arXiv:2611.32720v1 [hep-ph] 24 Nov 2026

UPDFEVOLV2 中的部分子分支演化：零质量可变味数方案中的 NNLO 类空演化，以及包含重味匹配的 NLO 类时演化

H. Jung * [1,2]

[1]II. 汉堡大学理论物理研究所，德国[2]安特卫普大学基本粒子物理， 比利时

摘要

我们介绍 UPDFEVOLV2 中实现的部分子分支（PB）方法的两项扩展：零质量可变味数方案（ZM-VFNS）中部分子密度的次次领先阶（NNLO）类空 DGLAP 演化，以及碎裂函数的领先阶和次领先阶（LO、NLO）类时演化，其中包括夸克阈值处的重味匹配条件。我们概述类时部分子分支形式——动量求和规则、Sudakov 形状因子、分支链和运动学。我们还介绍了部分子分支形式所需的实现细节，使其能够对所有味复现 APFEL 的半解析解，包括阈值处的重夸克。

本说明是对 UPDFEVOLV2 手册 [1,2] 的补充，也是 UPDFEVOLV2 2.6.0 版本的技术发行说明。

*hannes.jung@cern.ch

目录

1 引言 **1**

2 类空 以及部分子分支方法中的类时演化 2
2.1 标记约定和演化方程.2 2.2 动量求和规则.3 2.3 PB演化方程和 Sudakov形状因子.3
2.4 分支链.4 2.5 运动学和排序.5

3 NNLO 下的类空演化：可变味阈值 5
3.1 匹配条件.5 3.2 在分支蒙特卡罗中的实现.5

4 类时 NLO 类时演化：重味阈值 6
4.1 匹配条件.6 4.2 在分支蒙特卡罗中的实现.7

5 基准比较： APFEL **8**
5.1 类空 NNLO 演化.8 5.2 类时 NLO 演化.8

6 UPDFEVOLV2 的用法 **9**

7 摘要 **11**

A ExplicitLO 示例 **11**

1 引言

部分子分支方法 [3, 4] 通过马尔可夫链式分支求解 DGLAP方程 [5–8] ，其中不可分辨辐射和虚贡献被重求和到 Sudakov 形状因子中，而可分辨发射则受限于 $z < 1 - \epsilon$。在领先阶和次领先阶下，PB 密度的共线部分与 QCDNUM [9]和 APFEL [10, 11]的半解析解一致。由于每次分支都会被模拟，该方法也同时给出部分子的横向动量分布。

本说明介绍了 UPDFEVOLV2 中的两项新进展：

1. 零质量可变味数方案中的 *NNLO* 类空演化（第 3 节）。参考文献 [12] 概述了扩展至 NNLO 的方法。与领先阶和次领先阶的情形相比，这并不那么直接，因为在可变味数方案中，部分子密度和 α_s 在重夸克阈值 [13] 处是不连续的。

参考文献 [12] 表明，这些不连续性可以作为 δ-函数项纳入 PB 演化中的 μ^2-依赖劈裂函数，从而在 Sudakov 形状因子中产生阶跃，并证明了其结果与 QCDNUM 对胶子和夸克的计算一致。

2. 带重味匹配的领先阶和次领先阶类时演化 （第2节和第4节）。碎裂函数（碎裂函数）遵循带有类时分裂函数的DGLAP方程。本文推导了类时演化的PB表述，并将其与APFEL进行了基准比较。与部分子密度不同，碎裂函数在重夸克阈值处从 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ [14]开始就已经是不连续的：重夸克碎裂函数在 $\mu = m_h$ 处并不为零，而是由胶子碎裂函数生成。第4节介绍了这种匹配的实现。

2 部分子分支方法中的类空和类时演化

部分子密度记为 $f_a(x,\ \mu^2)$，部分子 a 到强子 H 的碎裂函数记为 $D_a^H(x,\ \mu^2)$；在强子指标不起作用的地方将其省略。单态组合为 $f_\Sigma = \sum_{r=1}^{n_f}(f_{q_r} + f_{\bar{q}_r})$和 $D_\Sigma^H = \sum_{r=1}^{n_f}(D_{q_r}^H + D_{\bar{q}_r}^H)$，而 $[A \underline{\otimes} B](x) \equiv \int_x^1 \mathrm{d}_z^z A(z)Bx/z$。

2.1 标记约定与演化方程

对于类空（P_{ab}^S）与类时（P_{ab}^T）核一样， $P_{ab}(z)$ 是该分支的核

$$b \longrightarrow a\ (+c), \tag{1}$$

其中 z 为子粒子 a 相对于母粒子 b 的动量分数。（参考文献 [15] 对类空核使用这一标记，对类时核则使用相反的标记。）两个演化方程的差别在于对哪个指标求和： a 的部分子分布函数由其所有母粒子 b馈入，初始部分子 b 的碎裂函数则由其所有子代粒子 a馈入，

$$\frac{\partial f_a(x,\mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \sum_b \left[P_{ab}^S \otimes f_b\right](x,\mu^2) \qquad \text{(spacelike)}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial D_b^H(x,\mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \sum_a \left[P_{ab}^T \otimes D_a^H\right](x,\mu^2) \qquad \text{(timelike)}. \tag{3}$$

在领先阶，Gribov–Lipatov关系 [5,6]给出 $P^{T,\ (}{}_{ab}{}^{0} = P^{S)\ ,}{}_{ab}{}^{(0)}$对于相同的分支。在味单态扇区中，对于味对称夸克和反夸克分布，

相应的方程为

$$\frac{\partial}{\partial \ln \mu^2}\begin{pmatrix} f_\Sigma \\ g \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi}\begin{pmatrix} P_{qq}^S & 2n_f P_{qg}^S \\ P_{gq}^S & P_{gg}^S \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} f_\Sigma \\ g \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial \ln \mu^2}\begin{pmatrix} D_\Sigma^H \\ D_g^H \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi}\begin{pmatrix} P_{qq}^T & 2n_f P_{qg}^T \\ P_{qg}^T & P_{gg}^T \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} D_\Sigma^H \\ D_g^H \end{pmatrix}. \tag{5}$$

因此，按照式 (1) 的分支约定，单态演化矩阵具有转置的非对角结构；因子 $2n_f$ 来自对夸克和反夸克求和。领先阶以上，类时核与类空核不同，取自文献 [15–19]。

2.2 动量求和规则

入射强子中部分子分布函数的动量守恒，以及每个初始部分子的碎裂函数的能量守恒，$\sum_H \int_0^1 \mathrm{d}z\, z\, D_a^H(z,\mu^2) = 1$（对所有强子种类求和），导出核满足相同条件，

$$\int_0^1 \mathrm{d}z\, z\,[P_{qq}(z) + P_{gq}(z)] = 0, \qquad \int_0^1 \mathrm{d}z\, z\,[2n_f\, P_{qg}(z) + P_{gg}(z)] = 0, \tag{6}$$

该条件对类空核和类时核均逐阶成立；按式 (1) 的记号，对于任意母粒子 b，$\sum_a \int_0^1 \mathrm{d}z\, z\, P_{ab}(z) = 0$，即所有可能子粒子的动量分数之和等于母粒子的动量分数。领先阶以上，对子粒子的求和还包括 $q \to \bar{q}$ 和纯单态 $q_r \to q_s, \bar{q}_s$ 道。

2.3 PB演化方程和 Sudakov 形状因子

利用动量加权分布 $\widetilde{f}_a = x f_a$ 和 $\widetilde{D}_a^H = x D_a^H$，借助任意阶 α_s 下的动量求和规则（式（6）），可以通过对实发射核进行积分来表示虚贡献（以及不可分辨贡献）（关于类空情形，参见 [4]）。实发射核 $P^{R,S}_{ab}(z,\mu^2)$ 和 $P^{R,T}_{ab}(z,\mu^2)$ 可由完整核去除 $\delta(1-z)$ 项，并将 $1/(1-z)_+$ 替换为 $1/(1-z)$ 后得到；在次领先阶，它们包含 α_s 阶的项。实发射积分的上限取为 $1-\epsilon$；$\mathcal{O}(\epsilon)$ 阶的项被忽略，并且共线分布与 ϵ 无关。*将演化中的部分子重新标记为 a，可得

$$\frac{\partial \widetilde{f}_a(x,\mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi}\sum_b \int_x^{1-\epsilon} \mathrm{d}z\, P_{ab}^{R,S}(z,\mu^2)\, \widetilde{f}_b\Big(\frac{x}{z},\mu^2\Big) - \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi}\,\mathcal{V}_a^S(\mu^2)\,\widetilde{f}_a(x,\mu^2), \tag{7}$$

$$\frac{\partial \widetilde{D}_a^H(x,\mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi}\sum_b \int_x^{1-\epsilon} \mathrm{d}z\, P_{ba}^{R,T}(z,\mu^2)\, \widetilde{D}_b^H\Big(\frac{x}{z},\mu^2\Big) - \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi}\,\mathcal{V}_a^T(\mu^2)\,\widetilde{D}_a^H(x,\mu^2), \tag{8}$$

*在参考文献 [3,4] 中，该截断是根据软胶子分辨率尺度 $z_M = 1-\epsilon$ 制定的。

with

$$\mathcal{V}_a^{S,T}(\mu^2) \equiv \sum_b \int_0^{1-\epsilon} \mathrm{d}z\, z\, P_{ba}^{R,S/T}(z,\mu^2), \tag{9}$$

其中， b 遍历 a 的所有子代粒子，包括单态道中的味和反味多重度。Sudakov 形状因子为

$$\Delta_a^{S,T}(\mu^2,\mu_0^2) = \exp\left[-\int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{\mathrm{d}\mu'^2}{\mu'^2}\,\frac{\alpha_s(\mu'^2)}{2\pi}\,\mathcal{V}_a^{S,T}(\mu'^2)\right], \tag{10}$$

并且 $\Delta_a(\mu^2,\ \mu_1^2)/\Delta_a(\mu^2,\ \mu_2^2)$ 是部分子 a 在 μ_1^2 和 μ_2^2 之间不发生可分辨分支的概率。对方程（8）积分得

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_a(x,\mu^2) &= \Delta_a^T(\mu^2,\mu_0^2)\,\widetilde{D}_a(x,\mu_0^2)\\ &\quad+\sum_b \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{\mathrm{d}\mu'^2}{\mu'^2}\,\Delta_a^T(\mu^2,\mu'^2)\,\frac{\alpha_s(\mu'^2)}{2\pi}\int_x^{1-\epsilon}\mathrm{d}z\,P_{ba}^{R,T}(z,\mu'^2)\,\widetilde{D}_b\Big(\frac{x}{z},\mu'^2\Big),\end{aligned} \tag{11}$$

类空情形同理。附录A给出了一个明确的领先阶示例，说明动量求和规则如何将虚项转化为 Sudakov 形状因子。比较方程（7）和（8）可观察到:

- ***Sudakov*** 形状因子: 在这两种情形中，它都由演化部分子的子代粒子 $\sum_b \int z P_{ba}$ 构成，这是相同动量求和规则的结果。在领先阶下，类空和类时 Sudakov形状因子是相同的。
- 实发射: a 的部分子分布函数由其母粒子 $\sum_b P_{ab}^S$ 提供； a 的碎裂函数由其子代粒子 $\sum_b P_{ba}^T$ 提供，即使用与 Sudakov 形状因子中相同的核组合。

2.4 分支链

迭代式（11）或其类空类比式，会生成一条从 μ_0 开始的分支链。在链中，部分子 b 随着 Δ_b 演化至下一次分支的尺度，随后被具有 $x \to zx$的部分子 a 取代。在类空情形中， a 是 b 的物理子粒子，分支链沿着物理分支方向延伸。在类时情形中， a 是 b的物理母粒子： 分支链从强子延伸至初始部分子。

在类时分支链中，下一次分支的尺度由 Δ_b^T生成，并按 b的子代粒子归一化；而新的部分子 a 则从 b的母粒子中选出。因此，每次分支都会乘以一个因子

$$w_b(\mu'^2) = \frac{\sum_a \int_0^{1-\epsilon}\mathrm{d}z\,z\,P_{ba}^{R,T}(z,\mu'^2)}{\sum_c \int_0^{1-\epsilon}\mathrm{d}z\,z\,P_{cb}^{R,T}(z,\mu'^2)}. \tag{12}$$

该因子仅在 $q \leftrightarrow g$ 跃迁中不同于 1，而在类空情形下恒等于 1。

2.5 运动学与排序

对于共线分布，只要在演化尺度处计算 α_s 并使用固定截断$1-\epsilon$，演化尺度与分支运动学之间的关系就不起作用。对于横向动量依赖分布，以及 α_s 取决于辐射横向动量的情况，它会确定每个辐射部分子的横向动量 $q_{\rm t}$。采用角排序 [20–23] 时，演化尺度为 $\mu' = E_b\theta$，其中 θ 为排序角，并且

$$q_{\rm t} = (1-z)\,\mu' \quad \text{(spacelike)}, \qquad\qquad q_{\rm t} = z(1-z)\,\mu' \quad \text{(timelike)}. \tag{13}$$

在类空情形中，排序角是辐射出的部分子 c 相对于入射强子的角度；在类时情形中，色相干性对粒子对 $a+c$ [24,25] 的张角进行排序。对于软发射而言，两种关系一致，即 $z \to 1$。角排序是 UPDFEVOLV2 中的默认设置；此外，新版本还提供了 $q_{\rm t}$ 排序（$q_{\rm t} = \mu'$）。

3 NNLO 下的类空演化：可变味阈值

3.1 匹配条件

在 $\mu^2 = m_h^2 (h = c, b, t)$ 以下有 n_f 种活性味，以上则有 $n_f + 1$ 种。只有当部分子密度与参考文献 [13] 的算符矩阵元（OMEs）相匹配时，物理截面才会在阈值处连续。在本节中，我们采用参考文献 [13], $\bar{a}_s = \alpha_s^{(n_f+1)}(m_h^2)/4\pi$ 的归一化方式，并保留其中对 OMEs 的命名，其中指标 H 表示重夸克。取壳上质量为 m_h，且右侧的所有密度均为在 $\mu^2 = m_h^2$ 处的 n_f 味密度时，$\mathcal{O}(\bar{a}_s)$ 项消失，并且通过 $\mathcal{O}(\bar{a}_s^2)$

$$g^{(n_f+1)} = g + \bar{a}_s^2 \left[A_{gq,H} \otimes \Sigma + A_{gg,H} \otimes g\right], \tag{14}$$

$$(q_k + \bar{q}_k)^{(n_f+1)} = (q_k + \bar{q}_k) + \bar{a}_s^2\, A_{qq,H}^{\rm NS} \otimes (q_k + \bar{q}_k), \qquad k = 1, \ldots, n_f, \tag{15}$$

$$(h + \bar{h}) = \bar{a}_s^2 \left[\tilde{A}_{Hq}^{\rm PS} \otimes \Sigma + \tilde{A}_{Hg} \otimes g\right], \tag{16}$$

其中 $\Sigma = \sum_{k=1}^{n_f} (q_k + \bar{q}_k)$，以及 $\tilde{A}_{qq,H}^{\rm PS}$ 和 $\tilde{A}_{qg,H}$ 在此阶均为零 [13]。

这些核列于参考文献 [13] 的附录B中 $\mu = m_h$：$\tilde{A}_{Hg}$ (B.3)、$\tilde{A}_{Hq}^{\rm PS}$ (B.1)$A_{gq,H}$(B.5)、$A_{gg,H}$ (B.7)以及 $A_{qq,H}^{\rm NS}$ (B.4)。对于 $\tilde{A}_{Hg}$，我们采用 Vogt [26]的紧凑参数化形式。

3.2 分支蒙特卡罗的实现

按照参考文献 [12], ，这些核作为依赖于 μ^2 的实辐射核的一部分纳入,

$$\frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi}\, P_{ab}^{R,S}(z,\mu^2) \;\to\; \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi}\, P_{ab}^{R,S}(z,\mu^2) + \bar{a}_s^2(m_h^2)\, A_{ab}(z)\, \delta(\ln\mu^2 - \ln m_h^2), \tag{17}$$

因此，δ-函数会在每个阈值处产生 Sudakov 形状因子（式 (10)）的一个阶跃。由于这些核满足求和规则，阈值项具有与常规核相同的实/虚结构，而 Sudakov 形状因子的阶跃对应于相应的虚贡献。与 $P^{R,S}$ 的情况相同（因为已通过 Sudakov 形状因子纳入），不使用 A_{ab} 在 $z=1$ 处的虚项。当马尔可夫链到达 $\mu^2 = m_h^2$ 时，分支类型以及 z 的取值将依据核 A_{ba} 而非 $P^{R,S}_{ba}$ 进行选择。

对应关系为（母粒子 $\to$ 子粒子，核），标记方式遵循式 (1)：

$g \to h, \bar{h}$	$\tilde{A}_{Hg}$	sign of daughter random, probability $\frac{1}{2}$ each
$q_i, \bar{q}_i \to h, \bar{h}$	$\tilde{A}^{\mathrm{PS}}_{Hq}$	weight $\frac{1}{2}$ to h and $\frac{1}{2}$ to $\bar{h}$ per parent
$g \to g$	$A_{gg,H}$	regular + soft part
$q_i \to g$, $\bar{q}_i \to g$	$A_{gq,H}$	
$q_i \to q_i$, $\bar{q}_i \to \bar{q}_i$	$A^{\mathrm{NS}}_{qq,H}$	regular + soft part, full weight
$q_i \to \bar{q}_i$	0	$A^{\mathrm{NS},+}_{qq,H} = A^{\mathrm{NS},-}_{qq,H}$ at $\mathcal{O}(\bar{a}_s^2)$

阈值核中的耦合为 $\bar{a}_s(m_h^2)$，属于 (n_f+1) 味方案。

4 次领先阶类时演化：重味阈值

4.1 匹配条件

在类时变味数方案中，重夸克碎裂函数是动态生成的：低于阈值 $\mu = m_h$ ($h = c,\ b$) 时它们为零，而在 $\mu = m_h$ 处则由参考文献 [14] 的 MS 匹配条件确定。对于阈值设在夸克质量处的情形，它们在 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 阶下为：

$$D_{q_k}^{(n_f+1)}(x, m_h^2) = D_{q_k}(x, m_h^2), \qquad k = 1, \dots, n_f, \tag{18}$$

$$D_{g}^{(n_f+1)}(x, m_h^2) = D_{g}(x, m_h^2), \tag{19}$$

$$D_h(x, m_h^2) = D_{\bar{h}}(x, m_h^2) = \frac{\alpha_s(m_h^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}z}{z}\, K(z)\, D_g\!\left(\frac{x}{z}, m_h^2\right), \tag{20}$$

$$K(z) = C_F\, \frac{1+(1-z)^2}{z}\, \big[-1 - 2\ln z\big], \tag{21}$$

右侧为 n_f 味碎裂函数；在这一阶下，α_s 在阈值处连续。该核描述了重夸克辐射出胶子的过程，$h \to h\,g$，也就是说，按照式 (1) 的标记方式，它属于跃迁 P_{gh}。对于一般的匹配尺度，参考文献 [14] 中的核为 $C_F\big[\frac{1+z^2}{1-z}\ln(\mu^2/m_h^2) - 1 - 2\ln z\big]$；对于阈值设在夸克质量处的情形，对数项为零，式 (21) 仍然成立。

该结构　类时匹配在以下几个方面不同于类空匹配：

- 重夸克碎裂函数在阈值处已经非零，即在 $\mathcal{O}(\alpha_s)$，而类空匹配始于 $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$。

• 轻夸克和胶子碎裂函数在 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 处是连续的。

• 在这一阶，重夸克匹配条件仅涉及胶子碎裂函数，如式 (20) 所示。按照式 (1) 中的分支约定，对应的核为 P_{gh}：在类时分支描述中，初始重夸克有一个胶子子代。

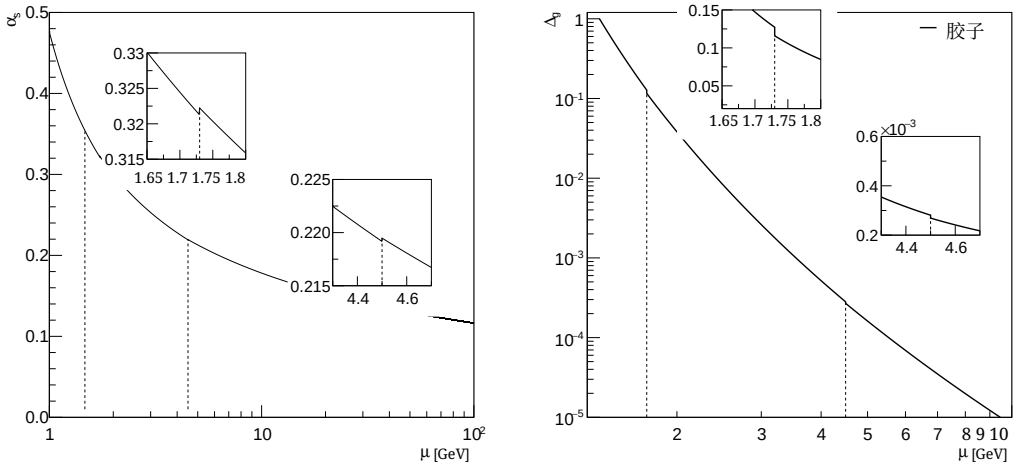

图 1： α_s 在三圈时的情况（左）以及胶子的 NNLO Sudakov形状因子（右），作为 μ 的函数。点线标示 m_c 和 m_b；插图展示了由 α_s 在三圈时生成的阶跃，以及式 (17) 中的 $\delta(\ln\mu^2 - \ln\, m_h^2)$ 项。

4.2 在分支蒙特卡罗中的实现

与类空情形不同，式 (20) 无法通过 Sudakov 形状因子纳入：它是一个没有对应虚项的实贡献，而胶子Sudakov形状因子在 m_h 处发生不连续会耗尽 D_g，这与其连续性（式 (19)）相矛盾。因此，Sudakov形状因子保持不变，匹配则作为一个独立步骤应用于第 2.4 节的分支链中：

1. 当胶子的下一演化尺度将跨越阈值时，链会恰好在 $\mu = m_h$ 处停止。由于 Sudakov 形状因子可以因式分解， $\Delta(\mu^2, \mu_0^2)$ $=\Delta(\mu^2, m_h^2)$ $\Delta(m_h^2, \mu_0^2)$，因此可以从 m_h 重新开始演化，而不会产生偏差。

2. 在 m_h 处，胶子要么以单位速率继续作为胶子演化，因为 D_g 是连续的；要么根据公式（20）转变为重夸克或反夸克。由于匹配不会耗减胶子碎裂函数，因此延续和匹配贡献不能被解释为相互排斥的物理概率。因此，使用辅助算法概率 p选择这两种可能性之一，而事件权重

会对这一抽样选择进行补偿：以概率 $1-p$，链以胶子状态继续演化，权重为 $1/(1-p)$；以概率 p，胶子转变为重夸克或反夸克（两者概率相等），并携带动量分数 $z\,x_g$。z的取值在 $\ln z$中均匀抽样，权重为 $\propto \alpha_s(m_h^2)\; z\,K(z)/p$，其中因子$z$是抽样的雅可比 $\mathrm{d}z = z\,\mathrm{d}\ln z$。平均而言，这样可以精确再现 D_g和公式（20），且与 p无关；在 UPDFEVOLV2 $p = 0.2$ 中采用了这种方法。

3. 重夸克从 m_h 开始，使用（n_f+1）味劈裂函数进行演化。在阈值步处，其横向动量采用与尺度为 m_h 时的普通分支相同的运动学处方，即公式（13）。

5 基准比较： APFEL

5.1 类空 NNLO 演化

PB 演化与 APFEL 的半解析 NNLO VFNS 解进行比较，二者采用相同的初始分布、相同的 NNLO 劈裂函数 [27,28],、相同的阈值（$m_c = 1.73$GeV、 $m_b = 4.5$ GeV、 $m_t = 175$ GeV），以及具有相应不连续性的相同 α_s 演化。实辐射的截断为 $\epsilon = 10^{-6}$。

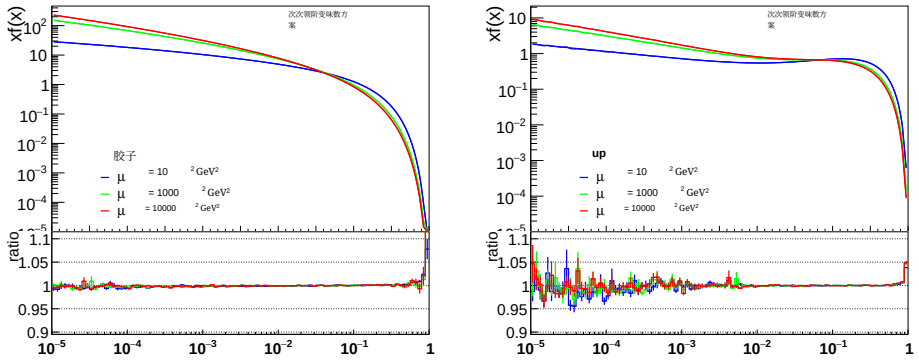

图 2：PB 方法（直方图）和 APFEL（实线）在 NNLO 下的 $xg(x,\ \mu^2)$ 和 $xu(x,\ \mu^2)$，对应于 $\mu^2 = 10,\ 10_3,\ 10_5$ GeV^2。下方面板显示相对于 APFEL 的比值。参见参考文献 [12] 的图 3。

图 1 展示了三圈阶的 α_s 以及在重夸克阈值处具有不连续性的 Sudakov 形状因子。图 2 和图 3 展示了胶子、上夸克以及粲夸克和底夸克密度与 APFEL 的比较。

5.2 类时 NLO 演化

将类时 PB 演化与 APFEL 参考计算进行比较，采用参考文献 [14] 的重味匹配条件以及参考文献 [29] 的类时演化参考结果。

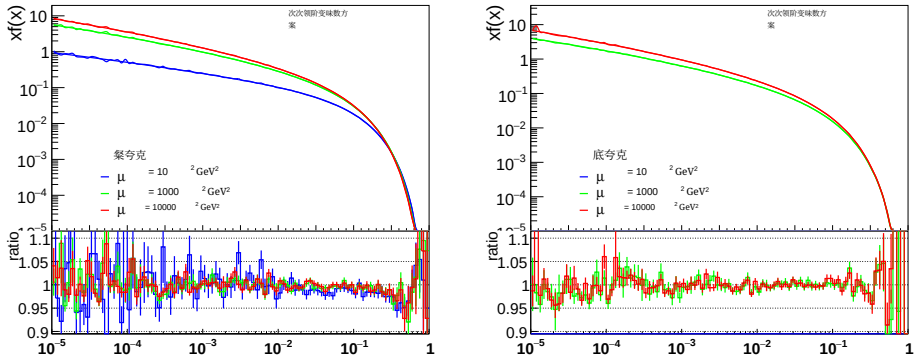

图3：与 xc和 xb的情况相同，参见图2。重夸克在阈值处探测纯单态核和胶子核。

星号　　起始尺度为 $Q_0 = 1.37\text{GeV}$，π介子起始分布取自参考文献 [30　　],

$$
\begin{aligned}
xD_g(x,Q_0^2) &= 429\,x^2(1-x)^{5.82}, & xD_u(x,Q_0^2) &= 0.447\,x^{-1.58}(1-x)^{1.01},\\
xD_d(x,Q_0^2) &= 0.833\,x^{-1.17}(1-x)^{1.39}, & xD_s(x,Q_0^2) &= 0.519\,x^{-0.365}(1-x)^{1.96},
\end{aligned}
\tag{22}
$$

在 Q_0、 $\alpha_s(m_Z)$ 处其他所有分布均为零的情况下， $= 0.118$ 以次领先阶演化，并使用次领先阶劈裂函数。

图4展示了比较结果。对于所有味，包括阈值以上的重夸克分布，PB 结果与 APFEL 均符合良好。剩余的波动在小 x时对粲夸克最为明显，这是由有限的蒙特卡罗统计引起的。

6 UPDFEVOLV2 的使用

UPDFEVOLV2 的源代码和本手册可在以下网址找到：
https://updfevolv.hepforge.org/
所有参数均可通过控制卡设置：

微扰理论中用于劈裂函数以及 α_s 的 Iorder_alphas=2 阶
领先阶：Iorder_alphas = 1次领
先阶：Iorder_alphas=2NNLO：
Iorder_alphas=3。

I 类时=0_　　类空/类时演化切换开关 I_类时=0：类空演化 I 类时=1：类时演化_

Iq排序=2　　用于计算 α_s 中尺度的排序定义、横向动量q_t 和 z_M。请注意，对于类时演化， q_t 的计算会发生变化， $q_t = z(1-z)q'$ 适用于角排序（式（13））

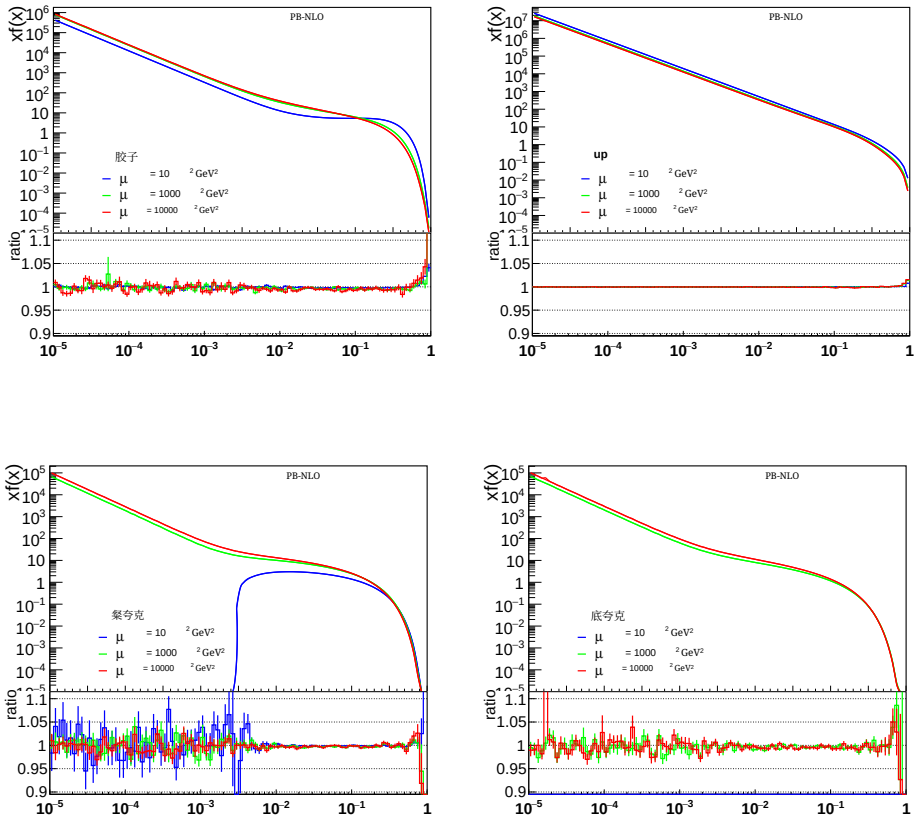

图4：使用相同的初始条件，通过 PB 方法和 APFEL 进行 NLO 类时演化得到的胶子和上夸克碎裂函数，以及粲夸克和底夸克碎裂函数（下排）。重夸克碎裂函数探测了公式 (21) 的阈值核 K。

Iq排序=0：采用角排序，并使用 $\alpha_s(q_t)$、 $q_t = (1-z)q'$ 和 $z_M = z_{\rm dyn} = 1 - q_0/q'$ Iq排序=1：采用虚度排序，并使用 $\alpha_s(q)$、$q_t = \sqrt{}(1-z)q'$ 以及$z_M = z_{\rm dyn} = 1 -(q_0/q')^2$Iq排序=2：采用角排序，并使用 $\alpha_s(q)$、 $q_t = (1-z)q'$，且固定z_MIq排序=3：采用虚度排序，并使用 $\alpha_s(q)$、 $q_t = \sqrt{}(1-z)q'$ 以及$z_M = z_{\rm dyn} = 1 -(q_0/q')^2$Iq排序=4：采用角排序，并使用 $\alpha_s(q_t)$、 $q_t = (1-z)q'$，且固定z_MIq排序=5：采用 q_t 排序（$q_t = q$），并使用 $\alpha_s(q)$，且固定 z_M

7 摘要

UPDFEVOLV2 中的 PB 实现已扩展至零质量可变味数方案下的 NNLO 类空演化，以及带重味匹配的领先阶和次领先阶类时演化。

对于类空演化，NNLO 阈值匹配系数作为$\delta(\ln\ \mu^2 - \ln\ m_h^2)$贡献被实现到尺度依赖核中。它们生成 Sudakov 形状因子中的相应步进。所得胶子、轻夸克和重夸克密度与半解析的 APFEL 结果一致。

对于类时演化，Sudakov 形状因子由演化部分子的子代粒子构造，而分支链从强子向初始部分子运行，并采用转置核结构。重味匹配从$\mathcal{O}(\alpha_s)$开始，并通过胶子碎裂函数对重夸克碎裂函数产生贡献。由于该匹配没有对应的虚项，因此将其作为分支链中的独立阈值步实现，并配合辅助采样概率和补偿事件权重。所得碎裂函数与 APFEL 参考计算结果吻合良好。

致谢

感谢 V. Bertone 就类时演化展开讨论。

在实现开发和本说明准备过程中使用了生成式 AI 工具，包括 Claude（Anthropic；Claude Sonnet 5 和 Claude Opus 5.5）、ChatGPT（OpenAI）和通义千问。这些工具用于初步研究、协助实现和编写文档，以及进行交叉检查。作者对科学结果、方程、参考文献和结论进行了严格审查，并对本说明的内容承担全部责任。

一个明确的领先阶示例

作为第 2.3 节一般推导的示例，我们明确说明动量求和规则如何将夸克和胶子的虚项转化为苏达科夫项。对于纯加法处方类型的核，$P = [P^R]_+$，在领先阶时为 P_{qq}，其 z 阶矩为

$$\int_0^1 dz\, z \left[P^R(z)\right]_+ = \int_0^1 dz \left[\, zP^R(z) - P^R(z)\right]. \tag{23}$$

应用动量求和规则 $\int_0^1 dz\ [zP_{qq}(z) + zP_{gq}(z)] = 0$（式（6））， 夸克碎裂函数的演化方程可用实发射类时核 $P^{R,T}_{ba}$ 表示为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, xD_q(x,\mu^2)}{\partial \ln \mu^2} &= \frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1 \frac{dz}{z}\left[zP_{qq}^{R,T}(z)\,\frac{x}{z}D_q\left(\frac{x}{z},\mu^2\right) + zP_{gq}^{R,T}(z)\,\frac{x}{z}D_g\left(\frac{x}{z},\mu^2\right)\right] \\
&\quad -\frac{\alpha_s}{2\pi}xD_q(x,\mu^2)\int_0^1 dz P_{qq}^{R,T}(z) \\
&\quad -\frac{\alpha_s}{2\pi}xD_q(x,\mu^2)\left[\int_0^1 dz\, zP_{qq}(z) + zP_{gq}(z)\right] \\
&= \frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1 \frac{dz}{z}\left[zP_{qq}^{R,T}(z)\,\frac{x}{z}D_q\left(\frac{x}{z},\mu^2\right) + zP_{gq}^{R,T}(z)\,\frac{x}{z}D_g\left(\frac{x}{z},\mu^2\right)\right] \\
&\quad \cancel{-\frac{\alpha_s}{2\pi}xD_q(x,\mu^2)\int_0^1 dz P_{qq}^{R,T}(z)} \\
&\quad -\frac{\alpha_s}{2\pi}xD_q(x,\mu^2)\left[\int_0^1 dz\, zP_{qq}^{R,T}(z) - \cancel{P_{qq}^{R,T}(z)} + zP_{gq}^{R,T}(z)\right] \\
&= \frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1 \frac{dz}{z}\left[zP_{qq}^{R,T}(z)\,\frac{x}{z}D_q\left(\frac{x}{z},\mu^2\right) + zP_{gq}^{R,T}(z)\,\frac{x}{z}D_g\left(\frac{x}{z},\mu^2\right)\right] \\
&\quad -\frac{\alpha_s}{2\pi}xD_q(x,\mu^2)\int_0^1 dz\,\left[zP_{qq}^{R,T}(z) + zP_{gq}^{R,T}(z)\right], \qquad (24)
\end{aligned}$$

其中第二行使用了关于 P_{qq} 的公式 (23)，并且所有积分上限均理解为 $1-\epsilon$。

对于胶子，采用相同步骤，将 $P_{gg} = R_{gg}(z) + k_g\left[\frac{1}{1-z}\right]_+ + d_g\,\delta(1-z)$ 代入可得

$$\begin{aligned}
\mu^2\frac{\partial x D_g(x,\mu^2)}{\partial \mu^2} &= \frac{\alpha_s}{2\pi}\left[\int_x^1 \frac{dz}{z}zP_{gg}^{(R,T)}(z)\,\frac{x}{z}D_g\left(\frac{x}{z},\mu^2\right) + zP_{qg}^{(R,T)}(z)\,\frac{x}{z}D_\Sigma\left(\frac{x}{z},\mu^2\right)\right] \\
&\quad -\frac{\alpha_s}{2\pi}xD_g(x,\mu^2)\left[\int_0^1 dz\, zP_{gg}^{(R,T)}(z) + 2n_f\, zP_{qg}^{(R,T)}(z)\right]. \qquad (25)
\end{aligned}$$

参考文献

[1] F. Hautmann、H. Jung 和 S. T. Monfared，“CCFM 非微扰部分子分布函数演化 uPDFevolv”，*Eur.Phys.J.C* **74**（2014）3082，arXiv:1407.5935。

[2] H. Jung、A. Lelek、K. M. Figueroa 和 S. Taheri Monfared，“部分子分支演化程序包 uPDFevolv2”，arXiv:2405.20185。[3] F. Hautmann 等，“由部分子分支方法求解 QCD演化方程得到的共线与TMD夸克和胶子密度”，*JHEP* **01** （2018）070, arXiv:1708.03279。

[4] F. Hautmann 等，“QCD演化方程中的软胶子分辨率尺度”，《物理评论快报B》772（2017）446，arXiv:1704.01757。[5] V. N. Gribov 和 L. N. Lipatov，“微扰理论中的深度非弹性 ep 散射”，《苏联核物理杂志》15（1972）438。[Yad. Fiz.15,781（1972）]。[6] L. N. Lipatov，“部分子模型与微扰理论”，《苏联核物理杂志》20（1975）94。[Yad. Fiz.20,181（1974）]。[7] G. Altarelli 和 G.Parisi，“部分子语言中的渐近自由”，《核物理B》12（1977）298。[8] Y. L. Dokshitzer，“利用量子色动力学中的微扰理论计算深度非弹性散射的结构函数和 e^+e^- 湮灭”，《苏联物理学—JETP》46（1977）641。[Zh. Eksp. Teor. Fiz.73,1216（1977）]。[9] M. Botje，“QCDNUM：快速QCD演化与卷积”，计算物理通讯182（2011）490，arXiv:1005.1481。[10] V. Bertone，“APFEL++：C++中的新型PDF演化库”，PoS DIS2017（2018）201，arXiv:1708.00911。[11] V. Bertone、S. Carrazza 和 J. Rojo，“APFEL：包含QED修正的PDF演化库”，计算物理通讯185（2014）1647–1668，arXiv:1310.1394。[12] R. Zlebcik，“由部分子分支方法得到的TMD密度”，PoS DIS2017（2018）078。[13] M. Buza、Y. Matiounine、J. Smith 和 W. L. van Neerven，“在可变味数方案与固定阶微扰理论中考察粲夸克电产生”，Eur. Phys. J. C1（1998）301–320，arXiv:hep-ph/9612398。[14] M. Cacciari、P. Nason 和 C. Oleari，“碎裂函数中的重味阈值跨越”，JHEP 10（2005年）034，arXiv:hep-ph/0504192。[15] W. Furmanski 和 R. Petronzio，“领头阶之外的单态部分子密度”，《物理评论快报B》97（1980）437。[16] G. Curci、W. Furmanski 和 R. Petronzio，“领头阶之外的部分子密度演化：非单态情形”，《核物理B》175（1980）27。[17] E. G. Floratos、C. Kounnas 和 R. Lacaze，“包容湮灭和深度非弹性散射中的高阶QCD效应”，《核物理B》192（1981）417。[18] M. Stratmann 和 W. Vogelsang，“极化与非极化碎裂函数的次领头阶演化”，《核物理B》496（1997）41，arXiv:hep-ph/9612250。

[19] A. Mitov、S. Moch 和 A. Vogt, 《非单态碎裂函数的次次领头阶演化》, 《物理评论快报*B*》**638** (2006) 61，arXiv:hep-ph/0604053。[20] M. Ciafaloni, 《小 Q^2/s处初态喷注中的相干效应》, 《核物理*B*》**296** (1988) 49。[21] S. Catani、F. Fiorani 和 G. Marchesini, 《初态辐射中的量子色动力学相干性》, 《物理评论快报*B*》**234**(1990) 339。[22] S. Catani、F. Fiorani 和 G. Marchesini, 《微扰量子色动力学中初态辐射的小x行为》, 《核物理*B*》**336** (1990) 18。[23] G. Marchesini, 《小x处结构函数及相关分布中的量子色动力学相干性》, 《核物理*B*》**445** (1995) 49，arXiv:hep-ph/9412327。[24] G. Marchesini 和 B. R. Webber, 《包含软胶子干涉的量子色动力学喷注模拟》, 《核物理*B*》**238**(1984) 1。[25] G. Marchesini 和 B. R. Webber, 《利用相干量子色动力学辐射对一般硬过程进行蒙特卡罗模拟》, 《核物理*B*》**310** (1988) 461。[26] A. Vogt, 《使用 QCD-PEGASUS 高效演化非极化和极化部分子分布》, 计算物理通讯 **170** (2005) 65–92, arXiv:hep-ph/0408244。[27] S. Moch、J. A. M. Vermaseren 和A.Vogt, 《QCD 中的三圈劈裂函数

:

非单态情形”, 《核物理*B*》**B688** （2004年）101，arXiv:hep-ph/0403192。[28] A. Vogt、S. Moch 和 J. A. M. Vermaseren，“量子色动力学中的三圈劈裂函数：单态情形”, 《核物理*B*》**B691** （2004年）129，arXiv:hep-ph/0404111。[29] V. Bertone、S. Carrazza 和 E. R. Nocera，“截至 $\mathcal{O}\left(\alpha_s^3\right)$的类时演化参考结果”，*JHEP* **03** （2015年）046, arXiv:1501.00494。[30] S. Albino、B. A. Kniehl 和 G. Kramer，“具有完整夸克味分离的轻带电强子碎裂函数”, 《核物理*B*》**725** （2005年）181–206，arXiv:hep-ph/0502188。