arXiv:2611.32713v1 [math.NT] 24 Nov 2026

Frobenius 型多项式典范高度的 Dobrowolski型下界

JORGE MELLO

Abstract. 设 K 为一个数域，$f \in \mathcal{O}_K[x]$为一个次数为$d = p^r$ 且满足 $f \equiv x^d + c$ （模 p）的首一多项式，例如 $x^2 + c$。我们证明，每个在 f 作用下具有无限轨道、且在 K 上的次数为D 的 $\alpha \in K$ 都满足

$$\widehat{h}_f(\alpha) \;\geq\; \frac{c_1}{D \log 3D} \exp\bigl(-c_2 \sqrt{\log 3D}\bigr),$$

其中 c_1，$c_2 > 0$ 仅依赖于 f和 K。这意味着 $\widehat{h}_f(\alpha) \geq D^{-1-o(1)}$，推动了动力Lehmer猜想的研究。多项式 f 不必是后临界有限的。此前，对于这类多项式，例如 $x^2 + 1$，尚无关于 D 的多项式衰减下界。对于后临界有限多项式，例如$x^2 - 1$，这一结果改进了 Habegger 和 Schmidt 最近得到的二次界。该方法受到 Dobrowolski 关于 Lehmer 问题的证明的启发。

Contents

1. 引言 1
2. 多项式：设定与预备知识 4
3. 增长的同余 5
4. 轨道上的次数与适配基 7
5. 多项式在范围上的界 8
6. 局部动力系统 $\mathfrak{p}$ 12
7. 次数可能下降之处，以及定理 A(i) 的证明 14
8. 分歧簇与定理 A(ii) 的证明 16
9. 超吸引类 19
10. 示例与显式常数 21
参考文献 23

1. Introduction

设 K 为一个数域，$f \in K[x]$ 为次数为 $d \geq 2$ 的多项式，并记 $\widehat{h}_f(\alpha) = \lim_n d^{-n} h(f^{(n)}(\alpha))$ 为其典范高度，其中 h 是绝对对数 Weil 高度。根据 Northcott 定理，当且仅当 α 是前周期的，即其轨道 α，$f(\alpha)$ $f^{(2)}(\alpha)\ldots$ 为有限集时，$h_f(\alpha) = 0$。动力 Lehmer 猜想 [9, 猜想 3.25] 断言，其他点的典范高度可以仅根据其次数给出下界：存在 $c(f,\ K) > 0$ 使得

$$\widehat{h}_f(\alpha) \;\geq\; \frac{c(f,K)}{D}, \qquad D = [K(\alpha) : K], \tag{1}$$

对于所有不是前周期的 $\alpha \in K$。

对于 $f = x^d$ 这是 Lehmer 问题，而 Dobrowolski [5]，$h(\alpha) \gg D^{-1}(\log\log 3D/\log 3D)^3$，给出的经典下界至今仍是已知的最佳结果（差一个常数因子）。他的证明基于

日期：2026年11月20日。

同余关系 $A(x^p) \equiv A(x)^p \pmod p$，也就是说，基于以下事实： $x \mapsto x^p$ 在每个素数 p处提升 Frobenius，且对所有 $p \le \log D$都成立；这正是我们方法的出发点。对于任意 f，Baker [1, 定理 1.14] 利用动力格林函数的能量证明，式（1）在一个大小为 $O(D \log D)$ 的例外集之外成立。

对于其他映射，近期才获得了对所有点均成立的多项式衰减界。在一项关键成果中，Habegger 和 Schmidt 改编 Dimitrov 证明 Schinzel–Zassenhaus 猜想[4],的方法，证明了二次界

$$\widehat{h}_f(\alpha) \;\ge\; \frac{c}{D^2} \tag{2}$$

对于 x^p+c 其中 0 为周期点，在一个技术假设下成立；例如，当 $p=2$ 且c 为实数时 [7], 成立；更一般地，对于具有整系数、次数为素数幂的中心化双曲后临界有限多项式，也成立 [8]。这里，如果一个多项式的所有临界点都是前周期的，则称其为后临界有限多项式。根据 [8], 关于后临界有限多项式的 Epstein 整性定理的精神 [6], ，整性假设f 意味着：在 p 处，经过平移 [8, 引理 57]可提升一个 Frobenius；这正是我们所使用的性质。所有这些界都涉及后临界有限多项式；据我们所知，此前对于具有无限轨道临界点的多项式，例如 x^2+1, 尚无多项式衰减界。我们证明，只要存在一个素数，使得在该素数处 f 可提升 Frobenius，就足以对所有点得到指数 $1+o$（1）在（1）中的结论，具体如下。

定义 1.1。 设 p 为一个素数，且 $d = p^r$。次数为 d 的首一 $f \in \mathcal{O}_K[x]$ 在 p处具有 *Frobenius* 形状，当且仅当

$$f \;\equiv\; (x+b)^d + c \pmod{p\mathcal{O}_K[x]} \qquad \text{for some } b, c \in \mathcal{O}_K.$$

等价地， $f \equiv x^d + c'$ （模 $p\mathcal{O}_K[x]$），其中 $c' = b^d + c$。每个满足 $c \in \mathcal{O}_K$的 x^2+c 在 2 处具有 Frobenius 形状，因此每个次数为素数 p 且 x，……， x^{p-1} 的系数可被 p整除的首一 $f \in \mathbb{Z}[x]$ 也具有该性质，Habegger 和 Schmidt 的多项式亦然。

若对于某个 $n \ge 1$有 $f^{(n)}(x) = x$ ，则点 x 是周期的； f的有限临界点是 f'的零点。固定 K的一个素数 $\mathfrak{p} \mid p$ 。对于 $\alpha \in K$ ，令 $e_{\mathfrak{p}}(\alpha)$表示 $K(\alpha)$ 中位于 $\mathfrak{p}$之上的素数的最大绝对分歧指数，使得 $1 \le e_{\mathfrak{p}}(\alpha) \le e(\mathfrak{p}|p)\,[K(\alpha)\colon K]$，并记 $\alpha_n = f^{(n)}(\alpha)$ 以及 $D_n = [K(\alpha_n)\colon K]$。

定理 A。 设 $f \in \mathcal{O}_K[x]$ 是一个在 p 处具有 *Frobenius* 形状的首一多项式，且其有限临界点均非周期的。存在 c_1、 $c_2 > 0$ ，使得对于任意非前周期的 $\alpha \in K$ ，当 $D = [K(\alpha)\colon \overline{K}] \ge 2$ 时，均有

$$\text{(i)}\ \widehat{h}_f(\alpha) \;\ge\; \frac{c_1}{e_{\mathfrak{p}}(\alpha)\, D} \exp\!\big(-c_2\sqrt{\log 3D}\big);$$

$$\text{(ii)}\ \widehat{h}_f(\alpha) \;\ge\; \frac{c_1}{D \log 3D} \exp\!\big(-c_2\sqrt{\log 3D}\big).$$

特别地，对于所有 α， $\widehat{h}_f(\alpha) \ge D^{-1-o(1)}$ 。

这些常数只依赖于 K、 f 和 $\mathfrak{p}$，所涵盖的多项式包括：对于满足 0 非周期的每个 $c \in \mathcal{O}_K$， x^2+c（关于 $\mathbb{Z}$：每个 $c \ne 0$、-1），以及在相同条件下的 $x^d + c$（§10）。第 (ii) 部分中的指数 1 是最优的：如果 $\beta \in K$ 非前周期，且 $\alpha \in f^{-N}(\beta)$ 的次数为 d^N，那么 $\widehat{h}_f(\alpha) = d^{-N}\widehat{h}_f(\beta) \asymp D^{-1}$。当 $e_{\mathfrak{p}}(\alpha) < \log 3D$ 时，第 (i) 部分给出了更好的界。

在§§2–5中，除其他内容外，我们将 Dobrowolski 方法改造为适用于单个素数。 α_n 的特征多项式满足一个 p进同余，其模数随 n增长；我们还将其与一个阿基米德估计进行比较，该估计采用适配于 f 的基（多项式$\prod_j (f^{(j)})^{\varepsilon_j}$，其中 ε_j为次数的底d数字），并取 $\asymp \sqrt{\log}\, D$ 个连续

步。记作 $k_n = D_n/D_{n+1} \in \{1,\dots,d\}$；若 $k_n \geq 2$，则次数在第 n 步下降；而范围是一个连续步骤集合，在这些步骤上 D_n 保持不变。我们得到以下关于范围的界。

定理。 存在 c_1、$c_2 > 0$ 和 $k(D) = O(\sqrt{\log 3D})$，使得对于每个满足 $D \geq 2$ 的非前周期 $\alpha \in K$：若 D_n 对 $j \leq n \leq j + k(D)$ 为常数，则

$$\widehat{h}_f(\alpha) \;\geq\; \frac{c_1}{D}\exp\bigl(-c_2\sqrt{\log 3D}\bigr)\prod_{n<j}\frac{k_n}{d}.$$

对于整性 α，这是命题5.5；对于其他情形，则由引理 2.2得出，该引理给出 $h_f(\alpha) \geq \log 2/([K:\mathbb{Q}]D)$。

每一步 $n < j$ 在 $k_n < d$ 都会使这个界缩小 k_n/d 倍，因此有必要确定次数下降发生在哪些步骤。固定 $K \subset \mathbb{C}_p$ 以及赋值 v，使得 $v(p) = 1$。一个周期的 f 是一个周期点的轨道；若其中包含临界点，则称其为超吸引的。令 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}} \subset \mathbb{F}_p$ 为超吸引周期中各点约化的集合（若没有有限临界点是周期的，则该集合为空），并令 $\nu_{\mathfrak{p}} \geq 1$ 为最大赋值的整数部分 $v(f'(\eta))$，其中取遍满足 η 的周期点 $\bar{\eta} \notin \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$（定义 6.5）。

定理 B. 设 $f \in \mathcal{O}_K[x]$ 是在 p 处具有 *Frobenius* 形状的首一多项式，且 $\alpha \in K$ 不是前周期点，并有一个 K-共轭元 α'，使得 $v(\alpha') \geq 0$ 且 $\bar{\alpha}' \notin \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$。对于每个域 $K \subseteq F \subseteq K$，若 $[F(\alpha_{n+1}):F] < [F(\alpha_n):F]$，则 $n \leq \lceil \log_d e_{\mathfrak{p}}(\alpha) \rceil + \nu_{\mathfrak{p}} - 1$。

如果在第 n 步发生次数下降，那么 α_n 的两个共轭元在 f 作用下的像相同。二者都位于某个周期点 η 的剩余圆盘内（即模极大理想约化相同的整点集合），并且在 $\mathfrak{p}$-进意义下接近 η；由差商可知，$v(f'(\eta))$ 很大；这给出了 n 的界（§7）。在最后一次下降之后选取 j，上述界中的乘积至少为 $d^{-j} \gg e_{\mathfrak{p}}(\alpha)^{-1}$，由此得到定理 A 的 (i) 部分。同样的论证应用于 f 的每个纤维，可知第 m 步的次数下降意味着 α 的共轭元 α' 中至少有一半满足：$K_{\mathfrak{p}}(\alpha')$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 上的分歧指数为 $> d^{m-\nu_{\mathfrak{p}}}$（§8）。这些共轭元形成 $\mathfrak{p}$-进簇，即由 $e/e(\mathfrak{p}|p)$ 个两两在 $\mathfrak{p}$-进意义下接近的共轭元组成的集合；其中 e 是 $K_{\mathfrak{p}}(\alpha')$ 的分歧指数。因此，α_m 的最小多项式的判别式可被 p 的一个较大幂整除。这给出 $\widehat{h}_f(\alpha) \gg D^{-1}$，除非 $D_m d^m \ll D\log D$；在这种情况下，取 $j = m+1$ 代入上述界，得到 $\widehat{h}_f(\alpha) \gg (D_m d^m)^{-1}$，相差因子 $\exp(-c_2\sqrt{\log 3D})$。这就证明了 (ii) 部分。对于 x^2+1，(i) 部分中的常数可以明确给出（§10.2）；定理 D 中关于 x^2-1 的常数也可以明确给出（命题 10.3）。

定理 C。 对于 $f = x^2+1$ 以及每个不处于前周期的 $\alpha \in \mathbb{Q}$，当 $D = [\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] \geq 2$ 且 $e_2(\alpha)$ 对于 $\mathfrak{p} = 2$，分歧指数为 $e_{\mathfrak{p}}(\alpha)$，

$$\widehat{h}_f(\alpha) \;\geq\; \frac{1}{32\,e_2(\alpha)\,D}\exp\bigl(-8.4\sqrt{\log 3D}\bigr).$$

定理 B 不适用于所有共轭元都归约到 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$ 中的整点。对于这些整点，我们改用以下事实：f 在 $\mathfrak{p}$-进赋值下，在超吸引周期附近进行收缩。到循环的距离的赋值在每一步都乘以 d，直到达到 1；此后，在该周期的每个周期中，它至少乘以 2；然后利用一次结式即可得到一个仅依赖于分歧的界（§9）。

定义 1.2。 设 f 在 K 中具有一个超吸引周期。对于这样的周期 Z，令 $m_Z = \prod_c \deg_c f$ 表示局部次数 $\deg_c f = 1 + \operatorname{ord}_{x=c} f'(x)$ 在临界点 $c \in Z$ 处的乘积，其中 f。令 Q 为这些

超过 吸引周期的周期的最小公倍数， M 为它们的点的总数， $m_f = \min_Z m_Z \geq 2$，并且

$$\omega_f = Q\,\frac{\log d}{\log m_f} \;\geq\; 1,$$

该不等式，因为 $m_f \leq d^Q$。最后令 $C_f \geq 0$ 满足 $|h(x) - \widehat{h}_f(x)| \leq C_f$ 对所有 $x \in K$ [9, 定理 320]成立。

定理 D（超吸引类）。设 f 如定理 B 中所述，在 K 中具有一个超吸引周期。若 $\alpha \in K$ 在 $\mathcal{O}_K$ 上是整性的、非前周期的，并且 $\bar{\alpha}' \in \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$ 对于每一个 K-共轭 α' 的 α，则

$$\widehat{h}_f(\alpha) \;\geq\; \frac{B}{2d^{2Q+1}} \min\Big\{1, \big(2AB\big)^{-\omega_f}\Big\} \cdot \frac{1}{e_{\mathfrak{p}}(\alpha)}, \qquad A = \frac{M\,[K:\mathbb{Q}]}{[K_{\mathfrak{p}}:\mathbb{Q}_p]\log p}, \quad B = \log 2 + 2C_f.$$

定理 E（所有具有 Frobenius 形状的多项式）。设 $f \in \mathcal{O}_K[x]$ 是任意一个在 p 处具有 *Frobenius* 形状的首一多项式。存在 c_1、$c_2 > 0$，使得每个满足 $D \geq 2$ 的非前周期 $\alpha \in K$ 都满足

$$\widehat{h}_f(\alpha) \;\geq\; \frac{c_1}{D \log 3D} \exp\big(-c_2\sqrt{\log 3D}\big).$$

特别地，对于所有这样的 α， $\widehat{h}_f(\alpha) \geq D^{-1-o(1)}$。

因此，对于 x^2-1， x^2+c 其中 0 是周期点，且 x^4+2x^2 在 $p=2$ 处，定理 E 给出 $D^{-1-o(1)}$；对于 x^2-1，这改进了 D^{-2} 的界 [7]。对于 $f = x^d$，它给出 $h(\alpha) \geq D^{-1-o(1)}$，这比 Dobrowolski 界弱。这里 f 不必是后临界有限的。

在第 2–5 节中，我们证明了该界在各范围内成立（命题 5.5）。第 6 节对 $\mathfrak{p}$ 处进行了局部分析，而第 7、8 和 9 节分别证明了关于界的下降位置、分歧簇和超吸引类的结果；第 10节给出了含显式常数的例子。

2. Polynomials: setting and preliminaries

本节固定多项式及其典范局部高度的记号，并证明两个初等估计。

在全文中， K 是一个数域， p 是一个素数， $d = p^r$，而 $f \in \mathcal{O}_K[x]$ 是次数为 d 的首一多项式。对于嵌入 $\sigma\colon\ K \to \mathbb{C}$，记 σf 为将系数通过 σ 取共轭得到的多项式；对于次数为 d 的首一 $F \in \mathbb{C}[x]$，令

$$\lambda_F(z) = \lim_{n\to\infty} d^{-n} \log \max\{1, |F^{(n)}(z)|\}.$$

则 $\lambda_F \geq 0$ 且 $\lambda_F(F(z)) = d\lambda_F(z)$。如果 $\alpha \in K$ 在 $\mathcal{O}_K$ 上具有整性，则该轨道的所有非阿基米德局部高度均为零，并且

$$\widehat{h}_f(\alpha) = \frac{1}{[K(\alpha):\mathbb{Q}]} \sum_{\tau} \lambda_{\tau|_K f}(\tau\alpha), \tag{3}$$

求和遍历所有嵌入 $\tau\colon\ K(\alpha) \to \mathbb{C}$ [9, §5.9], [3]。

我们首先用典范局部高度来界定一个复数的绝对值。

引理 2.1。令 $F = x^d + \sum_{i<d} a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ 和 $R = 1 + \sum_{i<d} |a_i|$。则对于所有 $w \in \mathbb{C}$，有 $|w| \leq R\, e^{\lambda_F(w)}$。对于 $F = x^2 + c$，也可以改取 $R = R_c = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4|c|})$。

证明。若 $|w| \leq R$，这是因为 $\lambda_F \geq 0$。令 $|w| > R$ 和 $u = |w|/R > 1$。由于 $|w| > R \geq 1$，我们有 $\sum_{i<d} |a_i||w|^i \leq (R-1)|w|^{d-1}$，因此

$$|F(w)| \;\geq\; |w|^{d-1}\big(|w| - (R-1)\big).$$

现在 $|w|-(R-1)\ge |w|R^{1-d}$：这等价于 $|w|(1-R^{1-d})\ge R-1$，其成立是因为 $|w|(1-R^{1-d})\ge R(1-R^{1-d})=R-R^{2-d}\ge R-1$，因为 $R\ge 1$ 和 $d\ge 2$。因此$|F(w)|\ge |w|^dR^{1-d}$，即 $|F(w)|/R\ge u^d>1$。由归纳法 $|F_{(n)}(w)|/R\ge u^{d^n}$；取对数，除以 d^n 并令 $n\to\infty$，得到 $\lambda_F(w)\ge \log u$。

对于 $F=x^2+c$ 和 $|w|>R_c$：$|F(w)|\ge |w|^2-|c|=R_cu^2+|c|(u^2-1)\ge R_cu^2$，利用 $R_c^2=R_c+|c|$，同样的归纳法也适用。□

我们记 $R_f=$最大值$_\sigma R(\sigma f)$，其中 $R(\cdot)$ 与引理 2.1 中相同。

非整点的典范高度至少为 $1/D$ 量级。

引理 2.2。若 $\alpha\in\overline{K}$ 在 $\mathcal{O}_K$上不是整的，则 $h_f(\alpha)\ge$对数 $2/[K(\alpha):\mathbb{Q}]$。

证明。将 $|\cdot|_v$标准化，使其延拓 $\mathbb{Q}$上的通常绝对值，因此对于 $v\mid \ell$有 $|\ell|_v=\ell^{-1}$；对于 $K(\alpha)$ 的每个赋值 v，令 $n_v=e_vf_v$和 $\lambda_v(\alpha)=\lim_n d^{-n}\log\max\{1,|f^{(n)}(\alpha)|_v\}$，从而$h_f(\alpha)=\sum_v n_v\lambda_v(\alpha)/[K(\alpha):\mathbb{Q}]$。令 v为 $K(\alpha)$ 上方位于一个满足 $|\alpha|_v>1$ 的素数 ℓ 之上的赋值。由于 f是具有整系数的首一多项式，$|f(\alpha)|_v=|\alpha|_v^d$，所以 $\lambda_v(\alpha)=$对数 $|\alpha|_v$；而 $|\alpha|_v$是 ℓ^{1/e_v}的整次幂，因此 $\lambda_v(\alpha)\ge \frac{1}{e_v}$对数 ℓ。所有局部高度均非负，因此$\widehat{h}_f(\alpha)\ge \frac{e_vf_v}{[K(\alpha):\mathbb{Q}]}\lambda_v(\alpha)\ge$对数 α^2。□

3. The growing congruence

本节证明，点的迭代的特征多项式满足关于 p 的幂的同余关系，其指数沿轨道增长。

对于根为 $y_1,\dots,y_D$ 且首一的 $A\in\mathcal{O}_K[X]$，令 $A^{[g]}(X)=\prod_i(X-g(y_i))\in\mathcal{O}_K[X]$。则 $(A^{[g]})^{[h]}=A^{[h\circ g]}$。多项式之间的同余是指系数逐项模 $\mathcal{O}_K$ 的理想同余。

对于 $f=x^p$，下述同余关系是关于幂的迹 [10, 12, 11, 2]的经典欧拉–费马同余式；我们需要将它们用于 Frobenius 形状多项式的迭代。

模 p 下，f 的迭代是 x 的幂加上常数。

引理 3.1. 假设 f 在 p 处具有 *Frobenius* 形状，并令 $c'=b^d+c$。定义 $\gamma_0=0$ 和 $\gamma_{n+1}=\gamma_n^d+c'$。则对所有 $n\ge 0$，$f_{(n)}(x)\equiv x^{d^n}+\gamma_n(\mathrm{mod}\ p\mathcal{O}_K[x])$ *</style}*。

证明。由于 p 整除 $\binom{d}{i}$，对 $0<i<d$成立，因此 $(x+b)^d\equiv x^d+b^d$，于是 $f\equiv x^d+c'$。若$f_{(n)}\equiv x^{d^n}+\gamma_n$，则 $f^{(n+1)}\equiv(x^{d^n}+\gamma_n)^d+c'\equiv x^{d^{n+1}}+\gamma_n^d+c'$。□

由于 $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ 是有限的，这些常数及相应的幂映射最终都会呈周期性。

引理 3.2。存在整数 $n_0\ge 0$ 和 $q\ge 1$，它们仅取决于模p的 K、p 和 f，使得对所有 $n\ge n_0$:

$$a^{d^{n+q}}\equiv a^{d^n}\pmod{p\mathcal{O}_K}\quad \textit{for all } a\in\mathcal{O}_K,\qquad \gamma_{n+q}\equiv\gamma_n\pmod{p\mathcal{O}_K}.$$

证明。设 $\mathcal{R}=\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$为有限环，且令 $\phi_n:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$为$a\mapsto a^{d^n}$。有序对 $(\phi_n,\bar{\gamma}_n)$ 属于有限集 $\mathcal{R}^{\mathcal{R}}\times\mathcal{R}$，而 $(\phi_{n+1},\bar{\gamma}_{n+1})$ 由 $(\phi_n,\bar{\gamma}_n)$ 确定，因为$\phi_{n+1}(a)=\phi_n(a)^d$ 且 $\bar{\gamma}_{n+1}=\bar{\gamma}_n^d+\bar{c}'$。因此该序列最终呈周期性。□

我们通过两个情形来说明整数 n_0 和 2进赋值 q。

例 3.3. (a) $K=\mathbb{Q}$, $f=x^p+c$，其中 $c\in\mathbb{Z}$。在 $\mathbb{F}_p$上，$a^p=a$，因此 $n_0=0$，且 $\gamma_n\equiv nc$；于是 $q=p$，或者当 $p\mid c$时为 $q=1$。对于 $p=2$ 和奇数 c，$q=2$。
(b) $K=\mathbb{Q}(i)$，$f=x^2+i$、$p=2$。这里 $\mathcal{O}_K/2\mathcal{O}_K=\mathbb{F}_2[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ 具有 $\varepsilon=1+i$，且 $(u+v\varepsilon)^2=u^2$；因此 $a^{2^n}\equiv a^{2^{n+1}}$ 对于 $n\ge 1$ 成立，但对于 $n=0$ 不成立。轨道 γ_n 是 0，i，$i+1$，i，$i+1$，.....模 2。因此 $n_0=1$ 和 $q=2$。

模 p 意义下，将多项式的根提升到 p 次幂，会将其系数提升到 p 次幂。

引理 3.4。令 e_j 为关于 D 个变量的 j次基本对称多项式。对于每个 j，都存在 $S_j \in \mathbb{Z}[e_1, \dots, e_D]$，使得 $e_j(y_1^p, \dots, y_D^p) = e_j(y)^p + pS_j(e(y))$。

证明。模 p 下，p次幂映射是可加的，因此 $e_j(y^p) - e_j(y)^p$ 是一个系数可被 p整除的对称多项式。除以 p，并应用对称多项式基本定理。□

下面的引理是关键步骤：将两个同余多项式的根替换为它们在 f 下的像，会使同余的模数提高 p 的一个幂次。

引理 3.5。假设 f在 p 处具有 *Frobenius* 形状。令 B、$B' \in \mathcal{O}_K[X]$ 为次数相同的首一多项式，且 $B \equiv B'$ (模 $p^t\mathcal{O}_K$)，$t \geq 1$。则 $B^{[f]} \equiv B'^{[f]}$ (模 $p^{t+1}\mathcal{O}_K$)。

证明。将 $f(x) = (x+b)^d + c + p\,g(x)$ 写成含有 $g \in \mathcal{O}_K[x]$ 的形式，并令 y_i、y_i' 为 B、B' 的根，其初等对称函数满足 $e \equiv e'$（模 p^t）。设 $z_i = (y_i + b)^d + c$ 以及 $w_i = z_i + p\,g(y_i) = f(y_i)$，同样地设 z_i'、w_i'；我们先比较根为 z_i 和 z_i' 的多项式。

将根平移 b 或 c 会使系数改变为关于它们的整系数多项式，因此保持同余关系。将根提升到 p 次幂会提高模数：根据引理 3.4，新的系数为 $e_j^p + pS_j(e)$，且 $pS_j(e) \equiv pS_j(e')$（模 p^{t+1}），而 $e_j^p - e_j'^p = \sum_{i\geq 1} \binom{p}{i} e_j'^{p-i}(e_j - e_j')^i$ 可被 p^{t+1} 整除：当 $0 < i < p$ 时因为 $p \mid \binom{p}{i}$，当 $i = p$ 时因为 $tp \geq t+1$。如此进行 r 次后，根为 z_i 和 z_i' 的多项式模 p^{t+1} 同余（甚至模 p^{t+r} 同余）。

接下来我们转到根 w_i。展开后，

$$e_k(w) = e_k(z) + \sum_{j\geq 1} p^j \sum_{\substack{S\subseteq\{1,\dots,D\}\\|S|=k}} \sum_{\substack{T\subseteq S\\|T|=j}} \prod_{i\in T} g(y_i) \prod_{i\in S\setminus T} z_i.$$

对于每个 j，内层双重求和都是关于 $y_1, \dots, y_D$ 的对称多项式，其系数属于 $\mathcal{O}_K$，因为 z_i 和 $g(y_i)$ 都只是关于 y_i 的多项式。根据环 $\mathcal{O}_K$ 上的对称多项式基本定理，它等于 $\Psi_{k,j}(e(y))$，其中多项式 $\Psi_{k,j} \in \mathcal{O}_K[e_1, \dots, e_D]$ 仅依赖于 D, k, j, b, c 和 g，而不依赖于根。因此，同一个 $\Psi_{k,j}$ 也适用于 B 和 B'，于是 $\Psi_{k,j}(e) \equiv \Psi_{k,j}(e')$ (mod p^t)，且项 $p^j\Psi_{k,j}$ 模 p^{t+1} 同余。结合第一部分可得，$e_k(w) \equiv e_k(w')$ (mod p^{t+1})。□

反复应用引理 3.5，我们得到增长同余。

命题 3.6。假设 f 在 p 处具有 *Frobenius* 形状，并令 n_0, q 如引理 *3.2* 中所述。对于每个首一 $A \in \mathcal{O}_K[X]$，多项式 $A_n = A^{[f^{(n)}]}$ 满足

$$A_{n+q} \equiv A_n \pmod{p^{n-n_0+1}\mathcal{O}_K} \qquad (n \geq n_0).$$

因此，当 $m \geq n \geq n_0$ 且 $q \mid m-n$ 时，$A_m \equiv A_n$（模 p^{n-n_0+1}）。

证明。设 y_i 为 A 的根，$\mathcal{O}$ 为包含这些根的某个域的整数环。根据引理 3.1，$f^{(n)}(y_i) = y_i^{d^n} + \gamma_n + p\,\eta_i$，其中 $\eta_i \in \mathcal{O}$。因此，模 $p\mathcal{O}$ 意义下，A_n 的系数就是根为 $y_i^{d^n} + \gamma_n$ 的多项式的系数。应用引理 3.4 rn 次，由归纳法得到 $e_j(y^{d^n}) \equiv e_j(y)^{d^n}$（模 $p\mathcal{O}$）。$\prod_i(X - u_i - \gamma)$ 的系数由 $e(u)$ 和 γ 中的一个固定 $\mathbb{Z}$-多项式给出，且与 n 无关。因此，模 $p\mathcal{O}$ 意义下，A_n 的系数就是将该固定多项式代入 $e(y)^{d^n}$ 和 γ_n 后所得的值。根据引理 3.2，$e(y)^{d^{n_0+q}} \equiv e(y)^{d^{n_0}}$，并且模 p 意义下为 $\gamma_{n_0+q} \equiv \gamma_{n_0}$，因为 $e(y) \in \mathcal{O}_K$。因此 $A_{n_0+q} \equiv A_{n_0}$（模 $p\mathcal{O}$）；由于两边都属于 $\mathcal{O}_K[X]$ 和 $p\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_K = p\mathcal{O}_K$，故该同余关系模 $p\mathcal{O}_K$ 成立。

应用引理 3.5 $n-n_0$ 次得到

$$A_{n+q} = A_{n_0+q}^{[f^{(n-n_0)}]} \equiv A_{n_0}^{[f^{(n-n_0)}]} = A_n \pmod{p^{n-n_0+1}}.$$

最后一个陈述可通过链式推导得到，因为所有模数 p^{n-n_0+1}、p^{n+q-n_0+1}.....都是 p^{n-n_0+1} 的倍数。□

对于最小多项式，增长同余给出了结式的 p-进赋值的下界。

推论 3.7。设 α 在 $\mathcal{O}_K$ 上是整性的，且关于 K 的次数为 D；设 P_n 是 $f^{(n)}(\alpha)$ 在 K 上的最小多项式，并且 $D_n =$次数 P_n。如果 $n_0 \le n < m$、$q \mid m-n$ 和 $P_n \neq P_m$，则

$$v_p\big(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}\,\mathrm{Res}(P_n, P_m)\big) \;\ge\; [K:\mathbb{Q}]\,(n-n_0+1)\,\frac{D_n D_m}{D}.$$

证明。设 A 是 α 在 K 上的最小多项式，因此 $A_k = P_k^{D/D_k}$。将 $A_m = A_n + p^{n-n_0+1}B$ 写成含有 $B \in \mathcal{O}_K[X]$ 的形式。对于 P_n 的每个根 y，有 $A_m(y) = p^{n-n_0+1}B(y)$，因此 Res(P_n, A_m) = $p^{(n-n_0+1)D_n}$ Res(P_n, B)，其中 Res(P_n, B) $\in \mathcal{O}_K$。取范数后，$p^{[K:\mathbb{Q}](n-n_0+1)D_n}$ 整除 N Res(P_n, A_m) = N Res(P_n, P_m)$^{D/D_m}$。□

4. Degrees along the orbit, and the adapted basis

本节记录次数沿轨道的变化，并引入一个适用于 f 的多项式基，其取值由典范局部高度控制。

我们首先记录次数 D_n 沿轨道的变化。

引理 4.1。设 $\alpha \in K$ 具有无限的 f-轨道，$D = [K(\alpha) : K]$，且 $D_n = [K(f^{(n)}(\alpha)) : K]$。则：

(*a*) $D_{n+1} = D_n/k_n$ 满足 $k_n = [K(f^{(n)}(\alpha)) : K(f^{(n+1)}(\alpha))] \le d$，且 $D_n \mid D$。因此，D/D_n 整除 $\delta_d(D)$，即 D 的最大因子，且其所有素因子均为 $\le d$，并且对所有 n 都有 $D_n \ge D/\delta_d(D)$。(*b*) 对于 $n \neq m$，$f^{(n)}(\alpha)$ 的任何 K-共轭都不等于 $f^{(m)}(\alpha)$ 中的一个；特别地，$P_n \neq P_m$。

证明。(a) 令 $y = f^{(n)}(\alpha)$。于是 $K(f(y)) \subseteq K(y) \subseteq K(\alpha)$，且 y 是 $f(X)-f(y)$ 的根，其次数为 d，因此 $k_n \le d$。故 $D/D_n = k_0 \cdots k_{n-1}$ 整除 D，且其所有素因子均为 $\le d$，所以它整除 $\delta_d(D)$。

(b) $\widehat{h}_f$ 在共轭下是不变量，且 $\widehat{h}_f(f^{(k)}(\alpha)) = d^k \widehat{h}_f(\alpha)$，其中 $\widehat{h}_f(\alpha) > 0$。□

对于具有以 d 为底的展开式 $m = \sum_j \varepsilon_j d^j$ 的 $m \ge 0$，$0 \le \varepsilon_j < d$，令

$$B_m = \prod_j \big(f^{(j)}\big)^{\varepsilon_j} \in \mathcal{O}_K[x], \qquad \sigma_d(m) = \sum_j \varepsilon_j.$$

多项式 B_m 是次数为 m 的首一多项式，其取值由典范局部高度控制。

引理 4.2。B_m 是次数为 m 的首一多项式，并且对于每个嵌入 σ 和 $z \in \mathbb{C}$，

$$|\sigma B_m(z)| \;\le\; R_f^{\sigma_d(m)}\, e^{m\lambda_{\sigma f}(z)}.$$

此外，对于 $0 \le m < N$，$\sigma_d(m) \le (d-1)(\log_d N + 1)$。

证明。B_m 是若干首一多项式的乘积，其总次数为 $\sum \varepsilon_j d^j = m$。根据引理2.1，对于 $w = \sigma f^{(j)}(z)$，$|\sigma f^{(j)}(z)| \le R_f e^{d^j \lambda_{\sigma f}(z)}$；将它们相乘。整数 $m < N$ 至多有 $\log_d N + 1$ 个数字，且每个数字至多为 $d-1$。□

5. A bound over ranges for polynomials

本节通过比较由该轨道中若干个连续点构成的范德蒙德行列式的 p-进下界与阿基米德上界，证明在相应范围内的界。

在全文中， n_0 和 q 与引理3.2中相同， R_f 按引理2.1之后的定义，且对于$\beta \in K$ 我们记作 $\beta_n = f^{(n)}(\beta)$。

5.1. 论证概述。设 β 是有理数域 K 上次数为 D' 的代数整数，并假设当 $n_0 \le n \le n_0 + L$ 时， β_n 的次数保持为 D'。收集 β_{n_0}、β_{n_0+1}、……、β_{n_0+L} 的所有共轭元：它们是 $N = (L+1)D'$ 个互不相同的代数整数，其范德蒙德行列式的平方在 K 的所有嵌入下相乘后，是一个非零有理整数。我们用两种方法估计这个整数。

(i) 根据增长同余（推论 3.7），只要 $q \mid m-n$， β_n 和 β_m 的共轭元就会在 p-进意义下彼此接近； n 越大，它们就越接近：它们的最小多项式的结式可被 $p^{(n-n_0+1)D'}$ 整除。这样的层级对约有 $L^2/(2q)$ 个，权重最高为 L 的 $n-n_0+1$，累加这些权重可知，对嵌入取平均后，行列式的绝对值至少约为 $p^{D'L^3/(6q)}$，因为该整数非零且可被 p 的高次幂整除。

(ii) 根据 Hadamard 不等式，行列式至多等于各行长度的乘积。若将各行写在单项式基 $1, x, \dots, x^{N-1}$ 下，则点 z 对应的行长度约为 $\max(1,|z|)^N$，而所有点对应的这些长度之积仅由 Weil 高度控制，它可能远大于典范高度。我们改用 §4 的适配基 B_m；相对于单项式，它是三角形的（因此行列式不变），且其取值由典范局部高度 λ 控制（引理 4.2）。于是， z 对应的行长度约为 $e^{N\lambda(z)}$ 乘以一个因子 $N^{O(1)}$，所有点的 λ 之和为 $D'\sum_n d^n \widehat{h}_f(\beta) \approx D' d^L \widehat{h}_f(\beta)$（在这一启发式论证中，我们忽略固定的平移量 n_0）。因此，行列式至多约为 $\exp\big(O(N\log N) + N \cdot D' d^L \widehat{h}_f(\beta)\big)$。

比较 $D'L^3 \log p/(6q) \lesssim D'L \log N + (L+1)D'^2 d^L \widehat{h}_f(\beta)$，即

$$\widehat{h}_f(\beta) \gtrsim \frac{L^2 \log p/(6q) - \log N}{D'\, d^L}.$$

只要 $L^2 \gg q \log N \approx q \log D'$，分子就是正的，因此最佳选择是 $L \asymp \sqrt{q \log D'}$，这给出 $\widehat{h_f(\beta)} \gg D'^{-1} d^{-O(\sqrt{q \log D'})}$。本节的其余部分将对此作出精确说明。

5.2. 行列式。固定 β 在 $\mathcal{O}_K$ 上的整性且具有无限 f-轨道，令 $D' = [K(\beta) : K]$，并令 $L \ge 1$ 为满足以下条件的整数

$$[K(\beta_n) : K] = D' \qquad \text{for } 0 \le n \le n_0 + L. \tag{4}$$

于是对于这些 n，有 $K(\beta_n) = K(\beta)$，因为 $K(\beta_n) \subseteq K(\beta)$且次数相同。令$P_n$ 为 β_n 在 K上的最小多项式，它是首一的，且系数属于 $\mathcal{O}_K$，并令$N = (L+1)D'$。

对于嵌入 $\sigma : K \to \mathbb{C}$，令 Z_σ为数 $\tau(\beta_n)$ 的集合，其中 $n_0 \le n \le n_0 + L$，且 τ遍历扩张 σ的 D' 个嵌入 $K(\beta) \to \mathbb{C}$。对于固定的 n，这些是 σP_n的 D' 个根，它们彼此不同；根据引理 4.1(b)，当 $n \ne m$时， σP_n 的根都不是 σP_m 的根。因此 $|Z_\sigma| = N$。以任意方式排列 Z_σ，并令

$$\Delta_\sigma = \det\big(\sigma B_m(z)\big)_{z \in Z_\sigma,\ 0 \le m < N},$$

其中 σB_m 是 B_m 的多项式§4 其系数经 σ共轭。

行列式 Δ_σ 是范德蒙德行列式，因此 Δ_σ^2 的乘积是一个由判别式和结式构成的非零整数。

引理 5.1. 差一个符号， Δ_σ 是 $\prod_{z<z'}(z'-z)$ 的范德蒙德行列式，并且

$$\prod_{\sigma}\Delta_\sigma^2 \;=\; \pm\,\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}\Big(\prod_{n_0\le n\le n_0+L}\operatorname{disc}(P_n)\prod_{n_0\le n<m\le n_0+L}\operatorname{Res}(P_n,P_m)^2\Big).$$

这是一个非零有理整数，并且每个范数 $\mathrm{NRes}(P_n,P_m)$ 都是非零有理整数。

证明。由于 σB_m 是次数为 m 的首一多项式（引理 4.2），矩阵（σB_m（z））可由范德蒙德矩阵（z^m）通过对每一列 m加上第 0 列至第 $m-1$列的线性组合得到；这些操作不会改变行列式。按照 z 和 z'的层级，对范德蒙德行列式中的因子 $z'-z$ 分组。两个点都处于层级 n 的因子构成一个乘积，其平方为 ±disc（σP_n）；一个点处于层级 n 、另一个点处于层级 $m>n$ 的因子，差一个符号，等于对 σP_n 的根 y 和 σP_m的根 y' 取积 $y'-y$，即 ± Res（σP_n， σP_m），因为这两个多项式都是首一的。因此， $\Delta_\sigma^2=\pm\sigma\big(\prod$disc（$P_n$）$\prod$ Res（P_n， P_m）^{2}），而对 σ 取积便是范数。元素 disc（P_n）和 Res（P_n， P_m）属于 $\mathcal{O}_K$，因为 P_n 是具有整系数的首一多项式；它们非零是因为Z_σ 中的点互不相同。□

5.3. **来自素数 p 的下界**。令

$$S_q(L)=\sum_{j=0}^{L}(j+1)\Big\lfloor\frac{L-j}{q}\Big\rfloor.$$

这以权重 $j+1$ 计数层级 $n=n_0+j<m\le n_0+L$与 $q\mid m-n$ 的配对：对于固定的 j，有 $\lfloor(L-j)/q\rfloor$ 个这样的 m。

根据增长同余，该整数可被 p 的一个较大幂整除。

引理 5.2。 在 (4)下，

$$(5)\quad \sum_{\sigma}\log|\Delta_\sigma| \;\ge\; [K:\mathbb{Q}]\,D'\,S_q(L)\log p,\qquad S_q(L)\;\ge\;\frac{(L+1)(L+2)(L-3q+3)}{6q}.$$

证明。令 $\mathcal{N}=\prod_\sigma\Delta_\sigma^2$，根据引理 5.1，这是一个非零整数。于是 $|\mathcal{N}|\ge p^{v_p(\mathcal{N})}$，即 $2\sum_\sigma\log|\Delta_\sigma|\ge v_p(\mathcal{N})\log p$。引理 $v_p(\mathcal{N}$中的所有因子都是整数，因此它至少包含结式所贡献的部分：

$$v_p(\mathcal{N})\;\ge\;2\sum_{\substack{n_0\le n<m\le n_0+L\\ q\mid m-n}}v_p\big(\mathrm{N}\operatorname{Res}(P_n,P_m)\big).$$

对于每一对这样的配对，推论 3.7应用于 $\alpha=\beta$ 和 $D_n=D_m=D=D'$，得到$v_p(\mathrm{NRes}(P_n,P_m))\ge[K:\mathbb{Q}](n-n_0+1)D'$；其假设 $P_n\ne P_m$由引理4.1(b) 得到满足。记 $n=n_0+j$ 并对 m 求和，得到第一个不等式。

其次，注意到对于每个整数 $u\ge0$，都有 $u-q\lfloor u/q\rfloor\le q-1$，因此$\lfloor u/q\rfloor\ge(u-q+1)/q$。将其应用于 $u=L-j$，并利用 $\sum_{j=0}^{L}(j+1)(L-j)=^{L(L+1)(L+2)}6$以及 $\sum_{j=0}^{L}(j+1)=^{(L+1)(L+2)}\overline{2}$：

$$S_q(L)\;\ge\;\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{L}(j+1)(L-j)-\frac{q-1}{q}\sum_{j=0}^{L}(j+1)$$

$$= \frac{1}{q}\cdot\frac{L(L+1)(L+2)}{6} - \frac{q-1}{q}\cdot\frac{(L+1)(L+2)}{2},$$

这等于 $\frac{(L+1)(L+2)(L-3q+3)}{6q}$。 □

5.4. **阿基米德赋值给出的上界**。令

$$\Lambda = \Lambda(N) = \tfrac{1}{2}\log N + (d-1)\Big(\frac{\log N}{\log d}+1\Big)\log R_f.$$

另一方面，由 Hadamard 不等式和引理 4.2 可得 Δ_σ 可用 β的典范高度给出上界。

引理 5.3. 在 (4)的条件下，

$$\sum_\sigma \log|\Delta_\sigma| \;\le\; [K:\mathbb{Q}]\,N\Lambda + 2[K:\mathbb{Q}]\,N\,D'\,d^{n_0+L}\,\widehat{h}_f(\beta).$$

证明。 固定 σ。根据 Hadamard 不等式， $|\Delta_\sigma|$ 至多为 $z\in Z_\sigma$ 各行欧几里得长度（$\sigma B_m(z)$）$_{0\le m<N}$的乘积。根据引理 4.2，每个元素都满足

$$|\sigma B_m(z)| \;\le\; R_f^{\sigma_d(m)} e^{m\lambda_{\sigma f}(z)} \;\le\; R_f^{(d-1)(\log_d N+1)}\, e^{N\lambda_{\sigma f}(z)},$$

取 $m<N$、 $\lambda_{\sigma f}\ge 0$ 和 $R_f\ge 1$。一行有 N 个元素，因此其长度至多为此上界的 $\sqrt{N}$ 倍。对 N 行取对数并求和，

$$\log|\Delta_\sigma| \;\le\; N\Lambda + N\sum_{z\in Z_\sigma}\lambda_{\sigma f}(z).$$

现在对 σ 求和。固定 n 后，点 $\tau(\beta_n)$，其中 σ 和 τ 变化，是 β_n 在 $K(\beta_n)=K(\beta)$ 到 $\mathbb{C}$ 的所有嵌入下的像；由（3），

$$\sum_\sigma\sum_\tau \lambda_{\sigma f}(\tau\beta_n) = [K(\beta):\mathbb{Q}]\,\widehat{h}_f(\beta_n) = [K:\mathbb{Q}]\,D'\,d^n\widehat{h}_f(\beta),$$

因为 β_n具有整性，且 $\widehat{h}_f(f^{(n)}(\beta)) = d^n\widehat{h}_f(\beta)$。对 $n_0\le n\le n_0+L$求和并使用 $\sum_{n\le n_0+L} d^n \le \frac{d}{d-1}d^{n_0+L}\le 2d^{n_0+L}$即可得到结论。□

5.5. **比较与范围的选择**。比较两个界，并取L为 $\sqrt{q}\log D'$ 阶，我们得到一个从第一步开始的范围的界。

命题 5.4。存在仅取决于 K 和 f 的 $a\ge 1$ 和 $c_3>0$，使得下述性质成立。设 $\beta\in K$ 在 $\mathcal{O}_K$ 上具有整性，且具有无限的 f-轨道；设 $D'=[K(\beta):K]$，令 $\ell\ge\max\{\log 6, \log 3D'\}$，并令 $L=\lceil a\sqrt{q\ell}\,\rceil$。如果对于$0\le n\le n_0+L$， $[K(f^{(n)}(\beta)):K]=D'$，那么

$$\widehat{h}_f(\beta) \;\ge\; \frac{c_3}{D'}\,d^{-a\sqrt{q\ell}}.$$

证明。结合引理 5.2 和 5.3，除以 $[K:\mathbb{Q}]D'$，并使用 $N=(L+1)D'$：

$$S_q(L)\log p \;\le\; (L+1)\Lambda + 2(L+1)\,D'\,d^{n_0+L}\,\widehat{h}_f(\beta).$$

等价地，

$$\widehat{h}_f(\beta) \;\ge\; \frac{S_q(L)\log p - (L+1)\Lambda}{2(L+1)\,D'\,d^{n_0+L}}. \tag{6}$$

这只有在分子为正时才有用，并且我们选择 L 使其至少为 $(L+1)\Lambda$，也就是说，

$$S_q(L)\log p \;\ge\; 2(L+1)\Lambda. \tag{7}$$

量 Λ 的增长量约为 $\log N$：事实上 $\Lambda \le b_1 \log N + b_2$ 在 $b_1 = \frac{1}{2} + (d-1)\log R_f / \log d$ 和 $b_2 = (d-1)\log R_f$，它们仅取决于 d 和 R_f。由 (5)，不等式 (7) 可由下式推出

$$(L+2)(L-3q+3) \ge \frac{12q}{\log p}\big(b_1 \log N + b_2\big).$$

现在将两边都用 ℓ 来界定。左边，如果 $a \ge 6\sqrt{q}/\sqrt{\log 6}$，那么 $L \ge a\sqrt{q\log 6} \ge 6q$，因此 $L - 3q + 3 \ge L/2$ 以及 $(L+2)(L-3q+3) \ge \frac{1}{2}L^2 \ge \frac{1}{2}a^2 q\ell$。右边，$\log D' \le \ell$ 且 $L+1 \le a\sqrt{q}\,\ell + 2$（因为对于 $\ell \ge 1$，$\sqrt{\ell} \le \ell$），所以

$$\log N = \log(L+1) + \log D' \le \ell + \log(a\sqrt{q}\,\ell + 2) \le 2\ell + \log(a\sqrt{q}+2),$$

使用 $\log(a\sqrt{q}\,\ell + 2) \le \log \ell + \log(a\sqrt{q}+2) \le \ell + \log(a\sqrt{q}+2)$。因此，只要满足以下条件，7) 就成立：

$$\frac{1}{2}a^2\,\ell \ge \frac{12}{\log p}\Big(2b_1\,\ell + b_1 \log(a\sqrt{q}+2) + b_2\Big) \qquad \text{for all } \ell \ge \log 6. \tag{8}$$

除以 $\ell \ge \log 6$ 后，只需 $\frac{1}{2}a^2 \ge \frac{12}{\log p}\big(2b_1 + (b_1 \log(a\sqrt{q}+2) + b_2)/\log 6\big)$。左边的增长类似于 a^2，右边则类似于 $\log a$，因此对所有足够大的 a 都成立；我们固定这样一个 $a \ge 6\sqrt{q}/\sqrt{\log 6}$，它只取决于 K 和 f。

由此 a，（7）成立，因此（6）的分子至少为 $(L+1)\Lambda$，且

$$\widehat{h}_f(\beta) \ge \frac{\Lambda}{2D'\,d^{n_0+L}}.$$

由于 $N \ge 2$, $\Lambda \ge \Lambda_0 := \frac{1}{2}\log 2$。最后 $L \le a\sqrt{q\ell} + 1$，因此 $d^{n_0+L} \le d^{n_0+1} d^{a\sqrt{q\ell}}$，命题成立，其中 $c_3 = \Lambda_0/(2d^{n_0+1})$。□

5.6. **范围上的界的证明**。应用命题 5.4 于 $f^{(j)}(\alpha)$，我们得到从任意步骤 j 开始的范围的界。

命题 *5.5*。设 $f \in \mathcal{O}_K[x]$ 在 p 处具有 *Frobenius* 形状，设 $\alpha \in K$ 在 $\mathcal{O}_K$ 上整性且具有无限轨道，$D = [K(\alpha) : K] \ge 2$，$D_n = [K(f^{(n)}(\alpha)) : K]$ 且 $k_n = D_n/D_{n+1} \in \{1, \dots, d\}$。设 $\ell = \log 3D$，设 a, c_3 如命题 *5.4* 中所定义，并且 $L = \lceil a\sqrt{q\ell} \rceil$。如果 $j \ge 0$ 使得 D_n 对于 $j \le n \le j + n_0 + L$ 为常数，则

$$\widehat{h}_f(\alpha) \ge \frac{c_3}{D}\, d^{-a\sqrt{q\ell}} \prod_{n<j} \frac{k_n}{d}.$$

证明。令 $\beta = f^{(j)}(\alpha)$ 和 $D' = D_j \le D$。由于 f 是具有整系数的首一多项式，β 是整的，并且它具有无限轨道。由于 $D' \le D$，我们有 $\ell = \log 3D \ge \max\{\log 6, \log 3D'\}$，且次数 $[K(f^{(n)}(\beta)) : K] = D_{j+n}$ 对于 $0 \le n \le n_0 + L$ 均等于 D'。因此，命题 5.4 可应用于 β，取此 ℓ，从而得到 $\widehat{h}_f(\beta) \ge c_3 D'^{-1} d^{-a\sqrt{q\ell}}$。现在，根据引理 4.1(a)，$\widehat{h}_f(\beta) = d^j \widehat{h}_f(\alpha)$，且 $D/D' = k_0 k_1 \cdots k_{j-1}$。因此

$$\widehat{h}_f(\alpha) = d^{-j}\widehat{h}_f(\beta) \ge \frac{c_3}{D'd^j}\, d^{-a\sqrt{q\ell}} = \frac{c_3}{D}\, d^{-a\sqrt{q\ell}} \prod_{n<j} \frac{k_n}{d}.$$

□

6. Local dynamics at $\mathfrak{p}$

本节研究 f 在 $\mathbb{C}_p$ 的剩余圆盘上的动力学：每个圆盘恰好包含一个周期点，并且轨道以取决于分歧的速率趋近该点。

全文中，$f \in \mathcal{O}_K[x]$ 是一个次数为 $d = p^r$、在 p 处具有 Frobenius 形状的首一多项式（定义 1.1），而 $\mathfrak{p} \mid p$ 是 K 的一个素数。令 $\mathbb{C}_p$ 为 $K_{\mathfrak{p}}$ 的代数闭包的完备化，固定一个在 K 上的嵌入 $K \hookrightarrow \mathbb{C}_p$，令 v 为满足 $v(p) = 1$ 的赋值，$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ 为赋值环，$x \mapsto \bar{x}$ 为约化 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \to \mathbb{F}_p$。对于 $\mathbb{C}_p$ 上的多项式 H，令 $v(H)$ 表示其系数的最小赋值。

我们首先将 f 写成一种适合其模 p 约化的形式。

定义 6.1。写成 $c' = b^d + c$，其中 b，c 如定义 1.1 所述，并令 $h \in \mathcal{O}_K[x]$ 为满足以下条件的多项式

$$f(x) = x^d + c' + p\,h(x).$$

这样的 h 之所以存在，是因为 $(x+b)^d \equiv x^d + b^d$ (模 $p\mathcal{O}_K[x]$)。令

$$\rho(s) = \min\{ds,\ s+1\} \qquad (s \geq 0),$$

一个递增函数，且 $\rho(s) > s$ 对 $s > 0$ 成立。

剩余圆盘。对于 x，$y \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$，$v(x-y) > 0$ 当且仅当 $\bar{x} = \bar{y}$。对于 $\xi \in \mathbb{F}_p$，令 $U_\xi = \{x \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} : \bar{x} = \xi\}$ 为其剩余圆盘，它在 $\mathbb{C}_p$ 中既是开集也是闭集。

第一个引理描述了 f 在一个剩余圆盘上的情形，并引入不变量 $\vartheta(x) = v(f'(x))$。

引理 6.2。(a) 约化 $\bar{f}(x) = x^d + \bar{c}'$ 是 $\mathbb{F}_p$ 的一个双射，且 $\mathbb{F}_p$ 中的每个点对它来说都是周期点；令 q_ξ 为 ξ 的精确周期。

(b) 对于 $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$，令 $a(t) = f(x+t) - f(x)$。那么 $a(0) = 0$ 并且

$$a(t) = t^d + t\,a_1(t), \qquad a_1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[t], \quad v(a_1) \geq 1.$$

(c) 对于 x，$y \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ 满足 $\bar{x} = \bar{y}$：$v(f(x) - f(y)) \geq \rho(v(x-y))$。

(d) 按照 *(b)* 中的记号，令 $\vartheta(x) = v(a'(0)) = v(f'(x))$。有 $\vartheta(x) \geq 1$，$\vartheta(x) = \infty$ 当且仅当 x 是 f 的临界点；并且存在 ϑ_0，使得对于除有限个剩余圆盘之外的所有 x，$\vartheta(x) = \vartheta_0$。*(e)* 若 $x \in \mathbb{C}_p$ 不是整的，则 $v(f(x)) = d\,v(x) < v(x) < 0$。

证明。(a) 令 $\mathbf{k}$ 为 $\mathfrak{p}$ 的剩余域。约化是 $x \mapsto x^{p^r}$ 与平移 $\bar{c}' \in \mathbf{k}$ 的复合，它们是 $\mathbb{F}_p$ 的两个双射，并且保持每个包含 $\mathbf{k}$ 的有限域 $\mathbb{F}$；在有限集合 $\mathbb{F}$ 上，双射就是置换，而 $\mathbb{F}_p$ 中的每个点都属于这样的一个 $\mathbb{F}$。

(b) 根据定义 6.1，$a(t) - t^d = \sum_{0<i<d} \binom{d}{i} x^{d-i} t^i + p\big(h(x+t) - h(x)\big)$。由于 $p \mid \binom{d}{i}$ 对于 $0 < i < d$，这个多项式在 t 中的所有系数的赋值均为 ≥ 1，且它在 $t = 0$ 处为零；因此它等于 $t\,a_1(t)$，如所声称。

(c) 令 $t = y - x$，使得 $v(t) = v(x-y) > 0$ 且 $f(y) = f(x) + a(t)$。由 (b) 可得，$v(f(x) - f(y)) = v(t^d + t\,a_1(t)) \geq \min\{dv(t),\ v(t) + 1\}$。

(d) 显然 $a'(0) = f'(x)$。由定义 6.1，$f'(x) = dx^{d-1} + p\,h'(x)$，且对于整性 x，这两项的赋值均为 ≥ 1。多项式 $f' \in \mathcal{O}_K[x]$ 非零，其首项系数为 d；将 $f' = \lambda g_0$ 写成 $\lambda \in K_{\mathfrak{p}}^{\times}$，其中 g_0 具有单位系数。约化 $\bar{g}_0 \neq 0$ 在 $\mathbb{F}_p$ 中至多有 $d-1$ 个零点，而在它们的剩余圆盘之外，$\vartheta = v(\lambda)$。

(e) 如果 $v(x) < 0$，那么 f 的每一项 $a_i x^i$、$i < d$ 的赋值为 $\geq iv(x) > dv(x) = v(x^d)$。

□

利用引理 6.2（c）中的收缩，我们发现每个剩余圆盘中恰好有一个周期点。

引理 6.3。每个剩余圆盘 U_ξ 恰好包含 f的一个周期点 η_ξ 。它的精确周期为 q_ξ, $f(\eta_\xi)=\eta_{\bar f(\xi)}$；若 $x\in U_\xi$不是周期点，则 $v(x-\eta_\xi)=v(f^{(q_\xi)}(x)-x)$。若 $F\subseteq\mathbb{C}_p$是包含 $K_\mathfrak{p}$和 $U_\xi\cap F\neq\emptyset$的闭子域，则 $\eta_\xi\in F$。$\mathbb{C}_p$ 中的 f 的每个周期点都是整的，因此 η_ξ, $\xi\in\mathbb{F}_p$是全部周期点。

证明。令 $q=q_\xi$ 和 $G=f^{(q)}$。则 $G(U_\xi)\subseteq U_\xi$，并且根据引理 6.2(c)，对于 $x\neq y$ 属于 U_ξ，有 $v(G(x)-G(y))>v(x-y)$；因此 G 在 U_ξ中至多有一个不动点。为证明存在性，取 $x\in U_\xi$（若可能，则取自 F），并令 $s_k=v(G^{k+1}(x)-G^k(x))$。于是 $s_0>0$ 且$s_{k+1}\geq\rho(s_k)\geq s_k+\min\{(d-1)s_0,1\}$，故 $s_k\to\infty$。由超度量不等式，序列 $G^k(x)$ 是柯西序列；其极限 η 属于闭集 U_ξ，若 x 属于 F，则该极限也属于 F，因为 f的系数属于 K。它是 G的不动点，因为 G连续（$v(G(x)-G(y))\geq v(x-y)$）。对于 $0<j<q$，$f^{(j)}(\eta)$ 属于$U_{\bar f^j(\xi)}\neq U_\xi$，所以 η的精确周期为 q。U_ξ中的周期点的周期必被 q整除，因为其周期在 $\bar f$作用下固定 ξ；所以它是某个 G^k,$k\geq1$ 的不动点，而将上述论证应用于 G^k可知它等于 η。点 $f(\eta_\xi)$ 是周期点且属于$U_{\bar f}(\xi)$，所以它等于 $\eta_{\bar f(\xi)}$。若 $x\in U_\xi$不是周期点且 $s=v(x-\eta_\xi)$，则 $v(G(x)-\eta_\xi)=v(G(x)-G(\eta_\xi))>s$，因此 $v(G(x)-x)=s$。

周期为 q 的点是首一多项式 $f_{(q)}(x)-x\in\mathcal{O}_K[x]$的根，因此具有整性，故属于某个 U_ξ。□

定义在 $K_\mathfrak{p}$ 的有限扩张上的点的轨道，会以由分歧指数控制的速率趋近于其所在圆盘内周期点的轨道。

引理 6.4。设 $F\subset\mathbb{C}_p$ 是 $K_\mathfrak{p}$ 的有限扩张，其绝对分歧指数为 e_F，令 $e\geq e_F$，并置 $m_0=\lceil\log_d e\rceil\geq0$。设 $x\in F$ 具有整性且轨道无限，并且 $\eta=\eta_{\bar x}$。则对所有 $n\geq0$,

$$v\big(f^{(n)}(x)-f^{(n)}(\eta)\big)\ \geq\ \min\{d^n/e,\ 1\},$$

且对于 $n\geq m_0$，有 $v(f^{(n)}(x)-f_{(n)}(\eta))\geq n-m_0+1$。

证明。注意到 $e\geq e_F\geq1$，因此 $m_0\geq0$。令 $q=q_{\bar x}$。于是，$v(f^{(q)}(x)-x)$ 是 F 中某个非零元素的赋值（由于 x 不是周期的，该元素确实非零），且该赋值为正；因此至少为 $1/e_F\geq1/e$。由引理 6.3，$g_0=v(x-\eta)\geq1/e$。置 $g_n=v(f^{(n)}(x)-f(_n)(\eta))$；由引理 6.2(c)，$g_{n+1}\geq\rho(g_n)$。由于 ρ 是递增的，归纳法给出 $g_n\geq\min\{d^n/e,1\}$：若对 n 成立，则 $g_{n+1}\geq\min\{d\min\{d^n/e,1\},\ 1\}\geq\min\{d^{n+1}/e,1\}$。由于 $d^{m_0}\geq e$，$g_{m_0}\geq1$。若 $g\geq1$，则 $dg\geq g+1$，故 $\rho(g)=g+1$；因此对于 $n\geq m_0$，有 $g_n\geq n-m_0+1$。□

以下不变量控制次数可能下降的位置。

定义 6.5。令 $\mathcal{S}_\mathfrak{p}^{\mathrm{fin}}$如引言中所述（如果 f 没有周期性的有限临界点，则为空），置

$$\kappa_\mathfrak{p}^*=\sup\{\vartheta(\eta):\ \eta\text{ periodic},\ \bar\eta\notin\mathcal{S}_\mathfrak{p}^{\mathrm{fin}}\},\qquad\nu_\mathfrak{p}=\lfloor\kappa_\mathfrak{p}^*\rfloor,$$

令 ϑ 如引理 6.2 (d) 中所述。对于 $\alpha\in\overline{K}$，$e_\mathfrak{p}(\alpha)$ 表示 $K(\alpha)$ 中位于 $\mathfrak{p}$之上的某个素数的最大绝对分歧指数。

这些不变量是有限的。

引理 6.6. </style}有，因此。集合 是有限的，且 $(\mathcal{S}_\mathfrak{p}^{\mathrm{fin}})$ $=\mathcal{S}_\mathfrak{p}^{\mathrm{fin}}$。

证明. 超吸引周期只有有限个，因为 f' 只有有限个零点，而f 将它们各自映射到自身；所以 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$是有限的，且 $\bar{f}(\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}) = \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$。根据引理 6.2(d)，$\vartheta \geq 1$，并且在有限个 ξ之外，$\vartheta(\eta_\xi) = \vartheta_0$；特别是，$\kappa_{\mathfrak{p}}^*$的定义中的集合非空。对于剩下的有限个 $\xi \notin \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$，$\eta_\xi$ 是周期的，且不属于超吸引周期，因此不是临界的，所以 $\vartheta(\eta_\xi) < \infty$。由于周期点恰好是 η_ξ （引理 6.3），$\kappa_{\mathfrak{p}}^*$ 是有限个有限数中的最大值。□

对于 $x^d + c$，不变量 $\kappa_{\mathfrak{p}}^*$ 可以显式计算。

引理 6.7。设 $f = x^d + c$ 满足 $c \in \mathcal{O}_K$、$d = p^r$，并假设 0 不是周期的。令$q_0 \geq 1$ 为满足 $f^{(q_0)}(0) \in \mathfrak{p}$的最小者。则 $\kappa_{\mathfrak{p}}^* = r + (d-1)\, v\big(f_{(q_0)}(0)\big)$。

证明。这里 $f'(\eta) = d\eta^{d-1}$，因此 $v(f'(\eta_\xi)) = r + (d-1)v(\eta_\xi)$，除非 $\xi = 0$，否则这等于 r。$\bar{0}$ 的精确周期为 q_0，因为当且仅当 $f^{(j)}(0) \in \mathcal{O}_K$ 属于 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ 的极大理想时，它属于 $\mathfrak{p}$。由于 0 不是周期的，利用引理 6.3 及 $x = 0$ 可得 $v(\eta_0) = v(f^{(q_0)}(0))$。□

我们给出一些值。

例 6.8。对于 $f = x^2 + c$，当 $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}$ 和 $p = 2$ 时：如果 c 为偶数，则 $q_0 = 1$ 和 $\kappa_2^* = 1 + v_2(c)$；如果 c 为奇数，则 $q_0 = 2$、$f^{(2)}(0) = c(c+1)$ 以及 $\kappa_2^* = 1 + v_2(c+1)$。因此，对于 $x^2 + 1$ 和 $x^2 - 2$，$\kappa_2^* = 2$；对于 $x^2 + 3$，$\kappa_2^* = 3$。对于在 $\mathbb{Q}$ 上的 $x^p + c$，其中 $p \nmid c$ 且 0 不是周期的，$q_0 = p$ 和 $\kappa_p^* = 1 + (p-1)\, v_p(f^{(p)}(0))$；当 $p \mid c$ 时，$q_0 = 1$ 和 $\kappa_p^* = 1 + (p-1)\, v_p(c)$。

7. Where the degree can drop, and the proof of Theorem A(i)

本节证明定理B，然后由此和命题A(i) 推出推论。命题 5.5。全文采用 §6 中的记号；特别地，$K \subset \mathbb{C}_p$ 固定，$v(p) = 1$，且 $\alpha_n = f^{(n)}(\alpha)$。

7.1. 证明概要。假设第 n 步发生次数下降，即 α_n 的共轭元比 α_{n+1}多。于是 α_n 的两个不同共轭元在 f下的像相同；将它们记为 $x_n \neq y_n$，其中 $f(x_n) = f(y_n)$。我们如下估计 n。

(i) 点 x_n 和 y_n 是整的（我们将看到这是自动成立的），且约化 f 是单射（引理 6.2(a)）；因此 x_n 和 y_n 位于同一个剩余圆盘中。令 η 为该圆盘的周期点（引理 6.3 ）。(ii) x_n 和 y_n 都是 n 次迭代，由 α 的共轭元得到，并且轨道趋近于周期点：由引理 6.4，对 $n \geq m_0$ 而言，点 x_n 和 y_n 与 η的距离小于 $p^{-(n-m_0+1)}$，其中 $m_0 = \lceil \log_d e_{\mathfrak{p}}(\alpha) \rceil$。(iii) 由于 $f(x_n) = f(y_n)$，差商 $(f(x_n) - f(y_n))/(x_n - y_n)$ 为零。但 f 在靠近 η 的两个点处的差商接近 $f'(\eta)$。因此，$f'(\eta)$ 可被 p 的高次幂整除，具体而言是 $\vartheta(\eta) = v(f'(\eta)) \geq n - m_0 + 1$。

若 $\bar{\eta} \notin \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$，则根据 $\kappa_{\mathfrak{p}}^*$ 的定义，$\vartheta(\eta) \leq \kappa_{\mathfrak{p}}^*$，从而得到 $n \leq m_0 + \kappa_{\mathfrak{p}}^* - 1$。假设 $\bar{\alpha}' \notin \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$保证了 $\bar{\eta} \notin \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$，因为 $\bar{\eta} = \bar{f}^n(\bar{\alpha}')$，且 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$的补集在 f 下保持稳定。

7.2. 辅助引理。次数降低会产生 α 的两个共轭元，它们的 n 次迭代彼此不同，但在 f 下的像相同。

引理 7.1。设 $K \subseteq F \subseteq K$ 是一个域，$\alpha \in K$，且 α' 是 α 的 K-共轭元。若 $[F(\alpha_{n+1}) : F] < [F(\alpha_n) : F]$，则存在 α 的 K-共轭元 x、y，满足 $x = \alpha'$，使得

$$f^{(n)}(x) \neq f^{(n)}(y), \qquad f^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(y).$$

此外， $\mathbb{C}_p$ 中的域 $K_{\mathfrak{p}}(x)$ 和 $K_{\mathfrak{p}}(y)$ 的绝对分歧指数至多为 $e_{\mathfrak{p}}(\alpha)$。

证明。由于 $F(\alpha_{n+1}) \subseteq F(\alpha_n)$，且次数不同，因此该包含关系是严格的，故根据伽罗瓦理论，存在 $\tau \in$伽罗瓦群$(K/F(\overline{\alpha_{n+1}}))$，满足 $\tau(\alpha_n) \neq \alpha_n$。取定 $\varrho \in$伽罗瓦群$(\overline{K}/K)$，使得 $\varrho(\alpha) = \alpha'$，并令 $x = \varrho(\alpha) = \alpha'$ 和 $y = \varrho\tau(\alpha)$。由于 f 的系数属于 K，而该域在 ϱ和 τ作用下保持不变，

$$f^{(n)}(x) = \varrho(\alpha_n) \neq \varrho\tau(\alpha_n) = f^{(n)}(y), \qquad f^{(n+1)}(y) = \varrho\tau(\alpha_{n+1}) = \varrho(\alpha_{n+1}) = f^{(n+1)}(x),$$

利用 $\tau(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}$。最后，域 $K_{\mathfrak{p}}(x) \subset \mathbb{C}_p$ 是 $K(\alpha)$ 在由嵌入 $\varrho|_{K(\alpha)}\colon K(\alpha) \to \mathbb{C}_p$ 所诱导的、位于 $\mathfrak{p}$ 上方的素理想处的完备化，因此其绝对分歧指数等于 $K(\alpha)$ 中位于 $\mathfrak{p}$ 上方的某个素理想的绝对分歧指数，故至多为 $e_{\mathfrak{p}}(\alpha)$；对于 y，使用嵌入 $\varrho\tau|_{K(\alpha)}$，结论也同样成立。□

这两个迭代点位于同一个剩余圆盘内，且都接近该圆盘中的周期点。

引理 7.2. 设 $\alpha \in K$ 有无限的2进赋值轨道，且 $x, y \in \mathbb{C}_p$ 是 α的 K-共轭元，其中 x具有整性， $\bar{x} \notin \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$，并假设 $x_n = f^{(n)}(x)$ 和 $y_n = f^{(n)}(y)$ 满足 $f(x_n) = f(y_n)$。那么 y 具有整性， x_n 和 y_n 位于同一个剩余圆盘 U_ξ 内，且 $\xi \notin \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$，并且 $f^{(n)}(\eta_{\bar{x}}) = \eta_\xi = f^{(n)}(\eta_{\bar{y}})$。此外，若域 $K_{\mathfrak{p}}(x)$ 和 $K_{\mathfrak{p}}(y)$ 的绝对分歧指数至多为 e，且 $m_0 = \lceil \log_d e \rceil$，那么对于 $n \geq m_0$

$$v(x_n - \eta_\xi) \geq n - m_0 + 1, \qquad v(y_n - \eta_\xi) \geq n - m_0 + 1.$$

证明。由于 f 是具有整系数的首一多项式， x_n 和 $f(x_n)$ 都具有整性。若 y_n 不具有整性，那么根据引理 6.2(e)， $f(y_n)$ 也不具有整性，这与$f(y_n) = f(x_n)$ 矛盾。因此 y_n 具有整性，进而 y也具有整性：若 y 不具有整性，那么根据引理 6.2(e)，它的所有迭代点都不具有整性。

将f 由引理 6.2(a) 可知是单射；因此 $\bar{x}_n = \bar{y}_n$，且 ξ。由于 $\xi = \bar{f}^n(\bar{x})$， $\bar{x} \notin \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$并且 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$的补集在双射 $\bar{f}$ （引理 6.6）下保持稳定，我们有 $\xi \notin \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$。

由引理 6.3， $f(\eta_\zeta) = \eta_{\bar{f}(\zeta)}$对每个 $\zeta \in \mathbb{F}_p$ 都成立；迭代可得， $f^{(n)}(\eta_{\bar{x}}) = \eta_{\bar{f}^n(\bar{x})} = \eta_\xi$，而且对于 y 也同样成立，因为 $f^n(\bar{y}) = \bar{y}_n = \xi$。

将引理 6.4应用于 x，取 $F = K_{\mathfrak{p}}(x)$；它是 $K_{\mathfrak{p}}$ 的有限扩张，分歧指数至多为 e；由于 x 具有无限轨道（它与 α 共轭），可得$v(x_n - f^{(n)}(\eta_{\bar{x}})) \geq n - m_0 + 1$对于 $n \geq m_0$ 成立，且 $f^{(n)}(\eta_{\bar{x}}) = \eta_\xi$。对 y 也可应用相同的论证。□

最后， f 在 η 附近的差商接近于 $f'(\eta)$。

引理 7.3。设 $\eta \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$，并令 $s \neq t$属于 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$，满足 $f(\eta + s) = f(\eta + t)$。则

$$\vartheta(\eta) = v\big(f'(\eta)\big) \geq \min\{v(s), v(t)\}.$$

证明。令 $A(u) = f(\eta + u) - f(\eta)$，这是关于变量 u 的、系数属于$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$的多项式，因为 η 是整性的，且 $A(0) = 0$ 以及 $A'(0) = f'(\eta)$。差商

$$G(u_1, u_2) = \frac{A(u_1) - A(u_2)}{u_1 - u_2}$$

是一个系数属于 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ 的多项式：如果 $A(u) = \sum_i A_i u^i$，那么 $G = \sum_i A_i(u_1^{i-1} + u_1^{i-2}u_2 + \cdots + u_2^{i-1})$。其常数项为 $A_1 = A'(0)$，因此 $G(0, 0) = f'(\eta)$，且 $G(u_1, u_2) - G(0, 0)$ 是一个不含常数项且具有整系数的多项式。因此

$$v\big(G(s,t) - G(0,0)\big) \geq \min\{v(s), v(t)\}.$$

另一方面，$G(s,t) = (A(s) - A(t))/(s-t) = 0$，因为 $A(s) = f(\eta+s) - f(\eta) = f(\eta+t) - f(\eta) = A(t)$，且 $s \neq t$。所以 $v(f'(\eta)) = v(G(0,0)) = v(G(0,0) - G(s,t)) \geq \min\{v(s)\ v(t)\}$。□

7.3. 定理 B的证明。

定理 B的证明。设 $e = e_{\mathfrak{p}}(\alpha)$ 且 $m_0 = \lceil \log_d e \rceil$，并假设 $[F(\alpha_{n+1}) : F] < [F(\alpha_n) : F]$。我们必须证明 $n \leq m_0 + \nu_{\mathfrak{p}} - 1$。若 $n < m_0$，则此结论成立，因为 $\nu_{\mathfrak{p}} \geq 1$(引理 6.6)；因此假设 $n \geq m_0$。

由引理 7.1，应用于假设的共轭 α'，存在 K-共轭元$x = \alpha'$和 y，它们属于 α，且满足 $x_n \neq y_n$和 $f(x_n) = f(y_n)$，其中 $x_n = f^{(n)}(x)$且 $y_n = f^{(n)}(y)$；域 $K_{\mathfrak{p}}(x)$、$K_{\mathfrak{p}}(y)$的分歧指数至多为 e。由于 α 不是前周期的，它具有无限轨道。根据假设，x 具有整性，且 $\bar{x} \notin \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$。因此可应用引理 7.2：存在 $\xi \notin \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$，满足 x_n、$y_n \in U_\xi$，并记 $\eta = \eta_\xi$，

$$v(x_n - \eta) \geq n - m_0 + 1, \qquad v(y_n - \eta) \geq n - m_0 + 1.$$

令 $s = x_n - \eta$以及 $t = y_n - \eta$。则 $s \neq t$，且 $f(\eta+s) = f(x_n) = f(y_n) = f(\eta+t)$，因此引理 7.3 给出

$$\vartheta(\eta) \geq \min\{v(s), v(t)\} \geq n - m_0 + 1.$$

现在 η是周期的，且 $\bar{\eta} = \xi \notin \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$，所以 $\vartheta(\eta) \leq \kappa_{\mathfrak{p}}^*$由定义 6.5可得。因此 $n - m_0 + 1 \leq \kappa_{\mathfrak{p}}^*$，又由于 $n - m_0 + 1$ 是一个整数，$n - m_0 + 1 \leq \lfloor \kappa_{\mathfrak{p}}^* \rfloor = \nu_{\mathfrak{p}}$，即 $n \leq m_0 + \nu_{\mathfrak{p}} - 1$。□

7.4. 定理A(i) 的证明。

定理 A(i)的证明。设 $\alpha \in K$ 不是前周期的，且 $D = [K(\alpha) : K] \geq 2$。

如果 α 在 $\mathcal{O}_K$上不是整性的，引理 2.2 给出 $\widehat{h}_f(\alpha) \geq \log 2/([K : \mathbb{Q}]D)$。只要 $c_1 \leq \log 2/[K : \mathbb{Q}]$，这就大于 (i) 的右侧，因为 $e_{\mathfrak{p}}(\alpha) \geq 1$，且指数因子至多为 1。

设 α 在 $\mathcal{O}_K$上整。则每个 K-共轭 α' 都是整的，因此 $v(\alpha') \geq 0$；并且$\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$为空，因为没有有限临界点是周期的。因此定理B 的假设成立，应用该定理并取 $F = K$ 可得 $D_{n+1} = D_n$ 对每个

$$n \geq m := \lceil \log_d e_{\mathfrak{p}}(\alpha) \rceil + \nu_{\mathfrak{p}}.$$

设 $\ell = \log 3D$ 和 $L = \lceil a\sqrt{q\ell} \rceil$，如命题 5.5中所述。次数 D_n 对于 $n \geq m$是常数，特别是对于 $m \leq n \leq m + n_0 + L$，命题 5.5 在取 $j = m$时适用：

$$\widehat{h}_f(\alpha) \geq \frac{c_3}{D} d^{-a\sqrt{q\ell}} \prod_{n<m} \frac{k_n}{d}.$$

每个因子都满足 $k_n/d \geq 1/d$，因此乘积至少为 d^{-m}，并且

$$d^m \leq d^{\log_d e_{\mathfrak{p}}(\alpha) + 1 + \nu_{\mathfrak{p}}} = d^{1+\nu_{\mathfrak{p}}} e_{\mathfrak{p}}(\alpha).$$

因此 $\widehat{h}_f(\alpha) \geq c_3 d^{-1-\nu_{\mathfrak{p}}} e_{\mathfrak{p}}(\alpha)^{-1} D^{-1} \exp(-a\sqrt{q} \log d \sqrt{\log 3D})$，这对每个 $c_1 \leq \min\{c_3 d^{-1-\nu_{\mathfrak{p}}}, \log 2/[K$ 而言即为 (i)：$\mathbb{Q}]\}$，其中 $c_2 = a\sqrt{q} \log d$。定理 c_1A 的常数 是该界与第 §8 节中证明 (ii) 所需各界的最小值。□

8. Ramified clusters and the proof of Theorem A(ii)

在本节中，我们将证明定理 A 的第 (ii) 部分，其形式也适用于某些有限临界点为周期的情形。以下全文中，$f \in \mathcal{O}_K[x]$ 在 p处具有首一 Frobenius 形状，记号沿用 §6，且 $\Lambda(N)$ 与 §5中的相同。对于 K-共轭元 $x \in K \subset \mathbb{C}_p$ 的 α，令e_x 表示 $K_{\mathfrak{p}}(x)$ 在 $\mathbb{Q}_p$上的分歧指数；因此 $e_x \leq e_{\mathfrak{p}}(\alpha)$。

8.1. 共轭元簇。 我们首先记录 α 的共轭元如何分布在 α_n的共轭元之上。

引理 8.1。 设 $\alpha \in K$ 和 $n \geq 0$。映射 $x \mapsto f^{(n)}(x)$ 将 α 的 K-共轭元集合映射到 α_n的 K-共轭元集合，并且每个纤维恰好有 D/D_n 个元素。特别地，C 个 α 的 K-共轭元组成的集合的像至少有 $|C|D_n/D$ 个元素。

证明。设 $G =$ 伽罗瓦群(K/K)。由于 f 的系数属于 K，$f^{(n)}(g\alpha) = g\alpha_n$ 对 $g \in G$成立，因此该映射是 G-等变的；它是满射，因为 G 在 α_n的共轭元上可传递作用。若 $g\alpha_n = y$，则 g 将 α_n 上的纤维双射地映射到 y上的纤维，因此所有纤维大小相同，即为 D/D_n。集合 C 与每个纤维至多相交于 D/D_n 个点，因此其像至少有 $|C|/(D/D_n)$ 个元素。□

x 的每个共轭元都属于 $e_x/e(\mathfrak{p}|p)$个 α 的共轭元组成的一个簇，这些共轭元的轨道在$\mathfrak{p}$进意义下始终彼此接近。

引理 8.2。 设$\alpha \in K$ 在$\overline{\mathcal{O}}_K$ 上具有整性且轨道无限，并设 x是 α的一个 K-共轭元。存在一个集合 $C(x)$，由 K的 α 的共轭元组成，并包含 x，满足

$$|C(x)| \;=\; \frac{e_x}{e(\mathfrak{p}|p)},$$

使得对所有 $C(x)$ 中的 $x' \neq x''$ 以及所有 $n \geq 0$,

$$v\big(f^{(n)}(x') - f^{(n)}(x'')\big) \;\geq\; \min\{d^n/e_x,\ 1\}.$$

证明。令 $E = K_{\mathfrak{p}}(x) \subset \mathbb{C}_p$，并令 $T \subseteq E$ 为包含于 E中的 $K_{\mathfrak{p}}$的最大非分歧扩张。于是 $E = T(x)$、$[E:\ T] = e_x/e(\mathfrak{p}|p)$，且 E与 T具有相同的剩余域。令 $C(x)$为 $\mathbb{C}_p$ 中 x 在 T上的最小多项式的根集。由于我们处于特征零，该集合含有$[E:\ T]$ 个元素；又由于该最小多项式整除 α 在 K上的最小多项式，$C(x)$由 α的 K-共轭元组成，且它们全部具有整性。

令 $x' \in C(x)$，并令 $\varphi\colon T(x) \to T(x')$ 为具有 $\varphi(x) = x'$ 的 T-同构。由于 T完备，v从 T到每个有限扩张都有唯一延拓，因此 $v \circ \varphi = v$ 在 $T(x)$ 上成立。特别地，$K_{\mathfrak{p}}(x') = T(x')$ 的分歧指数为 e_x。由于 E 和 T 具有相同的剩余域，存在 $t \in \mathcal{O}_T$ 使得 $v(x-t) > 0$；于是 $v(x'-t) = v(\varphi(x-t)) = v(x-t) > 0$，故 $\bar{x}' = \bar{x}$。因此，$C(x)$ 的所有点都位于 $\xi = \bar{x}$ 的剩余圆盘中；令 $\eta = \eta_\xi$。

每个 $x' \in C(x)$ 都有无限轨道，因为它与 α 共轭。因此，将引理 6.4应用于$F = K_{\mathfrak{p}}(x')$，得到 $v(f_{(n)}(x') - f^{(n)}(\eta)) \geq \min\{d^n/e_x, 1\}$ 对每个 $x' \in C(x)$ 成立，其中 η 相同；由超度量不等式即可得到结论。□

8.2. 次数下降迫使许多共轭元发生分歧。第 n步的次数下降意味着，至少一半在 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$ 之外约化的共轭元在 $\mathfrak{p}$之上高度分歧。

引理 8.3。设 α 在 $\mathcal{O}_K$ 上具有整性且不是前周期的。假设第 n步发生次数下降，并设 X 为 α 的 K- 共轭元中在 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$ 之外约化的那些共轭元所成的集合。那么集合

$$H_n \;=\; \{x \in X \;:\; e_x > d^{n-\nu_{\mathfrak{p}}}\}$$

至少有 $|X|/2$个元素。

证明。由引理 8.1，f 将 α_n 的共轭元映射到 α_{n+1}的共轭元，且每个纤维含有$k_n \geq 2$ 个元素。一个纤维中的点具有相同的像，因此它们位于同一个剩余圆盘中，因为 $\bar{f}$是单射的（引理 6.2(a)）；又由于 $\bar{f}(\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}) = \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$且 $\bar{f}$是双射（引理 6.6），α 的共轭元 x 在 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$之外约化，当且仅当 $f^{(n)}(x)$也如此。若 α_n的某个共轭元 z满足：存在 α的某个共轭元 x，使得 $f^{(n)}(x) = z$满足 $e_x \leq d^{n-\nu_{\mathfrak{p}}}$，则称共轭元 z 为坏共轭元。

我们声称，Φ 外的一个 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$纤维至多包含一个坏元素。设$z \neq z'$ 中的 Φ 是坏元素，且按照定义有 x，x'；由于 $e_x \geq 1$，这迫使 $n \geq \nu_{\mathfrak{p}}$。所有

这些点都是整性的。设 η 为 z 和 z'的剩余圆盘的周期点；则 $\bar{\eta} \notin \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$和 $f^{(n)}(\eta_{\bar{x}}) = \eta = f(n)(\eta_{\bar{x}'})$（引理 6.3）。令 $m = \lceil \log_d e_x \rceil$；由于 $\log_d e_x \le n - \nu_{\mathfrak{p}}$ 且 $n - \nu_{\mathfrak{p}}$ 是一个整数，所以 $m \le n - \nu_{\mathfrak{p}} < n$，而引理 6.4 应用于$F = K_{\mathfrak{p}}(x)$时给出 $v(z - \eta) \ge n - m + 1 \ge \nu_{\mathfrak{p}} + 1$；同样地，$v(z' - \eta) \ge \nu_{\mathfrak{p}} + 1$。引理 7.3 结合 $s = z - \eta \ne t = z' - \eta$和 $f(\eta + s) = f(\eta + t)$，给出 $\vartheta(\eta) \ge \nu_{\mathfrak{p}} + 1$，然而根据定义 6.5，$\vartheta(\eta) \le \kappa_{\mathfrak{p}}^* < \nu_{\mathfrak{p}} + 1$。矛盾证明了该断言。

α_n 在 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$之外的共轭元构成 $|X|D_n/(Dk_n)$ 个纤维，因此其中至少有 $(1 - 1/k_n)|X|D_n/D \ge |X|D_n/(2D)$ 个不是坏的，并且其中每个纤维上方的 D/D_n α 的所有共轭元都位于 H_n 中。因此，$|H_n| \ge |X|/2$。□

如果 X 包含所有共轭元，则对于B 的 $F = K$，定理 H_n 的表述是其非空。

8.3. 最后一次次数下降处的判别式。在 m 处发生次数下降时，这些簇使得 α_m 的最小多项式的判别式被 p 的高次幂整除，从而得到以下界。

命题 8.4。令 $c_8 = \log p/(4[K : \mathbb{Q}]\, e(\mathfrak{p}|p)\, d^{\nu_{\mathfrak{p}}})$，并令 $c_9 \ge 1$ 满足：对所有 $N \ge 1$，$\Lambda(N) + \log p \le c_9 \log 3N$。令 α 在 $\mathcal{O}_K$ 上整且不是前周期的，令 ρ 为 α 的 K-共轭元中约化到 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$ 之外的比例，并假设在步骤 m 处发生次数下降。那么

$$\widehat{h}_f(\alpha) \ge c_8 \frac{\rho}{D} - c_9 \frac{\log 3D_m}{D_m\, d^m}.$$

证明。令 $P \in \mathcal{O}_K[x]$ 为 α_m 在 K 上的最小多项式，它是次数为 D_m 的首一多项式，且 $\Delta = \mathrm{disc}(P) \in \mathcal{O}_K$，其值非零。

我们首先在 $\mathfrak{p}$ 处估计 Δ。令 $H = H_m$ 如引理 8.3 中所述，使得 $|H| \ge \rho D/2$，并令 $x \in H$。根据引理 8.2，P 的根集 $f^{(m)}(C(x))$ 包含 $y = f(m)(x)$，其点两两之间的赋值为 $\ge \delta_x = \min\{d^m/e_x, 1\}$；根据引理 8.1，该集合至少有 $|C(x)|D_m/D$ 个元素。因此，y 至少还有 $|C(x)|D_m/D - 1$ 个根 y' 属于 P，且$v(y - y') \ge \delta_x$，并且

$$\sum_{y' \ne y} v(y - y') \ge \Big(\frac{|C(x)|D_m}{D} - 1\Big)\delta_x \ge \frac{\min\{d^m, e_x\}}{e(\mathfrak{p}|p)} \cdot \frac{D_m}{D} - 1 \ge \frac{d^{m-\nu_{\mathfrak{p}}} D_m}{e(\mathfrak{p}|p)\, D} - 1,$$

使用$\delta_x \le 1$和 $e_x > d^{m-\nu_{\mathfrak{p}}}$。由于在有序的根对上 $\Delta = \pm \prod_{y \ne y'}(y - y')$，且所有根都具有整性，$v(\Delta)$至少是这些量在形如$f^{(m)}(x)$且满足 $x \in H$的根 y 上的总和。每个根在其上方都有 D/D_m 个 α 的共轭元，因此至少有$|H|D_m/D \ge \rho D_m/2$ 个这样的根，并且由于 $v(\Delta) \ge 0$,

$$v(\Delta) \ge \frac{\rho D_m}{2}\Big(\frac{d^{m-\nu_{\mathfrak{p}}} D_m}{e(\mathfrak{p}|p)\, D} - 1\Big).$$

范数 $\mathrm{N}^{K/\mathbb{Q}}(\Delta)$ 是一个非零有理整数，并且 $v_p(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}\, \Delta) \ge e(\mathfrak{p}|p) f(\mathfrak{p}|p)\, v(\Delta) \ge v(\Delta)$，因为 $v_{\mathfrak{p}} = e(\mathfrak{p}|p)\, v$在 K上，且所有 $v_{\mathfrak{q}}(\Delta) \ge 0$。因此 $\log |\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}\, \Delta| \ge v(\Delta) \log p$。

接下来，我们在阿基米德赋值处对 Δ 进行估计。固定 $\sigma\colon K \to \mathbb{C}$，令 Z_σ 为 σP的根集，并令 Δ_σ为矩阵 $(\sigma B_k(z))_{z \in Z_\sigma \text{的行列式},\ 0 \le k < D_m}$。如引理5.1中所示，$\Delta_\sigma^2 = \pm \sigma(\Delta)$；并且，完全按照引理 5.3的证明，取单层 α_m 和$N = D_m$，利用（3），

$$\tfrac{1}{2} \log \big|\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}\, \Delta\big| = \sum_\sigma \log |\Delta_\sigma| \le [K : \mathbb{Q}]\, D_m \Lambda(D_m) + [K : \mathbb{Q}]\, D_m^2 d^m\, \widehat{h}_f(\alpha).$$

结合这两个估计并除以 $[K:\ \mathbb{Q}]D_m^2 d^m$，

$$\widehat{h}_f(\alpha)\ \geq\ \frac{\rho\log p}{4[K:\mathbb{Q}]\,e(\mathfrak{p}|p)\,d^{\nu_{\mathfrak{p}}D}}-\frac{\Lambda(D_m)+\log p}{D_m\,d^m},$$

这就是所要证明的断言。 □

结合命题 8.4 与最后一次次数下降之后开始的范围上的界，我们得到以下关于共轭元中有一定比例 ρ 在外部约化的共轭元 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$的点的界。

命题 8.5。存在仅取决于 K、f 和 $\mathfrak{p}$的 c_{10}、$c_2>0$，使得每个α 在 $\mathcal{O}_K$ 上具有整性且不是前周期的、满足 $D\geq 2$ 并且其K-共轭元中有比例 $\rho>0$ 在 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$外部约化的元素，都满足

$$\widehat{h}_f(\alpha)\ \geq\ \frac{c_{10}\,\rho}{D\log 3D}\exp\bigl(-c_2\sqrt{\log 3D}\bigr).$$

证明。令 $\ell=\log 3D$，令 a、q、c_3如命题 5.4 中所示，令 $c_2=a\sqrt{q}\log d$，并令 $H_D=d^{-a\sqrt{q\ell}}=\exp(-c_2\sqrt{\ell})$。如果次数从未下降，则命题 5.5 结合 $j=0$给出$\widehat{h}_f(\alpha)\geq c_3H_D/D$。否则，由于 (D_n) 是一个正整数递减序列，因此存在最后一个次数下降的步骤 m，命题 5.5 结合 $j=m+1$给出

$$\widehat{h}_f(\alpha)\ \geq\ \frac{c_3H_D}{D}\prod_{n\leq m}\frac{k_n}{d}\ =\ \frac{c_3H_D}{D_{m+1}\,d^{m+1}}\ \geq\ \frac{c_3}{d}\cdot\frac{H_D}{D_m\,d^m}.$$

如果 $c_8\rho/D\geq 2c_9\log(3D_m)/(D_md^m)$，命题 8.4给出 $h_f(\alpha)\geq c_8\rho/(2D)$。否则 $D_md^m<(2c_9/c_8)\rho^{-1}D\log 3D$，而对各范围的界给出 $\widehat{h}_f(\alpha)\geq\frac{c_3c_8}{2c_9d}\cdot D^{\rho H_D}\log 3D$ 由于 $\rho\leq 1$ 以及 $H_D\leq 1\leq\log 3D$，该断言以 $c_{10}=\min\{c_3,\,c_8/2,\,c_3c_8/(2c_9d)\}$成立。□

定理 A(ii)的证明。如果 α在 $\mathcal{O}_K$上不具有整性，引理 2.2给出 $h_f(\alpha)\geq\log 2/([K:\ \mathbb{Q}]D)$。否则，由于不存在周期的有限临界点，$\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$为空且 $\rho=1$，于是命题 8.5 适用。因此，(ii) 以 $c_1\leq\min\{c_{10},\log 2/[K:\ \mathbb{Q}]\}$成立。□

9. Superattracting classes

在本节中，我们处理所有其共轭元约化到 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$的整点，并利用 f 在 $\mathfrak{p}$-进意义下的超吸引周期附近收缩，并证明定理D 和E。这里，$f\in\mathcal{O}_K[x]$ 是在 p 处具有 Frobenius 形状且在K中具有超吸引周期的首一多项式，而 m_Z、Q、M、m_f、ω_f和 C_f均如定义1.2所述。由引理6.3可知，不同的周期点具有不同的约化，因此 $|\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}|=M$，而 $\bar{\alpha}'\in\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$意味着$\alpha'$ 属于某个超吸引周期中的一个点的剩余圆盘。

在超吸引周期附近，f 会收缩到该周期的 $\mathfrak{p}$-进距离。

引理 9.1（收缩）。设 Z 为精确周期为 q的超吸引周期，$\gamma\in Z$，且 $x\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$满足 $\bar{x}=\bar{\gamma}$。令 $s_j=v\bigl(f^{(j)}(x)-f^{(j)}(\gamma)\bigr)\in(0,\ \infty]$。则对所有 $j\geq 0$

$$s_{j+1}\ \geq\ \min\{d\,s_j,\ 1\},\qquad s_{j+1}\ \geq\ s_j,\qquad \textit{and}\qquad s_{j+q}\ \geq\ m_Zs_j.$$

证明。对于 y、$z\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$、$f(y)-f(z)=(y-z)\,u(y,z)$，其中 $u\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$，因为 f具有整系数；因此 $v(f(y)-f(z))\geq v(y-z)$，这给出了 $s_{j+1}\geq s_j$。由引理 6.2(c)，$s_{j+1}\geq\min\{ds_j,s_j+1\}\geq\min\{ds_j,1\}$。现在设 $c\in Z$为临界点，且 $k=\deg_c f$。由于 c具有整性，$f(c+t)-f(c)=\sum_{i=k}^d b_it^i$且 $b_i\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$，所以对于$v(t)\geq 0$，$v(f(c+t)-f(c))\geq k\,v(t)$。在 q 个连续步骤中，γ 的轨道会经过 Z的每个临界点 c；在这样的步骤中，s 至少乘以 $\deg_c f$，而在其他步骤中不会减小。因此 $s_{j+q}\geq m_Zs_j$。□

α_n 与 α_{n+Q} 之间的一个结式，随后给出了关于分歧的一个界，对于其共轭元中有比例 σ 约化到 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$中的点。

命题 9.2。 设 $\alpha \in K$ 在 $\mathcal{O}_K$ 上整，且不是前周期的，设 $e = e_{\mathfrak{p}}(\alpha)$，并假设其 K个 $\sigma > 0$ -共轭元中有一定比例 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$约化到 。 A 和 B 如定理 D中所述，

$$\widehat{h}_f(\alpha) \;\geq\; \frac{B}{2d^{2Q+1}} \min\Big\{1, \Big(\frac{\sigma^2}{2AB}\Big)^{\omega_f}\Big\} \cdot \frac{1}{e}.$$

证明。 设 $\alpha^{(1)}$，……， $\alpha^{(D)}$ 是 K 的共轭元，并编号使得 $\alpha^{(i)}$ 恰好对 $i \leq \sigma D$约化到 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$，对于 $j \geq 0$ 令

$$\chi_j(X) = \prod_{i=1}^{D} \big(X - f^{(j)}(\alpha^{(i)})\big) \in \mathcal{O}_K[X],$$

特征 多项式 $f_{(j)}(\alpha)$ 在 K 上的特征多项式，提升到 $D/[K(f^{(j)}(\alpha))$ 次幂： K].

根据引理 6.3，对每个 $i \leq \sigma D$ ，存在唯一的点 γ_i ，它属于一个超吸引周期Z_i ，且满足 $\bar{\alpha}^{(i)} = \bar{\gamma}_i$。域 $F_i = K_{\mathfrak{p}}(\alpha^{(i)})$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 上的分歧指数为 $e_i \leq e$ ，并且根据引理 6.3 有$\gamma_i \in F_i$。由于 α 不是前周期的， $\alpha^{(i)} - \gamma_i$ 是 F_i 中具有正赋值的非零元素，因此 $s_0^{(i)} = v(\alpha^{(i)} - \gamma_i) \geq 1/e$, 其中 $s_j^{(i)} = v\big(f_{(j)}(\alpha^{(i)}) - f^{(j)}(\gamma_i)\big)$。令$j_0 = \lceil \log_d e \rceil$，则 $e \leq d^{j_0} < de$。根据引理 9.1，通过归纳法， $s_j^{(i)} \geq \min\{d^j/e, 1\}$ ，所以$s_{j_0}^{(i)} \geq 1$；并且由于 Z_i 的周期整除 Q 和 $m_{Z_i} \geq m_f$,

$$s_{j_0+tQ}^{(i)} \;\geq\; m_f^t \qquad (t \geq 0). \tag{9}$$

现在固定 $n \geq 0$，令 $m = n + Q$，并考虑结式 $R = \mathrm{Res}(\chi_n, \chi_m) = \prod_{i,i'} \big(f_{(n)}(\alpha^{(i)}) - f_{(m)}(\alpha^{(i')})\big)$。它属于 $\mathcal{O}_K$，且 $R \neq 0$：否则 $f_{(n)}(\alpha)$ 和 $f_{(m)}(\alpha)$ 将在 K 上共轭，因此 $d^n h_f(\alpha) = d^m h_f(\alpha)$， $h_f(\alpha) = 0$，而 α 将是前周期的[9,Thm. 3.22]。

我们在 $\mathfrak{p}$ 处从下方估计 R 。对于 $i \leq \sigma D$ ，令 $\delta_i = f^{(n)}(\gamma_i)$，它是超吸引周期中的 M 个点之一。如果 $\delta_i = \delta_{i'}$，那么 $f^{(m)}(\gamma_{i'}) = f_{(n)}(\gamma_{i'}) = \delta_{i'}$，因为 $Z_{i'}$ 的周期整除 Q；因此根据超度量不等式，

$$v\big(f^{(n)}(\alpha^{(i)}) - f^{(m)}(\alpha^{(i')})\big) \;\geq\; \min\big(s_n^{(i)}, s_m^{(i')}\big) \;\geq\; s_n, \qquad s_n = \min_{i \leq \sigma D} s_n^{(i)}.$$

R 的所有其他因子都是整性的。若 μ_δ 是满足 $\delta_i = \delta$的 $i \leq \sigma D$ 的数量，则根据柯西-施瓦茨不等式，满足 i、 $i' \leq \sigma D$和 $\delta_i = \delta_{i'}$的有序对（i， i'）的数量为 $\sum_\delta \mu_\delta^2 \geq \sigma^2 D^2/M$。因此， $v(R) \geq (\sigma^2 D^2/M)\, s_n$，并且由于 $v_{\mathfrak{p}} = e(\mathfrak{p}|p)\, v$ 在 K和 $R \in \mathcal{O}_K$上，

$$\log\big|\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(R)\big| \;\geq\; v_{\mathfrak{p}}(R) \log \mathrm{N}\,\mathfrak{p} = [K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_p] \log p \cdot v(R) \;\geq\; [K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_p] \log p \cdot \frac{\sigma^2 D^2}{M}\, s_n.$$

我们在阿基米德赋值处给出 R 的上界。令 τ 遍历K到 $\mathbb{C}$中的嵌入，并将每个嵌入延拓到 K。对于复数 y， z我们有 $|y-z| \leq 2\max(1, |y|)\max(1, |z|)$。对于代数整数 $\beta \in K(\alpha)$，对所有 τ以及按上述方式编号的所有 K-共轭元 $\beta^{(i)}$，$\log \max(1, |\tau\beta^{(i)}|)$之和为 $[K(\alpha) : \mathbb{Q}]\, h(\beta) = [K : \mathbb{Q}]\, D\, h(\beta)$。因此

$$\begin{aligned}\log\big|\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(R)\big| = \sum_\tau \log|\tau R| &\leq \sum_\tau \sum_{i,i'} \Big(\log 2 + \log^+\big|\tau f^{(n)}(\alpha^{(i)})\big| + \log^+\big|\tau f^{(m)}(\alpha^{(i')})\big|\Big) \\ &= [K : \mathbb{Q}]\, D^2 \Big(\log 2 + h\big(f^{(n)}(\alpha)\big) + h\big(f^{(m)}(\alpha)\big)\Big).\end{aligned}$$

根据 C_f 和 $\widehat{h}_f$（$f_{(j)}$（α）） $= d^j \widehat{h}_f$（α）的定义，括号内的量至多为 $B + 2d^{n+Q}\widehat{h}_f$（$\alpha$）。

比较这两个界并约去因子 D^2，得到

$$\sigma^2 s_n \le A\left(B + 2d^{n+Q}\widehat{h}_f(\alpha)\right) \qquad \text{for every } n \ge 0. \tag{10}$$

令 $t \ge 0$ 为满足 $m_f^t > 2AB/\sigma^2$的最小整数，并取 $n = j_0 + tQ$。由（9），$\sigma^2 s_n > 2AB$，故（10）给出 $2Ad^{n+Q}\widehat{h}_f(\alpha) > AB$，也就是说，$\widehat{h}_f(\alpha) > B/(2d^{j_0+(t+1)Q})$。若$t \ge 1$，由最小性可得 $m_f^{t-1} \le 2AB/\sigma^2$，因此 $d^{Q(t-1)} \le (2AB/\sigma^2)^{\omega_f}$；总而言之，$d^{Qt} \le d^Q \max\{1, (2AB/\sigma^2)^{\omega_f}\}$。结合 $d^{j_0} < de$即可得到所述结论。□

定理 D 的证明。这就是命题 9.2，其中 $\sigma = 1$。 □

定理 E 的证明。若没有有限临界点是周期的，则这就是定理 A(ii)。否则，令 α为满足 $D \ge 2$的非前周期元。若 α在 $\mathcal{O}_K$上不满足整性，则由引理 2.2，$h_f(\alpha) \ge \log 2/([K:\mathbb{Q}]D)$。令 α 满足整性，令 ρ 为其 K-共轭元中约化到 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$之外的比例，并令 $\sigma = 1-\rho$。若 $\rho \ge 1/2$，则由命题 8.5 得到$\widehat{h}_f(\alpha) \ge c_{10}\exp(-c_2\sqrt{\log 3D})/(2D\log 3D)$。若 $\sigma \ge 1/2$，则由命题 9.2 得到 $\widehat{h}_f(\alpha) \ge c/e_{\mathfrak{p}}(\alpha) \ge c/(e(\mathfrak{p}|p)D)$，其中 $c = \frac{B}{2d^{2Q+1}}\min\{1, (8AB)^{-\omega_f}\}$。所有情况下，所述结论均成立。□

注 9.3. 仅使用 $s_{j+q} \ge m_Z s_j$ 会得到 $e_{\mathfrak{p}}(\alpha)$ 的指数 ω_f。根据引理 9.1 的第一个不等式，f 会将到循环的距离的赋值乘以 d，直到其达到 1；这需要 $j_0 = \lceil \log_d e_{\mathfrak{p}}(\alpha) \rceil$ 步，此后只需有界个周期。对于 $f = x^d$，这是一个初等界：对于被 $\mathfrak{p}$上方的每个素数整除的整数，$h(\alpha) \gg 1/e_{\mathfrak{p}}(\alpha)$。$e_{\mathfrak{p}}(\alpha)$ 的指数是最优的：$\alpha = p^{1/e}$ 有$h(\alpha) = \log p/e$，而对于 $f = x^2 - 1$，$f^{-N}(2)$ 中的点在 2 上全分歧，并且$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$有 $h_f(\alpha) = h_f(2)/e_2(\alpha)$。

10. Examples and explicit constants

本节列出定理 A所涵盖的多项式，并明确给出 $x^2 \pm 1$。

10.1. 一致界所涵盖的多项式。

定理 A尤其适用于以下多项式。

推论 10.1。 定理 A 适用，且其中给出的 $\kappa_{\mathfrak{p}}^*$取以下值：

(a) $x^2 + c$，其中 $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}$, $\mathfrak{p} = 2$：当 c为偶数时，$\kappa_2^* = 1 + v_2(c)$；当c为奇数时，$\kappa_2^* = 1 + v_2(c+1)$。这包括 x^2+1, x^2-2 以及所有 c，其中 x^2+c不是后临界有限。*(b)* $x^d + c$，其中 $d = p^r$, $c \in \mathcal{O}_K$ 且 *0* 不是周期的，$\kappa_{\mathfrak{p}}^*$ 如引理 *6.7* 中所述；例如，$\mathbb{Q}(i)$上的$x^2 + i$，其中 $0 \mapsto i \mapsto i-1 \mapsto -i \mapsto i-1$；以及当 $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 满足 p 为奇数，或 $p = 2$时，$\mathbb{Q}$ 上的 $x^p + c$。*(c)* 所有 $(x+b)^2 + c$，其中 $b, c \in \mathcal{O}_K$ 且其临界点 $-b$ 不是周期的；它由 $x \mapsto x + b$与 $x^2 + (b + c)$ 共轭，并具有相同的 $\kappa_{\mathfrak{p}}^*$。

证明。(a)、(b)由引理 6.7 和例 6.8 得出。在 $\mathbb{Q}$ 上，只有当 $c \in \{0, -1\}$ 时，0 才是 $x^2 + c$ 的周期点：如果 $f^{(q)}(0) = 0$，那么 0 的轨道有界，因此 $-2 \le c \le 1/4$，并且$c = -2$ 给出 $0 \mapsto -2 \mapsto 2 \mapsto 2$。对于 $x^p + c$，其中 p 为奇数且 $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$：如果 $|c| \ge 2$，那么只要 $|w| \ge |c|$，就有$|w^p + c| \ge |w|^p - |c| > |w|$，因此 $|f^{(n)}(0)|$ 严格递增；如果 $c = \pm 1$，轨道为 0、c、$2c$、$(2c)^p + c$、……，从 $2c$开始同样的论证仍然适用。(c) 由$g(y) = f(y-b) + b = y^2 + b + c$，我们有 $g'(y) = f'(y-b)$，且 $y \mapsto y + b$将 f 的周期点和剩余圆盘映射到 g的周期点和剩余圆盘；高度、域和分歧指数保持不变。□

10.2. **的显式常数** $x^2 \pm 1$。设 $K = \mathbb{Q}$，$p = d = 2$ 且 $f = x^2 + c$ 满足$c \in \{1, -1\}$，因此 $n_0 = 0$ 且 $q = 2$ (例 3.3) 。根据引理 2.1 我们可以在引理 $R = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 4.2 中使用 $\Lambda = \frac{1}{2}$对数$-$ $N +$(对数$_2 N + 1$) 对数 $\phi \leq 1.195$ 对数 $N + 0.482$。

对于 $x^2 \pm 1$，在各个范围内的界成立，并且显式常数如下。

命题 10.2。设 $f = x^2 \pm 1$，令 $\beta \in \mathbb{Q}$ 为具有无限 f-轨道的代数整数，$D' = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$，且 $\ell \geq$最大值$\{\log 6$、$\log 3D'\}$。令 $L = \lceil 12\sqrt{\ell}\,\rceil$。若 $[\mathbb{Q}(f^{(n)}(\beta)) : \mathbb{Q}] = D'$ 对于 $0 \leq n \leq L$ 成立，则

$$\widehat{h}_f(\beta) \;\geq\; \frac{1}{4D'} \exp\bigl(-12 \log 2 \cdot \sqrt{\ell}\bigr).$$

证明。证明沿用命题 5.4 的证明思路。令 $\sum_{n \leq L} 2^n < 2^{L+1}$，

$$\widehat{h}_f(\beta) \;\geq\; \frac{S_2(L) \log 2 - (L+1)\Lambda}{(L+1)\, D'\, 2^{L+1}}. \tag{11}$$

这里 $\ell \geq \log 6$ 给出 $L \geq 17$。我们断言

$$S_2(L) \log 2 \;\geq\; 2(L+1)\Lambda. \tag{12}$$

由（5）可知，只需有 $(L+2)(L-3) \;\geq\; \frac{24}{\log 2}\Lambda$。对于 $L \geq 17$，$(L+2)(L-3) \;\geq\; \bigl(1 - \frac{1}{17} - \frac{6}{289}\bigr)L^2 \geq 0.92 \cdot 144\,\ell \geq 132\,\ell$。另一方面，$\log N = \log(L+1) + \log D'$，其中 $\log D' \leq \ell - \log 3$ 且 $L + 1 \leq 12\sqrt{\ell} + 2 \leq 12\ell + 2$。因此

$$\frac{24}{\log 2}\Lambda \;\leq\; 34.63\bigl(1.195(\ell - 1.098 + \log(12\ell+2)) + 0.482\bigr) \;\leq\; 41.4\,\ell - 28.7 + 41.4 \log(12\ell+2)。$$

还需验证 $90.6\,\ell + 28.7 \geq 41.4 \log(12\ell + 2)$ 对于 $\ell \geq \log 6$。在 $\ell = \log 6$ 处，两边的值分别为 191 和 131，且左边的导数 90。6 大于右边的导数，后者小于 22。这就证明了 (12)。接着，(11) 给出 $\widehat{h}_f(\beta) \geq \Lambda/(D' 2^{L+1})$，并且$\Lambda \geq 1$由于 $N \geq L + 1 \geq 18$。取 $L + 1 \leq 12\sqrt{\ell} + 2$可得 $\widehat{h}_f(\beta) \geq \frac{1}{4D'} 2^{-12\sqrt{\ell}}$。□

定理 C 的证明。令 $e = e_2(\alpha) \leq D$ 和 $\ell = \log 3D$。若 α 不是代数整数，引理 2.2 给出 $h_f(\alpha) \geq \log 2/D$，这比所声称的更大；因此令 α 为整性的。0 的轨道为 0, 1, 2, 5, . . ., 所以没有有限临界点是周期的，并且 $\kappa_2^* = 2$ 由例 6.8 得出；于是 $\nu_2 = 2$。根据定理 B，在 $n \geq m = \lceil \log_2 e \rceil + 2$处没有下降。将命题 10.2 应用于带有 $D' = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] \leq D$ 且满足此 ℓ 的 $\beta = f^{(m)}(\alpha)$，得到$\widehat{h}_f(\beta) \geq \frac{1}{4D} \exp(-12 \log 2\sqrt{\ell}) \geq \frac{1}{4D} \exp(-8.4\sqrt{\ell})$。由于 $2^m \leq 4 \cdot 2^{1+\log_2 e} = 8e$，我们得到$\widehat{h}_f(\alpha) = 2^{-m}\widehat{h}_f(\beta) \geq (32eD)^{-1} \exp(-8.4\sqrt{\ell})$。□

对于 $x^2 - 1$，具有显式常数的定理 B 和 D 给出以下界。

命题 10.3。设 $f = x^2 - 1$，设 $\alpha \in \mathbb{Q}$关于 $D = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \geq 2$不是前周期的，并令 $e = e_2(\alpha)$ 以及 $E_D = \exp(-8.4\sqrt{\log 3D})$。则

$$\widehat{h}_f(\alpha) \;\geq\; \min\Bigl\{\frac{E_D}{16\, e\, D},\; \frac{\log 2}{3072\, e}\Bigr\}.$$

证明。若 α 不是整性的，由引理 2.2 可得 $h_f(\alpha) \geq \log 2/D$，这超过了界；因此设 α 是整性的。超吸引周期为 $\{0, -1\}$，故 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, $Q = M = m_f = 2$和 $\omega_f = 2$。满足 $\bar{\eta} \notin \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$的周期点 η 是单位元，因此 $\vartheta(\eta) = v(2\eta) = 1$且$\nu_2 = 1$。由于在阿基米德赋值处 $|\log^+ |x^2 - 1|_v - 2 \log^+ |x|_v| \leq \log 2$，而在其他赋值处左侧均为零，所以 $|h(f(x)) - 2h(x)| \leq \log 2$；而 Tate 的望远镜论证[9, Thm. 3.20] 给出 $|h_f - h| \leq \log 2/(d-1)$；因此可取 $C_f = \log 2$，进而在定理 D 中有$A = 2/\log 2$, $B = 3\log 2$ 和 $2AB = 12$。

首先，假设存在一个 K-共轭元，使得 α 在 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$之外约化，并设 $m=\lceil \log_2 e\rceil+1$，从而 $2^m<4e$。由定理B 可知在 $n\geq m$处没有下降。将命题 10.2应用于 $f^{(m)}(\alpha)$，其中 $\ell=\log 3D$，可得 $\widehat{h}_f(\alpha)\geq E_D/(4D_m2^m)\geq E_D/(16eD)$。若 α的所有K-共轭元都约化到 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$中，则由定理 D可得 $\widehat{h}_f(\alpha)\geq {}^{3}\log_{64}{}^{2}\cdot\frac{1}{144}\cdot\frac{1}{e}=\log_{3072\,e^{2}}$。□

作为比较，[7, 推论 14] 对每个非前周期的 α 给出了 $\widehat{h}_f(\alpha)>0.007/D^2$。当 α 的每个共轭都约化到 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$ 中时，有效的界 $\log 2/(3072e)$ 对所有$D\geq 32$都更优，正如 $e\leq D$ 所示；界 $E_D/(16eD)$ 仅在 $e<8.9\,D\,E_D$ 时更优，例如当 $e\leq D^{1-\varepsilon}$ 且 D 较大时。对于满足 $e\asymp D$ 且有一个共轭位于 $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{fin}}$ 外的点，[7] 上的改进来自定理 E，而我们尚未明确给出其常数。

References

[1] M. Baker，《动力学格林函数平均值的一个下界》，*Math. Res. Lett.* 13 (2006)，245–257。[2] J. Byszewski、G. Graff 和 T. Ward，《Dold序列、周期点与动力学》，*Bull. Lond.Math. Soc.* 53 (2021)，1263–1298。[3] G. S. Call 和 S. W.Goldstine，《射影空间上的典范高度》，*J. Number Theory* 63 (1997)，211–243。[4] V. Dimitrov，《Schinzel–Zassenhaus 猜想》，*Ann. of Math.* (2)，即将出版；arXiv:1912.12545。[5] E. Dobrowolski，《关于 Lehmer 问题及多项式不可约因子数目的一个问题》，*Acta Arith.* 34 (1979)，391–401。[6] A. L. Epstein，《后临界有限多项式的整性与刚性》，*Bull. London Math. Soc.*44 (2012)，39–46。[7] P. Habegger 和 H. Schmidt，《单临界多项式的典范高度下界与容量》，*Forum Math. Sigma* 12 (2024)，doi:10.1017/fms.2023.112。[8] P. Habegger 和 H. Schmidt，《动力学典范高度与有限树》，arXiv:2608.00774。[9]J. H. Silverman，《动力系统的算术》，Graduate Texts in Mathematics 241，Springer，New York，2007。[10] C. Smyth，《费马小定理推广的一种染色证明》，*Amer. Math. Monthly* 93 (1986)，469–471。[11] E. B. Vinberg，《关于 V. Arnold 的一些数论猜想》，*Japan. J. Math.* 2 (2007)，297–302。[12] A. V. Zarelua，《关于某些矩阵的幂的迹的同余关系》，*Tr. Mat. Inst. Steklova*263 (2008)，85–105；英文译文见 *Proc. Steklov Inst. Math.*263 (2008)。

Oakland University. mailing adress: Mathematics and Science Center Michigan.电子邮箱地址：jorgedemellojr@oakland.edu