1. 引言

非厄米光子学为描述开放光学系统提供了一个框架，其有效哈密顿量由损耗、增益、辐射和人工调控耦合 [1–4] 共同决定。这类系统的一个定义性特征是例外点（EP），即特征值和本征态同时合并的谱简并 [5–8]。由此产生的平方根本征值拓扑，使传感 [9,10], 、激光 [11], 和模式转换 [12–14] 中出现了反常响应。因此，大多数关于EP附近扰动的研究都集中于合并的特征值如何分裂。然而，伴随发生的本征态演化同样重要，因为它决定了在简并被解除后，如何控制系统的模态或偏振成分。特别是，在可调互易性破缺扰动作用下，例外点本征态的分支分辨演化仍缺乏系统研究。

超表面为研究偏振例外点提供了一个灵活的平台，因为其亚波长超原子能够同时控制相位、振幅、损耗和偏振转换 [15–17]。人们已通过损耗工程、几何不对称性和

共振模耦合 [18–23], 实现了手性吸收 [24–26], 、偏振态控制 [27–29],以及宇称–时间对称性破缺 [30]。利用电控或光控材料响应，人们还开发出了可主动调谐的例外点平台 [31–34]。这类调谐主要用于接近、移动或穿越简并点，并探测其本征值和本征态拓扑。相比之下，例外点解除后对两个本征态分支不等演化过程的主动控制仍不够成熟。

对于对称地改变两个耦合方向的互易扰动，两个本征态通常会从合并态分化为成对的分支。当扰动能够区分两个耦合方向，同时保持一个不变偏振子空间时，则可能产生截然不同的响应。在适当的基底下，这一条件表现为三角有效矩阵，使一个本征态保持不变，而另一个本征态随扰动演化。近期，研究人员在例外亏缺的背景下考察了相关的块三角非厄米结构；在这种结构中，整个本征空间会合并，并在主动机械晶格中表现出选择性动力学 [35, 36]。本文研究与之互补的双态问题：通过扰动解除孤立二阶偏振例外点的简并，并选择性地控制由此产生的本征态分支。

磁光效应为这种分支选择性控制提供了一种物理途径。在静态磁偏置下，旋光介质会产生反对称非对角介电率分量，从而打破时间反演对称性，并产生非互易偏振耦合 [37–42]。不同于互易扰动，这种耦合会以相反符号改变两个方向的转换路径。因此，可以利用其幅值和符号，不仅控制例外点的分裂，还能控制由此产生的本征态演化方向和程度。磁光超表面尤其适合研究这种响应，因为其反射本征态可以直接在庞加莱球上表示和追踪。

本文从理论上识别并通过数值仿真展示了二阶偏振例外点附近由反对称非互易耦合诱导的态选择性本征态分裂。利用时域耦合模理论，我们证明，在选定的手性例外点处，哈密顿量在圆偏振基下呈三角形式。因此，一个本征态保持固定于例外点偏振，而另一个则随非互易扰动连续改变方向。随后，我们将分析扩展至真实散射矩阵，并推导出存在残余反向偏振转换时实现准钉扎的鲁棒性判据。作为一种代表性实现方案，我们设计了一种反射式磁光超表面，可在约 582 nm 处支持反射矩阵的圆偏振例外点。全波仿真表明，改变磁光偏置时，一个反射本征态始终接近例外点态，而另一个则在庞加莱球上可逆地偏移。这种分支选择性本征态演化表现为可连续调谐的圆二色性反射响应。

2. 偏振例外点处的状态选择性本征态分裂

2.1. 例外点周围非互易扰动的最小模型

为隔离互易性破缺如何改变从例外点分叉出的两个本征态分支，我们考虑由以下最小非厄米哈密顿量描述的两个正交偏振共振

$$H_{\mathrm{nr}} = \begin{pmatrix} \omega_x + i\gamma_x & \kappa + i\beta\tilde{g}_B \\ \kappa - i\beta\tilde{g}_B & \omega_y + i\gamma_y \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中， $\omega_j + i\gamma_j$表示模式 $j = x, y$的复频率。我们采用 $e^{i\omega t}$约定，使得 $\gamma_j > 0$ 表示模态损耗。在不存在时间反演对称性破缺时，两个模式通过相等的非对角元 κ互易耦合。磁光扰动会在两个

偏振转换通道中引入幅值相等、符号相反的修正。这里， $\tilde{g}_B$ 被视为一个通用参数，用于设定非互易耦合扰动的强度和符号，而 β 将其转换为模态耦合尺度，因此， $\beta\tilde{g}_B$与 ω_j、 γ_j和 κ一样，单位均为角频率；因此， β的单位由 $\tilde{g}_B$的单位决定。在下文所讨论的超表面中，该项源自旋磁介电张量的反对称非对角分量，其中， $\tilde{g}_B$ 成为式（11）中的无量纲磁光参数，而 β 相应地具有角频率单位。

在 $\tilde{g}_B = 0$处，未扰动参数选取为满足第2.2节推导的二阶手性例外点条件。我们关注的例外点，其合并特征态 $|+\rangle$ 在本文采用的偏振约定下对应左旋圆偏振。另一手性的例外点，其合并特征态 $|-\rangle$ 对应右旋圆偏振，可由例外点条件的另一分支得到。在图1和图2中， $\omega_x + i\gamma_x$、 $\omega_y + i\gamma_y$和 κ 保持为未扰动例外点值，只有扰动参数发生变化；在这些图中， $\tilde{g}_B$ 和 $\tilde{g}$ 按扫描范围内的最大值归一化，因此取值范围为 -1 到1。因此， $\tilde{g}_B = 0$标示例外点，而有限的 $\tilde{g}_B$会解除简并。

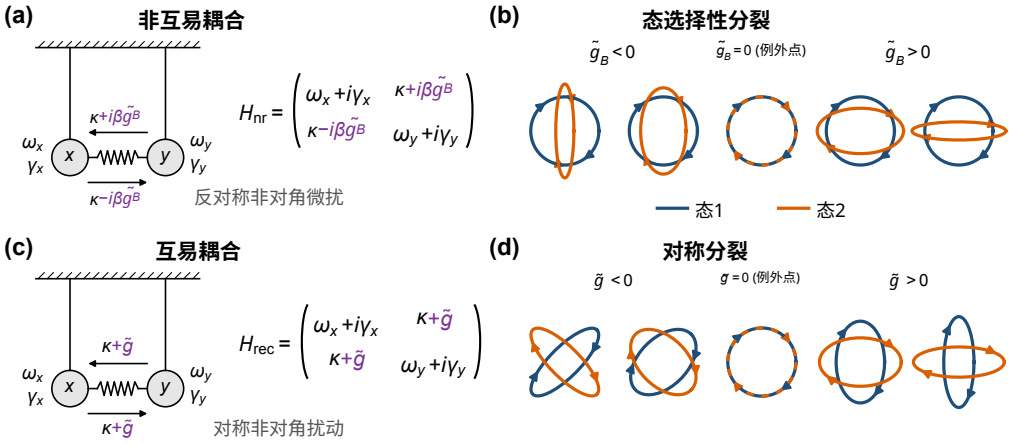


图1. **非互易扰动和互易扰动对例外点本征态影响的比较。非互易扰动会导致态选择性例外点分裂，而互易扰动会使两个本征态对称分裂。(a)**左：两个正交偏振模式 x 和 y的耦合振子示意图，其复频率为 $\omega_{x、y} + i\gamma_{x、y}$，耦合为 κ；箭头表示两个耦合方向，它们分别受到大小相反的修正 $\pm i\beta\tilde{g}_B$。右：非互易扰动哈密顿量 H_{nr}，其中非互易项 $\pm i\beta\tilde{g}_B$ 作为反对称非对角元素进入耦合矩阵。**(b)** 非互易扰动下的本征偏振演化（态选择性分裂）。在 $\tilde{g}_B = 0$ 处，系统位于例外点，两个本征态合并为相同的圆偏振态；当 $\tilde{g}_B$ 偏离零时，态1（蓝色）固定在例外点圆偏振态附近，而态2（橙色）演化为长轴方向相反的椭圆偏振态。**(c)** 左：互易扰动下相同的耦合振子示意图，此时两个耦合方向受到相同的修正 $\tilde{g}$。右：互易扰动哈密顿量 H_{rec}，其中对称耦合扰动 $\tilde{g}$ 以相同形式出现在两个非对角元中。**(d)** 在互易扰动下，两个本征态同时离开例外点，其幅值相等且长轴正交，呈现对称分裂。

在理想的非互易模型中，例外点解除后，两个本征态分支的演化并不相同。一个分支始终精确固定在例外点偏振上，而另一个分支则会持续

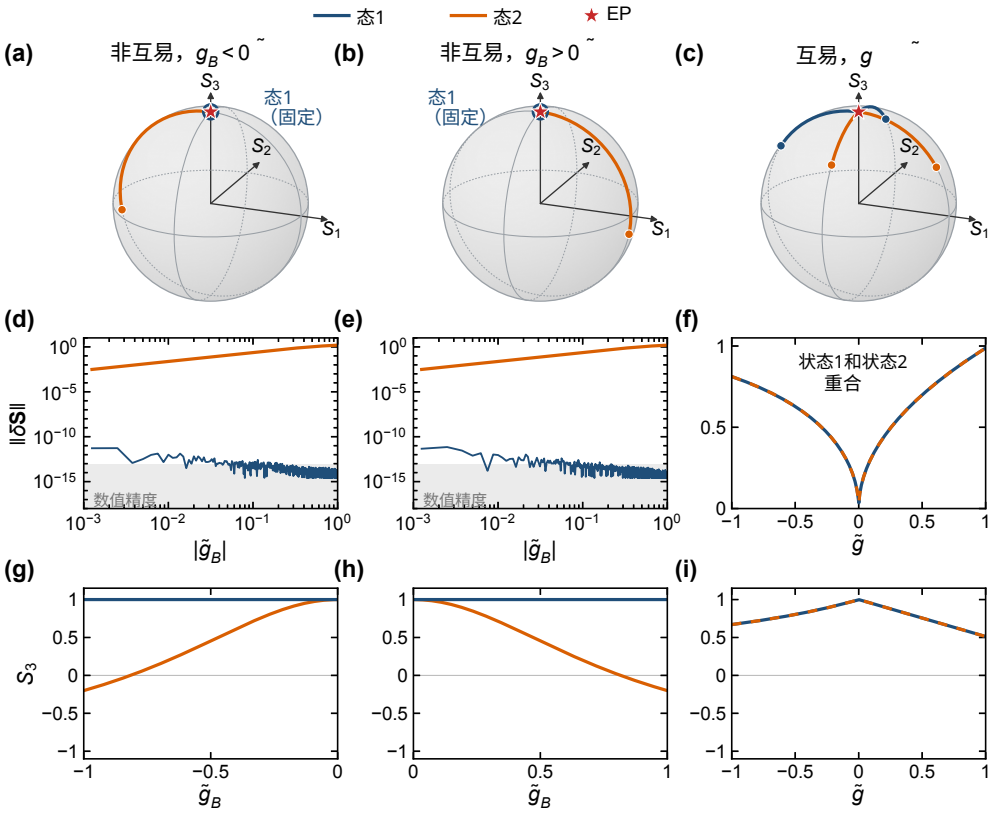


图2. **非互易扰动（$\tilde{g}_B$）和互易扰动（$\tilde{g}$）对本征态的影响比较。(a)–(c)** 两个本征态在庞加莱球上的轨迹；星号标示例外点。**(a)** 对于 $\tilde{g}_B<0$，态1（蓝色）固定在例外点，而态2（橙色）沿球面远离例外点。**(b)** 对于 $\tilde{g}_B>0$，态2的演化相对于 S_3 轴，与负值情形对称。**(c)** 在互易扰动 $\tilde{g}$下，两个本征态对称地离开例外点。**(d)–(f)** 本征态偏离例外点的程度，$\|\delta\mathbf{S}\|$ 随扰动的变化。**(d), (e)** 态1（蓝色）保持在数值精度极限（灰色阴影区域，约为 10^{-13}）；态2（橙色）随 $|\tilde{g}_B|$增大。**(f)** 在互易扰动下，两个本征态到例外点的距离相等。**(g)–(i)** 斯托克斯参数 S_3（圆偏振分量）随扰动的变化。**(g),(h)** 态1保持 $S_3=1$（例外点处为左旋圆偏振）；态2从左旋圆偏振演化至右旋圆偏振，两个面板关于 $\tilde{g}_B=0$互为镜像。**(i)** 在互易扰动下，两个本征态对称地离开例外点。

根据 $\tilde{g}_B$ 的幅值和符号重新定向。我们将这种分支演化不对称的现象称为态选择性分裂。下文中，态1表示固定分支，态2表示可调分支。

作为比较，我们考虑一种具有代表性的互易扰动，该扰动以相同方式改变两个耦合通道，

$$H_{\mathrm{rec}}=\begin{pmatrix}\omega_x+i\gamma_x & \kappa+\tilde{g}\\ \kappa+\tilde{g} & \omega_y+i\gamma_y\end{pmatrix}. \tag{2}$$

此处，$\tilde{g}$ 是一个与 κ具有相同单位（角频率）的互易耦合扰动。A t

$\tilde{g} = 0$，该模型从与 H_{nr}相同的未扰动异常点出发。对于有限的 $\tilde{g}$，两个非对角元仍保持相等。该扰动不会保留不变的本征态分支，两个本征态以成对的方式偏离异常点。

图1示意性地说明了非对角微扰的对称性如何决定本征态演化。在非互易模型中，微扰以相反的符号进入两个耦合通道（图1(a)）。从 $\tilde{g}_B = 0$处合并的左旋圆偏振态出发，态1保持固定在例外点偏振，而态2演化为椭圆偏振态。反转 $\tilde{g}_B$ 的符号会反转可调偏振态的方向，同时保持固定分支不变（图1(b)）。相比之下，具有代表性的互易扰动对两个耦合通道施加相同的调制（图1(c)）。随后，两个本征态均通过成对的偏振变化偏离例外点，且没有任何分支保持固定（图1(d)）。

为量化每个本征态相对于例外点偏振的位移，我们采用相应归一化斯托克斯矢量之间的欧几里得距离，

$$\|\delta\mathbf{S}\| = \sqrt{\left(S_1 - S_{1,\mathrm{EP}}\right)^2 + \left(S_2 - S_{2,\mathrm{EP}}\right)^2 + \left(S_3 - S_{3,\mathrm{EP}}\right)^2}. \tag{3}$$

图2对图1中示意性描绘的三种情况进行了定量比较。对于 $\tilde{g}_B < 0$，态1始终精确地固定在例外点偏振，而态2则沿庞加莱球的一侧移开（图2(a)）。态2的位移随着$|\tilde{g}_B|$增大而增加，而态1的 $\|\delta\mathbf{S}\|$ 小幅非零值仍处于数值精度下限（图2(d)）。相应的 S_3 变化显示了态2从左旋圆偏振向椭圆偏振态的演化（图2(g)）。

对于 $\tilde{g}_B > 0$，态1 保持固定，而态2 在庞加莱球上沿相反轨迹演化（图2(b)）。位移幅值和 S_3 演化在 $\tilde{g}_B$ 反转下呈对称性（图2(e)和图2(h)）。因此，$|\tilde{g}_B|$ 控制偏振位移的范围，而 $\tilde{g}_B$ 的符号决定其方向。

对于具有代表性的互易扰动，两个本征态均沿成对轨迹离开例外点（图2(c)），并在 $\|\delta\mathbf{S}\|$ 和 S_3 方面表现出相等的变化（图2(f)和图2(i)）。这些响应之间的对比确立了非互易扰动的态选择特性。下面我们推导出导致这种精确固定的三角矩阵结构。

2.2. 态选择性分裂的解析起源

态选择性响应可追溯至将非互易扰动施加于手性例外点时得到的矩阵结构。我们定义复模态频率的平均频率 $\Omega = (\omega_x + i\gamma_x + \omega_y + i\gamma_y)/2$ 和半差 $\Delta\Omega = (\omega_x + i\gamma_x - \omega_y - i\gamma_y)/2$，因此式（1）可写为

$$H_{\mathrm{nr}} = \bar{\Omega} I + \begin{pmatrix} \Delta\Omega & \kappa + i\beta\tilde{g}_B \\ \kappa - i\beta\tilde{g}_B & -\Delta\Omega \end{pmatrix}. \tag{4}$$

在 $\tilde{g}_B = 0$ 处，当 $(\Delta\Omega)^2 + \kappa^2 = 0$ 时，两个特征值合并。我们选择手性分支$\Delta\Omega = -i\kappa$，在该分支下，合并特征态为 $|\psi_{\mathrm{EP}}\rangle = |+\rangle = (1,\ i)^{\mathsf{T}}/\sqrt{2}$，按照我们的约定对应于左旋圆偏振。相反的分支 $\Delta\Omega = +i\kappa$ 则产生右旋圆偏振对应态，其合并特征态为 $|-\rangle$。

在左旋圆偏振 exceptional point 处，将式（4）变换到圆偏振基 $(|+\rangle,\ |-\rangle)$ 后得到

$$H_{\pm} = \bar{\Omega} I + \begin{pmatrix} -\beta\tilde{g}_B & -2i\kappa \\ 0 & \beta\tilde{g}_B \end{pmatrix}. \tag{5}$$

消失的左下矩阵元定义了一个由 $|+\rangle$ 张成的不变一维子空间。因此，一个本征态不受扰动影响，$|\psi_{\mathrm{pin}}\rangle = |+\rangle$；而另一个本征态在略去归一化因子后可写为

$$|\psi_{\mathrm{tun}}\rangle = |+\rangle + \frac{i\beta\tilde{g}_B}{\kappa}|-\rangle. \tag{6}$$

方程（6）表明，$\tilde{g}_B$ 的幅值控制相反圆偏振分量的混入程度，而其符号则会反转所得偏振态的取向。因此，可调分支通常是椭圆偏振叠加态，而非具有相反旋向的纯态。相比之下，在理想模型中，无论 $\tilde{g}_B$ 取何值，固定分支都始终精确处于原始左旋圆偏振 exceptional point 态。

通过在同一未扰动例外点处变换方程（2），可以看出它与互易扰动的区别。在圆偏振基中，

$$H_{\mathrm{rec},\pm} = \bar{\Omega} I + \begin{pmatrix} 0 & -i\,(2\kappa + \tilde{g}) \\ i\tilde{g} & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

对于 $\tilde{g} \neq 0$，两个非对角元均为非零。因此，$|+\rangle$子空间不再保持不变，两个本征态也都不再固定。直接比较表明，态选择性分裂并非仅由例外点解除所致，而是源于反对称扰动作用于两个耦合通道后形成的三角结构。

$|+\rangle$的精确固定依赖于方程（5）中左下元素为零。实际的散射矩阵通常仍保留有限的残余反向偏振转换通道。在第 2.3 节中，我们将考察这种偏离理想三角结构的情况如何使精确固定转变为准钉扎，并推导态选择性响应保持稳健的条件。

2.3. 反射矩阵表征与态选择性分裂的鲁棒性

在物理实现中，必须将由模态哈密顿量推导出的本征态机制与偏振分辨散射响应联系起来。第2.2节中的有效哈密顿量描述两个偏振共振的内部振幅，而实验上可测量的量是联系入射与反射偏振态的反射矩阵。这些矩阵是不同的算符，不一定具有相同的特征值。然而，在孤立的双模共振附近，时域耦合模理论会将内部模态动力学映射到散射响应 [43]。如补充说明1所述，在理想极限下，圆偏振基反射矩阵具有类似的三角结构，从而保留固定的偏振本征态。

在左旋圆偏振反射矩阵 exceptional point 附近，我们将局部圆偏振基响应写为

$$R_{\mathrm{c}} = r_0 I + \begin{pmatrix} \Delta r_B/2 & b \\ \xi & -\Delta r_B/2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

其中，$r_0 = (r_{++} + r_{--})/2$ 是同偏振反射系数的公共值（平均值），$\Delta r_B = r_{++} - r_{--}$ 是两个同偏振圆偏振反射通道之间的差值，$b = r_{+-}$ 是与 Jordan 耦合相关的偏振转换通道，而 $\xi = r_{-+}$ 表示残余的反向偏振转换。公共项 $r_0 I$ 使两个反射本征值发生相同的偏移，因此不会影响本征态。

在理想的未扰动异常点处，$\Delta r_B = \xi = 0$ 而 $b \neq 0$，两个本征态合并为$|+\rangle$。理想的非互易扰动会产生有限的 Δr_B，同时保持 $\xi = 0$。此时本征值简并被解除，但反射矩阵仍保持三角形式。因此，

受扰动后的系统不再处于例外点，尽管 $|+\rangle$仍是一个精确的本征态。另一个本征态则获得有限的 $|-\rangle$分量，并偏离原来的例外点偏振。

一个现实的反射矩阵通常包含一个较小但非零的 ξ，其来源可能是非共振背景散射、多重反射，或两个偏振通道隔离不完全。为确定这一残余转换如何改变态选择性响应，我们将右本征态写为 $|\psi\rangle \propto |+\rangle + \eta|-\rangle$。代入本征值方程可得 $b\eta^2 + \Delta r_B \eta - \xi = 0$，其两个解为

$$\eta_{\pm} = \frac{-\Delta r_B \pm \sqrt{(\Delta r_B)^2 + 4b\xi}}{2b}. \tag{9}$$

方程（9）表明，本征态响应由非互易通道分裂 Δr_B 与残余泄漏 ξ之间的竞争所决定。当 $|b\xi| \gtrsim |\Delta r_B|^2$时，残余通道会显著扰动两个分支。在极限情况下 $\Delta r_B \to 0$，两个本征态满足 $\eta_{\pm} \simeq \pm\sqrt{\xi/b}$，并以相当的振幅偏离例外点偏振。

相比之下，当 $|b\xi| \ll |\Delta r_B|^2$时，两个解分离为参数上不同的响应： $\eta_{\text{q-pin}} \simeq \xi/\Delta r_B$，以及 $\eta_{\text{tun}} \simeq -\Delta r_B/b - \xi/\Delta r_B$。第一分支仅包含很小的反手性分量，因此仍准钉扎在原始例外点偏振附近。第二分支主要由 $-\Delta r_B/b$ 所支配，并经历显著更大的偏振演化。因此，精确的三角形结构对于态选择性分裂而言是充分条件，但并非必要条件；只要有限的反向转换通道相对于诱导的通道分裂保持较小，就可以容忍该通道的存在。

为直观展示这一交叉转变，我们定义本征态选择性因子

$$A = \frac{\|\delta\mathbf{S}_{\text{tun}}\| - \|\delta\mathbf{S}_{\text{q-pin}}\|}{\|\delta\mathbf{S}_{\text{tun}}\| + \|\delta\mathbf{S}_{\text{q-pin}}\|}, \tag{10}$$

其中，两条分支通过从理想三角形极限连续延拓来加以确定。图 3 将A 映射到归一化参数平面（$|\Delta r_B/b|$， $|\xi/b|$）中。接近 $A = 0$ 的数值表示本征态位移相当，而 $A \to 1$ 则表示强烈的状态选择性响应。曲线 $|\xi/b| = |\Delta r_B/b|^2$ 对应于 $|b\xi| = |\Delta r_B|^2$，并标志着泄漏主导区与准钉扎区之间的交叉转变。由于本征态响应在跨越该曲线时连续演化，因此不应将其解读为相边界。

下一节所研究的全波超表面通常具有 $\xi \neq 0$，因此，理想哈密顿量所预测的精确钉扎，在其反射响应中被准钉扎所取代。然而，当 $|b\xi| \ll |\Delta r_B|^2$时，这种状态选择性演化仍然具有稳健性。接下来，我们将在磁光超表面中确定相应的反射矩阵 exceptional point，并考察其在有限旋磁扰动下的演化。

3. 磁光超表面中的态选择性本征态分裂

3.1. 超表面设计与反射矩阵例外点的识别

根据第2.3节建立的反射矩阵模型，我们设计了一种反射型磁光超表面，该超表面在互易极限下支持左旋圆偏振反射矩阵 exceptional point， $\tilde{g}_B = 0$。如图4(a)和4(b)所示，该超表面由上层铝纳米棒阵列 [44],（每个单元胞包含一个L形棒和一根分离直棒）、取代铁石榴石磁光腔 [45–49], 以及底部银镜 [50]组成。晶格周期为 $p = 300$nm。铝纳米棒的宽度为 $w = 50$ nm、厚度为 $t = 30$ nm，长度分别为 $L_1 = 75$ nm、$L_2 = 110$ nm和 $L_3 = 86$ nm。磁光腔的厚度为 $d = 2400$ nm，其相对介电常数张量描述为

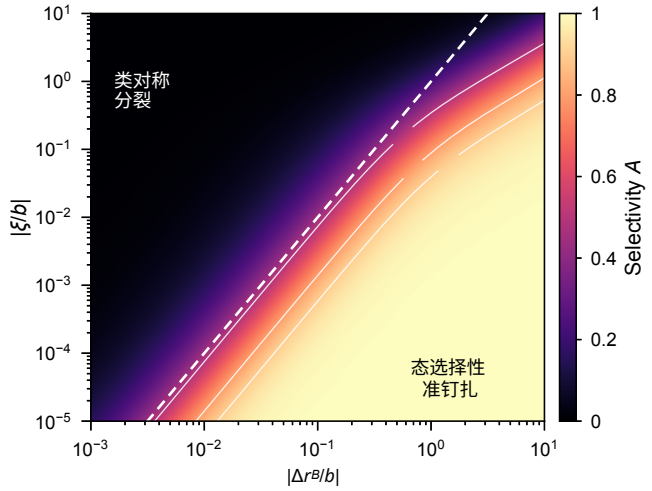


图 3. **二阶反射矩阵例外点附近的本征态选择性**。颜色表示式 (10) 中的选择性因子 A，其中 $\|\delta\mathbf{S}_{\text{q-pin}}\|$ 和 $\|\delta\mathbf{S}_{\text{tun}}\|$ 分别是准钉扎本征态和可调本征态偏离例外点本征态的距离，根据式 (9) 计算得出。坐标轴分别为归一化通道分裂 $|\Delta r_B/b|$ 和残余泄漏 $|\xi/b|$；细等值线标示 $A = 0.5$、0.8 和 0.9。虚线 $|b\xi| = |\Delta r_B|^2$ 标示泄漏主导区与准钉扎区之间的交叉转变。该图针对实数正值 b、Δr_B 和 ξ 绘制，即对应于同相的 Δr_B^2 和 $4b\xi$；在准钉扎区内，$|b\xi| \ll |\Delta r_B|^2$、$A$ 对该相对相位不敏感，而在交叉转变附近及其上方，等值线则取决于该相对相位。

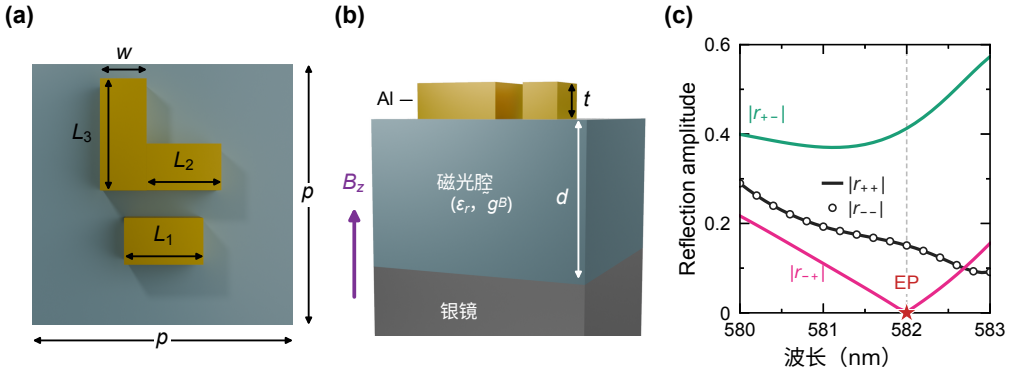


图 4. **超表面结构示意图和圆偏振反射光谱**。（**a**）单元胞俯视图，显示上层铝杆阵列；w、L_1 L_3 p –分别表示杆宽、杆长和晶格周期。（**b**）层叠结构侧视图，由上层铝杆、中间磁光腔和底部银镜组成，在垂直磁场 B_z 作用下引入磁光非互易耦合；t 和 d 分别为铝杆和腔体的厚度。（**c**）超表面在 580–583 nm 范围内的圆偏振反射振幅：$|r_{++}|$（黑色曲线）、$|r_{--}|$（空心圆）、$|r_{+-}|$（绿色曲线）和 $|r_{-+}|$（品红色曲线）；在 582 nm 处（红色星号、垂直虚线），交叉偏振反射系数 r_{-+} 趋近于零，对应于系统达到一个例外点（EP）。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & i\tilde{g}_B & 0 \\ -i\tilde{g}_B & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_r \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_r = 5.5. \tag{11}$$

垂直于超表面平面的磁偏置会产生面内介电常数的反对称分量。在全波仿真中，所产生的非互易扰动直接用 $\tilde{g}_B$参数化，其符号随磁偏置方向的反转而反转。由于在该模型中 ε_r 和 $\tilde{g}_B$ 均为实数，式（11）中的张量是厄米的， $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\dagger}$，因此磁光层本身是无损的；超表面的损耗源于铝纳米棒、银镜和辐射。

我们首先确定未扰动的反射矩阵 exceptional point，其位置为 $\tilde{g}_B = 0$。对于每个波长，将仿真的同偏振和交叉偏振反射系数组装成式（8）中引入的圆偏振基反射矩阵 R_{c}，其中 $r_{\alpha\beta}$ 表示从入射偏振β 到出射偏振 α的反射。在互易极限下，仿真的同偏振通道满足 $r_{++} = r_{--}$，其精度在数值精度范围内。图 4(c) 中的反射光谱显示，在 582 nm 附近， r_{-+} 受到强烈抑制，而 r_{+-} 仍保持有限值。因此，反射矩阵趋近于与第 2.3 节所讨论的左旋圆偏振 exceptional point 相关的上三角结构。

然而，抑制单一转换通道本身并不足以确立一个例外点（EP）。因此，我们考察完整复反射矩阵的特征值和本征态。图5(a)显示，两个反射本征值的幅值和相位在 $\lambda \simeq 582$ nm附近趋于一致，表明发生了复特征值聚并。在相同的波长区间内，两个反射本征态在庞加莱球上彼此接近，并在左旋圆偏振极点附近趋于一致（图5(b)）。图5(c)中的偏振椭圆更直接地展示了它们的聚并。将归一化本征态之间的重叠度定义为 $C = |\psi_1|\psi_2|$，我们发现， C 从580.8 nm处的0.48增加到最接近例外点的采样波长582.0 nm处的0.99，随后在583.2 nm处再次降至0.51。因此，复特征值与偏振本征态的同时聚并确定了一个位于582 nm附近的二阶左旋圆偏振反射矩阵 exceptional point。补充说明6进一步验证了该点附近本征值分裂所预期的平方根标度。

3.2. 旋磁扰动下的态选择性反射本征态演化

在第 3.1 节确定未扰动的反射矩阵 exceptional point 后，我们现在考察其两个本征态分支在有限旋磁扰动下如何演化。几何结构和工作波长固定在最接近该异常点的采样点，即 $\lambda = 582.0$ nm，同时改变 $\tilde{g}_B$。因此， $\tilde{g}_B = 0$表示未扰动异常点，而任何有限的 $\tilde{g}_B$ 都会解除本征值简并。对于每个 $\tilde{g}_B$值，我们对完整的复反射矩阵进行对角化，并从它们在 $\tilde{g}_B = 0$处的共同状态开始，连续追踪这两个分支。我们将位移较小的分支标记为态1，将可调分支标记为态2。

图6(a)和图6(b)分别展示了负值和正值 $\tilde{g}_B$时相应本征态在庞加莱球上的轨迹。对于 $\tilde{g}_B < 0$，态1仍接近原始的 LCP EP偏振，而态2则偏离左旋圆偏振，沿球面一侧演化为椭圆偏振态（图6(a)）。反转 $\tilde{g}_B$ 的符号后，态1几乎不变，但态2转向相反的轨迹（图6(b)）。因此，正负号并不代表不同的物理机制：幅值 $|\tilde{g}_B|$ 控制本征态位移的程度，而 $\tilde{g}_B$ 的符号则决定其在庞加莱球上的方向。

图6(c)中使用式(3)定义的斯托克斯矢量位移$\|\delta\mathbf{S}\|$ 对这种分支选择性演化进行了量化。在整个模拟范围内，态1的位移始终较小，而态2的位移则随 $|\tilde{g}_B|$迅速增大。与理想三角哈密顿量中完全固定的状态不同，在全波

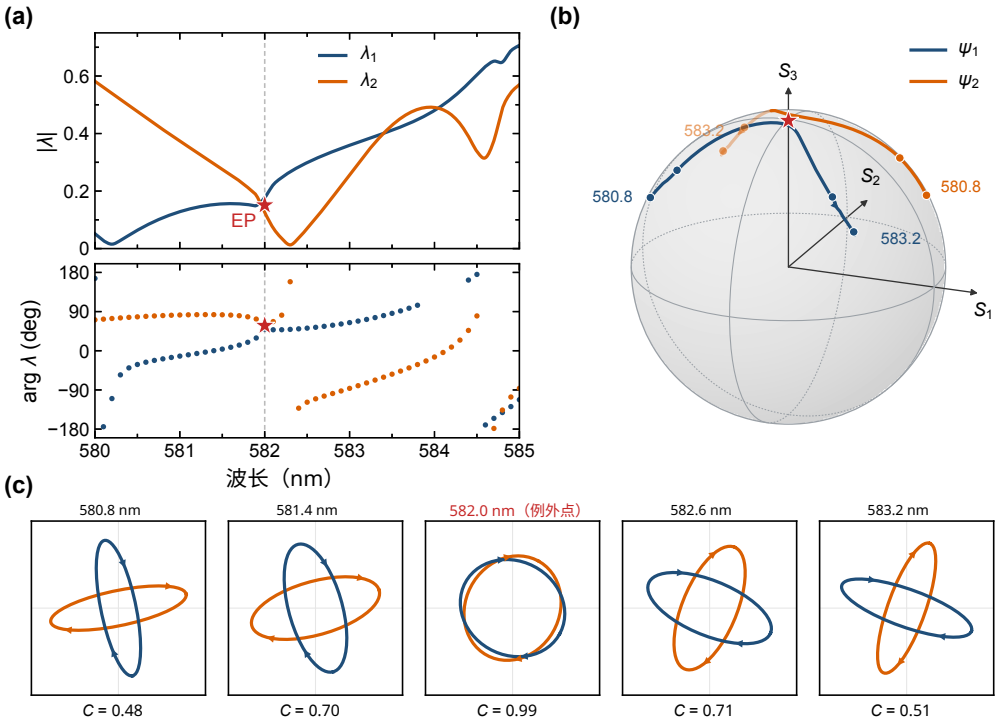


图5。**反射矩阵特征值和本征态随波长的演化及例外点的确定**。（**a**）两个特征值的幅值 $|\lambda|$（上图，线）和相位 $\arg\lambda$（下图，点）随波长的变化。在582 nm（红色星号、竖直虚线）处，两个特征值的幅值和相位相交，标志着特征值聚并；λ_1 和 λ_2 分别表示特征值1和特征值2；相同颜色表示始终属于同一特征值对（蓝色：λ_1、$|\psi_1$；橙色：λ_2、$|\psi_2$）。（**b**）当波长从580。8 nm扫描至583。2 nm时，归一化本征态 $|\psi_1$（蓝色）和 $|\psi_2$（橙色）在庞加莱球上的轨迹（标出了端点）；点表示（c）中所示的五个波长，远端半球上的线段以淡化方式绘制。在例外点处，两个本征态在北极（左旋圆偏振）附近汇聚，以红色星号标记。（**c**）两个本征态（蓝色和橙色）在五个代表性波长（580。8、581。4、582。0、582。6、583。2 nm）下的偏振椭圆。两个偏振态的重叠度通过 $C = |\psi_1|\psi_2|$进行评估。在例外点（582 nm）处，两个本征态发生重叠，并且都趋近于圆偏振（$C = 0$。99）；远离例外点时，重叠度降低。

计算中，态1表现出小但有限的位移。这一行为与第2.3节推导的准钉扎区相符：残余的反向转换通道会对名义上固定的分支产生微弱扰动，而可调分支则主要由旋光诱导的通道分裂控制。

图 6(d) 和 6(e) 中的偏振椭圆直观呈现了相同的演化过程。在 $\tilde{g}_B = 0$ 处，两个本征态几乎合并，其重叠度 $C = |\psi_1|\psi_2| = 0$。99。随着 $\tilde{g}_B$ 从 0 变化至 −0。02，态1始终接近 LCP，而态2的偏振逐渐呈现更明显的椭圆性，使重叠度降至 $C = 0$。83。当 $\tilde{g}_B$ 增大至 +0。02 时，也会出现类似的下降，但态2的长轴方向则朝相反方向演化。重叠度 C 量化了两个本征态之间的分离程度，而各自的 $\|\delta\mathbf{S}\|$ 值则区分了准钉扎分支和可调分支。

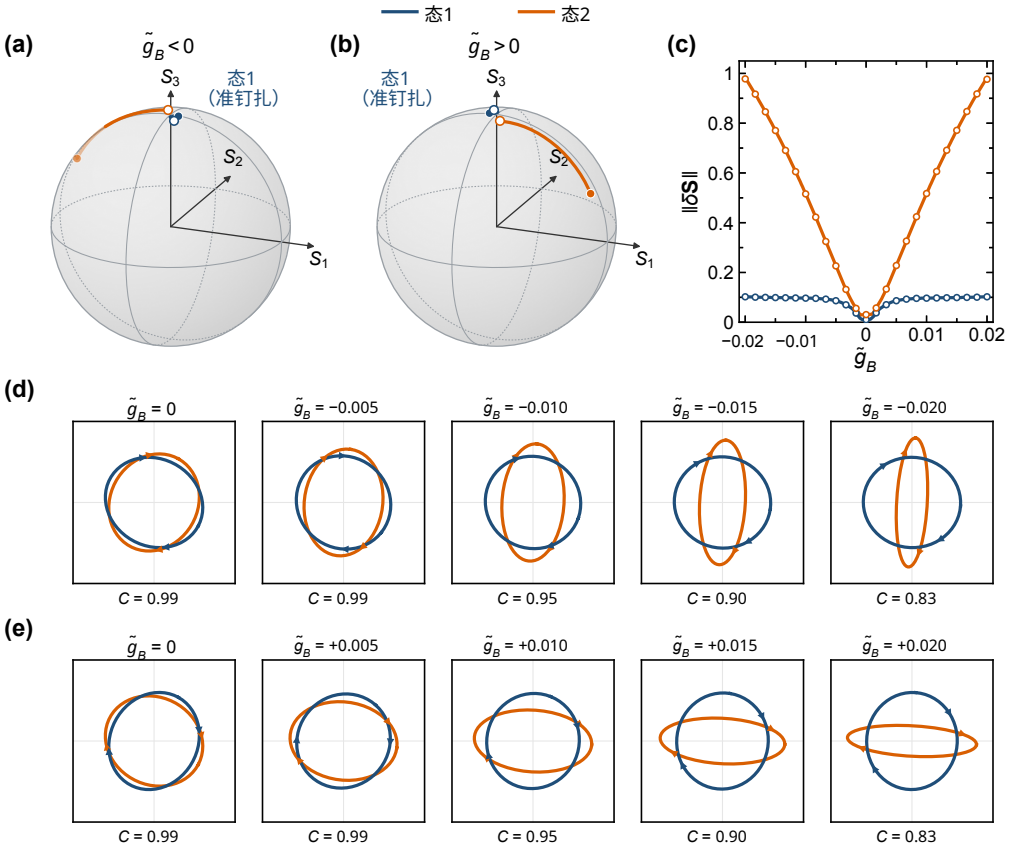


图6。 $\tilde{g}_B \in [-0.02,\ +0.02]$。（**a**）对于 $\tilde{g}_B < 0$，庞加莱球上的本征态轨迹；空心圆表示起点，实心圆表示终点。态1固定在北极附近（左旋圆偏振），而态2沿球面向下迁移。（**b**）对于 $\tilde{g}_B > 0$，庞加莱球上的本征态轨迹；空心圆表示起点，实心圆表示终点。态1仍固定在左旋圆偏振处，而态2的轨迹相对于负值情形关于 S_3 轴呈镜像对称。（**c**）两个本征态到例外点的欧几里得距离 $\|\delta\mathbf{S}\|$ 与 $\tilde{g}_B$的关系：态1（蓝色）保持较小（$\lesssim 0.1$，准钉扎），而态2随 $|\tilde{g}_B|$单调增加。（**d**）、（**e**）负值和正值 $\tilde{g}_B$（$\tilde{g}_B = 0,\ \pm0.005,\ \pm0.010,\ \pm0.015,\ \pm0.020$）下五个代表性点处的本征偏振椭圆及重叠度 C；C 从0.99（例外点）降至0.83。

因此，全波结果再现了反射矩阵模型的核心预测。对初始调谐至手性例外点的系统施加旋磁扰动后，会产生不均等的本征态演化：其中一个反射本征态仍准钉扎在例外点偏振附近，而另一个则受到 $\tilde{g}_B$ 的幅值和符号的连续调控。

3.3. 磁可调反射圆二色性

第3.2节讨论的选择性本征态演化，伴随着对左旋圆偏振和右旋圆偏振入射的反射响应之间一种可直接观测的差异。这种强度级响应并不测量反射本征态本身，而是由于旋磁扰动对反射矩阵的圆偏振通道施加了不等的调制。

图7(a)显示了 $\tilde{g}_B$ 在 $\lambda = 582.0$ nm处，四个圆基反射系数的幅值随 $\tilde{g}_B \in [-0.02, +0.02]$, 变化的情况。在整个区间内， $|r_{-+}|$ 残余的反向转换系数始终较小，而 $|r_{+-}|$ 仅发生微弱变化。相比之下，同偏振系数 $|r_{++}|$ 和 $|r_{--}|$ 呈现出显著且方向相反的变化。具体而言，它们的响应满足近似关系 $|r_{++}(\tilde{g}_B)| \simeq |r_{--}(-\tilde{g}_B)|$，表明反转旋磁偏置会交换两个圆偏振输入通道的主导响应。

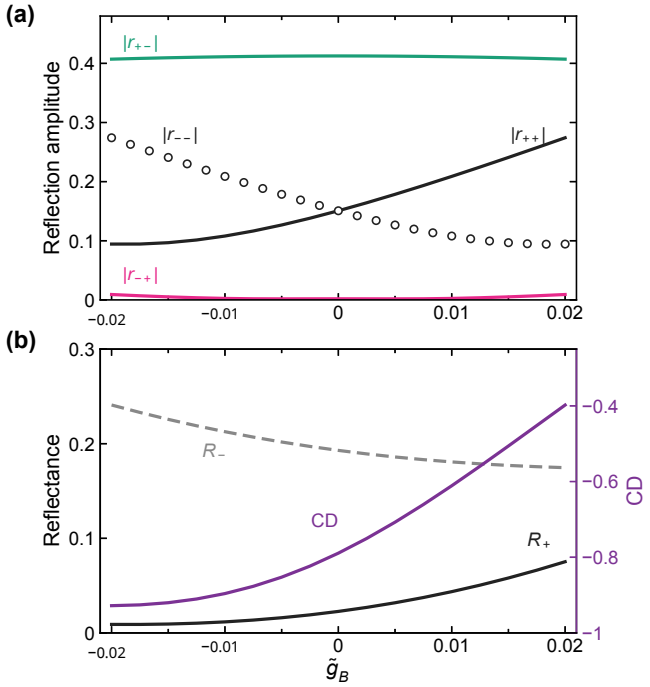


图 7. **在** $\tilde{g}_B \in [-0.02, +0.02]$**. (a)** 反射矩阵元 $|r_{++}|$（黑线）、 $|r_{--}|$（空心圆）、 $|r_{+-}|$（绿色）和 $|r_{-+}|$（品红色）随 $\tilde{g}_B$ 的变化： $|r_{-+}|$在整个范围内都很小， $|r_{++}|$和 $|r_{--}|$随 $\tilde{g}_B$ 分裂，而 $|r_{+-}|$几乎没有变化。**(b)** 左旋圆偏振反射率 R_+（黑色实线）、右旋圆偏振反射率 R_-（灰色虚线）以及圆二色性 CD（紫色，右轴）随 $\tilde{g}_B$ 的变化；CD 单调地从 ~ -0.9 变化至 ~ -0.4。

对于入射的左旋圆偏振波和右旋圆偏振波，总反射率分别为 $R_+ = |r_{++}|^2 + |r_{-+}|^2$ 和 $R_- = |r_{--}|^2 + |r_{+-}|^2$。我们用反射圆二色性来量化二者的差异

$$\mathrm{CD} = \frac{R_+ - R_-}{R_+ + R_-}. \tag{12}$$

如图 7(b)所示，同偏振圆通道的分裂使 R_+ 和 R_- 均产生连续变化，并在模拟区间内将 CD 从约 -0。9 调谐至 -0。4。负号表示根据本文采用的约定，RCP 的反射强于 LCP。

CD 在 $\tilde{g}_B = 0$处已经具有有限值，因为未扰动手性异常点包含强烈不对称的圆偏振转换， $r_{-+} \simeq 0$ 而 r_{+-} 仍保持有限。因此，CD 响应不必关于 $\tilde{g}_B = 0$呈反对称。旋磁扰动叠加在这一结构性散射背景之上，通过可逆地分裂 r_{++} 和 r_{--}，从而提供

对反射圆二色性的连续磁控。扩展的有效参数扫描显示，在更大的 $|\tilde{g}_B|$ 下，CD 也可以穿过零点并反转符号（补充图 S2）。这一扩展扫描展示了完整的调谐趋势，不应被解读为特定石榴石在 582 nm 处的本征旋光性。在实践中，可以通过增加磁光相互作用长度、利用反射构型的双程几何结构、引入谐振腔增强，或将例外点重新调谐至磁光品质因数更高的波长范围，来获得相当的有效扰动。

这些结果将本征态层面的机制与可测量的偏振选择性响应联系起来。造成一个反射本征态准钉扎、同时使另一个本征态偏转的同一非互易扰动，也会在左旋圆偏振和右旋圆偏振反射率之间产生可逆的不平衡。因此，该超表面将手性例外点附近的态选择性分裂转化为可主动调谐的反射圆二色性。

4. 结论

我们从理论上确认并通过数值模拟展示了二阶例外点附近由反对称非互易耦合引起的态选择性本征态响应。在理想的双模描述中，非互易非对角扰动会将手性基底下的哈密顿量变换为上三角形式，使一个本征态保持固定于例外点偏振，而另一个本征态则随扰动连续转向。在实际的反射式超表面中，残余交叉偏振泄漏会使精确钉扎松弛为准钉扎；但当磁光效应诱导的圆偏振通道分裂占主导并超过残余泄漏时，分支选择性响应仍然存在。

作为一种具有代表性的实现方案，我们设计了一种背镜式磁光超表面，可在约 582 nm 处支持圆偏振反射矩阵 exceptional point。全波仿真表明，垂直磁场会产生预测的态选择性响应：一个反射本征态保持接近该例外点的圆偏振态，而另一个反射本征态则会随磁光系数的幅值和符号，在庞加莱球上发生可逆偏移。同一非互易扰动会分裂共偏振圆反射通道，并将本征态层面的不对称性转化为可由磁场调谐的反射圆二色性。

本研究聚焦于非互易扰动诱导的态选择性分裂机制，而非优化某一特定磁光材料平台。这些结果揭示了一种非互易途径，可在支持反对称耦合的双模非厄米平台中实现对例外点处本征态的选择性控制，有望应用于有源手性超表面、磁重构偏振器件以及时间反演破缺光子系统。

5. 方法

5.1. 数值模拟

所有电磁模拟均基于有限元法（FEM），并使用 COMSOL Multiphysics 的波动光学模块进行。沿 x 和 y 方向施加 Floquet周期性边界条件，以模拟无限周期阵列。在模拟域上方和下方沿 z 方向设置完美匹配层（PML），以吸收出射波并抑制数值反射。

5.2. 材料参数

铝杆阵列的光学常数取自 Rakić 1995 模型 [44]；银镜的光学常数取自 Johnson & Christy 1972 实验数据集 [50]。磁光腔层被建模为旋光介质 [45]，其相对介电常数张量由式（11）给出，其中 $\varepsilon_r = 5.5$，且无量纲磁光系数

$\tilde{g}_B$ 由外加垂直磁场 B_z控制。为使磁光参数与常见掺杂铁石榴石材料的实际幅值保持一致 [46–49],，正文模拟采用 $\tilde{g}_B \in [-0.02, +0.02]$。扩展扫描 $|\tilde{g}_B| \le 0.1$ 仅用于展示完整的本征态演化趋势，可将其理解为强有效旋光性、富铋石榴石共振响应或腔增强下等效的非互易扰动。旋光模型的详细信息、掺杂铁石榴石的 $\tilde{g}_B$ 文献值以及扩展扫描均见补充说明2。

5.3. 反射矩阵与本征态分析

对于每个波长以及每个 $\tilde{g}_B$，将 x-和 y-偏振平面波正入射到超表面上，并利用模拟得到的反射S参数构建 2×2 反射琼斯矩阵 R；幺正变换 $R_c = U^\dagger R U$ （其中 $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{smallmatrix}\right)$）将其变换到圆偏振基（左旋圆偏振/右旋圆偏振），从而得到 R_c的四个矩阵元r_{++}、r_{+-}、r_{-+}、r_{--}。其中，|+（|–）表示实验室坐标系琼斯矢量（1，$\pm i$）$^\mathsf{T}/\sqrt{2}$，对于沿 $-z$传−播的入射波，在 $e^{i\omega t}$约定下对应左旋圆偏振（右旋圆偏振），其旋向定义取面向光源的观察方向。反射场在同一实验室固定基底中表示，因此反射分量的 ± 标签指的是该琼斯基，而非反向传播反射波的旋向。通过对 R_c进行数值对角化，得到复本征值λ_1、2和反射本征态ψ_1、2；庞加莱球上的本征态轨迹由相应的归一化斯托克斯参数（S_1、S_2、S_3）给出。通过在由波长和 $\tilde{g}_B$张成的参数空间中，同时最小化本征值差 $|\lambda_1 - \lambda_2|$ 并最大化本征态重叠 $C = |\psi_1|\psi_2|$，确定例外点位置。

5.4. 斯托克斯参数

用于在庞加莱球上表示本征态的斯托克斯参数定义如下

$$\begin{aligned} s_0 &= |E_x|^2 + |E_y|^2, \\ s_1 &= |E_x|^2 - |E_y|^2, \\ s_2 &= 2\,\mathrm{Re}(E_x^* E_y), \\ s_3 &= 2\,\mathrm{Im}(E_x^* E_y). \end{aligned} \tag{13}$$

归一化的斯托克斯参数为

$$S_1 = \frac{s_1}{s_0}, \qquad S_2 = \frac{s_2}{s_0}, \qquad S_3 = \frac{s_3}{s_0}. \tag{14}$$

资助。 国家自然科学基金委员会（NSFC）（项目编号：12304417）；黑龙江省自然科学基金（项目编号：YQ2024A007）；中央高校基本科研业务费（项目编号：XNJKKGYDJ2026019）；以及韩国政府通过韩国国家研究基金会（NRF）提供的资助（NRF-RS-2026-25491025、NRF-RS-2026-25506975）。

利益披露。 作者声明不存在利益冲突。

数据可用性。 本文所述结果的相关数据目前尚未公开，但可应合理请求向作者获取。

补充信息。 支持性内容请参见补充材料。补充说明1推导了具有非互易耦合的时域耦合模模型及由此得到的圆偏振基反射矩阵；补充说明2介绍了旋磁介电常数模型，估算了 $\tilde{g}_B$的实际值，并给出了扩展的 $|\tilde{g}_B| \le 0$。1扫描和薄腔对照模拟；补充说明3给出了准钉扎分析；补充说明4报告了模拟反射矩阵的耦合模拟合结果；补充说明5展示了磁场诱导的非圆形例外点；补充说明6验证了例外点附近本征值分裂的平方根标度。

参考文献

1. R. El-Ganainy、K. G. Makris、M. Khajavikhan等，《非厄米物理与PT对称性》，《自然·物理》14，11 19 2018–（）。2. M.-A. Miri和A. Alù，《光学与光子学中的例外点》，Science 363，eaar7709（2019）。3. Ş. K. Özdemir、S. Rotter、F. Nori和L. Yang，《光子学中的宇称–时间对称性与例外点》，Nat. Mater. 18，783–798（2019）。4. H. Meng、Y. S. Ang和C. H. Lee，《非厄米系统中的例外点：应用与最新进展》，Appl. Phys. Lett. 124，060502（2024）。5. W. D. Heiss，《例外点的物理学》，J. Phys. A: Math. Theor. 45，444016（2012）。6. M. Berry，《非厄米简并的物理学》，Czechoslov. J. Phys. 54，1039–1047（2004）。7. H. Qin、W. Lv、Z. Zhang等，《工程化材料中的光子学例外点及其新兴应用》，Nat. Rev. Mater. 11，453–468（2026）。8. H. Lee、A. Kecebas、F. Wang等，《低损耗米氏散射体硅微环中的手性例外点与相干背向散射抑制》，eLight 3，20（2023）。9. W. Chen、Ş. Kaya Özdemir、G. Zhao等，《例外点增强光学微腔中的传感》，Nature 548，192–196（2017）。10. H. Hodaei、A. U. Hassan、S. Wittek等，《高阶例外点处的增强灵敏度》，Nature 548，187 191 2017–（）。11. M. Brandstetter、M. Liertzer、C. Deutsch等，《在例外点处反转激光器的泵浦依赖性》，《自然·通讯》5，4034（2014）。12. J. Doppler、A. A. Mailybaev、J. Böhm等，《为实现非对称模式切换而动态环绕例外点》，Nature 537，76–79（2016）。13. H. Nasari、G. Lopez-Galmiche、H. E. Lopez-Aviles等，《无需环绕例外点即可观测手性态转移》，Nature 605，256–261（2022）。14. J. W. Yoon、Y. Choi、C. Hahn等，《在整个光通信波段内绕行例外点的时间非对称环路》，Nature 562，86–90（2018）。15. N. Yu和F. Capasso，《采用设计型超表面的平面光学》，Nat. Mater. 13，139–150（2014）。16. N. Yu、P. Genevet、M. A. Kats等，《具有相位不连续性的光传播：广义反射与折射定律》，Science 334，333–337（2011）。17. A. V. Kildishev、A. Boltasseva和V. M. Shalaev，《采用超表面的平面光子学》，Science 339，1232009（2013）。18. A. Kodigala、T. Lepetit和B. Kanté，《三维等离激元纳米结构中的例外点》，Phys. Rev. B 94，201103（2016）。19. Q. Song、M. Odeh、J. Zuniga-Perez等，《通过环绕例外点构造等离激元拓扑超表面》，Science 373，1133–1137（2021）。20. T. He、Z. Zhang、J. Zhu等，《可见光中的散射例外点》，Light Sci. Appl. 12，229（2023）。21. Y. Shou、D. Wang、Y. Wang等，《非厄米超表面中的共振例外点与散射例外点》，npj Nanophotonics 2，29（2025）。22. S. Dong、G. Hu、Q. Wang等，《例外点处的损耗辅助超表面》，ACS Photonics 7，3321–3327（2020）。23. B. Zhen、C. W. Hsu、Y. Igarashi等，《从狄拉克锥中生成例外点环》，Nature 525，354 358 2015–（）。24. W. R. Sweeney、C. W. Hsu、S. Rotter和A. D. Stone，《完美吸收例外点与手性吸收器》，Phys. Rev. Lett. 122，093901（2019）。25. S. H. Park、S.-G. Lee、S. Baek等，《非厄米超表面中例外点的观测》，Nanophotonics 9，1031–1039（2020）。26. M. Kang、J. Chen和Y. D. Chong，《超表面中的手性例外点》，Phys. Rev. A 94，033834（2016）。27. Z. Yang、P.-S. Huang、Y.-T. Lin等，《构造任意偏振控制的例外点对：非对称矢量波前调制》，《自然·通讯》15，232（2024）。28. H. Qin、Z. Yang、P.-S. Huang等，《单个平面超表面上的任意偏振例外点球面》，《自然·通讯》16，2656（2025）。29. X. Wu、X. Zhao、Y. Lin等，《具有相反手性的例外点孪生体：非厄米超表面》，ACS Photonics 11，2054–2060（2024）。30. M. Lawrence、N. Xu、X. Zhang等，《太赫兹超表面偏振空间中的PT对称性破缺表现》，Phys. Rev. Lett. 113，093901（2014）。31. M. S. Ergoktas、S. Soleymani、N. Kakenov等，《利用电调谐例外点奇点对太赫兹光进行拓扑工程》，Science 376，184–188（2022）。32. S. Baek、S. H. Park、D. Oh等，《栅控石墨烯超表面的非厄米手性简并》，Light Sci. Appl. 12，87（2023）。33. F. Ding、Y. Deng、C. Meng等，《非厄米光学MEMS超表面中的电调谐拓扑相变》，Sci. Adv. 10，eadl4661（2024）。34. L. Wang、H. Liu、J. Liu等，《源自连续谱中的束缚态的光开关例外点》，Light Sci. Appl. 14，377（2025）。

35. Z. Li、R. Cai、X. Wang、等，“非厄米系统的例外亏缺”，《自然·物理》**22**，962–970（2026）。36. J.-W. Ryu、J.-H. Han、C.-H. Yi、等，“非厄米系统的例外分类”，《通讯·物理》**7**，109（2024）。37. D. L. Sounas 和 A. Alù，“基于时间调制的非互易光子学”，《自然·光子学》**11**，774–783（2017）。38. L. Bi、J. Hu、P. Jiang、等，“单片集成非互易光学谐振器中的片上光隔离”，《自然·光子学》**5**，758–762（2011）。39. A. B. Khanikaev、S. H. Mousavi、G. Shvets 和 Y. S. Kivshar，“单向超常光学透射与非互易伪等离激元”，《物理评论快报》**105**，126804（2010）。40. B. Fan、M. E. Nasir、L. H. Nicholls、等，“磁光超材料：非互易传输与法拉第效应增强”，《先进光学材料》**7**，1801420（2019）。41. V. I. Belotelov、I. A. Akimov、M. Pohl、等，“磁等离激元晶体中增强的磁光效应”，《自然·纳米技术》**6**，370–376（2011）。42. V. I. Belotelov、L. E. Kreilkamp、I. A. Akimov、等，“等离激元介导的磁光透明”，《自然·通讯》**4**，2128（2013）。43. S. Fan、W. Suh 和 J. D. Joannopoulos，“光学谐振器中 Fano 共振的时域耦合模理论”，《美国光学学会志A辑》**20**，569（2003）。44. A. D. Rakić，“金属薄膜本征光学常数测定算法：应用于铝”，《应用光学》**34**，4755–4767（1995）。45. A. Zvezdin 和 V. Kotov，《现代磁光学与磁光材料》（CRC出版社，1997）。46. M. C. Onbasli、L. Beran、M. Zahradník、等，“波长为 200–1770 nm 时铈钇铁石榴石薄膜的光学与磁光行为”，《科学报告》**6**，23640（2016）。47. T. Fakhrul、S. Tazlaru、B. Khurana、等，“集成于硅上的高品质因数磁光铈、铋掺杂铽铁石榴石薄膜”，《先进光学材料》**9**，2100512（2021）。48. P. Hansen、K. Witter 和 W. Tolksdorf，“铅、铋掺杂钇铁石榴石薄膜的磁性与磁光性质”，《物理评论B辑》**27**，6608–6625（1983）。49. S. Yao、T. Sato、K. Kaneko、等，“雾化化学气相沉积法制备的铋铁石榴石薄膜的法拉第效应”，《日本应用物理学杂志》**54**，063001（2015）。50. P. B. Johnson 和 R. W. Christy，“贵金属的光学常数”，《物理评论B辑》**6**，4370–4379（1972）。