arXiv:2611.32719v1 [math.AC] 24 Nov 2026

混合幂差因子吸收理想的谱分类与算术分类

OMAR H. TAHA、AKRAM SALIM 和 HWANKOO KIM

摘要。对于整数 $n \geq 2$ 和 $k \geq 1$，若 $a^{kn} - b^n$ 的属于性蕴含 $a^k - b$ 或互补几何和因子的属于性，则真理想 (kn, n)-混合幂差因子吸收。我们将已知的三次谱判据推广到任意指数，在不作有限性或互素性假设的情况下，根据其极小素理想商环的分式域中的单位根，对根理想进行分类。对于根理想，该条件与 k 无关。我们还将四次对吸收的有限互素素理想判据推广到任意根理想，并确定其独特的三分量障碍。更一般地，要求两个因子之一属于根基，等价于根基本身对每个乘子都满足混合幂条件。这给出了根下降，并推广了三次主下降定理。我们还证明了对于根理想，在多项式扩张和形式幂级数扩张下该性质保持等价。这些结果给出了整环的拉回判据；对于几何约化代数，当特征不整除 n 时，通过域扩张下的稳定性刻画几何整性。对于相同特征下的 $n \geq 3$，几何约化代数的平方零扩张具有这种稳定性，当且仅当商环几何整且核无挠。在特征 p 整除 n 时，该条件仅取决于 n 的 p 部分，并等价于幂闭包条件。我们还对整环的平方零扩张进行了分类，包括非分裂扩张以及具有素投影的任意理想化理想。对于 P-主基环上带有 $2 \notin P$ 的齐次理想化，相关的四次判据不要求对 3 作任何限制。最后，当 n 为单位元时，我们确定了精确的赋值判据，解决了分歧素数指数情形，将局部整数判据推广到任意非分歧混合特征离散赋值环，得到相应的戴德金整环判据，并分类了 $\mathbb{Z}$ 的所有混合幂差因子吸收理想。

1. 引言

素理想能够识别任意两个元素的乘积。差因子条件则只识别由特定多项式恒等式产生的乘积。这种限制使得
素理想中不会出现的两种现象成为可能：不同的不可约分支可以选取不同的因子；幂零元可以使互补因子为零，却不使线性因子为零。要获得分类，而不只是传递性质和孤立例子，理解这两种机制至关重要。

Anderson、Badawi 和 Coykendall 在 [3] 中引入了平方差因子吸收理想。Farshadifar 在 [6], 中研究了三次条件，Yeşilot 则在 [10] 中考察了素指数。Hizem 在 [7] 中利用极小素理想刻画了平方差因子吸收理想。Taha、Salim 和 Kim 的混合幂表述 [8] 从以下恒等式出发

$$a^{kn} - b^n = (a^k - b)F_{k,n}(a, b), \qquad F_{k,n}(a, b) = \sum_{i=0}^{n-1} a^{k(n-1-i)}b^i.$$

配套手稿建立了商表述、局部化与乘积判据、完全平方情形以及若干构造。它还表明，乘子 k 对非根理想可能有影响： $16\mathbb{Z}$ 是(6,3)-mpdf，但不是(3,3)-mpdf。

2020 数学学科分类。 主要分类号 13A15；次要分类号 13B25、13B30、13F05、13F30。关键词和短语。混合幂差因子吸收理想，极小素理想，单位根，幂零扩张，理想化，离散赋值环，Dedekind 域。

Tekir、Anebri、Hasiç与Arabacı [9] 研究了一种不同的四次条件：由$(a-b)(a+b)(a^2+b^2) \in I$，要求三个对乘积之一属于 I。我们沿用他们的术语***4-pdf***吸收来指称这一条件。它弱于严格的$(4,4)$-mpdf条件，该条件选取 $a-b$或完整的三次余因子。他们的有限余极大素理想分类与主理想化判据为下文的比较提供了四次前置结果。混合乘子给出了进一步的区分：例6.5 将4-pdf吸收与$(4k, 4)$-mpdf对每一个 $k \geq 2$区分开来。

本文旨在确定决定混合幂条件的结构信息。对于约化商环，这些信息体现为单位根与极小素理想处剩余特征之间的相互作用。对于非约化商环，还包括幂闭包、赋值界以及平方零理想的扩张数据。主要贡献如下。

(i) 定理 3.1 将三次极小素理想判据推广到任意 n，并证明 k的独立性，且不要求诺特性、有限性或互素性。定理 3.4同样消除了 [9,定理 2。8]四次对乘积判据中的有限性与互素性要求；其障碍涉及三个极小素理想，而非两个。

(ii) 定理 3.10 刻画了在 $\sqrt{I}$ 中同时得到两个结论的蕴含关系，其条件是 $\overline{\sqrt{I}}$满足混合幂条件。对于任意 I，它还证明了这一取根基值的蕴含关系与k 无关。推论 3.11 推出了严格条件以及相应 primary条件下的下降性。定理 3.13 给出了根理想的多项式与形式幂级数等价关系。定理3.16和3.18给出了几何应用与拉回应用。(iii) 定理 4.1 表明，在特征 p 且满足 $p \mid n$时，该条件恰好取决于 $p^{v_p}(n)$，而与 k 及 n中与 p 互素的部分无关。它还给出了一个局部判据。(iv) 定理 5.1 对整环的平方零扩张进行了分类，且不假设扩张分裂。推论 5.4 涵盖了理想化中的非齐次理想，并指出其定义线性映射的作用。定理 5.8 刻画了对每个域扩张均保持稳定的条件：约化商环几何整，且核无挠，其中也包括非分裂扩张。推论5.6 讨论了正则模作用下、以主基环为底环的齐次理想化，并去除了 [9,定理 5.5]中对 3 的限制。(v) 当 n 是单位元时，定理 6.1 给出了离散赋值环极大理想的幂对 k 的精确依赖关系。定理 6.6 在 [10, 注记 5]中解决了分歧素数指数问题。定理 6.9 处理了非分歧混合特征下的所有指数，并确定了特征四例外中的剩余域限制。定理6.14和7.3分别给出了所述戴德金整环情形与整数情形的完整分类。

平方极小素理想判据归功于 Hizem [7]。对于立方数，必须区分三种定义。Farshadifar 的 cdf-吸收条件要求 $a-b \in I$ 或 $a^2+ab+b^2 \in I$；Yeşilot、Şimşek 和 Özel Ay 的 cdf-素条件 [11]要求 $a-b \in I$或 $a^2+ab+b^2 \in \sqrt{I}$；Draoui 的 cdf-半素条件 [5, 定义 2.1]则将两个结论都置于 $\sqrt{I}$中。对于根理想，三者是一致的。最终发表的 [11, 定理 1] 已经给出了无需有限性或互素性假设的三次谱判据，而 [11, 定理 2] 证明了在任意环中向根理想的三次素性下降。我们明确采用他们的双素局部化和零理想提升框架。这里的扩展允许任意 n 以及混合乘子：必须将单个单位根的阶与 n区分开来，并且 n 在第二个极小素理想处的消失是一个独立条件。

定理 3.10 还讨论了一个较弱的蕴含关系，其中两个因子都在根基中检验。对于非根理想，其他分类所研究的严格条件保留了 primary 条件和半素条件所丢失的信息。特别是，推论 7.5 中的有界指数不同于 cdf-初等分类中的不受限制的素数幂指数[11, 定理 6]；其无平方因子情形已包含在 [11, 定理 5]中。

温和赋值定理的素数指数情形 $k = 1$ 可重新得到 [10, 定理 3]„ 而定理 6.6 则解决了 [10, 备注 5]中提出的问题。后者来源是一篇预印本。闭素数幂理想的数值限制已见于 Anderson 和 Badawi [2]；我们明确说明它们的作用，而不将其视为独立的新成果。一般的同态和乘积判据在配套手稿 [8]中得到了阐述。本文中，它们作为谱分类、扩张分类和算术分类的工具。四次对吸收的类似同态、商以及局部化传递见 [9, 命题 3.2、推论 3.3 和命题 3。6]。其乘积结论 [9, 命题 3。1]讨论的是带有一个全环坐标的理想；本文采用的严格相容性判据则出自[8]。

本文中的所有条件均对每一对 a， b量化，包括零元。这与 [6, 定义 2.1] 中发表的三次定义以及 [10, 8]一致。 [3] 中原有的平方定义排除了零元。对于非零理想，这两种平方约定一致，但对于零理想则未必一致；下文基于商的陈述始终采用全体元素约定。

第 2 节汇总传递与局部化工具。第3 节给出严格的与四次配对乘积谱判据、根下降以及扩张应用。第 4 节讨论特征约化，而第 5 节讨论平方零扩张以及齐次主四次比较。第 6 节和 7节给出赋值、戴德金整环与整数分类。

2. 定义、改写与初步例子

所有环均为含幺交换环。除拉回的一个辅助目标外，环均非零。同态保持幺元。除非另有说明，所讨论的理想均为真理想。固定 $n \geq 2$ 和 $k \geq 1$，并记 $F_n(X, Y) = \sum_{i=0}^{n-1} X^{n-1-i}Y^i$，故$F_{k,\,n}(a, b) = F_n(a^k, b)$。令 $F_1 = 1$。对于域 K，记 $\mu_n(K) = \{z \in K : z^n = 1\}$。记号 $n \in I$ 表示 $n \cdot 1_R \in I$。关于根基、局部化和中国剩余定理的一般事实均按 [4]中的方式使用。

定义 2.1。 [8] 环 R 的真理想 I 称为（kn， n）-混合幂差因子吸收理想，简称（kn， n）-*mpdf*理想，如果 $a^{kn} - b^n \in I$蕴含 $a^k - b \in I$或 $F_{k,\,n}(a, b) \in I$对所有 a， $b \in R$均成立。非零环 S 若其零理想是（kn， n）-mpdf，则称其满足 MP$_{k,\,n}$。

定义 2.2。 环 R 的真理想 I 称为 ***4-pdf***-吸收 [9, 定义 2.1]，如果对所有 a， $b \in R$ ，

$$\begin{aligned} a^4 - b^4 \in I \quad \Longrightarrow \quad & a^2 - b^2 \in I, \quad \text{or} \\ & (a^2 + b^2)(a - b) \in I, \quad \text{or} \\ & (a^2 + b^2)(a + b) \in I. \end{aligned}$$

我们也将其称为四次对乘积条件。

每个 $(4, 4)$-mpdf 理想都是 4-pdf-吸收的：属于该理想意味着 也属于该理想，而另一个严格替代条件本身已经是一个对乘积。反之则不成立，如例 3.7所示。这两个条件都在商 R/I中检验。

例 2.3. 设 $R = \mathbb{F}_2[x]$，且 $I = (x^2 + x) = (x(x+1))$。我们证明，对于任意 $k \geq 1$， I 都是 $(2k, 2)$-mpdf。它不是素数，因为 $x(x + 1) \in I$，而 $x, x + 1 \notin I$。

设 $a, b \in R$ 满足 $a^{2k} - b^2 \in I$，并令 $c = a^k$。由于 $\operatorname{char} R = 2$，我们有 $-1 = 1$ 和 $2 = 0$，因此

$$(c - b)^2 = c^2 - 2cb + b^2 = c^2 + b^2 = c^2 - b^2 = a^{2k} - b^2 \in I.$$

因此 $x(x + 1)$ 整除 $(c - b)^2$。元素 x 和 $x + 1$ 在 R 中是素数，所以 $x \mid c - b$ 和 $x + 1 \mid c - b$。它们互素，因此 $x(x + 1) \mid c - b$，也就是说， $a^k - b \in I$。

我们回顾来自 [8] 的以下混合幂传递陈述。对于 $n = 3$ 和 $k = 1$，幂闭包蕴含为 [6, 命题 2.4]，局部化为 [6, 定理 2.15]，， 而同态和商陈述为 [6, 定理 2.16 以及推论 2.17]。

引理 2.4。 设 I 是 R 的真理想。

(i) I 是(kn, n)-*mpdf*，当且仅当 R/I 满足 MP$_{k,n}$。(ii)性质 MP$_{k,n}$ 在含幺子环和每个非零局部化中都成立。因此，它在一个环与其全商环之间双向传递。(iii) 如果 I 是(kn, n)-*mpdf*，那么 $c^n \in I$ 蕴含 $c^{n-1} \in I$。

对于四次对乘积条件，相应的局部化结论是 [9, 命题 3。6]下面记录所用的清分母论证。

引理 2.5。 若非零环 S 的零理想是 *4-pdf*-吸收的，则 S 的每个非零局部化的零理想也是 *4-pdf*-吸收的。

证明。 若 $(a/s)^4 = (b/t)^4$ 在一个局部化中，选取 q 属于其乘法集，使得 $q(a^4t^4 - b^4s^4) = 0$。令 $A = qat$, $B = qbs$ 和 $d = qst$。于是 $A^4 = B^4$，因此 A, B 的三个对乘积之一为零。由于 $a/s = A/d$ 和 $b/t = B/d$，除以 d^2 或 d^3 即可得到局部化中的相应结论。□

[11, 中定理 1] 证明所用的两个极小素理想局部化具有如下有限族形式。两个素理想和三个素理想的情形将分别用于严格对乘积条件和四次对乘积条件。

引理 2.6。 设 P_1，…，P_r 是非零环 R 的互异极小素理想，其中 $r \geq 1$，并令 $T = R \setminus \bigcup_{j=1}^{r} P_j$。环 $C = T^{-1}R$ 恰有 r 个素理想，即 $T^{-1}P_1$，…，$T^{-1}P_r$，且它们全都是极大理想。特别地，

$$C/\sqrt{0_C} \cong \prod_{j=1}^{r} K_{P_j}, \qquad K_{P_j} = \mathrm{Frac}(R/P_j).$$

若 R 是约化的，则 $C \cong \prod_{j=1}^{r} K_{P_j}$。

证明。 集合 T 对乘法封闭。与 T 不相交的素理想 H 包含于 $\bigcup_{j=1}^{r} P_j$ 中。由有限素理想避开定理可知，对于某个 j，有 $H \subseteq P_j$，而极小性迫使 $H = P_j$。反之，每个 P_j 都与 T 不相交。因此，恰有这些 r 素理想保留下来；它们全都是极大理想，因而两两互素。它们的交为幂零根，所以由中国剩余定理得到所显示的乘积。每个 C/P_jC 都是 R/P_j 的一个域局部化，因此是其分式域。最后，局部化保持约化性。□

3. Radical ideals and their minimal primes

在域中，两个幂相等这一事实由单位根控制。下一个定理精确刻画了不同极小素理想处的选择何时相容。对于 $n = 3$ 和$k = 1$，这就是 [11, 定理 1]中的无约束三次判据。

定理 3.1。 设 I 是交换环 R的一个真根理想，令 $n \geq 2$，并置$K_P =$ 分式域(R/P)，其中 $P \in$ 极小素理想集合$_R(I)$。以下各项等价：

(i) I 对于某个 $k \geq 1$是(kn, n)-*mpdf*；(ii) I 对于每个 $k \geq 1$都是(kn, n)-*mpdf*；(iii) 对于所有不同的 P、$Q \in$ 极小素理想集合$_R(I)$，

$$\mu_n(K_P) \neq \{1\} \quad then \quad n \in Q;$$

(iv) 对于每个不同的 P、$Q \in$ 极小素理想集合$_R(I)$，$K_P \times K_Q$ 的零理想是(kn, n)-*mpdf*（对于一个，等价地对于所有，正整数 k）。

证明。 转到约化商环 $S = R/I$。对于域 K 和 $a^{kn} = b^n$，要么 $a = b = 0$，要么$a \neq 0$ 和 $\zeta = b/a^k \in \mu_n(K)$。当且仅当 $\zeta \neq 1$ 时，第一个因子非零。当第一个因子为零时，余因子为 $na^{k(n-1)}$；当第一个因子非零时，余因子为零。

假设 S 满足 MP$_{k,\ n}$。固定不同的极小素理想 P，Q。引理 2.6 和局部化传递表明，$K_P \times K_Q$ 满足 MP$_{k,\ n}$。如果 $\zeta \in \mu_n(K_P) \setminus \{1\}$ 且 $n \neq 0$ 属于 K_Q，则使用

$a=(1,\ 1)$ 和 $b=(\zeta,\ 1)$。于是 $a^{kn}=b^n$，然而 $a^k-b=(1-\zeta,\ 0)\neq 0$，且余因子的第二个坐标为 $n\neq 0$。这是不可能的。

反过来，假设不同极小素理想上的条件成立。令 $a^{kn}=b^n$ 属于 S，并假设第一个因子 a^k-b 非零。由于所有极小素理想的交为零，存在某个不包含 a^k-b的极小素理想 P。在 K_P中，比值 b/a^k 是一个非平凡的 n次单位根。因此，对于其他每个极小素理想 Q，都有 $n\in Q$。模 P时，根据整环性质，余因子为零。模任何其他的 Q时，要么第一个因子非零，此时余因子再次为零；要么 $a^k=b$，此时余因子等于 $na^{k(n-1)}=0$。因此，余因子属于每个极小素理想，从而为零。对每个 $k\geq 1$，上述论证都成立。

对于 (iii) 蕴含 (iv)，固定不同的 P，Q 并令 $W=K_P\times K_Q$。W的极小素理想为 $0\times K_Q$ 和 $K_P\times 0$，其剩余域分别为 K_P和 K_Q。关于 W 的条件 (iii) 包含关于 S的条件 (iii) 的两个实例 $(P,\ Q)$ 和 $(Q,\ P)$。将刚才给出的论证应用于 W，可知对每个 k，W都满足 $\mathrm{MP}_{k,\ n}$。反过来，上文用于证明 $\mathrm{MP}_{k,\ n}$对 S 成立可推出 (iii) 的计算——即在 $K_P\times K_Q$ 中使用 $a=(1,\ 1)$ 和 $b=(\zeta,\ 1)$——表明 (iv) 蕴含 (iii)。□

注记 3.2：对于约化环 S，设 $\mathcal{A}_n=\{P\in$极小素理想集合 $S:\ \mu_n(K_P)\neq\{1\}\}$ 以及 $\mathcal{B}_n=\{P\in$极小素理想集合 $S:\ n\notin P\}$。该判据表明，$\mathcal{A}_n\times\mathcal{B}_n$ 包含于对角线中。等价地，对于某个极小素理想 P_0，以下三者之一成立：$\mathcal{A}_n=\varnothing$，或 $\mathcal{B}_n=\varnothing$，或 $\mathcal{A}_n=\mathcal{B}_n=\{P_0\}$。第一种情况迫使 S 上的 n 次幂映射为单射。第二种情况意味着 $n=0$ 在约化环S 中成立，并确保每当混合幂相等时，余因子总是消失。这些情况不一定互斥。

推论 3.3。设 I 是 R 的真理想，且 $k\geq 1$。则当且仅当 I 是根基理想，并且 I 上方的极小素理想中至多有一个不包含2时，它是$(2k,2)$-*mpdf*。

证明。引理 2.4的 (iii) 给出 $c^2\in I\Rightarrow c\in I$。如果 $c^m\in I$ 与 $m\geq 2$，那么 $(c^{\lceil m/2\rceil})^2\in I$，因此$c^{\lceil m/2\rceil}\in I$，反复进行这一过程会降低指数，直到 $c\in I$。因此，一个 $(2k,\ 2)$-mpdf 理想是根基理想。对于域 K，群 $\mu_2(K)$ 非平凡，当且仅当 $2\neq 0$在 K中。应用定理 3.1。□

这是 [8], 的平方情形定理，将 [7], 的极小素理想描述扩展到对零理想采用全元素约定的情形。对于一般的 n，前一条备注中的两个集合可能不同。例如，当 $n=6$和 $K=\mathbb{F}_4$ 时，有 $6=0$属于 K，但$\mu_6(K)\neq\{1\}$：$K^\times$ 的一个生成元的阶为 3。因此，非平凡的 n 次单位根可以存在于特征整除 n 的域中。

3.1. **四次对吸收**。四次对乘积条件有不同的相容性判据。对于有限多个两两互素素理想的交，以下分类为 [9, 定理 2.8]。在三个选定的极小素理想处局部化，可消除这两项限制。

定理3.4。设 I 是 R的一个真根理想。对于 $P\in$ 极小素理想集合$_R(I)$，令 $K_P=$ 分式域(R/P)，并定义

$$\Sigma=\{P\in\mathrm{Min}_R(I):2\notin P\},\qquad \Sigma_i=\{P\in\Sigma:-1\ \textit{is a square in}\ K_P\}.$$

Then

$$I\ \textit{is 4-pdf-absorbing}\quad\Longleftrightarrow\quad\Sigma_i=\varnothing\ \textit{or}\ |\Sigma|\leq 2.$$

证明。转到约化商环 $S=R/I$，将其极小素理想及其分式域与陈述中的对应对象相对应。设 $a^4=b^4$，并令 $u=a-b$, $v=a+b$, $w=a^2+b^2$。在包含 2 的极小素理想处，剩余域的特征为二。此时，$(a-b)^4=0$给出 $a=b$，且三个因子 u，v，w均为零。

假设 uv、uw、vw 中没有一个在 S 中为零。由于其极小素理想的交为零，选取极小素理想 P、Q、H，使得 uv、uw、vw 分别在其中非零。在 P 处，幺元 $uvw=0$迫使 $w=0$，而 u、$v\neq 0$。因此 a、$b\neq 0$ 且 $(a/b)^2=-1$ 在 K_P 中，所以 $P\in\Sigma_i$。在 Q 处，同一幺元迫使 $v=0$，而 u、$w\neq 0$；在 H 处，它迫使 $u=0$，而 v、$w\neq 0$。全部

三个素数都属于 Σ，并且彼此不同：在每一个素数处，另外两个的对乘积均为零。因此，不满足 4-pdf条件意味着 $\Sigma_i \neq \varnothing$ 和 $|\Sigma| \geq 3$。这证明了所显示判据的充分性。

反之，设 $P \in \Sigma_i$并选取互不相同的 Q，$H \in \Sigma \setminus \{P\}$。由引理 2.6，在 $P \cup Q \cup H$ 之外进行局部化可得 $K_P \times K_Q \times K_H$。选取 $i \in K_P$使得 $i^2 = -1$，并取

$$a = (1, 1, 1), \qquad b = (i, -1, 1).$$

于是 $a^4 = b^4$，而

$$a^2 - b^2 = (2, 0, 0),$$
$$(a^2 + b^2)(a - b) = (0, 4, 0),$$
$$(a^2 + b^2)(a + b) = (0, 0, 4).$$

由于这些域的特征不为二，三者均非零。引理2.5因此排除了 S中的 4-pdf条件，从而证明了必要性。□

注记 3.5。若 $\Sigma_i = \varnothing$，则第一个结论总是足够的：$a^4 - b^4 \in I$ 蕴含 $a^2 - b^2 \in I$。事实上，在特征不为二的剩余域中，$w = 0$ 且 $b \neq 0$ 会产生 -1的平方根；否则 $uv = 0$。在特征二的情形下，三个因子都如证明中所述为零。因此，[9, 推论 2.11] 中的有限性和互素性假设可以去除。在特征不为二的代数闭域上，每个极小素理想分式域都包含 -1的平方根。因此，在该域上的任意代数中，一个真根理想是 4-pdf-吸收的，当且仅当它至多有两个极小素理想。这推广了[9, 推论 2.12], ，其结论涉及多项式环并假设了互素性。

推论3.6。沿用定理 3.4中的记号，根理想 I 是 $(4k,4)$-*mpdf*，当且仅当对某个（等价地，对每个）$k \geq 1$ 有 $|\Sigma| \leq 1$。

证明。对于域 K，$\mu_4(K) \neq \{1\}$ 当且仅当其特征不为二时：此时$-1 \neq 1$ 是一个四次根，而在特征二中 $X^4 - 1 = (X - 1)^4$。此外，$4 \in P$当且仅当 $2 \in P$。因此，定理 3.1 的判据恰好排除了Σ中的两个不同成员。□

例 3.7。下面的例子区分了这两个四次条件。

(i) $\mathbb{Q}^r$ 的零理想对每个正整数 r都是4-pdf-吸收的，因为 -1 在 $\mathbb{Q}$中不是平方。只有当 $r = 1$时，它才是$(4k, 4)$-mpdf。对于 $r \geq 2$，取 $a = (1, \ldots, 1)$和$b = (1, -1, 1, \ldots, 1)$：对于每个 $k \geq 1$，线性因子在第二个坐标中非零，而余因子在第一个坐标中为4。(ii) $\mathbb{C}^2$ 的零理想是4-pdf-吸收的，但不是$(4k, 4)$-mpdf，见同一个二坐标对。$\mathbb{C}^3$ 的零理想不是4-pdf-吸收的，见定理3.4中的见证。这些乘积例子已经属于 [9, 定理2.8]的范围。(iii) 在 $S = \mathbb{C}[x, y]/(xy)$中，两个极小素理想$(x)$和$(y)$并不互素。尽管如此，根据定理3.4，其零理想是4-pdf-吸收的。对于剩余类 $a = x + y$,$b = x - y$ 有 $a^4 = b^4$，但 $a - b = 2y \neq 0$ 和$(a + b)(a^2 + b^2) = 4x^3 \neq 0$。因此，零理想不是(4, 4)-mpdf。这个例子不满足 [9,定理2.8]中的互素性假设。

3.2. **下降到根式**。三次主下降定理 [11, 定理 2] 使用双素局部化，并通过幂零根进行提升。我们将这一机制推广到任意指数，也推广到一个较弱的蕴含关系，其中两个结论都落在根基中。关于幂零理想上幂等元和单根的标准提升事实见 [12, Tags 00J9 and 0ALI]。我们给出所需精确形式的初等证明，因此无需假设整个幂零根满足幂零性。

引理 3.8。[13, 定理 21。28] 设 N 是交换环 C的一个幂零理想。C/N 的每个幂等元都可以提升为 C的一个幂等元。

引理 3.9。设 N 是交换环 C 的幂零理想，且 $d \geq 1$ 是 C 中的单位元。任意满足 $\bar{z}^d = 1$ 的 $\bar{z} \in C/N$ 都可提升为满足 $z^d = 1$ 的 $z \in C$。

证明。 我们使用以下初等事实。如果 $g \in C$ 是幂零元，即 $g^m = 0$，那么 $1+g$ 是单位元，因为

$$(1+g)(1-g+g^2-\cdots+(-g)^{m-1}) = 1-(-g)^m = 1.$$

设 $\bar{z} \in C/N$ 满足 $\bar{z}^d = 1$，并选取满足 $z_0 + N = \bar{z}$ 的 $z_0 \in C$。则 $h = z_0^d - 1$ 属于 N，所以对于某个 $m \geq 1$，有 $h^m = 0$。元素 $z_0^d = 1+h$ 是一个单位元；又由于 $z_0 \cdot z_0^{d-1} = z_0^d$，元素 z_0 也是一个单位元。我们在 C 中构造 z_0，z_1，$z_2, \ldots$，使得对于每个 $j \geq 0$，

$$z_j \equiv z_0 \pmod{N}, \qquad z_j^d - 1 \in h^{2^j} C.$$

对于 $j = 0$，没有什么需要证明的。假设已构造出 $z = z_j$，并令 $g = z^d - 1 \in h^{2^j} C \subseteq N$。由于 $z \equiv z_0$（模 N），我们有

$$z = z_0(1 + z_0^{-1}(z - z_0)), \qquad z_0^{-1}(z - z_0) \in N,$$

因此根据上文记录的事实，z 是一个单位元。由于 d 也是一个单位元，

$$w = d\, z^{d-1}$$

是 C的一个单位元。令 $t = -g\, w^{-1} \in N$和 $z' = z + t$。根据二项式定理，

$$z'^d = z^d + d\, z^{d-1} t + t^2 q, \qquad q = \sum_{i=2}^{d} \binom{d}{i} z^{d-i} t^{i-2} \in C,$$

因此

$$z'^d - 1 = g + wt + t^2 q = g - g + g^2 w^{-2} q = g^2 w^{-2} q \in g^2 C.$$

由于 $g^2 \in h^{2^{j+1}} C$，我们得到 $z'^d - 1 \in h^{2^{j+1}} C$。此外，$z' \equiv z \equiv z_0$（模 N），因为 $t \in N$。我们取 $z_{j+1} = z'$。

最后，选择 j，使得 $2^j \geq m$。于是 $h^{2^j} = 0$，因此 $z_j^d = 1$，并且 $z_j + N = \bar{z}$。所以 $z = z_j$ 是所需的提升。□

下一个定理精确刻画了何时只需检验根基中的两个因子。其假设弱于严格混合幂条件，也弱于相应的 primary条件。

定理 3.10。 设 R 是一个交换环，设 $I \subsetneq R$，并固定整数 $n \geq 2$ 和 $k \geq 1$。以下条件等价。

(i) 对于每个 $a, b \in R$,

$$a^{kn} - b^n \in I \quad \Longrightarrow \quad a^k - b \in \sqrt{I} \text{ or } F_{k,n}(a,b) \in \sqrt{I}.$$

(ii) 根基 $\sqrt{I}$ 是 $(\bar{k}n, n)$-***mpdf***。

(iii) 对于每个 $\ell \geq \bar{1}$，根基 $\sqrt{I}$ 都是 $(\ell n, n)$-***mpdf***。

因此，对于 $n = 3$ 和 $k = 1$，按照 [5,定义 2，1] 一个理想是 ***cdf***-吸收半主理想，当且仅当其根基是 ***cdf***-吸收的。对于任意固定的 n，条件 ***(i)*** 与 k无关。

证明。 条件 (iii) 推出 (ii)，而 (ii) 推出 (i)，因为 $I \subseteq \sqrt{I}$。假设 (i)，并令$S = R/I$ 和 $N = \sqrt{0_S}$。假设表明，只要 $a^{kn} = b^n$ 属于 S，则$a^k - b$ 和 $F_{k,n}(a,b)$ 中至少有一个是幂零元。

我们首先验证，这个较弱的蕴含关系对每个非零局部化 $T^{-1}S$ 都成立。对于$n = 3$ 和 $k = 1$，这一局部化性质是 [5, 定理 5.3]；我们在此验证所需的加权版本。设 $A = a/s$, $B = b/t$ 满足 $A^{kn} = B^n$。令 $w = st$, $a' = at$，并令$b' = s^k t^{k-1} b$，于是 $a'/1 = wA$ 和 $b'/1 = w^k B$。存在 $c \in T$ 使得 $c(a'^{kn} - b'^n) = 0$。因此，$(ca')^{kn} - (c^k b')^n = 0$ 属于 S。根据假设，以下元素中至少有一个是幂零元:

$$c^k(a'^k - b'), \qquad c^{k(n-1)} F_{k,n}(a', b')$$

在局部化中，它们分别为 $(cw)^k(A^k - B)$ 和 $(cw)^{k(n-1)} F_{k,n}(A, B)$。由于 cw 是单位元，所需的两个因子中有一个是幂零元。

现在，我们证明约化环 S/N 满足定理 3.1 的极小素理想条件。对每个 $P \in \mathrm{Min}\ S$，记 $K_P = \mathrm{Frac}(S/P)$。反设 S 的两个不同极小素理想 P、Q 满足 $\mu_n(K_P) \neq \{1\}$ 和 $n \notin Q$。取 $\zeta \in \mu_n(K_P) \setminus \{1\}$，并设其阶为 $d > 1$。于是$d \mid n$，且 d 在 K_P 中非零：特征为 p 的域中，不存在阶能被 p 整除的非平凡单位根。这里用到的是 d，而非 n；K_P 的特征可能整除 n。

设 $T = S \setminus (P \cup Q)$ 以及 $C = T^{-1}S$。由引理 2.6，$C/\sqrt{0_C} \cong \overline{K_P} \times K_Q$利用引理 3.8提升幂等元 $(1, \underline{0})$，得到分解 $C \cong A \times B$ 其中 $A/\sqrt{0_A} \cong K_P$且 $B/\sqrt{0_B} \cong K_Q$。整数 d 是 A中的单位元，因为其像模一个幂零理想是单位元。引理 3.9 因此将 ζ 提升为 $z \in A$，满足 $z^d = 1$，从而 $z^n = 1$。

取 $a = (1_A,\ 1_B)$ 和 $b = (z,\ 1_B)$。于是 $a^{kn} = b^n$，而两个因子模 $\sqrt{0_C}$ 的约化为

$$(1-\zeta, 0) \neq 0, \qquad \left(\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^i,\ n \cdot 1_{K_Q}\right) \neq 0.$$

因此两个因子都是非幂零的。这与此前已经证明的局部化蕴涵相矛盾。极小素理想条件成立，而定理 3.1 使得 S/N 对指数为 n的每个混合乘子都成立。由于 $S/N \cong R/\sqrt{I}$，引理 2.4（i）给出（iii）。□

推论 3.11。设 R 是一个交换环，I 是真理想，$n \geq 2$，且 $k \geq 1$。若 I 是(kn, n)-*mpdf*，则对每个 $\ell \geq 1$，$\sqrt{I}$都是$(\ell n, n)$-*mpdf*。更一般地，同样的结论可由以下条件推出

$$a^{kn} - b^n \in I \quad \Longrightarrow \quad a^k - b \in I \ \text{ or } F_{k,n}(a,b) \in \sqrt{I} \qquad (a, b \in R).$$

证明。任一假设都蕴含定理 3.10 的条件 (i)。□

对于 $n = 3$ 和 $k = 1$，推论的主要断言是 [11, 定理 2]。定理 3.10中的等价关系也纠正了 [5, 注 2。5]中关于半初等根下降的否定性断言：其中引用的例子明确不是半初等的，因此并未构成该等价关系的反例。

3.3. **多项式与形式幂级数扩张**。Laurent级数域中没有新的单位根，因此谱分类在添加变量后保持稳定。

引理 3.12。对于任意域 K 以及任意 $n \geq 2$，$\mu_n(K((X))) = \mu_n(K)$。

证明。挠 Laurent 级数的赋值为零。其常数系数 c 满足 $c^n = 1$。除以 c，得到 $1+w$，且满足 $w \in XK[[X]]$。在特征零的情形，令 $r = n$；在特征p 的情形，写作 $n = p^e r$，其中 $p \nmid r$。由于弗罗贝尼乌斯在域 $K((X))$中是单射，方程 $(1+w)^n = 1$ 推出 $(1+w)^r = 1$。若 w 是阶为 $s \geq 1$的非零元素，则 $(1+w)^r - 1$ 中 X^s 的系数为 r 乘以 w的非零首项系数，矛盾。因此 $w = 0$。□

[5, 定理 5。1]和 [11, 定理 7(2)]中的三次多项式构造涉及 $(I,\ X)$，并保持商 R/I。对于四次对吸收，[9, 命题 3。9] 证明了从 $I[X]$ 到 I的下降，而 [9, 例 3。10] 展示了从 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 到其多项式环的一般上升并不成立。下一个定理确立了根系数理想 $I[X]$ 和 $I[[X]]$上严格条件的等价性。回顾一下，$I[[X_1, \ldots, X_d]]$ 表示所有系数都属于 I的级数。当 I 有限生成时，它等于 $IR[[X_1, \ldots, X_d]]$，但一般情况下这一等式不成立。

定理 3.13。设 R 是一个交换环，I 是其真根理想，设 $n \geq 2$、$k \geq 1$ 和 $d \geq 1$。以下各项等价：

(i) I 在 R 中是 (kn, n)-*mpdf*；(ii) $I[X_1, \ldots, X_d]$ 在 $R[X_1, \ldots, X_d]$ 中是 (kn, n)-*mpdf*；(iii) 系数理想 $I[[X_1, \ldots, X_d]]$ 在 $R[[X_1, \ldots, X_d]]$ 中是 (kn, n)-*mpdf*。

证明。 转到 $S = R/I$。常数嵌入给出了两个反向蕴含。假设 S是约化的且满足 $\mathrm{MP}_{k,n}$。逐系数映射给出一个嵌入

$$S[[X]] \longrightarrow \prod_{P\in \operatorname{Min} S} K_P[[X]] \longrightarrow \prod_{P\in \operatorname{Min} S} K_P((X)).$$

由引理 3.12 可知，最后一个乘积中的域与相应的 K_P具有完全相同的 n次单位根和特征。记 $L_P = K_P((X))$，并设 $a, b \in S[[X]]$满足 $a^{kn} = b^n$和 $a^k \neq b$。选取 $P \in \operatorname{Min} S$，使其坐标在 L_P中满足 $a_P^k \neq b_P$。于是 $a_P \neq 0$，否则 $b_P^n = 0$ 会推出 $b_P = 0$，且 $\zeta = b_P/a_P^k \in \mu_n(L_P) \setminus \{1\}$。由引理 3.12，$\mu_n(K_P) \neq \{1\}$，故由定理 3.1(iii)，对每个极小素理想 $Q \neq P$，都有 $n \in Q$。由于 $\operatorname{char} L_Q = \operatorname{char} K_Q$，对 $Q \neq P$，我们得到 $n = 0$属于 L_Q。现在，$F_{k,n}(a_P, b_P) = 0$，因为 L_P 是整环且 $\zeta \neq 1$。对于 $Q \neq P$，要么 $a_Q^k \neq b_Q$，于是 $F_{k,n}(a_Q, b_Q)$ 在域 L_Q 中属于 $= 0$；要么$a_Q^k = b_Q$，于是 $F_{k,n}(a_Q, b_Q) = n\, a_Q^{k(n-1)} = 0$。因此，$F_k$的每个坐标中，$_n(a, b)$都为零；又因为 $S[[X]] \to \prod_P L_P$是单射，故 $F_{k,n}(a, b) = 0$。所以 $S[[X]]$ 满足 $\mathrm{MP}_{k,n}$，其子环 $S[X]$也满足。二者均为约化环，因此反复应用即可证明有限个变量时的断言。系数理想的商环恒等式完成了证明。□

3.4. **域扩张与几何整性**。 基域中已经存在的非平凡单位根会同时约束每个不可约分支。

推论 3.14。 设 F 为一个域，$n \geq 2$、$k \geq 1$，并且假设 $\operatorname{char} F$ 不整除 n 且$\mu_n(F) \neq \{1\}$。在每个 F-代数中，根 $(kn、n)$-*mpdf*理想恰好就是素理想。在代数闭域 F 上，若 $\operatorname{char} F \nmid n$，同样的结论成立。若 $\operatorname{char} F \mid n$，则在任意域 F上，每个 F-代数的每个真根理想，对于每个 $k \geq 1$，都是 $(kn、n)$-*mpdf*理想。

证明。 每个极小分式域都包含 F，因此在第一组假设下，它包含一个非平凡的 n次单位根，而 n 不属于任何极小素理想。谱判据至多允许一个极小素理想；具有唯一极小素理想的根理想是素理想。若 F 是代数闭域且其特征不整除 n，则多项式 $X^n - 1$ 具有 $n \geq 2$个互异根。若特征整除 n，则整数 n 在每个商中都为零，谱判据自动成立。□

F-代数 S 称为几何约化的，分别称为几何整的，如果对于任意域扩张 L/F，$S \otimes_F L$ 分别是约化的，分别是整环。我们将使用关于代数闭域上的张量积的以下标准事实。

引理 3.15。 设 K 为代数闭域，且 D 和 B 为 K-代数，并且是整环。则 $D \otimes_K B$ 是整环。

证明。 环 $D \otimes_K B$ 非零，因为 D 和 B 是非零的 K-向量空间。令f，$g \in D \otimes_K B$满足 $fg = 0$，并反设 $f \neq 0$和 $g \neq 0$。记作

$$f = \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i, \qquad g = \sum_{j=1}^{s} c_j \otimes d_j,$$

其中 a_i，$c_j \in D$，且 $b_1, \ldots, b_r$在 K上是线性无关的，$d_1, \ldots, d_s$也同样如此；在为 B 中出现的元素所张成的空间选取一个 K-基后，这是可能的。由于 $f \neq 0$ 和$g \neq 0$，存在指标 p，q 使得 $a_p \neq 0$ 和 $c_q \neq 0$。令 A 为由所有 a_i和 c_j生成的 D 的 K-子代数。则 A是有限生成的 K-代数且为整环，并且 $A \otimes_K B \to D \otimes_K B$是单射的，因为 B 在域 K上是平坦的。因此，我们可以将 f 和 g 视为$A \otimes_K B$ 中的元素，并且有 $fg = 0$。

由于 A 是整环，$a_p c_q \neq 0$，因此 $a_p c_q$ 不是幂零元，且局部化 $A' = A[1/(a_p c_q)]$是一个非零的有限生成 K-代数。设 M 为 A'的一个极大理想。域 A'/M 是一个有限生成的 K-代数，因而由扎里斯基引理 [4, 命题7.9],可知，它是 K 的有限扩张；又因为 K 是代数闭的，所以它等于 K。于是复合 $A \to A' \to A'/M = K$ 是一个 K-代数同态 x：$A \to K$。它将 $a_p c_q$ 映为 A'中某个单位元的像，因此 $x(a_p)x(c_q) \neq 0$。

Now 考虑环同态 $\varphi = x \otimes \mathrm{id}_B : A \otimes_K B \to K \otimes_K B = B$。我们有

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^{r} x(a_i)\, b_i, \qquad \varphi(g) = \sum_{j=1}^{s} x(c_j)\, d_j.$$

由于 b_i 在 K 上线性无关，且 $x(a_p) \neq 0$，我们得到 $\varphi(f) \neq 0$；同理，$\varphi(g) \neq 0$。但是 $\varphi(f)\varphi(g) = \varphi(fg) = 0$ 属于整环 B，矛盾。因此，$f = 0$ 或 $g = 0$。□

下一个命题刻画了在基域任意扩张后仍然成立的 mpdf 条件。

定理 3.16. 设 F 是一个域，S 是一个非零的几何约化 F-代数，且 $n \geq 2$ 满足 特征 $F \nmid n$。对于任意 $k \geq 1$，以下条件等价：

(i) $S \otimes_F L$ 对每个域扩张 L/F 都满足 $\mathrm{MP}_{k,\,n}$；

(ii) $S \otimes_F \overline{F}$ 满足 $\mathrm{MP}_{k,\,n}$；(iii) S 在 F 上几何整。

证明。 假设 (i)。取 $L = F$ 即可得到 (ii)。

假设 (ii)，并令 $T = S \otimes_F F$。由于 S和 F是非零的 F-向量空间，$T \neq 0$；又因为 S 是几何约化的，所以 T是约化的。环 T 是代数闭域 F上的代数，其特征不整除 n。由 (ii)，T的零理想是 (kn, n)-mpdf，且它是真根理想。根据推论 3.14，以 F替换 F 应用该推论可知，T 的零理想是素理想，即 T 是整环。现在令 L/F 为任意域扩张，并令 Ω 为 L的代数闭包。由于 F在 F上是代数的，存在一个 F-嵌入 $F \to \Omega$，通过该嵌入，Ω 是 F的扩域。于是

$$T \otimes_{\overline{F}} \Omega = (S \otimes_F \overline{F}) \otimes_{\overline{F}} \Omega \cong S \otimes_F \Omega,$$

根据引理 3.15，该环是整环。由于 S 是自由 F-模，包含映射 $L \subseteq \Omega$诱导出一个单射环同态 $S \otimes_F L \to S \otimes_F \Omega$。因此 $S \otimes_F L$ 是整环的非零子环，故为整环。由于 L 是任意的，S 是几何整的，这就是 (iii)。

假设 (iii)，令 L/F为一个域扩张，并置 $D = S \otimes_F L$为一个整环。若 $a,\ b \in D$ 满足$a^{kn} = b^n$，则 $(a^k - b)F_{k,\,n}(a,\ b) = a^{kn} - b^n = 0$，因此 $a^k - b = 0$或 $F_{k,\,n}(a,\ b) = 0$，因为 D是一个整环。因此，D 的零理想是 $(kn,\ n)$-mpdf，即 D 满足 $\mathrm{MP}_{k,\,n}$。□

例 3.17。 对于基变换失效，取 $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 和 $n = 3$。立方映射在S上是单射，因此对于每个 k，它都满足 $\mathrm{MP}_{k,\,3}$。但 $S \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 失效：令 ζ为一个本原三次单位根，使用$a = (1,\ 1)$ 和 $b = (\zeta,\ 1)$。第一个因子是 $(1 - \zeta,\ 0)$，而余因子的第二坐标为 3。

3.5. **整环的拉回**。 谱定理还给出了具有两个整环分量的拉回的完备判据。同一整环的复制情形可作为推论得到。

定理 3.18。 设 A、B 为整环，设 $f : A \twoheadrightarrow C$ 和 $g : B \twoheadrightarrow C$ 为满的含幺同态，并假设两个核均非零。固定 $n \geq 2$ 和 $k \geq 1$，并设 $P = A \times_C B$。则 P 的零理想是 （kn、n）-*mpdf*，当且仅当

$$\big(\mu_n(\mathrm{Frac}\, A) = \{1\} \ \textit{or}\ n = 0 \ \textit{in}\ B\big) \quad \textit{and} \quad \big(\mu_n(\mathrm{Frac}\, B) = \{1\} \ \textit{or}\ n = 0 \ \textit{in}\ A\big).$$

证明。 环 P 作为 $A \times B$ 的子环是约化的。核 $P_A = \ker(P \to A)$ 和$P_B = \ker(P \to B)$ 都是素理想，乘积为零，并且由于原来的两个核均非零，它们不可比较。每个素理想都包含其中一个，因此它们恰好是极小素理想。商整环为 A 和 B，而定理 3.1 恰好给出所述的两个条件。□

如果一个原始核为零，则拉回与另一个整环同构，因此其零理想自动是 mpdf；必须将这种情况与所示的双极小素理想判据区分开来。

整环的复制是其商映射的两个副本的拉回。此应用与一般的双分量分类一并包含于此。

推论3.19。 设 A 是一个整环， $0 \neq J \subseteq A$ 是一个理想，且 $K =$ 分式域(A)。对于 $n \geq 2$ 和 $k \geq 1$, $A \bowtie J = \{(a, a+j) : \ a \in A,\ j \in J\}$ 的零理想是 (kn, n)-*mpdf*，当且仅当 $n = 0$ 属于 A 或 $\mu_n(K) = \{1\}$。

证明。 使用 $A \bowtie J \cong A \times_{A/J} A$ 定理 3.18；两个核都是 $J \neq 0$。 □

例3.20。 约化环 $\mathbb{Z} \bowtie 2\mathbb{Z}$ 对每个 $k \geq 1$ 都满足 MP$_{k,\ 3}$，因为 $\mu_3(\mathbb{Q}) = \{1\}$。它从不满足 MP$_{k,\ 2}$，因为 $-1 \neq 1$ 属于 $\mathbb{Q}$。

例3.21。 作为一个混合特征例子，令 $\zeta \in \mathbb{C}$ 为本原三次单位根，并设

$$P = \mathbb{Z}[\zeta] \times_{\mathbb{F}_3} \mathbb{F}_3[t],$$

这些映射分别将 ζ 映到 1，将 t 映到 0。二者都是满射，且核均非零。分式域 $\mathbb{Q}(\zeta)$包含非平凡三次单位根，而 $\mathbb{F}_3(t)$中没有，因为$X^3 - 1 = (X-1)^3$ 在特征三下成立。此外，第二个整环中有 $3 = 0$。因此， P是约化的，但不是整环，并且对每个 $k \geq 1$ 都满足 MP$_{k,\ 3}$。

4. 特征-p约化

一旦特征整除指数，指数的与特征互素部分对 mpdf 条件没有影响。对于 $n = 3$ 和 $k = 1$, 与 $c^3 = 0 \Rightarrow c^2 = 0$的等价性由 [6, 命题2.4和定理 2.6]推出。对于特征二中的四次对吸收，与 $c^4 = 0 \Rightarrow c^3 = 0$ 的类似等价性是 [9, 命题2.18]。下一个定理确定任意指数和混合乘子的确切特征部分。

定理 4.1。 设 p 为素数， S 为特征为 p的非零交换环。设 $n \geq 2$ 满足 $p \mid n$，记 $n = dq$ 为 $d = p^{v_p(n)}$ 和 $p \nmid q$，并设 $k \geq 1$。以下各项等价：

(i) (0) 在 S中是(kn, n)-*mpdf*; (ii) 对于每个 $c \in S$， $c^d = 0$ 蕴含 $c^{d-1} = 0$; (iii) (0) 对于每个 $\ell \geq 1$，在 S 中是 $(\ell d, d)$-*mpdf*；(iv) (0) 对于每个 $\ell \geq 1$，在 S 中是$(\ell n, n)$-*mpdf*。

每当这些条件成立时，每个混合幂恒等式中的余因子都为零： $a^{\ell n} = b^n$意味着 $F_{\ell,\ n}(a, b) = 0$。

证明。 在特征 p 下， $F_d(X,\ Y) = (X-Y)^{d-1}$，并且

$$F_n(X,Y) = F_d(X,Y)F_q(X^d, Y^d) = F_q(X,Y)F_d(X^q, Y^q).$$

假设 (i) 成立，并令 $c^d = 0$。设 $a = 1, b = 1 + c$。由弗罗贝尼乌斯可得 $b^d = 1$，因此 $a^{kn} = b^n = 1$。这两个因子分别为 $-c$和

$$F_{k,n}(1, 1+c) = F_n(1, 1+c) = q(-c)^{d-1}.$$

因此，mpdf 性质推出 $c = 0$ 或 $q(-c)^{d-1} = 0$。整数 q 在S中表示一个单位元，所以在两种情况下都有 $c^{d-1} = 0$。这就证明了 (i)⇒(ii)。

假设 (ii) 成立，固定 $\ell \geq 1$，并假设 $a^{\ell n} = b^n$。令 $x = a^\ell$, $y = b$，以及 $w = x^q - y^q$。于是$w^d = 0$, 所以 $w^{d-1} = 0$。因此

$$F_{\ell,n}(a, b) = F_q(x, y)(x^q - y^q)^{d-1} = 0.$$

这证明了 (ii)⇒(iv) 以及最后的断言。对 $q = 1$ gives 采用相同的论证可得 (ii)⇒(iii)。反过来，取 $a = 0, b = c$ in 其定义蕴含式中的值，即可由 (iii) 推出 (ii)；而 (iv) 立即推出 (i)。□

幂闭包条件是局部的，尽管不受限制的 mpdf 条件未必是局部的。这与 [2,Corollary 2.9] 中关于闭理想的局部化结果是一致的。

推论 4.2。 设 p 为素数，设 S 为特征为 p 的非零环，并设 $n \geq 2$ 可被 p 整除。对于任意 $k \geq 1$, 以下各项等价： S 满足 MP$_{k,\ n}$；每个 $S_{\mathfrak{m}}$（其中$\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} S$）都满足 MP$_{k,\ n}$；每个 S_P（其中 $P \in \operatorname{Spec} S$）都满足 MP$_{k,\ n}$。

证明。 局部化保持该性质。反之，置 $d = p^{v_p(n)}$ ，并假设每个极大局部化都具有该性质。若 $c^d = 0$ 属于 S，定理 4.1 给出 $c^{d-1}/1 = 0$ 属于每个极大局部化。一个在所有极大局部化中都为零的元素必为零，因此同一定理也适用于 S。 □

定理 4.1 也适用于理想 I 只要 $p \in I$，通过转到 R/I即可。它将 [8] 中的素数幂定理和单向整除蕴含加强为：对于具有相同 p部分的所有指数，这两者等价。

幂闭包条件对每个单独的幂零元的阶给出了一个精确上界，但并未断言整个幂零根是幂零的。

命题 4.3。 设 $d \geq 2$ ，并假设交换环 S 对每个 $c \in S$都满足 $c^d = 0 \Rightarrow c^{d-1} = 0$。如果 z 的幂零指数为 h，即 $z^h = 0$ 且对于 $z \neq 0$ 有 $z^{h-1} \neq 0$ （对于 $z = 0$，指数为 1 ），则

$$h \leq (d-1)\left\lceil \frac{h}{d} \right\rceil, \qquad \textit{and consequently} \qquad h \leq (d-1)^2.$$

等价地， $h = dq + r$ ，其中 $q \geq 0$、 $1 \leq r \leq d-1$ 和 $q + r \leq d-1$ 为整数。

证明。 令 $s = \lceil h/d \rceil$。则 $(z^s)^d = 0$，因此 $(z^s)^{d-1} = 0$，从而得到 $h \leq (d-1)s$。由于 $s \leq (h+d-1)/d$，这给出 $dh \leq (d-1)h + (d-1)^2,$ ，于是 $h \leq (d-1)^2$。若 $d \mid h$ 且 $h > 0$，则第一个不等式不可能成立。否则，写作 $h = dq + r$ ，其中 $1 \leq r \leq d-1$ ，并利用 $\lceil h/d \rceil = q + 1$ 得到$q + r \leq d - 1$。 □

下一个数值判据是 [2, 定理 3.1] 中闭理想的素数幂算术的 $(d, d-1)$ 特化形式。我们给出简短的赋值证明，以明确说明特征-p的应用。

命题 *4.4*。设 K 为一个域，设 $d \geq 2$，并设 $h \geq 1$。环 $K[T]/(T^h)$ 满足$c^d = 0 \Rightarrow c^{d-1} = 0$ ，当且仅当 $h \leq (d-1)\lceil h/d \rceil$。特别地，命题 *4.3* 中的界 $(d-1)^2$ 可以达到。若 *char* $K = p$， $d = p^e$ 且 $e \geq 1$，并且 $h = (d-1)^2,$ ，则对于每个 $k \geq 1$ 以及满足 $v_p(n) = e$ 的每个 n， $K[T]/(T^h)$ 都是 (kn, n)-*mpdf*。

证明。 必要性可通过将前述命题应用于 T （对于 $h = 1$则显然）得到。 $K[T]/$（T^h）中的每个非零幂零元都具有 $T^s u$的形式，其中 $1 \leq s < h$且 u 是一个单位元。它的 d次幂当且仅当 $ds \geq h$时为零。因此，陈述中的条件当且仅当（$d-1$）$s \geq h$ 对每个整数 $s \geq \lceil h/d \rceil$都成立；只需检验最小的此类整数即可。对于 $h =$ （$d-1$）^{2}， $\lceil h/d \rceil = d-1$，从而得到等式。最后一个断言由定理4.1推出。 □

注 4.5。 若 $2 \in I$，则 [9, 命题 2.18] 的商形式表明， I 是 4-pdf-吸收的，当且仅当 $c^4 \in I \Rightarrow c^3 \in I$ 对每个 $c \in R$都成立。定理 4.1 将此条件等同于（$4k$， 4）-mpdf，对某个（等价地，对每个） $k \geq 1$而言；直接比较也见于 [8,推论 3.21]。对于特征为二的 F 域，已知的四次情形 [9, 推论 2.19] 是

$$(T^e) \subset F[T] \text{ is 4-pdf-absorbing} \quad \Longleftrightarrow \quad e \in \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}.$$

这是 $d = 4$ 命题 4.4 的情形；因此，同一列表也适用于每个 $(4k,$ 4)-mpdf。k。

例 4.6。 环 $\mathbb{F}_3[T]/(T^4)$ 对每个 $k \geq 1$ 都是 $(3k,$ 3)-mpdf，尽管 T 的像的幂零指数为 $4 > 3 - 1$。因此，正确的统一界是 $(d-1)^2,$ ，而不是 $d-1$。幂零根本身不一定是幂零的：例如，在 $S = \mathbb{F}_p[X_i$ 中： $i \geq 1]/(X_i^p$ ： $i \geq 1)$，每个幂零元 c 都满足 $c^p = 0$，所以 S 对所有 $k \geq 1$ 都是 $(kp^2,$ $p^2)$-mpdf；然而，由所有 X_i 的像生成的理想含有长度任意大的非零乘积。事实上，不同变量的乘积在这个单项式商环中仍然非零，而弗罗贝尼乌斯将每个常数项为零的多项式映射为零。

5. 平方零扩张与理想化理想

我们首先处理约化商环为整环的扩张。这种扩张不一定分裂，而混合特征情形保留了在商环及其模本身中不可见的信息。对于 $n = 2$，这样的环满足 MP$_{k,\ 2}$ 当且仅当其平方为零核为零：幂闭包推论使该环约化，而商环已经是整环。因此，实质性的扩张现象从 $n = 3$ 开始。

定理 5.1. 设 S 是一个交换环，N 是一个满足 $N^2 = 0$ 的理想，并假设 $A = S/N$ 是一个整环。固定整数 $n \geq 3$ 和 $k \geq 1$。以自然方式将 N 视为一个 A-模。

(i) 若 $n \cdot 1_A \neq 0$，则 *(0)* 在 S 中是 *(kn, n)-mpdf*，当且仅当 N 在 A 上无挠。*(ii)* 假设 *char* $A = p > 0$, $p \mid n$，且 $d = p^{v_p(n)} \geq 3$。则 *(0)* 在 S 中是 *(kn, n)-mpdf*，当且仅当 $n \cdot 1_S = 0$。*(iii)* 假设 *char* $A = 2$，且 $v_2(n) = 1$。则 *(0)* 在 S 中是 *(kn, n)-mpdf*，当且仅当$N = \{0, 2 \cdot 1_S\}$。这里后一个集合可能只含一个元素。

特别地，在所有这些扩张中，该条件都与 k 无关。

证明。若 $v \in N$，利用 $v^2 = 0$ 展开可得

$$(x + v)^n = x^n + nx^{n-1}v, \qquad F_n(x + v, x) = nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}v.$$

对于 (i)，首先假设 S 具有所述的 mpdf 性质。令 $0 \neq r \in A$ 和 $v \in N$ 满足 $rv = 0$，并选取 r 的一个提升 $a \in S$。置 $b = a^k + v$。由于 $na^{k(n-1)}v = 0$，故有 $a^{kn} = b^n$。$F_n(a^k,\ b)$ 在 A 中的约化为 $nr^{k(n-1)} \neq 0$。因此第一个因子必须为零，从而得到 $v = 0$。所以 N 是无挠的。

反过来，假设 N 是无挠的且 $a^{kn} = b^n$。置 $x = a^k$、$y = b$、$D = x - y$，以及 $C = F_n(x,\ y)$，于是 $DC = 0$。若 $D \neq 0$，则 $C = 0$，从而 $C \in N$；等式 $DC = 0$ 和无挠性给出 $C = 0$。若 $D = 0$ 但 $x \neq 0$，则 $C = nx^{n-1} \neq 0$，而无挠性给出 $D = 0$。唯一剩下的情形是 $x = y = 0$。由于 A 是整环，$a,\ b \in N$，且 $F_{k,\ n}(a,\ b)$ 的每个单项式的总次数都至少为 $n - 1 \geq 2$。因此 $F_{k,\ n}(a,\ b) = 0$。

对于 (ii)，首先注意到 $p \in N$，因此 $p^2 = 0$ 属于 S 和 $pN = 0$。整数 $\binom{n}{2}$ 能被 p整除：当 p为奇数时显然成立；而对于 $p = 2$，假设 $d \geq 3$ 蕴含 $4 \mid n$。若 $n \cdot 1_S \neq 0$，令$v = n \cdot 1_S \in N$，并考虑 $a = 1$ 和 $b = 1 + v$。于是 $a^{kn} = b^n = 1$，而 $a^k - b = -v \neq 0$和 $F_{k,\ n}(a,\ b) = n \cdot 1_S \neq 0$，矛盾。

为证明充分性，设 $n = dq$，其中 $p \nmid q$，并假设 $n \cdot 1_S = 0$。若 $d = p$，则 p 为奇数且 $p \cdot 1_S = 0$：事实上，q 是 S中的单位元，因为 $p^2 = 0$ 且 $\gcd(p,\ q) = 1$。在特征p下，若 $x^n = y^n$，则 $(x^q - y^q)^p = 0$；约化到整环 A 可知 $x^q - y^q \in N$，因此

$$F_n(x, y) = F_q(x, y)(x^q - y^q)^{p-1} = 0$$

因为 $p - 1 \geq 2$。如果 $d \geq p^2$，则在再次将 $x^n = y^n$ 模 N 化简后，$w = x^q - y^q \in N$。记作$u = y^q$，得到

$$F_d(u + w, u) = du^{d-1} + \binom{d}{2}u^{d-2}w = 0.$$

这里 $d \cdot 1_S = 0$，因为 $p^2 = 0$，且 $p \mid \binom{d}{2}$，所以第二项因 $pN = 0$ 而消失。由于$F_n(x,\ y) = F_q(x,\ y)F_d(x^q,\ y^q)$，所需的余因子为零。

对于 (iii)，将 $n = 2q$ 写成 q 为奇数的形式。同样，$2 \in N$、$4 = 0$，且 $2N = 0$。对于任意 $v \in N$，数对$a = 1$、$b = 1 + v$ 满足 $a^{kn} = b^n = 1$，其两个因子分别为 $-v$ 和 $n + \binom{n}{2}v = 2 + v$。因此，每个非零 $v \in N$ 都必须等于 2，从而证明了必要性。

反之，设 $N = \{0, 2\}$。若 $N = 0$，则 $S = A$ 是整环，因此设 $|N| = 2$。令 $x = a^k, y = b$ 满足 $x^n = y^n$。在 A 中有 $x^q = y^q$，因为平方映射在特征二的整环上是单射。若 $x \neq y$，则 $F_q(x,\ y) \in N$ 且 $x^q + y^q \in N$，由此可得

$F_n(x,\ y) = F_q(x,\ y)(x^q + y^q) = 0$。若 $x = y$，则要么 $x = y$，要么 $x - y = 2$。在后一种情况下

$$F_n(x,y) = ny^{n-1} + \binom{n}{2} y^{n-2}\, 2 = 2y^{n-2}(y+1) = 0.$$

对于最后一个等式，在二元模 N 上乘以 y，结果要么为零，要么为幺元，因此 $2y(y+1) = 0$；利用 $n - 2 \geq 1$。证明至此完成。□

推论 5.2。设 A 是一个整环，M 是一个 A-模，且 $n \geq 3,\ k \geq 1$。那么，$A \ltimes M$ 的零理想是 $(kn,\ n)$-*mpdf*，当且仅当满足以下情形之一：

(i) $n \cdot 1_A \neq 0$ 且 M 无挠；(ii) 特征 $A = p \mid n$ 且 $p^{v_p(n)} \geq 3$；(iii) 特征 $A = 2,\ v_2(n) = 1$，且 $M = 0$。

证明。将定理5.1 应用于 $N = 0 \ltimes M$。理想化的特征等于A的特征。□

5.1. **不一定齐次的理想**。对于一个 R-模 M，理想化 $R \ltimes M$的乘法为 $(r,\ u)(s,\ v) = (rs,\ rv + su)$。我们采用[1]的标准理想化框架。对于严格三次条件，通过饱和理想 $I \ltimes M$ 进行传递已在 [5,定理 4.6]中得到确立；关于非零 I 的相关蕴含见 [6, 定理 2.20]。cdf-主类似物是 [11, 定理 7(3)]。这些饱和理想具有商 R/I。下面的商可能保留一个非零平方为零核，并且取决于非齐次理想的定义线性映射。以下描述将这一信息明确呈现出来。

引理 5.3。**</style}设 为一个交换环，为一个 -模。的每个真理想 都由的一个真理想 、的一个满足 的子模，以及一个-线性映射：** $P \to M/N$唯一确定，具体为

$$L = L(P, N, \phi) = \{(r,u) : r \in P,\ u + N = \phi(r)\}.$$

反过来，每个这样的三元组都定义了一个理想。映射 ϕ 消去 P^2，因而也可以等价地视为一个 R/P-线性映射 $P/P^2 \to M/N$。此外，如果 $S = (R \ltimes M)/L$，则自然满射 $S \to R/P$具有一个平方为零核，该核可规范地识别为 R/P-模 M/N。如果整数 t 属于 P，则其像 $t \cdot 1_S$ 对应于核中的 $-\phi(t)$。

证明。给定 L，令 P 为其第一坐标投影，并置 $N = \{u :\ (0,u) \in L\}$。若 $(r,\ u) \in L$，则乘以 $(0,m)$ 得到 $rm \in N$，因此 $PM \subseteq N$。陪集 $u+N$只取决于 r；定义其为 $\phi(r)$。加法以及乘以 $(a,\ 0)$ 证明了 R-线性。反过来，这些性质直接表明所显示的子集是一个理想。由于 P 消去 M/N，线性性推出 $\phi(P^2) = 0$。商的描述由第一坐标投影得到。若 $u + N = \phi(t)$，则 $(t,\ u) \in L$，所以 $(t,\ 0) + L = -(0,u) + L$，从而得到最后的断言。□

推论 5.4. 引理 *5.3*中，设 P 是素数，并固定 $n \geq 3,\ k \geq 1$。令 $A = R/P$ 和 $E = M/N$。

(i) 若 $n \notin P$，则 L 是 *(kn, n)-mpdf*，当且仅当 E 在 A上无挠。*(ii)* 若 *char* $A = p \mid n$ 且 $p^{v_p(n)} \geq 3$，则 L 是 *(kn, n)-mpdf*，当且仅当 $\phi(n) = 0$。*(iii)* 若 *char* $A = 2$ 且 $v_2(n) = 1$，则 L 是 *(kn, n)-mpdf*，当且仅当 $E = \{0, \phi(2)\}$。

证明。使用商判据，并将定理 5.1 应用于引理中的平方零商5.3。□

例 5.5。设 $R = \mathbb{Z}$、$M = \mathbb{F}_2$、$P = 2\mathbb{Z}$、$N = 0$ 和 $\phi(2a) = a$。则 $L = L(P,\ 0,\ \phi)$ 不是齐次的，并且 $(R \ltimes M)/L \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，通过 $(r,\ u) \mapsto r + 2u$ (模 4)。因此，对于每个 $k \geq 1$，L 都是 $(6k,\ 6)$-mpdf。相比之下，齐次理想 $L_0 = 2\mathbb{Z} \ltimes 0$ 的商为 $\mathbb{F}_2 \ltimes \mathbb{F}_2$，对于任何 k 都不是 $(6k,\ 6)$-mpdf。事实上，在后一个商中取 $a = (1,\ 0)$ 和 $b = (1,\ 1)$：它们所需的幂相同，而两个因子都等于 $(0,\ 1)$。因此，相同的 P 和 N 不一定产生相同的 mpdf 行为；扩张映射 ϕ 至关重要。

5.2. **主基环上的齐次四次理想。** 上述素投影分类保留了一个平方为零核。齐次理想化也可以具有一个主基理想，其根基的平方非零。在模作用满足正则性的条件下， [9, 定理 5。5]刻画了此类理想的四次对乘积条件，其中 2， $3 \notin P$。在 [8, 定理 3。17] 中进行的主四次比较表明，对于一个 P-主理想，满足 $2 \notin P$ 时，4-pdf 条件和 $(4,\ 4)$-mpdf 条件都等价于 $P^3 \subseteq I$。它通过移除对 [9, 定理 4。6]中 3 的限制而对其进行了扩展。应用这一比较即可得到齐次判据的以下版本。

推论5.6。 设 I 是 R 的 P-*primary* 理想，且满足 $2 \notin P$。设 M 是一个 R-模，$N \subseteq M$ 是其子模，且满足 $IM \subseteq N$。假设 $R \setminus P$ 中的每个元素都在 M/N 上作用为单射。对于 $J = I \ltimes N \subset R \ltimes M$，以下命题等价:

（i） J 是*4-pdf*-吸收的。

（ii） J 是（4，4）*-mpdf*。

（iii） $P^3 \subseteq I$ 且 $P^2 M \subseteq N$。

证明。 令 $A = R/I$、 $\mathfrak{p} = P/I$ 和 $E = M/N$ 为一个 A-模。于是

$$B = A \ltimes E \cong (R \ltimes M)/J.$$

其幂零根为 $K = \mathfrak{p} \ltimes E$，其中 $B/K \cong R/P$ 是一个整环。 B 的零理想是 K-primary 的：如果 $(a,\ u) \notin K$ 且 $(a,\ u)(b,\ v) = 0$，则 $ab = 0$ 属于 A。由 I 的 primary 性可得 $b = 0$，因为 $a \notin \mathfrak{p}$。于是由第二坐标可得 $av = 0$，因此根据模假设有 $v = 0$。所以 K 之外的每个元素都是正则元。

此外 $2 \notin K$。根据 [8, 定理 3.17], 中的主四次比较， B的零理想满足两个四次条件之一，当且仅当 $K^3 = 0$。相乘可得

$$K^3 = \mathfrak{p}^3 \ltimes \mathfrak{p}^2 E.$$

事实上，三个元素的乘积给出一个包含关系；$(r,\ 0)$，$(s,\ 0)$，$(t,\ 0)$的乘积，以及$(r,\ 0)$，$(s,\ 0)$，$(0,\ e)$的乘积生成所示的两个坐标，从而给出反向包含关系。因此， $K^3 = 0$等价于 $P^3 \subseteq I$和 $P^2 M \subseteq N$。在商 B 中检验这两个条件即可证明结论。□

取 $M = R$ 和 $N = I$ 可得以下有用的特例

$$I \ltimes I \text{ satisfies either quartic condition} \iff P^2 \subseteq I.$$

事实上， $R \setminus P$中的每个元素都在 R/I 上单射作用，而 $P^2 \subseteq I$ 蕴含 $P^3 \subseteq I$。这将 [9, 推论 5.6] 推广到仅受 $2 \notin P$这一条件限制的情形。

商初等论证和理想幂计算与以下内容中所用的相同： [9, 定理 5。5]；该推论取消了对 3的限制，并指出了共同的严格四次情形。这里， I不必是素理想，而 K^2 可以非零。在推论 5.4 中，第一坐标投影是素的，但理想可能不是齐次的，混合参数取值于 $n \geq 3$和 $k \geq 1$。定理 5.1 还讨论了非分裂扩张。因此，这些分类都包含一个四次情形，同时对基底和扩张保留了不同的假设。

5.3. **平方零扩张的几何稳定性。** 定理 3.16 中的约化性假设对于 $n \geq 3$至关重要。下一个结果准确刻画了几何约化代数的哪些平方零加厚，在基域的每次扩张后仍保有 mpdf 性质。该扩张不必是分裂扩张。

引理 5.7。 设 F 是一个域， A 是一个几何整的 F-代数， M 是一个无挠 A-模。对于每个域扩张 L/F， $A \otimes_F L$-模 $M \otimes_F L$ 都是无挠的。

证明。 令 $A_L = A \otimes_F L$，其为整环。根据标准的清分母论证[12, Tag 0AUU]：将 M_0 嵌入 $M_0 \otimes_A$ 分式域(A)中，选取这个有限维向量空间的一组基，并消去有限生成元集合中的分母，每个有限生成的 A-子模 M_0 of$M$ 都能嵌入一个有限秩自由 A-模中。将所得的单射M_0 , $\to A^r$ 在 F 上与平坦的 F-模 L 进行张量化，得到一个单射 $M_0 \otimes_F L$, $\to A_L^r$。因此 $M_0 \otimes_F L$

在 A_L上是无挠的。由于 M 是其有限生成子模的有向并，且在 F 上进行张量化会保持这些单射， $M \otimes_F L$ 是这类无挠A_L-模的有向并。因此，它是无挠的。□

定理 5.8。 设 F 是一个域， S 是一个非零交换 F-代数，且 N 是 S 的一个理想，并满足 $N^2 = 0$。假设 $A = S/N$ 在 F 上几何约化。固定 $n \geq 3$ 和 $k \geq 1$，并假设 特征 $F \nmid n$。以下各条件等价：

(i) $S \otimes_F L$ 对每个域扩张 L/F 都满足 MP$_{k,\ n}$；(ii) $S \otimes_F F$ 满足 MP$_{k,\ n}$；(iii) A 在 F 上几何整，且 N 作为 A-模是无挠的。

当这些条件成立时，对于每个域扩张 L/F 以及每个$\ell \geq 1$， $S \otimes_F L$ 都满足 MP$_{\ell,\ n}$ 。

证明。蕴含 (i)⇒(ii) 是直接的。假设 (ii)，并记 $S_F = S \otimes_F F$ 和 $N_F = N \otimes_F F$。在 $\overline{F}$ 上的平坦性给出 $S_F/N_F \cong A \otimes_F F$。该商是约化的，并且 $N_F^2 = 0$，因此 N_F 是 S_F 的幂零根。推论 3.11 表明 $A \otimes_F F$ 满足 MP$_{k,n}$。由定理 3.16 可知 A 是几何整的。单射 $S \to S_F$ 以及引理 2.4(ii) 蕴含 S 满足 MP$_{k,n}$。由于 A 是一个整环且 $n \cdot 1_A \neq 0$， 定理 5.1(i) 表明 N 在 A 上是无挠的。这证明了 (iii)。

假设 (iii)，并令 L/F 为任意域扩张。将 $0 \to N \to S \to A \to 0$ 在 F上与 L 张量化，得到一个以 $N_L = N \otimes_F L$为平方零理想的整环 $A_L = A \otimes_F L$ 的平方零扩张。引理 5.7表明 N_L 在 A_L上无挠。由于 $n \cdot 1_{A_L} \neq 0$，定理 5.1(i) 推出，对于每个 $\ell \geq 1$， $S \otimes_F L$ 均满足 MP$_{\ell,n}$。这证明了 (i) 及最后的断言。□

例 5.9。 设 F 为一个域，且 $n \geq 3$ 与其特征互素。非约化代数 $F[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ 在 F的每个扩张之后，对于每个 $k \geq 1$，都满足 MP$_{k,n}$：它对 (ε) 取商后为 F，而 (ε) 是 F上的一维向量空间。因此，一旦 $n \geq 3$，普适 mpdf 稳定性本身并不蕴含几何整性。

6. 赋值与戴德金整环分类

离散赋值环（DVR）是一个不是域的局部主理想整环。我们将其归一化赋值记为v，将一致化元记为 π，因此 $v(\pi) = 1$ 且 $v(0) = \infty$。下文中的温和 意指整数 n 是该离散赋值环中的单位元。下面的判据将通常的幂闭包限制与混合幂所施加的附加限制区分开来。

定理 6.1。 设 V 为一个以 π为一致化元的离散赋值环，设 $n \geq 2$ 为 V的单位元，并令 $k, e \geq 1$。置 $h = \lceil e/n \rceil$。则 $\pi^e V$ 是(kn, n)-*mpdf*，当且仅当

$$h \leq k \qquad and \qquad e \leq (n-1)h.$$

等价地，容许指数恰好是

$$\bigcup_{h=1}^{\min\{k, n-1\}} \{n(h-1)+1, \ldots, (n-1)h\}.$$

证明。 记 v 为归一化赋值，并令 $v(0) = \infty$。为证明必要性，令 $a = 0$ 且 $b = \pi^h$。则 $b^n \in \pi^e V$。结论迫使 $b^{n-1} \in \pi^e V$成立：另一种情况 $b \in \pi^e V$也推出这一点。因此 $e \leq (n-1)h$。接下来设 $e > nk$，并置 $s = e - nk \geq 1$, $a = \pi$，以及$b = \pi^k(1 + \pi^s)$。由于 n 是一个单位元， $F_n(1, 1 + \pi^s)$ 是一个单位元。因此

$$v(a^k - b) = k + s = e - (n-1)k < e, \qquad v(F_{k,n}(a, b)) = (n-1)k < e,$$

而它们的乘积的赋值为 $nk + s = e$。这与 mpdf 条件相矛盾。因此$e \leq nk$，等价地，有 $h \leq k$。

反之，假设这两个不等式成立，并令 $a^{kn} - b^n \in \pi^e V$。若 a 是单位元，则 b也是单位元。令$x = a^k$。若 $x - b$ 是单位元，由乘积恒等式可得 $F_n(x,\ b) \in \pi^e V$。若 $x - b$ 不是单位元，则$x \equiv b$ (模 π)，因此 $F_n(x,\ b) \equiv nb^{n-1} \neq 0$ (模 π)。故余因子是单位元，且 $x - b \in \pi^e V$。

若 a 是非单位元，则 $a^{kn} \in \pi^e V$，因为 $nk \geq e$。由此可得 $b^n \in \pi^e V$，因此 $v(b) \geq h$。此外$v(a^k) \geq k \geq h$。$F_n(a^k,\ b)$的每一项的赋值都至少为 $(n-1)h \geq e$。这就证明了充分性。最后，$h = \lceil e/n \rceil$ 表示 $n(h-1) + 1 \leq e \leq nh$。结合 $e \leq (n-1)h$，该区间非空当且仅当 $h \leq n-1$，从而得到所示的并集。□

赋值判据实现稳定化之前的每一个可能阈值，而不仅仅是 $k = 1$ 与 $k = 2$之间的首次分离。

推论*6.2.* 在定理 *6.1* 的假设下，令 $d = \min\{k, n-1\}$。恰有 $dn - d(d+1)/2$ 个正指数 e 使得 *(kn, n)-mpdf* 理想 $\pi^e V$成立。对于固定的 k，最大指数为 $(n-1)d$。该列表在 $k = n-1$处稳定化，此时最大指数为 $(n-1)^2$。对于每个$r \in \{1, \ldots, n-1\}$，$\pi^{r(n-1)}V$是 *(kn, n)-mpdf*，当且仅当 $k \geq r$。

证明。 </style> h 所标记的区间包含 $n-h$ 个整数，且各区间互不相交，因此它们的总基数为 $\sum_{h=1}^{d}(n-h)$。对于 $1 \leq r \leq n-1$，我们有 $\lceil r(n-1)/n \rceil = r$，并且$r(n-1) = (n-1)r$。应用该定理。□

注 6.3。 $k = 1$ 的情形表明，容许指数为 1、……、$n-1$。对于素数 n，这在局部化后得到了 [10, 定理 3], 的温和特征零主理想整环结果。一般定理允许任意的 n、任意的 k和任意的剩余域，并确定其对 k的精确依赖关系。

注 6.4。 对于一个离散赋值环 V，若其剩余特征不等于二，则 [8, 定理 3.17] 给出 $\pi^e V$ 4-pdf-吸收当且仅当 $e \leq 3$。这只用到$2 \notin \pi V$，因此也涵盖剩余特征为三的情形，超出了 [9, 定理 4.6]的假设。定理 6.1结合 $n = 4$给出了精确比较：

$\pi^e V$的性质	容许的正指数 e
4-pdf-吸收	1，2，3
(4，4)-mpdf	1，2，3
(8，4)-mpdf	1，2，3，5，6
$(4k$,4)-mpdf，$k \geq 3$	1，2，3，5，6，9

最后两行中的额外层级是混合乘子所允许的；它们不满足非混合对乘积条件。

例 6.5. 令 $I = 5^5\mathbb{Z}$。在离散赋值环 $V = \mathbb{Z}_{(5)}$ 中，取 $n = 4$、$e = 5$ 和 $k \geq 2$。由于 $h = \lceil 5/4 \rceil = 2 \leq k$ 和 $5 \leq 3h$，定理 6.1 使得 5^5V $(4k, 4)$-mpdf。其收缩为 $5^5V \cap \mathbb{Z} = I$。诱导嵌入 $\mathbb{Z}/I \hookrightarrow V/5^5V$ 以及引理 2.4 中的商和子环性质表明，对于每个 $k \geq 2$，I 都是 $(4k, 4)$-mpdf。

然而，I 不是 4-pdf-吸收的。对于 $a = 5$、$b = 10$，

$$\begin{aligned} a^4 - b^4 &= -9375 = -3 \cdot 5^5 \in I, \\ a^2 - b^2 &= -75, \\ (a^2 + b^2)(a - b) &= -625, \\ (a^2 + b^2)(a + b) &= 1875. \end{aligned}$$

最后三个整数中没有一个属于 I。反之，$(0) \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ 是 4-pdf-吸收的，但对于任何 k都不是 $(4k,\ 4)$-mpdf，正如例 k 中的 3.7 所示。因此，对于每个 $k \geq 2$，混合严格对乘积条件与非混合对乘积条件互不相容。

当指数本身为素数时，剩余特征可能等于该指数。下一个判据包括任意分歧。

定理 6.6。 令 V 为一个特征零的离散赋值环，其一致化元为 π，剩余特征为 $p > 0$，并置 $E = v_\pi(p)$。对于 e、$k \geq 1$，以下条件等价：

(i) $\pi^e V$ 是(kp, p)-*mpdf*;

(ii) $e \leq E$ 和 $e \leq (p-1)\lceil e/p \rceil$。

特别是在这个分歧情形下，该性质与 k 无关。

证明。 设 $h = \lceil e/p \rceil$。取 $a = 0, b = \pi^h$ 即可得到所需的不等式 $e \leq (p-1)h$，与上文完全相同。假设该条件成立，但 $e > E$。令 $s = \max\{h, e - E\}$，并取 $a = 1, b = 1 + \pi^s$。由于 $e \geq 2$，h 和 $e - E$ 都严格小于 e，因此 $s < e$。多项式恒等式

$$F_p(1, 1+Z) = \sum_{j=1}^{p} \binom{p}{j} Z^{j-1}$$

表明 $F_p(1, 1+\pi^s)$ 的赋值恰为 E。事实上，其常数项为 p，每个中间项的赋值至少为 $E + s > E$，而末项为 $(p-1)s \geq (p-1)h \geq e > E$。线性因子的赋值为 $s < e$，而乘积的赋值为 $s + E \geq e$。两个因子都不属于 $\pi^e V$，矛盾。因此 $e \leq E$。

反过来，假设 $e \leq E$ 和 $e \leq (p-1)h$。商 $V/\pi^e V$ 的特征为 p。模 $\pi^e V$，

$$a^{kp} - b^p = (a^k - b)^p, \qquad F_{k,p}(a, b) = (a^k - b)^{p-1}.$$

若第一个表达式为零，则 $v(a^k - b) \geq h$，因此第二个属于 $\pi^e V$。 □

注记 6.7。 Yeşilot [10, 注记 5] 要求对 (π^e) 在 π 整除 p 时进行分类，其中环为特征零主理想整环。定理 6.6 回答了这个问题。事实上，在 (π) 处局部化不会改变模 π^e的商，且 E 是 p 的分歧赋值。这个答案不需要对剩余域作任何有限性假设。

6.1. 非分歧混合特征离散赋值。 对于任意合数指数，当 $v(p) = 1$时，有一个完备判据。我们首先证明构造单位反例所需的二项式赋值公式。

引理 6.8。 设 V 是特征零且剩余特征为$p > 0$的离散赋值环，其归一化赋值为 v，满足 $v(p) = 1$。设 $\ell \geq 1$ 和 $u \in V^\times$，并假设 p 为奇数或 $\ell \geq 2$。对于 $n \geq 1$ 和 $t = v_p(n)$，有

$$v\big((1 + p^\ell u)^n - 1\big) = \ell + t.$$

证明。 如果 $p \nmid n$，那么 n 是 V中的一个单位元。二项式展开中的线性项的赋值为 ℓ，而每个高阶项的赋值至少为 $2\ell > \ell$，因此得证。对于满足 $u' \in V^\times$的 $z = 1 + p^r u'$，其中奇数 p 时 $r \geq 1$，而 $p = 2$时 $r \geq 2$，$z^p - 1$ 的首项的赋值为 $r + 1$。当 p为奇数时，每个中间项的赋值至少为 $1 + 2r > r + 1$，末项的赋值为 $pr > r + 1$。对于 $p = 2$，末项的赋值为 $2r > r + 1$。因此$v(z^p - 1) = r + 1$。写作 $n = p^t q$，其中 $p \nmid q$。将第一步计算应用于 q 次幂，然后依次进行第二步计算 t 次。□

局部整数分类可扩展至每个混合特征的非分歧离散赋值环。其特征四例外取决于剩余域，因此并非纯粹的数值分歧现象。

定理 6.9。 设 V 是一个特征零且剩余特征为 $p>0$ 的离散赋值环，其归一化赋值 v 满足 $v(p)=1$。令 $K=V/pV$，令 $n\geq 2$ 和 k、$e\geq 1$，并置 $t=v_p(n)$。则 p^eV 是 $(kn,\ n)$-*mpdf*，当且仅当满足以下情形：

（i） $t=0$、 $h=\lceil e/n\rceil\leq k$ 和 $e\leq$ （$n-1$）h； （ii） $t>0$ 和 $e\leq t$； （iii） $p=2$、$t=1$、 $e=2$、 $n\geq 6$ 和 $K\cong\mathbb{F}_2$。

证明。温和情形即为定理 6.1。设 $t>0$，并将 $n=p^tq$ 写成 $p\nmid q$。若 $e\leq t$，令$x=a^k$、 $y=b$ 满足 $x^n-y^n\in p^eV$。当 x 是非单位元时， y也是非单位元，并且 $F_n(x,y)$ 的每一项都属于 $p^{n-1}V\subseteq p^eV$，因为 $n-1\geq t$。当 x 且 y是单位元，并且 $x-y$是单位元时，乘积恒等式迫使 $F_n(x,y)\in p^eV$。在剩余情形下，$x\equiv y$（模 p），且分解

$$F_n(x,y)=F_q(x,y)\prod_{j=0}^{t-1}F_p(x^{qp^j},y^{qp^j})$$

表明 $F_n(x,\ y)\in p^tV\subseteq p^eV$，因为乘积中的每个因子都属于 pV。这证明了 (ii) 中的充分性。

对于奇数 p 和 $e>t$， $a=1$、 $b=1+p^{e-t}$ 这一对根据引理 6.8 给出赋值分别为 $e-t$ 和 t 的因子，其乘积的赋值为 e。整数赋值与 V 的归一化赋值一致，因为 $v(p)=1$，且与 p 互素的整数是 V 中的单位元。因此，这一对构成一个反例。当 $e\geq t+2$ 时，对于 $p=2$，同样的论证也成立。如果 $p=2$、 $e=t+1$ 且 $t\geq 2$，则 $a=1$、 $b=5$ 这一对给出赋值为 2 和 t 的因子，这两个赋值都小于 e，而乘积的赋值为 $t+2\geq e$。

只剩下 $p=2$、 $t=1$、 $e=2$。对于 $n=2$， $a=0$、 $b=2$ 这一对违反了模 $4V$ 的条件。对于 $n\geq 6$，将定理 5.1(iii) 应用于 $S=V/4V$ 和 $N=2V/4V$。乘以 2 将 $K=V/2V$ 与 N 作为 K-模对应起来。由于 $2\neq 0$ 属于 S，条件 $N=\{0,2\cdot 1_S\}$ 恰好在 $K\cong\mathbb{F}_2$ 时成立。这就是 (iii)，并且完成了分类。□

例 6.10。 特征四例外取决于剩余域。在定理 6.9的设定下，设 $p=2$ 且 $K\cong\mathbb{F}_4$。选择 $u\in V$，使其剩余既不是 0 也不是 1。在$S=V/4V$中，令 $a=1$ 且 $b=1+2u$。对于每个 $k\geq 1$， $a^{6k}=b^6=1$，但

$$a^k-b=-2u\neq 0,\qquad F_{k,6}(a,b)=2+2u\neq 0.$$

两个非零断言由所选取的 u 的剩余得到。因此， $4V$ 不满足（$6k$，6）-mpdf 条件，尽管 $4\mathbb{Z}$ 对每个 k都满足该条件。

6.2. 非离散赋值的对比。 离散指数范围在非离散秩一赋值中没有对应物。以下由必要的幂闭包条件得到的推论给出了精确的对比；其中采用了 [2]的闭理想观点。

推论 6.11。 设 V 是一个赋值整环，其满射赋值为 v： 分式域$(V)^\times\to\Gamma$，其中 Γ 是 $(\mathbb{R},+)$的稠密子群，并设 M 是其极大理想。对于每个 $n\geq 2$ 和$k\geq 1$， V的真 （kn， n）-*mpdf* 理想恰好是(0) 和 M。

证明。 这两个列出的理想都是素理想，因此是 mpdf。设 I 是一个非零真理想，且不同于 M。取 $z\in M\setminus I$。如果 $y\in I\setminus\{0\}$，那么 $v(y)>v(z)$；否则 $z/y\in V$将推出$z\in I$。因此

$$\alpha=\inf\{v(y):y\in I\setminus\{0\}\}$$

有限且严格为正。 V中每个取值严格大于 α 的元素都属于I：取 I 中一个取值较小的元素并作除法。取值严格小于α 的每个元素都不属于 I。由稠密性可得 $\gamma\in\Gamma$ 满足 $\alpha/n<\gamma<\alpha/(n-1)$；取 $c\in V$满足 $v(c)=\gamma$。于是 $c^n\in I$，但 $c^{n-1}\notin I$，这与引理 2.4(iii) 矛盾。□

6.3. **戴德金整环与数域**。 这里，戴德金整环是指克鲁尔维数为一的诺特整闭整环。每个非零真理想都能唯一分解为互不相同的极大理想的幂，而整环在这些极大理想处的局部化都是离散赋值环；参见 [4, 第 9]章。乘积判据保留了纯局部分类会丢失的信息。有限三次相容机制见于 [11,命题 14 以及 15] 中关于 cdf-初等理想的论述。我们采用 [8],的严格混合幂判据，它允许任意指数和任意指标集。配套论文还阐释了非根严格因子的有限三次重叠。

引理 6.12。 设 $n \geq 2$ 和 $k \geq 1$，令 $\{R_i\}_{i\in\Lambda}$ 为一个非空环族，并且对每个 i，令 I_i 为 R_i 的真理想。那么，当且仅当以下条件成立时，$\prod_i I_i$ 在 $\prod_i R_i$ 中是 (kn, n)-*mpdf*。

(i) 每个 I_i 在 R_i 中都是 (kn, n)-*mpdf*。(ii) 每当 a、$b \in R_i$ 满足 $a^{kn} - b^n \in I_i$ 和 $a^k - b \notin I_i$ 时，对每个 $j \neq i$，都有 $n \in I_j$。

证明。这就是 [8] 的任意乘积判据。为回顾这一论证，在其他位置取零来检验单个坐标，即可得到 (i)。如果线性因子在 i 处非零，则在另一个坐标 j 处取 (1,1)；其余因子为 n，从而证明 (ii)。反过来，如果某个坐标上的线性因子非零，则 (ii) 使得 n 在其他每个商中都为零。在这些坐标处，要么各自的 mpdf 条件给出余因子为零，要么线性因子为零且余因子为 $na^{k(n-1)} = 0$。因此，余因子在每个商中都为零。□

推论 6.13。 设 D 是一个 *Dedekind* 域，设 $0 \neq I \subsetneq D$ 的素理想分解为 $I = \prod_{i=1}^{r} P_i^{e_i}$，其中极大理想 P_i 互不相同，并设 $n \geq 2$、$k \geq 1$。假设 $nD + I = D$。则 I 是 (kn, n)-*mpdf*，当且仅当以下条件之一成立：

(i) $r = 1$，且对于 $h = \lceil e_1/n \rceil$，有 $h \leq k$ 和 $e_1 \leq (n-1)h$；
(ii) $r \geq 2$，对每个 $e_i = 1$，以及对每个 i，$\mu_n(D/P_i) = \{1\}$。

对于数域的整数环，令 $q_i = |D/P_i|$。条件 *(ii)* 中的根条件等价于 最大公约数$(n, q_i - 1) = 1$。

证明。 中国剩余定理和局部化给出

$$D/I \cong \prod_{i=1}^{r} D/P_i^{e_i} \cong \prod_{i=1}^{r} D_{P_i}/P_i^{e_i} D_{P_i}.$$

每个 D_{P_i} 都是离散赋值环，而 n 是其中的单位元。因此，单个因子由定理 6.1支配。在长度为 $e \geq 2$的截断离散赋值环中，取 $a = 0, b = \pi^{\lceil e/n \rceil}$可使所需幂与一个非零线性因子相等。对于 $e = 1$，商是一个域 K，且当且仅当 $\mu_n(K) = \{1\}$时，线性因子被迫为零：当 $a \neq 0$时除以 a^k，并利用 $a = 1$ 实现每个 n次单位根。若 $r \geq 2$，则引理 6.12迫使每个分量都采用这一线性情形：条件 $nD + I = D$ 使得 n 在每个$P_j^{e_j}$ 模下都是单位元，因此对每个分量都有 $n \notin I_j$。这正是 (ii)。有限域重述源于乘法群的循环性。□

对于素指数，温和与分歧的局部判据结合时，无需对素理想的数量或范数施加条件。

定理 6.14。 设 D 是特征零的 *Dedekind* 域，设 p 是素数，且设 $0 \neq I \subsetneq D$ 的分解为 $I = \prod_{i=1}^{r} P_i^{e_i}$，其中 P_i 互异。固定 $k \geq 1$ 并令 $E_i = v_{P_i}(p)$ 以及 $h_i = \lceil e_i/p \rceil$。则 I 是 $(kp,\ p)$ -*mpdf*，当且仅当以下两个条件同时成立：

(i) 对于每个 i，若 $E_i = 0$，则 $h_i \leq k$ 和 $e_i \leq (p-1)h_i$；若 $E_i > 0$，则 $e_i \leq E_i$ 和$e_i \leq (p-1)h_i$。(ii) 对于满足 $e_i \geq 2$ 或 $\mu_p(D/P_i) \neq \{1\}$的每个指标 i，对每个 $j \neq i$都有 $e_j \leq E_j$。对于 D （一个数域的整数环），根条件为 $\mu_p(D/P_i) \neq \{1\}$当且仅当 $p \mid (|D/P_i| - 1)$。

证明。 根据中国剩余定理， $D/I \cong \prod_i V_i/\pi_i^{e_i}V_i$，其中 $V_i = D_{P_i}$ 是一个以 π_i为一致化元的离散赋值环。我们将引理 6.12 应用于 $n = p$。

（a）第 i个因子满足MP$k,\ p$ 当且仅当（i）中的不等式成立。对于 $E_i = 0$ 这是定理6.1。对于 $E_i > 0$ 环 V_i 具有特征零且剩余特征为 p，这就是定理6.6。

（b）第 i 个因子包含 $a,\ b$ 其中 $a^{kp} = b^p$ 且 $a^k \neq b$ 当且仅当 $e_i \geq 2$ 或 $\mu_p(D/P_i) \neq \{1\}$。如果 $e_i \geq 2$，取 $a = 0$ 和 $b = \pi_i^{e_i-1}$：由于 $p(e_i - 1) \geq e_i$，我们得到 $b^p = 0$，而 $b \neq 0$。如果 $e_i = 1$，则该因子是一个域 K。对于 $a \neq 0$，我们有 $b/a^k \in \mu_p(K)$，并且 $a = 1$ 实现了 $\mu_p(K)$ 中的每个元素；对于 $a = 0$，我们得到 $b = 0$。当 $E_i > 0$ 时，剩余特征为 p，因此 $\mu_p(D/P_i) = \{1\}$，且条件化简为 $e_i \geq 2$。

(c) 对于 $j \neq i$， $p = 0$ 属于 $V_j/\pi_j^{e_j}V_j$ 当且仅当 $e_j \leq E_j$。

引理 6.12 与 (a)、(b)、(c) 一起给出 (i) 和 (ii)。对于数域，$(D/P_i)^\times$ 是一个阶为 $|D/P_i| - 1$ 的循环群，因此 $\mu_p(D/P_i) \neq \{1\}$ 当且仅当 $p \mid |D/P_i| - 1$。 □

7. 整数环的所有理想

局部赋值判据专用于 $\mathbb{Z}$ 的素数幂理想。整体分类随后将这些检验与中国剩余分解中各因子选择的相容性结合起来。零理想在分类定理的末尾单独处理。

推论 7.1。 设 p 为素数， $n \geq 2$，且 $k, e \geq 1$。令 $t = v_p(n)$。则 $p^e\mathbb{Z}$ 是 (kn, n)-*mpdf*，当且仅当满足以下情形之一：

(i) 若 $t = 0$，令 $h = \lceil e/n \rceil$。则 $h \leq k$ 且 $e \leq (n-1)h$。

(ii) 若 p 为奇数且 $t > 0$，则 $e \leq t$。(iii) 若 $p = 2$ 且 $t > 0$，则 $e \leq t$，或 $t = 1$、 $e = 2$ 且 $n \geq 6$。

证明。 应用定理 6.9 于 $V = \mathbb{Z}_{(p)}$，其剩余域为 $\mathbb{F}_p$，使用 $\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z} \cong V/p^eV$ 和商判据。 □

要应用乘积判据，还需要确定这样的局部商：在其中，每个幂等式都迫使线性因子为零。

引理 7.2。 设 p 为素数， e、 $k \geq 1$且 $n \geq 2$。在 $\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$中，蕴含关系

$$a^{kn} = b^n \quad \Longrightarrow \quad a^k = b$$

对所有 a、b均成立，当且仅当 $e = 1$ 且 最大公约数$(n, p-1) = 1$。

证明。 对于 $e \geq 2$，取 $a = 0$ 和 $b = p^{\lceil e/n \rceil}$。于是 $b^n = 0$ 模 p^e，而 $b \neq 0$，因为$\lceil e/n \rceil < e$。对于 $e = 1$，域 $\mathbb{F}_p$ 的乘法群是一个阶为 $p - 1$的循环群。如果 gcd$(n,\ p-1) = 1$，则取 n次幂是单射，因此蕴含关系成立。如果最大公约数大于一，取一个非平凡的 n次单位根 $\zeta \in \mathbb{F}_p$，并取 $a = 1, b = \zeta$。 □

局部检验及其相容性现在为 $\mathbb{Z}$的每个非零真理想给出了一个有限的算术判据。

定理 7.3。 设 $N \geq 2$ 的素因数分解为 $N = \prod_{p|N} p^{e_p}$，并设 $n \geq 2,\ k \geq 1$。则$N\mathbb{Z}$ 是(kn, n)-*mpdf*，当且仅当以下两项均成立：

（i）每一对 （$p,\ e_p$）都满足推论 *7.1* 中相应的局部条件。（ii）对于每个 $p \mid N$ 使得 $e_p \geq 2$ 或 最大公约数$(n,\ p-1) > 1$，都有 $N/p^{e_p} \mid n$。

$\mathbb{Z}$ 的零理想对于所有 n、 k都是（$kn,\ n$）-*mpdf*。

证明。 根据中国剩余定理， $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \cong \prod_{p|N} \mathbb{Z}/p^{e_p}\mathbb{Z}$。应用引理6.12 和7.2。在每个其他因子中 $n = 0$ 的条件恰好是$\prod_{q|N,\ q\neq p} q^{e_q} \mid n$，这就是条件（ii）。最后， （0）在 $\mathbb{Z}$中是素数。□

推论 7.4. 令 $n \geq 2$、 $k \geq 1$ 和 $N \geq 2$，并假设 最大公约数$(N, n) = 1$。若 N 有至少两个不同的素因子，则 $N\mathbb{Z}$ 是(kn, n)-*mpdf*，当且仅当 N无平方因子，且对于每个素数 $p \mid N$，都有最大公约数$(n, p-1) = 1$。对于 $N = p^e$，该条件恰好是温和离散赋值环判据。

证明. 若 N 有至少两个素因子，则整数 $N/p^{e_p} > 1$ 与 n互素，因此它不能整除 n。所以每个分量都必须满足引理 7.2 的强制线性条件。反向结论由每个域分量中 n次幂映射的单射性得出。□

三次情形说明了混合幂所允许的额外赋值层级，以及对伴随素因子的限制。无平方因子子情形已经是 [11, 定理 5]。其 cdf-初等分类 [11, 定理 6] 允许不受限制的素数幂；而这里的严格条件施加了以下界限，这些界限也取决于 k。

推论 7.5。令 $N \geq 2$和 $k \geq 1$。对 $E_1 = \{1、2\}$ 以及 $E_k = \{1、2、4\}$，其中 $k \geq 2$。则 $N\mathbb{Z}$是 ($3k$、3)-*mpdf*，当且仅当以下至少一项成立：

(i) N 无平方因子，且 N 的任何素因子都不模 3同余于 1 ；(ii) $N = q^e$ 或 $N = 3q^e$，其中 $q \neq 3$ 为素数且 $e \in E_k$。

证明。这里 $n = 3$。对于素数 3，推论 7.1 只允许指数 1。对于素数$q \neq 3$，定理 6.1 给出 $h = \lceil e/3 \rceil \leq k$ 和 $e \leq 2h$：$h = 1$ 给出 $e \in \{1, 2\}$，$h = 2$ 给出 $e = 4$（并要求 $k \geq 2$），而 $e \geq 5$ 是不可能的。因此，q 处的局部条件恰好是 $e \in E_k$。若 q 是 N的一个素因子，则称其为特殊素数，当且仅当 $e_q \geq 2$ 或 $\gcd(3, q-1) > 1$，也就是说，$q \equiv 1$（模 3）。素数 3 从来不是特殊素数。首先，假设 N 有一个特殊素数 q。定理 7.3(ii)给出$N/q^{e_q} \mid 3$，因此 $N = q^e$ 或 $N = 3q^e$ 且 $q \neq 3$，而 q 处的局部条件给出 $e \in E_k$。这就是 (ii)。接下来，假设 N 没有特殊素数。那么 N 是无平方因子的，并且N 的任何素因子都不与 1 模 3 同余，这就是 (i)。反过来，在情形 (i) 中每个指数都是 1，因此局部条件成立（在素数 $q \neq 3$ 处为 $h = 1 \leq k$ 和 $1 \leq 2$，在 3 处为 $1 \leq v_3(3)$），并且定理 7.3 的条件 (ii) 是空 vacuous 的，因为没有素数是特殊素数。在情形 (ii) 中，由 e的选取，局部条件成立；并且每个特殊素数 q 都满足 $N/q^e \in \{1, 3\}$，而 $N/q^e \in \{1, 3\}$整除 3。□

例 7.6。当且仅当 $k \geq 2$时，理想 $16\mathbb{Z}$ 和 $48\mathbb{Z}$ 是 ($3k$，3)-mpdf，而理想 $12\mathbb{Z}$ 对任意 $k \geq 1$都是 ($3k$，3)-mpdf。理想 $20\mathbb{Z}$ 从来都不是 ($3k$，3)-mpdf：模 4 的非约化分量可以选出一个非零线性因子，而模 5 的另一个分量不会湮灭 3。相比之下，任意由模 3 同余于 2 的素数构成的无平方因子乘积，再任选是否乘以 3，对于任意 k 都是 ($3k$，3)-mpdf。

注 7.7。定理 3.13 中的根基假设不能简单地去掉。正如 [8], 的多项式上升反例所示，环 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 满足 MP^{1,6}，但其多项式环并不满足。更一般地，对于每个 k，该失效都成立：取 $a = 1$ 和 $b = 1 + 2X$。于是 $a^{6k} = b^6 = 1$，而 $a^k - b = -2X \neq 0$ 和 F_k，6(a，b) $= 2 + 2X \neq 0$。事实上，$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]$ 是整环 $\mathbb{F}_2[X]$ 的平方零扩张，其核 $2\,\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]$ 是无限的，因此它违反了定理 5.1 的条件 (iii)。类似地，分歧 DVR 定理处理的是素数指数；它并未断言在任意分歧的离散赋值环中，对任意合数指数都成立同一公式。

参考文献

[1] D. D. Anderson 和 M. Winders，《模的理想化》，《交换代数杂志》1（2009），第1期，3–56。doi:10.1216/JCA-2009-1-1-3。[2] D. F. Anderson 和 A. Badawi，《交换环的（m，n）-闭理想》，《代数及其应用杂志》16（2017），第1期，文章1750013，共21页。doi:10.1142/S021949881750013X。[3] D. F. Anderson、A. Badawi 和 J. Coykendall，《交换环的平方差因子吸收理想》，《代数及其应用杂志》（2025年，在线发表），文章2650198。doi:10.1142/S0219498826501987；arXiv:2402.18704。[4] M. F. Atiyah 和 I. G. Macdonald，《交换代数导论》，Addison-Wesley，马萨诸塞州雷丁，1969年。[5] K. Draoui，《立方差因子吸收半初等理想》，《墨西哥数学会通报》32（2026年），文章37。doi:10.1007/s40590-026-00872-7。[6] F. Farshadifar，《交换环的立方差因子吸收理想》，《巴勒斯坦数学杂志》15（2026年），第2期，237–242；arXiv:2506.19876v3。[7] S. Hizem，《关于平方差因子吸收理想》，《数学研究》75（2026年），2369–2376。doi:10.1007/ s11587-026-01061-4。[8] O. H. Taha、A. Salim 和 H. Kim，《交换环的（m，n）-混合幂差因子吸收理想》，配套手稿。

[9] Ü. Tekir、A. Anebri、A. Hasiç 和 T. Arabacı，交换环的*4*-幂差因子吸收理想，未注明日期的手稿，共14页，查阅版本为2026年11月23日提供的版本。[10] G. Yeşilot，p-差因子吸收理想，《Preprints.org》，手稿202606.1889，第1版，发布于2026年6月25日，未经同行评审。doi:10.20944/preprints202606.1889.v1。[11] G. Yeşilot、Y. Şimşek 和 E. Özel Ay，交换环的立方差因子吸收主理想，《Mathematics》**14**（2026年），第21期，文章4091。doi:10.3390/math14214091。[12] Stacks Project 作者，*Stacks Project*，标签00J9、0ALI和0AUU。[13] T. Y. Lam，非交换环初步，第2版，数学研究生教材，第131卷，Springer-Verlag，纽约，2001年。

数学系，计算机科学与数学学院，提克里特大学，提克里特，伊拉克。电子邮箱地址：omar.h.tahamm2314@st.tu.edu.iq

数学系，计算机科学与数学学院，提克里特大学，提克里特，伊拉克。电子邮箱地址：akr_tel@tu.edu.iq

计算机工程系，湖西大学，韩国。电子邮箱地址：hkkim@hoseo.edu