arXiv:2611.32725v1 [cond-mat.dis-nn] 24 Nov 2026

无限维中安德森局域化的共形性丧失，以及有限维中的共形性恢复：高维安德森跃迁的唯象理论

Antonello Scardicchio[1,2] 和 Carlo Vanoni[3]

[1] *The Abdus Salam International Center for Theoretical Physics, Strada Costiera 11, 34151 Trieste, Italy* [2] *INFN, Sezione di Trieste, via Fabio Severo, 34128, Trieste, Italy* [3] *Department of Physics, Princeton University, Princeton, New Jersey, 08544, USA*(日期：2026年11月25日)

我们表明，近期关于空间维度数$d \to \infty$ 时安德森局域化的研究，可以纳入所谓的 *conformality lost* [1]情景：重整化群的两个不动点碰撞并变为复数。这一框架自然地使 *two-parameterscaling* 流 *à la* 能够由别列津斯基–科斯特利茨–索利斯（BKT）机制控制理论的所有可观测量，正如参考文献 [2]中的猜想。我们还以此为起点，对 ϵ 重整化群方程进行展开，并找到符合 $\epsilon = 1/d \ll 1$维数下数值结果的唯象重整化群方程 $d \gtrsim 4$。

I. 引言

安德森局域化 [3] 即将迎来 70 周年，如今许多问题已得到理解。对于规则晶格，已有证明表明强无序下存在局域化相 [4] ；适用于所有空间维度的临界点普适现象学理论也已建立 [5] ，该理论表明，随着 d 增大，波函数的多重分形性会更加显著；人们提出了复制场论方法和超对称框架下的场论方法 [6, 7], , 原则上可用于精确计算可观测量（前提是场论可以进行某种微扰处理，而迄今为止它一直难以接受这种处理）；Wegner 和 Efetov 的非线性σ模型 [7, 8] 在二维附近证实了文献 [9], 中的单参数标度假说，并对临界指数 [8] 进行了 $d-2$ 展开，且计算推进到了四圈图阶 [10, 11]。

还有哪些工作有待完成？当然，由于近期实验和理论上的进展，一个备受关注的问题是：当恢复非相互作用电子之间的相互作用时，局域态会发生什么变化。对这一问题的研究统称为多体局域化。尽管这一问题早已出现在 Anderson 的工作中 [3], 以及 Fleishman 和 Anderson 的研究中 [12],，但最近一轮研究热潮源于 Basko、Aleiner 和 Altshuler（BAA）的突破性工作 [13]。许多研究者 [14–17] 在 BAA 的基础上，描述了一种物理状态：在这种状态中，强无序会阻碍除纠缠之外的所有输运，最终形成一个具有局域（或准局域）运动积分的相 [18, 19]。

撇开相互作用不谈，理论学家心中最相关且最迫切的问题（不过实验学家或许并不那么关心）是：场论描述究竟能发挥多大作用？我们能否以某种方式刻画临界共形场论？能否通过某种级数展开得到临界指数？在 $d-2$ 中进行自然展开遗憾地并无帮助。尽管该级数可以写到

四圈， $d=3$ 的结果却与数值结果 $\nu = 1.57...$ 不符，甚至连第一位有效数字都对不上。Ueoka 和 Slevin 曾尝试对该级数进行 Pad´e-Borel 重求和，并将其与 $d>2$ 数值数据进行比较，但这项工作并不具有决定性 [20, 21]。与数据的一致性很差，整个过程也没有带来多少洞见。这并不令人意外，因为安德森模型很可能不存在有限的上临界维数 [22], ；随着 d 增大，临界点会移向强无序区域，此时 σ-模型的微扰处理不再受控 [23], ，而单参数标度假设本身也受到了质疑 [24]；围绕$d=2$ 的展开很可能无法捕捉高维中的物理。另一方面，近年来有人提出了在 $\epsilon = 1/d$ 中进行展开的可能性，因此，不同研究团队（包括本文作者） [2, 23, 25–28]又开始认真重新考察安德森模型的大维数极限。Zirnbauer 和 Arenz [23, 27], 从强无序下的 Wegner N轨道模型出发，认为在高维中， σ-模型必须由一种具有两个独立耦合常数的场论取代，即双曲目标空间上具有两种刚度的场论。在实验方面，人们利用有效四维晶格中的冷原子排列来探索这一相变 [29]。在三维中，迁移率边也被认为与局域化景观的渗流转变有关 [30]。对 $d=3$–6 中数值指数的倒数进行线性拟合得到 $1/\nu \simeq 2 - 4.75/d$ [26], 即 $\nu = \frac{1}{2} + \nu$

$\bar{}_1/d + O(d^{-2})$ 与 $\nu_1 \simeq 1.2$。在另一条独立的研究路线中，Giorgio Parisi及其合作者采用了 M层构造 [31, 32], , 其中参数 $M \to \infty$ 将有限-d 晶格转变为 Bethe晶格，随后进行 $1/M$ 展开，再将 M 设为1。这条路线同样很有前景，但该问题尚未得到解决 [33]。

近期，人们对树状图上 Anderson 跃迁的浓厚兴趣，很大程度上源于多体局域化。此前有人提出的非遍历扩展相 [34], 已经

被排除：在这些图上，本征态在任意 $W < W_c$下都是遍历的，而表观上的非遍历性是一种有限尺寸交叉 [35–38]。这些研究所确立的是，跃迁附近的有限尺寸流并非单参数类型：Garcı́a-Mata 等人 [37]用 BKT 类型的双参数流描述了局域侧，而 Sierant 等人 [38] 表明临界点是局域化的，这实质上迫使标度呈现 BKT 类型。

几年前我们启动这项研究时，第一步是重新诠释经典的 Bethe晶格结果，并将有限-N 流纳入重整化群流拓扑。我们证明，精确对角化（ED）的数值结果 [2, 38] 可由双参数标度流 `，即BKT 流（最近也在小世界随机图 [39]上发现）很好地描述。接下来，我们计划考察该流在 $\epsilon = 1/d$阶的修正，使双参数流演变为单参数流。如果对双参数理论（Bethe晶格）及其形变（产生 $1/d$ 的算子）已有足够了解，就有望解析地求出上一段中的系数 ν_1，进而建立关于 $1/d$的理论。本文是这项研究迈出的一小步。

本文表明，利用种群动力学可以得到与精确对角化（ED）完全相同的结果；文献中存在的差异源于拟合不够精确和/或对理论的误解。具体而言，我们发现，所有 D_q 流在临界点附近都以相同方式遵循重整化群流，并且这种流随系统尺寸呈 BKT 式变化 N，其形式为 $D_q \propto 1/(\ln N)^2$，在临界点处成立（第II节）。我们还表明，流的单参数部分，即指向遍历点的弧线（见文献 [2], 中的示意），始于线性化自洽方程失效之处，此时其非线性部分开始起作用（第III节）。Rizzo、Tarzia 和 Vecchiarelli 独立且同期地得到了相关结果，包括流的 BKT 形式、局域化不动点线上的β 取值，以及流向离域侧的延续；这些结果来自对逆参与比进行的有限尺寸标度分析。 [40, 41], 。

然后，我们分析迭代方程的不动点理论，并说明该相变——即一个稳定不动点与一个不稳定不动点的合并，二者在 $W > W_c$ 处为实数，而当$W < W_c$时变为复数——如何由共形性丧失图景（文献 [1]）所描述。局域化区域或临界区域附近的线性化方程可写为格林函数虚部生成函数的微分方程。其解为幂律，两个指数即红外不动点与紫外不动点在相变处合并；用超对称语言来说，这是 AdS_2 上越过 Breitenlohner–Freedman 界限的标量场。偏离稳态极限时，指数随尺度跑动，文献 [2] 中的两个变量获得确切含义： β 是跑动耦合，而 D_1 是其贝塔函数（第III节）。

基于这一图像——它将运行指数中的重整化群耦合常数与距合并点的距离联系起来——本文第二部分开始对 $1/d$ （第 IV节）进行展开。这一部分的性质有所不同：我们不从微观展开推导修正，而是根据维数计数以及圈图效应，写出树流所允许的最小形变，并通过与数值指数比较来确定其中的两个系数。我们展示了维数计数的效应，它已经给出$\nu = \frac{1}{2}$，这与其他从 Bethe 晶格出发的讨论（例如 $1/M$ 展开）相符。在树上，无序仅标记轨线；而在晶格上，它获得一个标度维数，并成为相关耦合。我们还指出，晶格圈图的贡献会使指数变为无关量、使合并的不动点分裂，并将 ν 移至接近 $O(\epsilon)$ 的数值，从而更接近数值结果。两个不动点分裂后，临界点成为一个普通不动点，具有一个相关方向和一个无关方向，树上的对数修正则变为幂律。它的紫外伴点——一个完全不稳定的不动点——在有限 d下仍然存在，但它位于耦合平面的一个区域内，物理流（从晶格的裸耦合出发）无法进入该区域。因此，虽然它不会被直接观测到，却会影响临界点附近的流。我们还展示了如何在这一方案下，为分形维数等临界值取决于定义的可观测量写出重整化群方程。最终结果是，有限 d 时的流的拓扑示意如图 6所示；我们对 $1/d$ 修正的系数作出猜想，并将其计算留待未来研究。

II. 模型与种群动力学

我们考虑由哈密顿量定义的安德森模型

$$H = -\sum_{i,j} A_{ij} |i\rangle \langle j| + \sum_i V_i |i\rangle \langle i| , \tag{1}$$

其中， A_{ij} 是所研究图的邻接矩阵，可以是随机正则图（RRG），也可以是分支数为 K（即配位数为 $K+1$）的Bethe晶格，或 d维超立方晶格。独立同分布的随机变量 V_i 均匀取自区间 $[-W/2, W/2]$。我们将始终使用 $K = 2$，并考察能带中部的 $E = 0$。

对于随机正则图和 Bethe晶格这类局部树状图，可通过腔体方法计算局部预解式。移除一个格点 j 后，树会分裂成互不连通的分支，而腔体格林函数 $G_{i\to j}$ 是移除j 后所得图的预解式 $(E - i\eta - H^{(j)})^{-1}$ 在格点i 处的对角元。由于跃迁项仅以其平方的形式出现，因此它满足

$$G_{i\to j} = \frac{1}{E - i\eta - V_i - \sum_{a\in\partial i\setminus j} G_{a\to i}}, \tag{2}$$

其中， ∂i 表示 i的 $K+1$ 个邻居。对角格林函数则由完整配位数$K+1$得到，

$$G_{ii}=\frac{1}{E-i\eta-V_i-\sum_{j\in\partial i}G_{j\to i}}. \tag{3}$$

在此符号约定下，$\mathrm{Im}\,G_{ii}>0$，且 $I_i=\mathrm{Im}\;G_{ii}=\pi\rho_i(E)$是格点 i处的局域态密度（LDoS），其经 η展宽。我们通过种群动力学（第 2节 IIA）求解方程（2）。腔格林函数的分布由一个包含 N 个复数的种群表示。每一代都从K 个随机抽取的成员和一个新生成的现场能量构造每个新成员，而 I 的分布则根据方程（3）进行采样。我们在 Bethe晶格的定常腔问题上检验该流，使用有限调节器下的完整复数递推 η ，而不是其线性化形式。

A. 方法

a. 有限 η 作为有限尺寸。 一个包含 N 个格点的随机正则图在局部上是 Bethe晶格；在带中心 $E=0$处，每个格点的平均态密度有限且非零 [33]。因此，一个包含N 个格点的 RRG 的平均能级间距为 $\Delta_N\sim N^{-1}$；若将能级间距用作调节器，即令腔展宽 η与 Δ_N成正比，则有 $\eta\propto N^{-1}$。这一对应关系并不普适：它依赖于所考察能量处有限且光滑的态密度；当某种对称性使该能量变得特殊时，例如具有手征对称性的模型在带中心处的情形 [42]，就必须重新考虑这一点。因此，我们采用 $\ell=\ln(1/\eta)$作为重整化群时间，并将加性常数留作自由参数。在 $I=\mathrm{Im}\,G$ 下，各阶矩按 $\langle I^q\rangle_\eta\propto\eta^{(1-q)(1-D_q)}$标度。由于 $\langle I\rangle=\pi\rho(E)$（其中 $\rho(E)=\langle\rho_i(E)\rangle$ 为平均态密度）在带中心处是光滑的，因而与η无关，在 $q=1$ 处求导得到

$$\begin{aligned}S(\ell)&\equiv\frac{\langle I\ln I\rangle}{\langle I\rangle}=(1-D_1)\,\ell+\mathrm{const},\\ D_1(\ell)&=1-\frac{dS}{d\ell},\qquad \beta=\frac{d\ln D_1}{d\ell}.\end{aligned} \tag{4}$$

这是参考文献 [2], 中香农熵定义，在其中进行替换 $|\psi|^2\to I\eta$ 并将 $\ln N\to$ 替换为 $\ln(1/\eta)$。将 $\ln(1/\eta)$ 与 $\ln\,N$等同起来是标准做法，其中 η的量级为平均能级间距 [25, 43]。有限-η 和有限-N 修正具有相同指数——这是比较两个流所要求的——这一点已在参考文献 [40]中得到证明。它们的振幅可以不同 [40], ，因此流在 N 中的系数 c 不必与在有限 η处测得的系数一致。

b. 算法。 我们对方程（2）中的腔递推进行迭代，现在将其以更紧凑的形式写为 $G_i=(E-i\eta-V_i-\sum_{j=1}^{K}G_j)^{-1}$，作用于由 N 个复数组成的种群。每一代都会替换整个种群，其中 K 子代是随机选取的。测量使用方程（3）中的格林函数，具有$K+1$ 个邻居。

在局域化区和临界区， I加权平均值由方程（4）中局域态密度分布的尾部 $P(I)$ 主导，该尾部延伸至 $I\sim1/\eta$，并且源于该位点自身的共振。这些共振出现的概率为 $\sim\eta$，因此只有在 $N\gg1/\eta$时，朴素采样才能分辨出它们。在局域化相中计算逆参与率时也存在类似困难，参考文献 [44] 通过解析处理罕见的位点共振规避了这一问题。这里我们采用这一思路的有限-η 版本，将被测位点的能量精确积分掉。

记 $Z=E-i\eta-\sum_{j=1}^{K+1}G_j$, $v=\mathrm{Re}\,Z-V$和$b=-\mathrm{Im}\;Z>0$，有 $I=b/(v^2+b^2)$；代入$v=b\tan\theta$ 可得 $I\,dV=d\theta$，因此，对于任意测试函数$f(I)$,

$$\begin{aligned}\int\frac{dV}{W}\,I\,f(I)&=\frac{\theta_2-\theta_1}{W}\left\langle f\left(\cos^2\theta/b\right)\right\rangle_{\theta\in[\theta_1,\theta_2]},\\ \theta_{1,2}&=\arctan\frac{\mathrm{Re}\,Z\mp W/2}{b},\end{aligned} \tag{5}$$

且 θ 均匀分布。因此，群体中的每个成员都带有一对 (I,w)，其中 $I=\cos^2\theta/b$ 对应于一个在 $[\theta_1,\theta_2]$ 中均匀抽取的单一 θ ，且 $w=(\theta_2-\theta_1)/W$。权重w 是在固定邻居条件下的精确积分 $\int dV\,I/W$ ，并且在 $\eta\to0$时保持有界， $w<\pi/W$。于是， I加权平均为 $\langle I\,f(I)\rangle=\langle w\,f(\cos^2\theta/b)\rangle$，右侧的平均是对群体和 θ共同求取的。因此，被测点的共振不再限制统计误差。作为检验， $\langle I\rangle$ 在跨越八个数量级的范围内与 η 无关，偏差小于 10^{-3} 。

B. 数值结果

图 1 总结了 D_1的流，它是通过在 28 种无序强度下，对 $W=12$ 至 30 之间的参数取值，以及将 η 降至约 10^{-13}，分别进行 100 个由 $N=10^7$ 个成员组成的独立总体而得到的。运行过程、误差分析和拟合方法见附录 A。图 1(a) 中可以看到三个区间。在离域侧， D_1 先减小，达到最小值 D_A 后，再上升至遍历值 $D_1=1$。在 $W\simeq18.1$ 附近，它按ℓ的幂律衰减。在局域侧，它呈指数衰减，且衰减速率随 W增大。在 (D_1,β) 平面中， [图 1(b)]中的离域轨迹在 D_A 处穿过 $\beta=0$ ，并在 $D_1=1$处返回 $\beta=0$ ：这正是参考文献 [2]中在随机正则图上发现的弧线，此处则是在无环的 Bethe晶格上得到的。局域轨迹趋向$D_1=0$ ，且 $\beta<0$；这两族轨迹由临界轨迹 $\beta=-\sqrt{2cD_1}$分隔。

这是第IIIE节中推导出的双参数流式（34），其特点是单个相关参数 δ 在 W_c处改变符号。对流积分后，可得到相变两侧以 $D_1(\ell)$ 表示的结果：

c、偏移量 ℓ_0 以及 δ（W）。对最接近相变的无序样本进行共同拟合，得到 $W_c \simeq 18.1$、 $c \simeq 0.4$、 ℓ_0 均为一阶量，且 δ 与 $W - W_c$呈线性关系。在 W_c 处，流预言 $D_1 = 2/[c$（$\ell + \ell_0$）$^2]$,，数据在达到最大的 ℓ 之前均遵循这一规律，其中 $\ell = \ln$（$1/\eta$）的系数为1。远离 W_c 时，同一组常数能够描述相变两侧。在离域侧，极小值 $D_A = 2|\delta|/c$ $W \to W_c$如 [1], $W_c - W^{-1/2}$ 图（c）所示线性趋于零，其位置按（ ）增长：这就是行走区间。在局域侧， D_1 的衰减率 $\alpha = 2\sqrt{\delta}$ 按（$W - W_c$）$^{1/2}$趋于零，而局域化长度具有 $\nu_{\rm loc} = 1$ [43]。分别从两侧独立得到的 δ（W）数值接近一条经过 W_c [图1(d)]的直线。在遍历点附近，流呈线性，斜率为（$d-2$）$/d \to 1$，如 [2] 所示。我们确实发现 $\beta \simeq \lambda$（$1-D_1$），且数据趋近于预言的斜率 $\lambda = 1$。在相变附近，这一描述具有定量准确性；远离相变时则不再准确，此时 D_A 不再很小，或局域化衰减很快。在那里，数据揭示了对主导阶流的修正，而根据离域化极小值处的曲率估算的 c，沿着远离W_c的弧线逐渐减小。

相同的运行结果给出 $\eta\langle I^2\rangle$，因此得到流动的 $D_2 = -d\ln(\eta\langle I^2\rangle)/d\ell$ （图 2）。将格点能量积分消去后， $\eta K_1(0) \equiv \eta\langle|G_{ii}|^2\rangle = 2\eta\langle I^2\rangle + O(\eta)$ 就是文献 [25]，所研究的量，该文提出临界行为 $\eta K_1 = c_1 + c_2 \ln^{-\zeta}(1/\eta)$，其中 $\zeta \simeq \frac{1}{2}$。然而，流动预测的是 $D_2 \propto (\ell+\ell_0)^{-2}$，即 $\zeta = 1$并带有偏移量。我们的原始数据与文献 [25]，的数据一致，但其导数并不一致：$\zeta = \frac{1}{2}$ 无法描述D_2 在 W =18.1 处的情况，而 $A/(\ell+\ell_0)^2$ 在整个范围内 [图 2(a)] 都能对其进行描述。在有限窗口内拟合时，不带偏移量的形式给出有效指数 $\zeta_{\rm eff} = \ell/(\ell+\ell_0) < 1$，并且该指数随 ℓ增大。流动还预测，所有 D_q都会沿着 D_1 的轨迹演化，其振幅依赖于 q，即 $D_q = r_q D_1[1 + O(m - \mu_+)]$。在相变附近，比值 D_2/D_1 确实几乎保持不变 [图 2(b)]，，同时缓慢漂移，这反映了 $O(1/\ell)$ 修正。沿局域轨迹该比值也保持不变，而在离域弧上则向 1 增大；这是必然的，因为在遍历点所有$D_q \to 1$（附录 A 3）。

III. 线性化、阿贝尔场论与重整化群流

本节中，我们研究线性化问题；将其映射为双曲平面$\mathbb{H}_2$ [43, 45]上的单个标量场，并将其作为特征值问题加以研究。我们证明，得到的两个特征值分别代表重整化群流的红外（IR）和紫外（UV）不动点；它们在相变处合并，并在离域化 相中变为复数。该相变遵循 Kaplan 等人 [1]所描述的结构。

将空腔传播子的递归方程（式（2））分解为实部和虚部$G_i = R_i + iI_i$，其中 $R_i \in \mathbb{R}$， $I_i \in \mathbb{R}_+$，因此 G_i属于复上半平面。将这两部分分开，可得

$$R_i = \frac{E - V_i - \sum_j R_j}{|Z_i|^2}, \qquad I_i = \frac{\eta + \sum_j I_j}{|Z_i|^2},$$
$$|Z_i|^2 = \Big(E - V_i - \sum_j R_j\Big)^2 + \Big(\eta + \sum_j I_j\Big)^2, \tag{6}$$

其中 j 遍历 i的 K 个子节点。

A. 局域化解及其线性化

当 $\eta = 0$时， $I_i = 0$ 在每个格点上都是方程（6）的精确解。此时实部满足闭合递推关系$R_i = 1/$（$E - V_i - \sum_j R_j$），它在任意 W下都有一个定常分布。这就是局域化解：每个格点上的局域态密度 $\rho_i = I_i/\pi$ 均为零。相变点是该解失稳之处，即由无穷小η产生的微小虚部沿树向上传播时不再衰减。一阶近似下，关于 η 以及 I_j,

$$R_i = \frac{1}{E - V_i - \sum_j R_j}, \qquad I_i = R_i^2\Big(\eta + \sum_{j=1}^{K} I_j\Big), \tag{7}$$

Abou-Chacra、Anderson 和 Thouless（AAT）的线性化递归 [46]。实递归在文献 [47]，中进行了研究，其中表明它同样包含有关相变的信息。在这里，我们采用更为传统的方法，考察虚部的流。对其进行迭代后，格点 o 处的虚部是其下方子树的所有格点 x 之和，

$$I_o = \eta \sum_x \prod_{k \in \mathcal{P}(o,x)} R_k^2 = \eta \sum_x |G_{ox}|^2, \tag{8}$$

其中， $\mathcal{P}$（o， x）是从 o 到 x 的唯一路径（包括两端），而 $G_{ox} = \prod_k R_k$ 是从 o 到x 在 $\eta = 0$处的传播子。项数随深度 r按 K^r 增长，而典型项随r呈指数衰减。因此，该和由具有异常大 $|G_{ox}|$的稀有路径主导，并且 I_o 具有带幂律尾部的宽分布， P（I） $\sim I^{-1-\mu}$。

局域化解是稳定的，即对于 $\eta \to 0$， $I \to 0$，只要该尾部足够薄。然而，在有限 η下，尾部仅在一个窗口 $\eta \lesssim I \lesssim 1/\eta$内呈幂律，其斜率在该窗口内不一定保持不变。因此，我们通过在固定 R时 I 的累积分布 $P_>$（I）来定义局部尾指数，

$$m \equiv -\frac{d\ln P_>(I\,|\,R)}{d\ln I}, \tag{9}$$

其趋于 μ，其中尾部呈纯幂律。指数 m 是本文的核心量。在本节其余部分，我们将求出它的驻值 μ （第 IIIC节），以及支配其依赖关系的方程

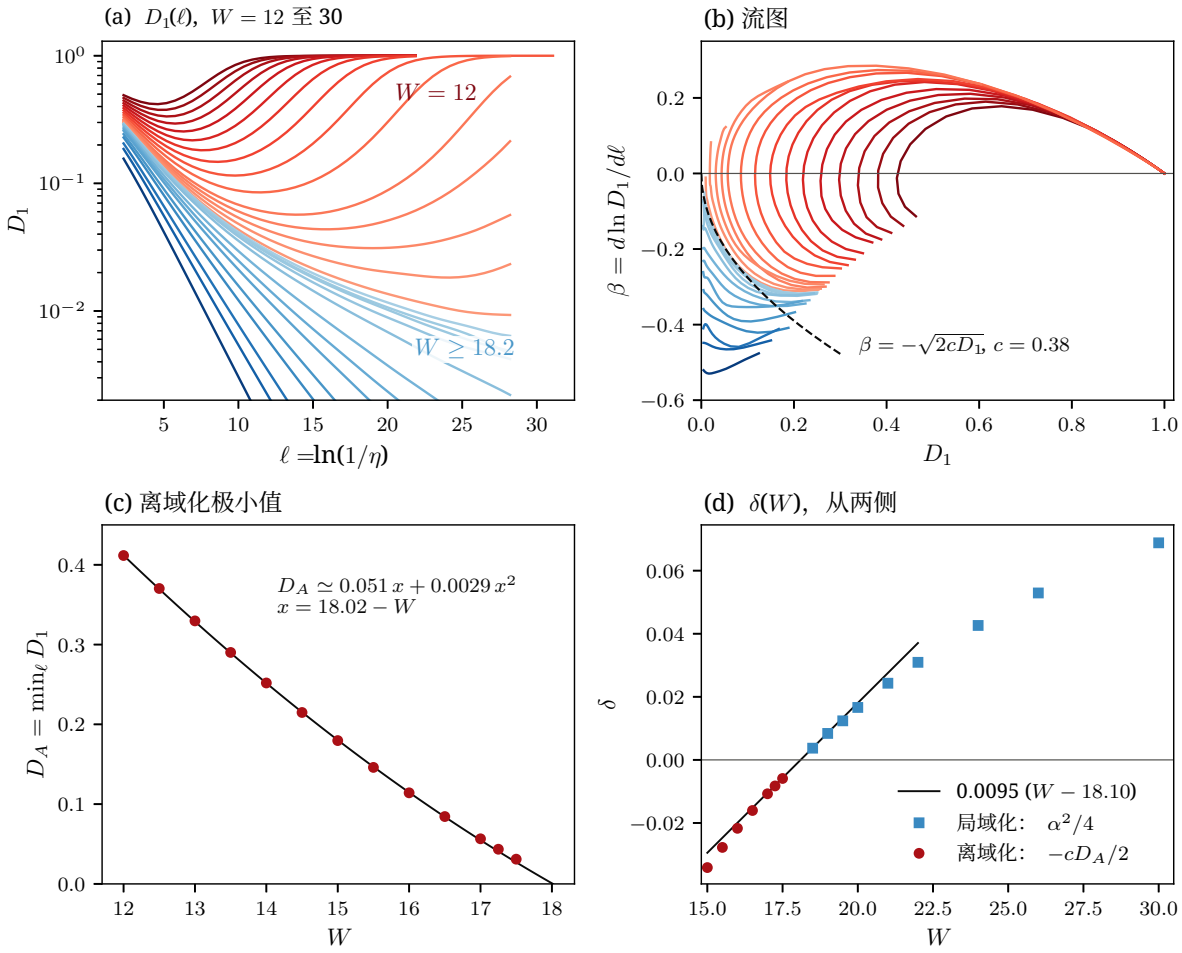

图 1. Bethe晶格上的种群动力学（$K = 2$, $E = 0$, $N = 10^7$），基于 100 个独立总体，它们在 η （附录 A）中使用共同随机数演化得到。(a) 对 $S(\ell)$ 的五点局部二次拟合，得到 28 个 W 从 12 到 30 时的 $D_1(\ell)$（红色：离域化， $W < W_c$；蓝色：局域化， $W > W_c$；颜色越深，离 W_c 越远）；误差大于 0.02 的点予以省略。(b) (D_1, β) 平面上的流，由七点拟合得到； β 上误差大于 0.03 或具有 $D_1 < 0.004$ 的点予以省略。虚线：临界分界线 $\beta = -\sqrt{2cD_1}$，其中 $c = 0.38$。(c) 离域化极小值 $D_A(W)$，以及二次引导曲线 $D_A \simeq 0.051\,x + 0.0029\,x^2$, $x = 18.02 - W$。(d) $\delta(W)$，公式（16）的参数，根据局域衰减率（$\alpha^2/4$）和离域化极小值（$-cD_A/2$）得到，并与直线 $\delta = 0.0095\,(W - 18.10)$ 对比。

随尺度变化（第 III E节）。在第 IIIE 节中，我们还将展示，在给定 D_q 下的分形维数 η 仅通过 η依赖于 m，因此它就是第 II节所述流的运行耦合。

B. 生成函数

重尾最容易通过拉普拉斯变换处理。由于 R_i 和 I_i 相关，我们在给定实部处定义它，

$$\varphi(\tau \,|\, R) = \left\langle e^{-\tau I} \,\middle|\, R \right\rangle \equiv \int_0^\infty dI\; e^{-\tau I}\, P(I \,|\, R),$$
$$\chi(\tau \,|\, R) = 1 - \varphi(\tau \,|\, R). \tag{10}$$

尾部 $P(I) \simeq A\, I^{-1-\mu}$ 且 $0 < \mu < 1$ 会在小 τ处表现为非解析项， $\chi \simeq A\,\Gamma(1-\mu)\;\tau^\mu/\mu$；而具有有限均值的分布则给出解析的 $\chi \propto \tau$。同样的对应关系在局部也成立。令 $s = \ln \tau$，若 m 随 $\ln I$缓慢变化，则 $\chi(e^s \,|\, R) \simeq \Gamma(1-m)\, P_>(e^{-s} \,|\, R)$，因此

$$m(s) = \frac{\partial \ln \chi(e^s \,|\, R)}{\partial s} \tag{11}$$

是式（9）在 $I \simeq e^{-s}$处的局部尾指数，误差项阶为 dm/ds。窗口 $\eta \lesssim I \lesssim 1/\eta$ 变为 $|s| \lesssim \ell$，其中 $\ell = \ln(1/\eta)$。这里对 R 进行条件化至关重要。固定 R 就固定了格点本身接近共振的程度，而 I 剩余的分布则衡量从子树继承的展宽，这正是m所要描述的内容。若不进行条件化，平均值 $\int dR\, P(R)\; \chi(\tau|R)$ 中就会包含来自以下格点的贡献

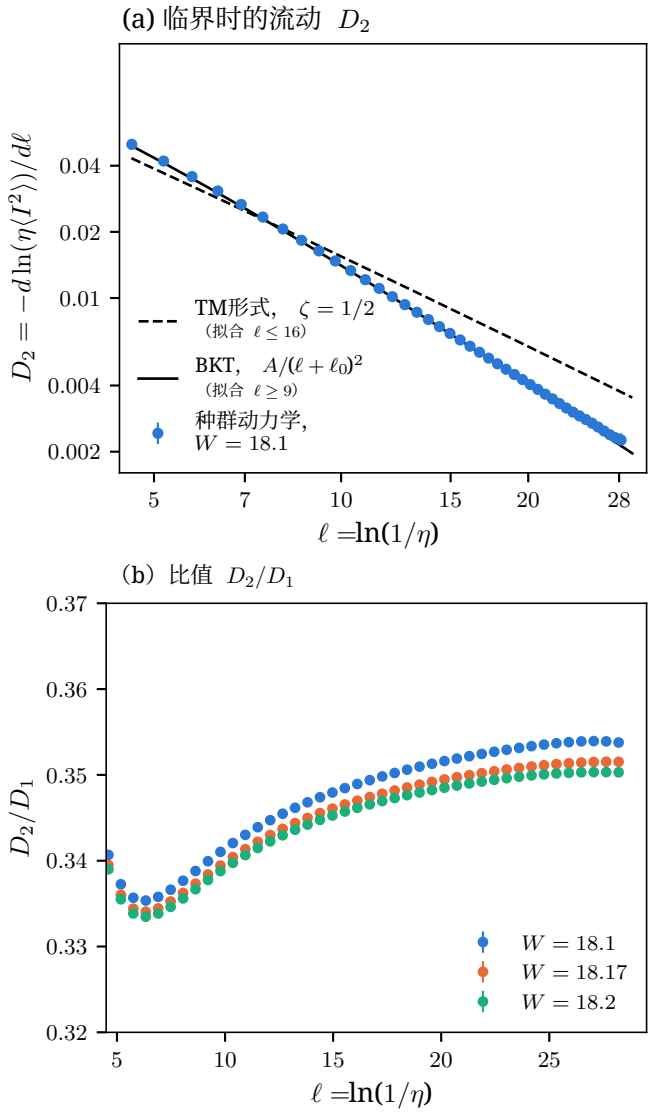

图 2. (a) 流动的 $D_2 = -d\ln(\eta\langle I^2\rangle)/d\ell$ 在 $W = 18.1$，对与图 1 相同的数据中五个点进行局部二次拟合，得到其导数 $\eta K_1 = c_1 + c_2 \ln^{-1/2}(1/\eta)$ [25] 拟合于$\ell \le 16$ (虚线)以及 $\ln(\eta\langle I^2\rangle) =$ 常数 $+ A/(\ell+\ell_0)$ 拟合于 $9 \le \ell \le 29.4$ (实线)。(b) D_2/D_1 在 $W = 18.1$，18.17 和 18.2。误差棒小于符号。

与其自身邻居共振的格点，这种情况在任意无序强度下都存在，即 $\propto (\eta\tau)^{1/2}$，而其局部指数将为1 2，且与W 无关。

给定实部 R_i 在位点 i 以及其子节点的实部 R_j， I_j 彼此独立，因为它们来自互不相交的子树。式（7）于是给出

$$\left\langle e^{-\tau I_i} \,\middle|\, R_i, \{R_j\} \right\rangle = e^{-\tau R_i^2 \eta} \prod_{j=1}^{K} \varphi\left(\tau R_i^2 \,\middle|\, R_j\right), \qquad (12)$$

其中每一代将拉普拉斯变量乘以R_i^2。在固定 R_i 的情况下，对 R_j 和 V_i 取平均，可得到关于 φ的闭合方程，该方程是下式的线性化形式：

参考文献 [43, 45]中的自洽方程。在局域化解附近， χ 很小，因此在一阶近似下

$$\chi(\tau \,|\, R) = \tau R^2 \eta + K \left\langle \chi(\tau R^2 \,|\, R_1) \right\rangle_R, \qquad (13)$$

其中， $\langle\cdots\rangle_R$ 表示对该子节点 R_1、其他 $K-1$子节点以及 V在给定父节点 R 取值条件下的平均。式（13）中的因子 K 源于 K 子节点在平均 $\langle\cdots\rangle_R$下是等价的。

C. 标度模与两个不动点的合并

第三节A将局域化解的稳定性归结为 $P(I)$的尾指数 μ，而第三节B将尾部转化为 χ的小-τ 行为：尾部$I^{-1-\mu}$ 是一个非解析项 τ^μ。现在我们要问，式（13）允许哪些指数。源项 $\tau R^2\eta$ 在τ中是解析的：它确定 I 在给定R时的 $O(\tau)$项，即 I 的均值，但无法生成非解析项，因此非解析项必须自行满足式（13）的齐次部分。该方程没有自身的尺度： τ 仅通过乘积 τR^2进入，因此树的一代会将 χ作用为 τ的随机重标度；如果 $\chi(\tau|R)$是一个解，那么对任意 $\lambda > 0$， $\chi(\lambda\tau|R)$也同样是解。因此，可以按照 τ在伸缩变换下的行为对其解进行分类，即将其写成幂律 $\chi = \tau^\mu f_\mu(R)$。代入后， τ 的幂次因子被提出，剖面 f_μ 必须满足

$$\left[\mathcal{T}(\mu) f_\mu\right](R) \equiv K|R|^{2\mu} \left\langle f_\mu(R_1) \right\rangle_R = \Lambda(\mu)\, f_\mu(R). \qquad (14)$$

对于每个 μ， $\mathcal{T}(\mu)$ 都是作用于 R 的函数上的正线性算子。由于 $\chi \ge 0$，剖面 f_μ 必须为正，因此选取佩龙–弗罗贝尼乌斯特征向量，即最大特征值 $\Lambda(\mu)$。未知量是指数，可通过要求指数为 μ 的尾部处于定常状态来求得，这等价于要求 $\Lambda(\mu) = 1$（也就是说，局部指数 m 的驻值是 $\Lambda(\mu) = 1$ 的根）。

该特征值在路径求和中具有直接含义，见式（8）：

$$\Lambda(\mu) = \lim_{r\to\infty} \Big[\sum_{x \in \text{shell } r} \left\langle |G_{ox}|^{2\mu} \right\rangle \Big]^{1/r}. \qquad (15)$$

深入一代，路径数量会乘以 K， 而它们的权重 $|G_{ox}|^{2\mu}$ 会乘以因子 $|R|^{2\mu}$，因此 $\Lambda(\mu)$ 是传播子第 μ 阶矩沿树每代的净增长因子。路径数量与其典型衰减之间的竞争（见式（8）下文）因此可以逐阶矩地判定： $\Lambda(\mu) < 1$ 意味着，即使是权重较大的稀有路径， $|G_{ox}|$数量也不足以使第 μ 阶矩沿树增长。

函数 $\Lambda(\mu)$ 在此之前已被多次研究 [34, 43, 46, 47], ，并具有三个普遍性质：首先， $\Lambda(0) = K$，因为 $f = 1$ 是 $\mu = 0$ 处的特征向量；其次， $\ln\Lambda$ 关于 μ 是凸函数；第三， $\Lambda(\mu) = \Lambda(1-\mu)$，正如

AAT 所示 [46]。我们将这一点称为 AAT-MF 对称性。

因此 $\Lambda(1) = K$，且 Λ 的最小值位于 $\mu = 1/2$。在最小值附近，我们可以展开 $\Lambda(\mu) \simeq \Lambda(1/2) + \frac{1}{2}\Lambda''(\mu - \frac{1}{2})^2$，而 $\Lambda(\mu) = 1$ 的根为

$$\mu_\pm = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\delta}, \qquad \delta \equiv \frac{2\left[1 - \Lambda(\frac{1}{2})\right]}{\Lambda''(\frac{1}{2})}. \tag{16}$$

可能出现三种情况：

- 局域化，$\Lambda(1/2) < 1 (\delta > 0)$：两个实根，由 $\mu_+ + \mu_- = 1$配对。物理尾指数为$\mu_+ > \frac{1}{2}$，如下所示。
- 临界，$\Lambda(1/2) = 1 (\delta = 0)$：两个根在 $\mu = \frac{1}{2}$ 处合并。这是参考文献 [34, 46]中的迁移率边判据。
- 离域化，$\Lambda(1/2) > 1 (\delta = -\kappa^2 < 0)$：根为复数，$\mu = \frac{1}{2} \pm i\kappa$。实解$\chi \propto \tau^{1/2}\cos(\kappa \ln \tau + \varphi_0)$会改变符号，而拉普拉斯变换 $1 - \langle e^{-\tau I}\rangle$ 不会如此：不存在稳态幂律尾部，我们所进行的线性化过程不再有效，方程（6）的非线性项开始起主导作用。

由方程（8）还可以确定，两个根 μ_+ 和 μ_-中，哪一个在局域化相中实现。对于 $0 < \mu \le 1$，$(\sum_x a_x)^\mu \le \sum_x a_x^\mu$，因此

$$\left\langle I_o^\mu \right\rangle \le \eta^\mu \sum_{r \ge 0} \Lambda(\mu)^r, \tag{17}$$

只要 $\Lambda(\mu) < 1$，该量就是有限的，也就是说，对于 $\mu_- < \mu < \mu_+$。较低阶的矩也因此有限，因为对于 $\mu' < \mu$，$\langle I^{\mu'}\rangle \le \langle I^\mu\rangle^{\mu'/\mu}$：在 μ_- 以下，这个界限不再成立，但矩并不会在那里发散。因此，I 的所有矩在 μ_+之前均有限，尾指数为 μ_+；尾部更重的根 μ_-无法从局域化解到达。用第 III E 节的术语来说，μ_+是红外不动点，而 μ_- 是它的紫外伴点。虽然无法到达，根 $\mu_- = 1 - \mu_+$ 仍是可观测的：它决定了当 $\eta \to 0$时局域化相如何逼近临界点。Rizzo、Tarzia 和 Vecchiarelli [40, 41] 已证明，逆参与比按 IPR(η) –IPR(0) $\propto \eta^{\mu_+ - \mu_-} = \eta^{2\mu_+ - 1}$收敛，其指数由次主导根确定；并且在临界点处，当两个根合并时，修正项会变为对数形式。由于 $\mu_+ - \mu_- = 2\sqrt{\delta}$，这与我们在局域侧的 D_1 中发现的每单位 $\ell = \ln(1/\eta)$ 衰减率相同，见第 II B 节。

由于 $\Lambda(1/2)$ 是 W、$\delta \propto W - W_c$ 的光滑函数，并且两个指数在 $\sqrt{W - W_c}$ 时彼此趋近。

D. 共形性丧失与 AdS$_2$

上述发现的结构与文献 [1] 中的情形有着精确的对应关系：$\mu \leftrightarrow 1 - \mu$ 是一维边界理论中 $\Delta \leftrightarrow 1 - \Delta$的对应物而 $\mu = \frac{1}{2}$ 则对应于布赖滕洛纳–弗里德曼（BF）界。

无无序树以最简单的形式呈现了相同的结构。在没有无序时，2) 在 $\eta = 0$ 处是二次 $KG^2 - EG + 1 = 0$ $|G_\pm| = K^{-\Delta_\pm}$ $E =$。写成带有 $K^\Delta + K^{1-\Delta}$ $\Delta_+ + \Delta_- = 1$ 时可得：能带外的两个实根、位于能带边缘 $\Delta = \frac{1}{2}$ 处的重根 $E = 2\sqrt{K}$，以及能带内的一对复根。无序会将成对位置从 Δ 移至 μ。

这一类比可以精确化。在 AdS$_2$，中，其边界维数为一，质量为 M 的标量场与一个维数为 $\Delta_\pm = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + M^2}$的算子对偶；当高于 BF界 $M^2_{\rm BF} = -\frac{1}{4}$时，该维数为实数，低于 BF界时则为复数。与公式（16）比较可知，

$$\mu_\pm = \Delta_\pm, \qquad M^2 - M^2_{\rm BF} = \delta \propto W - W_c, \tag{18}$$

因此，距临界无序的距离起到了相对于界限测量的质量平方的作用，而相变发生在越过该界限之处。对于 $-\frac{1}{4} < M^2 < \frac{3}{4}$，即 $0 < \delta < 1$，Δ_+和 Δ_-都可取，并分别定义了两种边界理论：红外理论和紫外理论 [1]；相应地，$\mu_\pm$ 都属于 (0,1)，且都是合理的尾指数。它与超对称表述 [43, 45] 有明确的对应关系：其中序参量是定义在 $\mathbb{H}_2$上的函数，而在大距离处，其测地径向坐标为 $\rho \simeq -s$，相差一个常数；s 是与 I 共轭变量的对数（不要将其与 G 自身所在的半平面混淆）。对于 μ 接近 1/2、剖面为 $f_\mu \simeq f_{1/2}$的模式，线性化自洽算符与 $\mathbb{H}_2$ 的等距变换对易。其特征函数为锥函数 $\mathcal{P}_{-1/2+ip}$，对应的特征值为 $\Lambda(\frac{1}{2} + ip)$：$\mu = \frac{1}{2} + ip$是主系列，而 $\mu \leftrightarrow 1 - \mu$ 是恒等式 $\mathcal{P}_\sigma = \mathcal{P}_{-1-\sigma}$。由于 $-\nabla^2_{\mathbb{H}_2} = \frac{1}{4} + p^2$ 作用于这些函数，将 Λ 在 $\mu = \frac{1}{2}$ 附近展开至二阶，得到

$$1 - \Lambda \to \frac{\Lambda''}{2}\left[-\nabla^2_{\mathbb{H}_2} + M^2\right], \tag{19}$$

其中 M 如式（18）所示：线性化问题是 AdS 上质量为 M 的自由标量场 2，，如参考文献 [1] 的第二部分所示。

E. 从特征值到流

上一节求得的 μ 解与 η无关。我们假设 η 足够小，因此系统已接近定常的渐近极限，分布的性质、D_q 的取值以及所有其他可观测量均已稳定下来。重整化群/有限尺寸流描述了系统如何趋近这一渐近极限。为求得该流，我们必须分析定常解对 η的依赖性。这意味着要找出式（$m(s)$）中运行耦合的尺度依赖性。9。

在有限的 η 下，$P(I)$的尾部从 $I \sim \eta$ 延伸到$I \sim 1/\eta$，因此 χ 很小，且在窗口内呈非解析性

$\eta \lesssim \tau \lesssim 1/\eta$。以变量 $s = \ln \tau$表示时，窗口为$|s| \lesssim \ell$，其中 $\ell = \ln(1/\eta) \simeq \ln N + \text{const}$，并且会随系统增大而变宽。

乘以 τ 会使 R^2 平移 s $\ln R^2$，因此，式（13）的齐次部分将 χ 视为在 s中的随机平移。形式上，令 ∂_s 为 s-平移的生成元，则 $\chi(\tau R^2 \,|\, R_1) = e^{\ln R^2\, \partial_s}\chi(s \,|\, R_1) = |R|^{2\partial_s}\chi(s \,|\, R_1)$，齐次方程可写为

$$\begin{aligned} \chi &= \mathcal{T}(\partial_s)\chi, \\ \big[\mathcal{T}(\partial_s)\chi\big](s,R) &= K\big\langle \chi(s + \ln R^2 \,|\, R_1)\big\rangle_R, \end{aligned} \tag{20}$$

也就是说，将 14式中的 μ 替换为 ∂_s后得到的传递算子。对于单个幂律，∂_s 的作用相当于乘以 μ：模态 $e^{\mu s} f_\mu(R)$ 是 $\mathcal{T}(\partial_s)$ 的本征函数，对应本征值为 $\Lambda(\mu)$，由此可恢复第 IIIC节中的平稳解。然而，在有限 η下，χ在整个窗口内不一定是单个幂律；它是这些模态的叠加，其局部斜率即为运行指数$m(s)$。

在相变附近，只有 μ 接近$_{1\,2}$ 的模式才重要，因为 $\mu_\pm - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\delta}$ 很小。特征向量 $f_\mu(R)$ 关于 μ是平滑的，因此所有这些模式在 R 中都具有相同的剖面，误差为$\sqrt{|\delta|}$阶；我们于是设

$$\chi(s,R) \simeq f_{1/2}(R)\, h(s). \tag{21}$$

这种因子化只在 $(R,\ s)$ 平面上的一个区域内成立：平移 $\ln R^2$ 必须使 s 保持在窗口 $R^2\eta\tau \ll 1$内；只有当 $|R| < R_c$ 满足 $R_c = O(1)$ 时，这一条件才在整个窗口内一致成立。我们取 $R_c = 1$。由于典型的 $|R|$ 为 $\sim 1/W$，而其之外存在柯西尾部 $P(R) \simeq 1/(WR^2)$，因此该截断仅排除比例为 $\simeq 2/(WR_c) \approx 0.1$ 的格点。

作用于 $\mathcal{T}(\partial_s)$ 后，在方程（21）中，每个傅里叶–拉普拉斯分量 $e^{\mu s}$ 的 h都会乘以 $\Lambda(\mu)$，而 R依赖消失。这留下一个关于h的标量方程，其中 Λ 变成了作用于 s的算子：

$$\big[1 - \Lambda(\partial_s)\big]\, h = 0. \tag{22}$$

其符号 $1 - \Lambda(\mu)$ 关于 $\mu - \frac{1}{2}$ 在反射对称性 $\Lambda(\mu) = \Lambda(1-\mu$下为偶函数。在极小值附近展开到二阶，$1 - \Lambda(\mu) \simeq \frac{1}{2}\Lambda''\big[\delta - (\mu - \frac{1}{2})^2\big]$ 其中 δ 如方程（16）所示，因此

$$\Big(\partial_s - \frac{1}{2}\Big)^2 h = \delta\, h, \qquad h(s) = A\, e^{\mu_+ s} + B\, e^{\mu_- s}. \tag{23}$$

方程 $\Lambda(\mu)$ 的两个根 $= 1$ 已变为一个二阶方程的两个独立解。注意，当 $h = e^{s/2}\psi$时，方程（23）变为 $\psi'' = \delta\,\psi$，即方程（18）中的标量场在远距离处满足的径向方程，其中$\rho \simeq -s$ 为第IIID节的径向坐标。

高阶项与 $(\partial_s - \frac{1}{2})^4$,shift$\mu_\pm$ 成正比，其相对量级为 $O(\delta)$。用导数替代平移在窗口深处是合理的；在此处，h 的变化尺度为 $|\delta|^{-1/2}$，远长于典型跳跃 $\ln R^2$。系数 A 和 B 并非由式（23）；它们由窗口两端的匹配条件决定，源项和非线性项会在此处起作用。由于两者通常都不为零，h 会随着 s 在窗口内变化，从一种幂律交叉到另一种幂律。在式（21）成立的区域内，式（11）的局部指数不再依赖于 R，$m(s) = d\ln h/ds$，这种交叉会使其发生变化。

将方程（23）改写为 m，得到一个Riccati方程，

$$\frac{dm}{ds} = \delta - \Big(m - \frac{1}{2}\Big)^2 = -(m - \mu_+)(m - \mu_-), \tag{24}$$

这就是参考文献 [1] 中耦合 m对应的标准形。当s 增大时，m 流向 μ_+，即红外不动点，而远离 μ_-，即紫外不动点。

这些解分别为

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2} + \sqrt{\delta}\, \coth\big[\sqrt{\delta}(s - s_0)\big], \\ m &= \frac{1}{2} + \frac{1}{s - s_0}, \\ m &= \frac{1}{2} - \kappa \tan\big[\kappa(s - s_0)\big], \end{aligned} \tag{25}$$

在局域化、临界和离域化情形下。在局域化情形中，m 从上方趋近于 μ_+，如图 3(b) 所示；另一个解 $\frac{1}{2}+\sqrt{\delta}\tanh[\sqrt{\delta}(s-s_0)]$, 则介于 μ_- 和 $\bar{\mu}_+$ 之间，并会给出 $D_1 < 0$。在离域化解中，m在 $+\infty$ 和 $-\infty$ 之间跨越 $\Delta s = \pi/\kappa$变化，并在中途穿过$_{1\,2}$：线性区间持续的尺度范围为 $\propto (W_c - W)^{-1/2}$，随后非线性项开始占主导。这就是文献 [1], 中所述的行走区间，也是关联体积 N_ξ [43, 45] 中 $\ln N_\xi \propto (W_c - W)^{-1/2}$ 的来源。在这一尺度范围内，系统表现为非遍历，这解释了离域侧 [48, 49] 在中间时刻观测到的返回概率的拉伸指数衰减和次扩散展宽。

随着 η减小，窗口 $s \in [\ln\eta,\ \ln(1/\eta)]$ 不断扩大，而在窗口上端 $s \sim \ln(1/\eta)$处测量的可观测量，读取的是剖面中一个不断移动的点。指数 $m(\ell)$遵循公式 (24)，其中 s 由其上界 $\ell = \ln(1/\eta)$替代，前提是该点以单位速率穿过剖面。仅凭线性分析无法确定这一速率，但标度论证可以确定。在远离窗口上端处，公式 (13)在 s的平移下保持不变，而 η 只通过乘积 $\eta\tau = e^{s-\ell}$进入：在源项 $\tau R^2\eta = R^2 e^{s-\ell}$中，以及在壁处的非线性区域中。在那里，相关变量是 I/η 和 b/η；对于 $\eta \to 0$，它们的完整递推关系不依赖于 η，除了共振 $|E - V_i - \sum_j R_j| \lesssim b$之外，而这些共振的权重随 η 趋于零。因此，壁以及它对 h施加的匹配条件，都处于 $s - \ell$的固定值处：可观测量在 $s_* = \ell + \sigma$处读取 m，其中 σ 与 η以及$ds_*/d\ell = 1$无关。常数 σ 被吸收到偏移量 ℓ_0 中。第二节的数据与单位速率相符，偏移量 ℓ_0 为一阶量；图 3(b)直接显示，在固定 $s - \ell$时，m 随 ℓ 流动，正如其随 s流动一样。

对所有 R、$\langle\chi(\tau\,|\,R)\rangle_R$取平均，并不能测量$h$。由于 $f_\mu(R)\sim|R|^{2\mu}$，且 R 具有柯西尾部，对于 $\mu\geq\frac{1}{2}$而言，它由满足 $|R|\sim(\eta\tau)^{-1/2\tau}\gg R_c$的格点主导，即与自身邻居发生共振的格点。这些格点无论 δ为何，都会给出一项 $\propto(\eta\tau)^{1/2}$，因此其局部指数从不超过 $\frac{1}{2}$。相反，必须从条件生成函数中读取剖面 h

$$\begin{aligned}\bar\chi(s)&\equiv\chi\big(e^s\,\big|\,|R|<R_c\big)\\&=1-\big\langle e^{-e^sI}\,\big|\,|R|<R_c\big\rangle\propto h(s).\end{aligned}\tag{26}$$

其局部指数通过第 II 节（$N=10^6$，$R_c=1$）的人口动力学测得，在 W 的四个取值下，结果如图 3 所示。

远离壁时，$s-\ell\ll0$, $m(s)$遵循式（24）：在 $W=17$ 处，它越过 $\frac{1}{2}$ 并继续减小；在 $W=19$和 20 处，它减小并趋近于 μ_+；在 $W=18.1$ 处，它缓慢减小并趋近于 $\frac{1}{2}$。在距壁固定的距离处，$\bar m$ 随 ℓ以相同速率减小，正如前文所假设的。对于每个 W，我们取 δ，它由残差 $dm/d\bar s+(m-\frac{1}{2})^2$, 在 $\ell=23$处对 $-16<s-\ell<-8$ 取平均得到。它关于 W呈线性，$\delta=a\,(W-W_c)$为 $a=0.0095(2)$和$W_c=18.30(2)$；在更窄的网格上独立运行得到 $a=0.0098(2)$和 $W_c=18.25(2)$。该斜率与由 D_1的流得到的式（A2）的斜率一致。两次运行合起来给出 $W_c=18.27(3)$，比通过拟合 D_1 得到的值$W_c\simeq18.1$ 高出许多个标准误。我们将差异归因于 η的有限取值，它通过截断 R_c产生影响。条件剖面以及由此得到的 δ取决于 R_c，只有当 $\eta\to0$时，这种依赖才会消失。在$W=18.1$ 和 $\ell=23$处，采用 $R_c=1$、3和10得到的残差分别对应 $W_c=18.19$、18.25和18.35；$R_c=1$与 $R_c=10$之间的 δ 差异从 $\ell=12.7$ 处的0.040减小到 $\ell=23$处的0.0015，在 W_c中仍为0.15，与该偏差相当。其他两个可能的来源影响较小：$\Lambda(\partial_s)$中二阶项以外的项使 δ 产生相对 $O(\delta)$的偏移；在人口规模对 D_1的流的影响方面，结果在误差范围内无显著差异（附录 A 1）。因此，条件剖面证实了该流的黎卡提形式以及斜率 a；而临界点的位置则通过拟合 D_1能更准确地确定，因为这种拟合不涉及对 R的截断。靠近壁时，在 $s-\ell\gtrsim-5$处，剖面向下弯曲：此处 $\chi=O(1)$，线性化不再成立。在 $s-\ell\simeq-20$以外更深处，测量受 N限制，因为由 N 个格点构成的人口无法表示$\chi\lesssim10/N$。

所有分形维数 D_q 与 $q>\frac{1}{2}$ 一样，D_1都由窗口上端的指数决定。事实上，在像第 IIA节那样积分掉格点能量后，$\ln I=\ln\cos^2\theta-\ln b$，其中 $b=\eta+\sum_{j=1}^{K+1}I_j$ 是自能的虚部。第一项与 b无关，而对于 $b\ll W$，权重 $(\theta_2-\theta_1)/W$也与之无关。根据香农熵定义，式（4）给出

$$D_1=\frac{d}{d\ell}\big\langle\ln(b/\eta)\big\rangle.\tag{27}$$

因此，D_1 是自能典型值 的对数随 η变化的速率。

现在我们可以将 D_1 与$m(\ell)$的解析解联系起来，并写出参考文献 [2] 中关于（D，β）原点附近流的方程。由于 $b=\eta+\sum_{j=1}^{K+1}I_j$ 具有相互独立的 I_j，恒等式 $\ln(b/\eta)=\int_0^\infty(d\tau/\tau)\,(e^{-\tau\eta}-e^{-\tau b})$ 给出

$$\big\langle\ln(b/\eta)\big\rangle\simeq\int_{-\infty}^{\infty}ds\;e^{-\eta e^s}\Big[1-\big(1-\bar\chi(s)\big)^{K+1}\Big],\tag{28}$$

其中 $\bar\chi$由方程（26）给出。若将 $\bar\chi$ 替换为 $\chi(e^s\,|\,R)$在所有 R上的平均值，方程（28）将是精确的。尽管如此，使用 $\bar\chi$ 仍是一个很好的近似：一个具有 $|R_j|>R_c$ 的子代只会将其 $I_j=R_j^2\,b_j$ 乘以一个很大的因子，而该因子的分布不依赖于 η。在最低阶近似下，这会使 $\langle\ln(b/\eta)\rangle$ 平移一个与 η无关的常数，而该常数在方程（27）中会消失。在这里，$e^{-\eta e^s}$ 在 $s\simeq\ell$处充当一道壁。特别是，未加条件平均中的自共振项 $\propto(\eta\tau)^{1/2}$ 贡献$\int^\ell ds\,e^{(s-\ell)/2}=O(1)$。

此时，为估计分形维数 D_1，我们将壁取为位于 $s=\ell$处的阶跃，保持窗口剖面$\bar\chi(s)=\chi_+\,h(s)/h(\ell)$，对于 $-\ell<s<\ell$，其中 $\chi_+=O(1)$是壁处 $\bar\chi$ 的值，将 $\bar\chi=0$ 设在外部，并对 $\bar\chi$作一阶展开。由于 h 满足二阶方程（23），其在壁下方的形状仅由δ 和 $m(\ell)$确定：

$$\begin{aligned}\frac{h(\ell+u)}{h(\ell)}&=e^{u/2}\Big[\cosh\big(\sqrt{\delta}\,u\big)\\&\qquad+\frac{m(\ell)-\frac{1}{2}}{\sqrt{\delta}}\sinh\big(\sqrt{\delta}\,u\big)\Big],\qquad u\leq0.\end{aligned}\tag{29}$$

对于 $\mu_->0$，被积函数远离壁后衰减，窗口下端的贡献仅为 $O(e^{-2\mu_-\ell})$，而式（28）化为

$$\begin{aligned}\big\langle\ln(b/\eta)\big\rangle(\ell)&\simeq(K+1)\,\chi_+\int_{-\infty}^{0}du\,\frac{h(\ell+u)}{h(\ell)}\\&=(K+1)\,\chi_+\,\frac{1-m(\ell)}{\mu_+\mu_-},\\&\qquad\text{with}\quad\mu_+\mu_-=\tfrac{1}{4}-\delta.\end{aligned}\tag{30}$$

在不动点 $m(\ell)=\mu_+$ 处，这化为（$K+1\chi_+/\mu_+$），与纯幂律情形相同。式（30）关于 $m(\ell)$ $1-m(\ell)=(1-\mu_+)-[m(\ell)-\mu_+]$严格线性；代入 $1-\mu_+=\mu_-$，可得

$$\big\langle\ln(b/\eta)\big\rangle(\ell)=\frac{(K+1)\,\chi_+}{\mu_+}-\frac{2}{c}\,\big[m(\ell)-\mu_+\big],\tag{31}$$

其中

$$c=\frac{2\mu_+\mu_-}{(K+1)\,\chi_+}\xrightarrow{W=W_c}\frac{1}{2(K+1)\,\chi_+}.\tag{32}$$

因此，c 是平均自能对运行指数的响应；它由 χ_+ 的数值决定，即

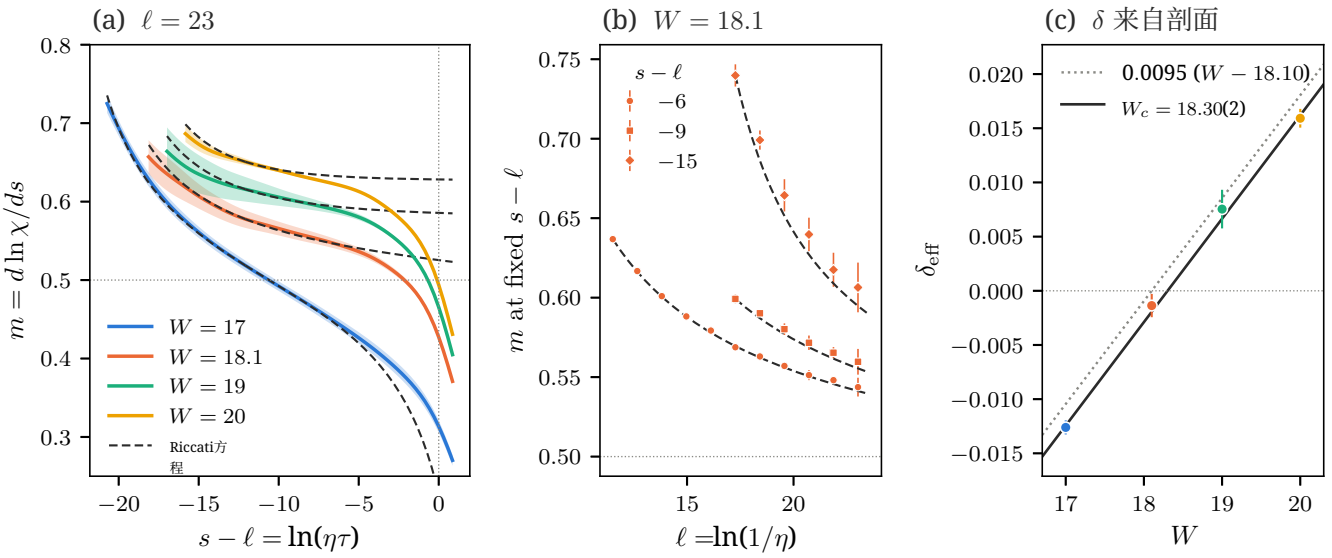

图 3. 条件生成函数 (26) 的局部指数 $m = d\ln\bar{\chi}/ds$，由种群动力学 ($K = 2$, $E = 0$ $N = 10^6$ $R_c = 1$ [24] $s - \ell = \eta\tau$,,) 得到，并与 Riccati方程 ( ) 的解进行比较。(a) 在 $\ell = 23$ 处，对于 $W = 17$、18.1、19、20，作为 ln( ) 的函数；阴影带表示两个标准误。(b) 在 $W = 18.1$处，固定 $s - \ell$，作为 $\ell = \ln($ $1/\eta)$ 的函数。虚线：方程 (24)，在 (a) 中从 s、在 (b) 中从 ℓ开始，并以一个数据点为起点，其 $\delta = a\,(W - W_c)$ 来自 (c)。(c) 对于 $-16 < s - \ell < -8$，由方程 (24) 的残差得到的 δ；实线：线性拟合；点线：方程 (A2) 的直线。

壁处的剖面，而 $c > 0$ 因为尾部越薄，展宽的格点就越少。方程（24）、（27）和（32）给出

$$D_1(\ell) = -\frac{2}{c}\frac{dm(\ell)}{d\ell} = \frac{2}{c}\Big[\Big(m(\ell) - \frac{1}{2}\Big)^2 - \delta\Big], \qquad \beta(\ell) = \frac{d\ln D_1(\ell)}{d\ell} = 1 - 2m(\ell), \tag{33}$$

第II节中使用的关系式。在这些变量下，方程变为参 (24)
考文献 [2],中的双参数流。

$$\frac{d\ln D_1(\ell)}{d\ell} = \beta(\ell), \qquad \frac{d\beta(\ell)}{d\ell} = c\,D_1(\ell), \qquad \frac{\beta(\ell)^2}{2} - c\,D_1(\ell) = 2\delta. \tag{34}$$

同样的流、同样的不变量及其向 $\delta < 0$ 的延拓，已由参考文献 [40, 41]（参考文献 [41] 的第 IX C 节）独立且同时通过逆参与比的有限尺寸标度得到。公式（33）阐明了参考文献 [2] 中两个变量的含义。量 $\beta = d\ln D_1/d\ell$ 实际上就是运行耦合本身 $\beta = 1 - 2m$，以自对偶点 $m = \frac{1}{2}$ 为基准测量。反过来，m 的贝塔函数则是 D_1，相差一个因子 $-2/c$。因此，m 的不动点就是 D_1 的零点，位于 $D_1 = 0$ 轴上：红外不动点 $m = \mu_+$ 位于 $\beta = -2\sqrt{\delta}$，紫外不动点 $m = \mu_-$ 位于 $\beta = +2\sqrt{\delta}$。因此，在局域化的不动点线上，$\beta = -(\mu_+ - \mu_-)$，其随 $(W - W_c)^{1/2}$ 趋于零。这取代了参考文献 [2] 提出的值 $-1/(\xi\ln K)$；另见参考文献 [41] 的第 IX C 节。轨线是具有恒定

公式（34）中的不变量。物理流从 $\ell \simeq 0$ 开始，位于分支 $\beta < 0$ 上（因为 $\ell_0 > 0$），并且只会趋近红外不动点。紫外不动点不会被到达，但它会塑造流：当 $\delta \to 0$ 时，两个不动点在原点 $D_1 = \beta = 0$处合并，原点即为临界点。当 $\delta < 0$时，抛物线脱离轴$D_1 \geq 2|\delta|/c = D_A$，不再有不动点：轨线在最小值 D_A附近减缓，即进入行走区间，随后离开线性分析适用的区域。线性分析确定了流的形式和 $\delta(W)$，但不能确定 c。根据公式（32），c 由壁χ_+ 处剖面的取值 $\tau \sim 1/\eta$决定；在此处 $\chi = O$（1）和非线性项起作用，因此它是流的参数，而非理论预测。参考文献 [41]中以其符号表示的该系数的闭式表达式已在参考文献 $g = 2I_2^\infty/\Phi_0$ 中推导得到。

相同的论证适用于每个 D_q，其中$q > \frac{1}{2}$。对格点-能量进行积分后得到 $\langle I^q\rangle \propto \langle b^{1-q}\rangle$，因此

$$D_q = \frac{1}{1-q}\frac{d}{d\ell}\ln\big\langle(b/\eta)^{1-q}\big\rangle, \tag{35}$$

对于 $q \to 1$，这化简为方程（27）。将 $(b/\eta)^{1-q} = \Gamma(q-1)^{-1}\int_0^\infty (d\tau/\tau)\ (\eta\tau)^{q-1}e^{-\tau b}$写成 $q > 1$（对于$\frac{1}{2} < q < 1$，也可采用类似的、含有 $1 - e^{-\tau b}$ 的表示），如同对数的情形一样，就能使平均值成为壁下方剖面$\bar{\chi}$ 的泛函；根据方程（29），该泛函仅通过 $m(\ell)$ 依赖于 ℓ。因此，对于每个 q，$D_q \propto dm/d\ell$，$D_q = r_q\,D_1[1 + O(m - \mu_+)]$，以及所有 D_q 都遵循具有相同 $\beta = 1 - 2m$的流（34）。

因此，我们已经证明，

Vanoni等人 [2]的流方程可直接由Bethe晶格的自洽方程推出，具体通过其解对调节器的依赖关系 η，并将其解释为 $\eta \propto 1/N$ [40]。

IV. 流与可观测量：无限维与 A $1/d$ 展开

本节的分析与第III节性质不同。在那里，流是由 Bethe 晶格的腔方程推导出来的。在这里，我们不从微观展开推导 $1/d$ 修正项：我们写出树流的最小变形，该变形符合维数计数以及圈图的两种效应，并含有两个系数，a 和 b；我们不计算这两个系数，而是通过与数值指数比较来确定它们。因此，下面的方程是唯象的，旨在作为一项 $1/d$ 研究计划的起点。

在参考文献 [2, 28]，中，分形维数起到了耦合的作用。这是一种权宜之计，用于找出重整化群流的拓扑。然而，如上所述，D_q是可观测量，而非耦合常数。它们是耦合常数的函数，但重整化群方程应以耦合常数本身表示。现在，耦合常数被确定为运行指数 m 和速率δ。它们是树上理论中仅有的缓慢变化模：δ 不动，由 W 固定；而 m （等价地，h）是唯一的慢模，因为传播子的实部迅速收敛到其分布 P（R），且解耦后，算子 $\mathcal{T}$具有能隙。

从 AAT对称性 $\Lambda(\mu) = \Lambda(1-\mu)$ 的自对偶点 $\mu = \frac{1}{2}$ 出发，测量运行指数十分方便，我们定义

$$\gamma \equiv m - \frac{1}{2},$$

从而 $\beta = 1 - 2m = -2\gamma$ 根据公式（33），不动点 $m = \mu_\pm$ 为 $\gamma = \pm\sqrt{\delta}$。在树上，重整化群方程为

$$\frac{d\gamma}{d\ell} = \delta - \gamma^2, \qquad \frac{d\delta}{d\ell} = 0. \tag{36}$$

该流的拓扑结构如图 4 所示：蓝色曲线对应局域化相，红色曲线对应离域化相。

速率 δ 为常数，这是树的一个特殊性质。我们如何使该流发生形变，从而得到有限但大维数中的流？在这里，我们需要规定围绕 $d \to \infty$极限计算工程维数的规则。

鉴于 $\epsilon = 1/d$，δ 的方程需要改变。至少需要考虑其裸维数，或 工程维数。为得到这一点，请注意，在树上，按照我们所定义的重整化群变换，将体积 N 改变因子 $N \to e^u N$会使其直径改变一个常数，即 $L \to L + u/\ln K$，因此长度的标度维数为零。

现在，在局域化不动点线 $D \propto e^{-2\sqrt{\delta}\,\ell}$上，因此 $2\sqrt{\delta}$ 是单位 ℓ的衰减率。在规则晶格上，长度的标度维数为 1，所以 δ的标度维数为 2。将流定义为 $d/d\ln N$，这样便可以平滑地取 $d \to \infty$ 极限，δ 的工程维数必须为 $2/d = 2\epsilon$。对于重整化群的每个耦合，都必须进行这一推理。幸运的是，只有两个耦合，即 γ 和 δ；而作为运行指数的 γ，对于任意 d都是无量纲的。

保持 $\ell = \ln N$ 的定义不变，我们对流进行最小形变：

$$\frac{d\gamma}{d\ell} = \delta - \gamma^2, \qquad \frac{d\delta}{d\ell} = 2\epsilon\,\delta. \tag{37}$$

现在唯一的不动点是 $(\gamma,\ \delta) = (0,\ 0)$，流的雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} \partial_\gamma\dot{\gamma} & \partial_\delta\dot{\gamma} \\ \partial_\gamma\dot{\delta} & \partial_\delta\dot{\delta} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2\epsilon \end{pmatrix}, \tag{38}$$

其中点号表示 $d/d\ell$。它是三角矩阵，因此其特征值就是对角线上的元素，即 0 和 2ϵ。右特征向量给出了耦合平面中的方向：$(1,\ 0)$ 的特征值为 0，对应临界线$\delta = 0$；而 $(1,\ 2\epsilon)$ 的特征值为 2ϵ，对应于$\delta = 2\epsilon\gamma$方向，与下文讨论的不稳定流形相切。左特征向量则给出标度场，即线性化流乘以 $e^{\lambda\ell}$ 的耦合常数组合：它们是 $u_t = \delta$（特征值为 2ϵ）和 $u_\gamma = \gamma - \delta/(2\epsilon)$（特征值为 0）。事实上，$du_\gamma/d\ell = (\delta - \gamma^2) - \delta = -\gamma^2$，它在线性阶上为零。沿着 δ，特征值为 2ϵ，即以 $\ln L$ 为单位时为 2（因为 $\ell = d\ln L$）：δ是相关的，且 $\nu = \frac{1}{2}$。沿着 γ，特征值为 0：γ 是边缘的。在线性阶以上，在临界线上 $d\gamma/d\ell = -\gamma^2$：对于 $\gamma > 0$，它是边缘无关的，并像树上一样流向零，$\gamma = 1/(\ell + \ell_0)$，从而产生标度的对数修正；对于 $\gamma < 0$，它则不断增大。

a. 加入圈图。流（37）具有$\nu = \frac{1}{2}$ 和一个边缘-γ，而在有限 d 维数下，数值结果给出 $\nu > \frac{1}{2}$ 和一个无关方向。在晶格上，圈图可以通过两种不同的方式发挥作用。在固定尺度下，它们会破坏树的反射对称性 $\Lambda(\mu) = \Lambda(1-\mu)$：$G_{ox}$现在是对许多干涉路径求和，而 Λ 可能会获得一个关于$\mu - \frac{1}{2}$ 的奇次项，该项在线性项的形式下进入 γ 的方程 γ。圈图还可以降低波函数的衰减速率，因为它可以提高发生共振的概率。这会在第二个方程中增加一项 $\propto -\delta$。相对于工程维数，这两项在 ϵ 中都必须是次主导的，而包含这两种效应的最简单流[50] 为

$$\frac{d\gamma}{d\ell} = \delta - \gamma^2 - a\epsilon\,\gamma, \qquad \frac{d\delta}{d\ell} = \left(2\epsilon - b\epsilon^2\right)\delta, \tag{39}$$

其中 a 和 b 是数量级为一的两个数。关于δ 的方程仍然要求在不动点处满足 $\delta^* = 0$，于是 $\gamma^*(\gamma^* +$

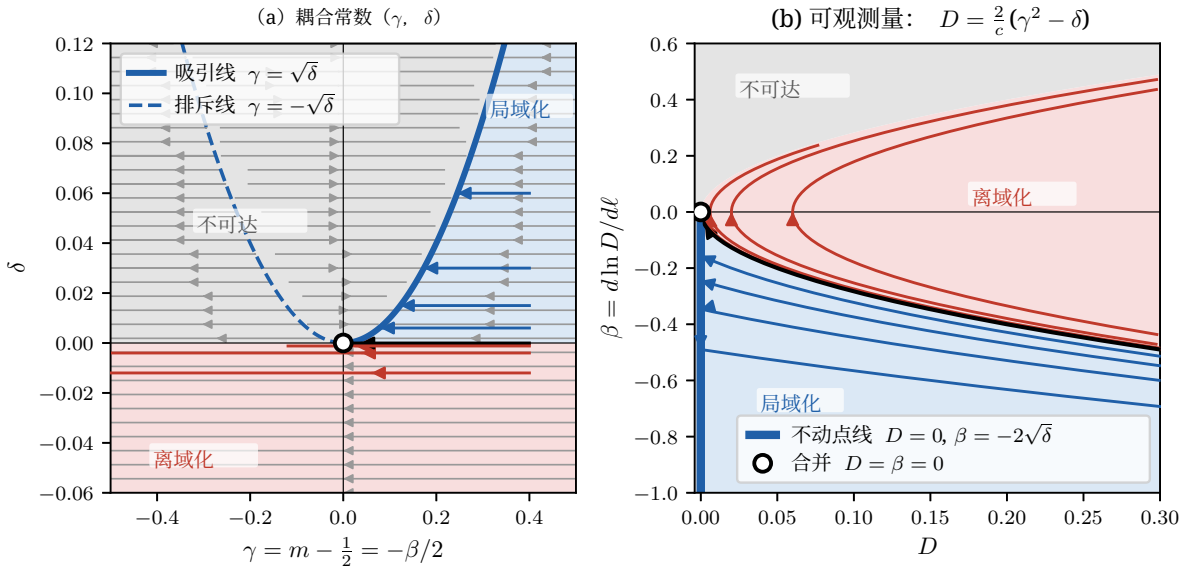

图 4. 树上的流的拓扑。轨线起始于 $\gamma=0.4$ （蓝色：局域化；黑色：临界， $\delta=0$；红色：离域化）。(a) 耦合平面（γ， δ），灰色为流线：吸引线 $\gamma=\sqrt{\delta}$ 和排斥线 $\gamma=-\sqrt{\delta}$ 在 $\delta=0$ 处合并。(b) 可观测量平面（D，$\beta=d\ln D/d\ell$）中的相同轨线，其中 D 由公式（33）给出，仅针对 $D\le 0.3$、靠近原点的区域显示，此处线性分析成立。树具有一条不动点线 $D=0$， $\beta=-2\sqrt{\delta}$ 即 (a) 中的 $\gamma=\sqrt{\delta}$ 线，在合并点 $D=\beta=0$ 处终止。数值 $c=0.4$ 仅用于示意。阴影：局域化（浅蓝色）、离域化（浅红色）和不可达（灰色）区域；从较大的 γ 处开始的轨线会被吸引线阻挡，永远不会进入灰色区域。

$a\epsilon)=0$：存在两个不动点，$(\gamma,\ \delta)=(0,\ 0)$ 和 $(-a\epsilon,\ 0)$。树的合并被拆分了，我们恢复了共形性。在临界点 $(0,\ 0)$ 处的雅可比矩阵为

$$J=\begin{pmatrix}-a\epsilon & 1\\ 0 & 2\epsilon-b\epsilon^2\end{pmatrix},\tag{40}$$

仍然是三角矩阵，因为 $d\delta/d\ell$ 不依赖于 γ，所以其特征值再次等于对角线上的元素，

$$\lambda_t=2\epsilon-b\epsilon^2,\qquad \lambda_\gamma=-a\epsilon.\tag{41}$$

相应的右特征向量分别为：对于 λ_γ，为 $(1,\ 0)$；对于临界线 $\delta=0$，与之前相同；对于 λ_t，为 $\big(1,\ \epsilon(2+a-b\epsilon)\big)$，因此不稳定流形现在沿着 $\delta\simeq\epsilon(2+a)\gamma$ 离开不动点。标度场为 $u_t=\delta$ 和 $u_\gamma=\gamma-\delta/[\epsilon(2+a-b\epsilon)]$。

乘以 d 以转换为以 $\ln L$ 为单位后，相关特征值为

$$\begin{aligned}y_t&=d\,\lambda_t=2-\frac{b}{d},\\ \nu&=\frac{1}{y_t}=\frac{1}{2-b/d}=\frac{1}{2}+\frac{b}{4d}+O(d^{-2}),\end{aligned}\tag{42}$$

因此，正的 b 会给出 $\nu>\frac{1}{2}$，并带有阶为 $1/d$ 的修正。取值 $b=4$ 恰好给出 $\nu=1/(2-4/d)=\frac{1}{2}+1/(d-2)$，这正是参考文献 [28], 中提出的形式，即 $1/\nu=2(1-2/d)$。这一取值既得到数值结果的支持，也得到猜想 $D_c=2/d$ 的支持。 $d=3$–6、 $\nu=1.57$、1.11、0.96、0.84 [26]中的数值指数接近于 $b=4$ 给出的 1.50、1.00、0.83、0.75，而参考文献 [26] 中的线性拟合 $1/\nu\simeq 2-4.75/d$ 对应于 $b\simeq 4.75$；并且对于 $D_c=2/d$，即 $d_f=2$，同一关系可写为 $1/\nu=2(1-D_c)$。另一个特征值是

$$y=d\,\lambda_\gamma=-a,\tag{43}$$

因此对于 $a>0$，耦合 γ 是不相关的：最小流的标度的对数修正变为幂次形式，$L^y=L^{-a}$。相同的数值结果在 $d=3$ 和 4 中得到 $y\simeq-1$，并在 $d=5$、6 [26] 中得到 -1.2、-1.4，这表明 $a\simeq 1$。实际上，我们猜想 $a=1$、$d_f=2$ 是精确的。两个数分别发挥不同作用。 b 只改变 ν，而 a 只改变 y；特别地，仅仅打破反射对称性，无论程度多强，都不能改变 ν，因为它不影响 δ 的方程。第二个不动点 $(-a\epsilon,0)$ 的特征值为 $+a\epsilon$ 和 λ_t：它是完全排斥的，是临界点的紫外伴点，与临界点相距 $a\epsilon$。在树上， $\epsilon=0$，二者重合，我们又回到了合并。由此得到的流如图5所示。

除了临界线之外，第二条不变线沿相关方向从不动点离开， $\delta\simeq\epsilon(2+a-b\epsilon)\gamma$。它就是单参数标度曲线，即图 5 中的绿色线，并且具有闭式形式。通过平移 γ 可消去 $\gamma=\psi'/\psi-a\epsilon/2$ 中的线性项：由于 $\gamma'=\psi''/\psi-(\psi'/\psi)^2$ 以及 $\delta-\gamma^2-a\epsilon\gamma=\delta-(\psi'/\psi)^2+$

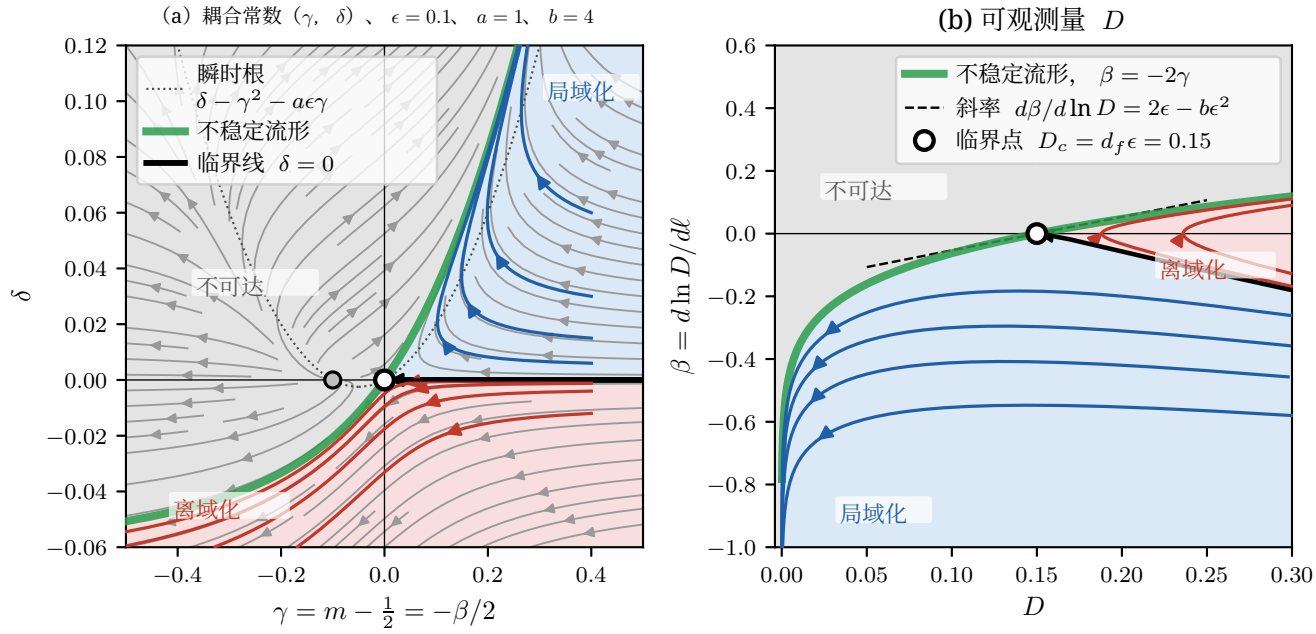

图5。包含公式（39）中的环项、取 $\epsilon = 0.1$、 $a = 1$、 $b = 4$ 时的流；初始条件和颜色与图4相同。阴影：局域化（浅蓝色）、离域化（浅红色）和不可达（灰色）区域；不稳定流形是不变的，因此从大 γ 出发的轨线会一直停留在其右侧，永远不会进入灰色区域。（a）耦合平面：合并分裂为临界点（0, 0）（白色）及其紫外伴点（$-a\epsilon$, 0）（灰色），临界线现在沿着特征值为 $-a\epsilon$ 的无关方向流入（0, 0）。不稳定流形（绿色）为 $\gamma = \psi'/\psi - a\epsilon/2$，当 $\delta > 0$ 时为 $\psi = I_n(z)$，而当 $\delta < 0$、 $z = \sqrt{|\delta|}/\epsilon'$、 $\epsilon' = \epsilon - b\epsilon^2/2$ 时为 $J_n(z)$， $n = a\epsilon/(2\epsilon')$。(b) 对于 $D \le 0.3$ 的可观测量平面，其中 $D = T + \epsilon d_f \Phi$ 如公式（51）所示，且 $\Phi = [(z/2)^n/\Gamma(n+1 I_n(z))]^2$，，当 $a = b = 0$ 时化简为公式（53），并使 $\beta = -2\gamma$ 在该流形上严格成立；临界点位于 $D_c = d_f\epsilon$，而 D_c 处的虚线切线斜率为 $d\beta/d\ln D = 2\epsilon - b\epsilon^2$，即 $\nu = 1/(2 - b/d)$。系数 $c = 0.4$ 和 $d_f = 1.5$ 仅用于示意。

$a^2\epsilon^2/4$，公式（39）变为

$$\psi'' = \Big(\delta + \frac{a^2\epsilon^2}{4}\Big)\psi, \qquad \delta \propto e^{2\epsilon' \ell}, \quad \epsilon' = \epsilon - \frac{b\epsilon^2}{2}. \tag{44}$$

在变量 $z = \sqrt{|\delta|}/\epsilon'$ 中，当 $d/d\ell = \epsilon' z\, d/dz$ 时，方程（44）是 $n = a\epsilon/$ 阶的贝塞尔方程 $2\epsilon'$：当 $\delta > 0$ 时为修正型，当 $\delta < 0$ 时为普通型。这个 ψ 与第二节中的函数相同：对于 $\epsilon \to 0$，用 ℓ 替代 s 后，方程（44）化为 $\psi'' = \delta\psi$，并且 $\gamma = \psi'/\psi = m - \frac{1}{2}$，因为 $h = e^{s/2}\psi$ 给出 $m = d\ln h/ds = \frac{1}{2} + \psi'/\psi$。不变线是从临界点离开的解，即在 $z = 0$ 处正则的解：当 $\delta > 0$ 时为 $\psi = I_n(z) \propto z^n$，当 $\delta < 0$ 时为 $\psi = J_n(z) \propto z^n$。这给出

$$\gamma = \begin{cases} \epsilon' \dfrac{z\, I_n'(z)}{I_n(z)} - \dfrac{a\epsilon}{2}, & \delta > 0, \\ \epsilon' \dfrac{z\, J_n'(z)}{J_n(z)} - \dfrac{a\epsilon}{2}, & \delta < 0. \end{cases} \tag{45}$$

在 $z \to 0$， $zI_n'/I_n \to n$ 且 $\gamma \to \epsilon' n - a\epsilon/2 = 0$，正如预期。对于 44 式中 $\delta > 0$， $\psi = K_n(z) \propto z^{-n}$ 的第二个独立解则给出 $zK_n'/K_n \to -n$和 $\gamma \to -a\epsilon$。由于 $z \to 0$ 对应于 $\ell \to -\infty$，它描述了一条从紫外固定点出发的直线 $(-a\epsilon, 0)$。所有包含 $\psi = A\, I_n + B\, K_n$且 $B \neq 0$ 的组合都会如此，因此临界点 $B = 0$ 的不稳定流形是唯一一条并非从该点出发的轨迹。

公式（45）的两个分支是关于 δ 的同一个解析函数，因为 $I_n(iy) = i^n J_n(y)$，且 $z\, d/dz$ 不随 $z \to iz$ 改变。对于 $\sqrt{\delta} \gg \epsilon$， $zI_n'/I_n \simeq z - \frac{1}{2}$ 和 $\gamma \simeq \sqrt{\delta} - (\epsilon' + a\epsilon)/2$：该线趋近吸引根 $-a\epsilon/2 + \sqrt{\delta} + a^2\epsilon^2/4 \simeq \sqrt{\delta} - a\epsilon/2$，并落后于它 $\epsilon'/2$。对于 $\delta < 0$，它在 J_n 的第一个零点处有一个极点（图5所示取值下的 $z \simeq 3.32$），这将在下文关于离域化相的段落中讨论。由于 γ 现在是不相关的，一般轨线以 L 的某个幂次趋近这条线，其指数为 $y = -a$，而不是按 $1/\ln \xi$ 的方式趋近。对于 $a = b = 0$，我们有 $n = 0$ 和 $\epsilon' = \epsilon$，公式（45）化为最小流（37）的直线：当 $\delta > 0$ 时为 $\gamma = \sqrt{\delta}\, I_1(z)/I_0(z)$，当 $\delta < 0$ 时为 $\gamma = -\sqrt{|\delta|}\, J_1(z)/J_0(z)$，其中有 $z = \sqrt{|\delta|}/\epsilon$，且极点位于 $z = 2.405$。

b. 局域化相。在局域化相中，我们需要恢复可观测量（例如 D_q [28]， $\beta =$ ）的指数 $\frac{1}{d}$ $D_q + O$ 1 衰减。正如参考文献中所解释的，这要求 ln ( )。现在，我们针对变形流恢复这一结果。

在局域侧 δ 为正，并且根据公式（39），它

不再是定常的：它按 $\delta(\ell) = \delta_0\, e^{2\epsilon'\ell}$ 增长，其中 $\epsilon' = \epsilon - b\epsilon^2/2$。由于 $\ell = d\ln L$，我们有 $e^{2\epsilon'\ell} = L^{y_t}$，其中 $y_t = 2 - b/d = 1/\nu$，因此 $\sqrt{\delta} = \sqrt{\delta_0}\, L^{1/(2\nu)}$ 会随系统的大小而增长。耦合 γ 不能落后：对于 $\delta > 0$，其方程具有吸引根 $\gamma = -a\epsilon/2 + \sqrt{\delta + a^2\epsilon^2/4} \simeq \sqrt{\delta} - a\epsilon/2$，$\gamma$ 以速率 $\simeq 2\sqrt{\delta}$ 向其弛豫。一旦 $\sqrt{\delta} \gg \epsilon$，该根便在这个尺度上缓慢移动，而 γ 则简单地跟随它，滞后 $\epsilon'/2$（见公式（45））；这里可以忽略这些量级为 ϵ 的偏移，并且 $\gamma \simeq \sqrt{\delta}$。通过公式（33），这确定了贝塔函数 $\beta = -2\gamma \simeq -2\sqrt{\delta_0}\, e^{\epsilon'\ell}$；由于 $\beta = d\ln D/d\ell$，我们可以对其积分，求得 D 关于 δ 的函数：

$$\begin{aligned}\ln D &= \int \beta\, d\ell \simeq -2\sqrt{\delta_0}\int e^{\epsilon'\ell}\, d\ell \\ &= -\frac{2\sqrt{\delta_0}}{\epsilon'}\, e^{\epsilon'\ell} + \text{const} = -\frac{2\sqrt{\delta}}{\epsilon'} + \text{const}.\end{aligned} \tag{46}$$

比较这两个表达式，$\beta \simeq -2\sqrt{\delta}$ 和 $\ln D \simeq -2\sqrt{\delta}/\epsilon'$，我们可以消去 δ，并在相差一个加法常数的意义下得到 $\beta \simeq \epsilon' \ln D$。对于 $b = 0$，$\epsilon' = \epsilon$，这就是

$$\frac{d\ln D}{d\ell} = \frac{1}{d}\ln D, \tag{47}$$

其解为 $D = e^{-(L-L_0)/\xi}$，其中 ξ 任意，这正是对指数局域态的预期。

对于 $b \neq 0$，有一个微妙之处。用 L 表示时，同一结果写作 $\ln D \simeq -2(L/\xi)^{1/(2\nu)}$，其中 $\xi = (\epsilon'/\sqrt{\delta_0})^{2\nu} \propto (W - W_c)^{-\nu}$：对于 $\nu > \frac{1}{2}$，这是拉伸指数，而不是局域态的指数衰减。原因在于，公式（39）将 δ 的反常维数一直保留到了局域化相。反常维数是临界点的性质。在局域化相深处，$\delta \gg \epsilon^2$，$\sqrt{\delta}$ 是单位距离的衰减率，必须严格按长度缩放，维数为 2，因此项 $b\epsilon^2\delta$ 必须在 $L \gtrsim \xi$ 后关闭。越过这一交叉后，$\sqrt{\delta} \simeq \epsilon L/\xi$，上述论证便重新得到 $D \propto e^{-2L/\xi}$ 和 $\beta = \frac{1}{d}\ln D$，此时 $\xi \propto (W - W_c)^{-\nu}$。图5中采用的恒定 b 流在临界点附近是准确的，而这正是计算 ν 所需的区域。可以通过令反常项依赖于 δ，将交叉纳入流中，

$$\frac{d\delta}{d\ell} = 2\epsilon\,\delta - b\epsilon^2\,\delta\, g\big(\delta/\epsilon^2\big), \qquad g(0) = 1, \quad g(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0, \tag{48}$$

例如 $g(x) = 1/(1+x)$。在临界点附近 $g \simeq 1$，并且可恢复公式（39），且特征值相同，因为只有在 $\delta = 0$ 处的线性化会影响 ν；在局域化相深处，$\delta \gg \epsilon^2$，流返回到 $d\delta/d\ell \simeq 2\epsilon\delta$，而 D 的指数衰减也得以恢复。

将其与树上的情形进行比较很有启发性。在树上，$\epsilon = 0$，δ 不会变化，而 $\beta = -2\sqrt{\delta}$ 沿每条轨迹保持不变，因此 $D \propto e^{-2\sqrt{\delta}\,\ell} = N^{-2\sqrt{\delta}}$。由于在树上，距离本身正比于 ℓ，因此这同样是随距离指数衰减，但它是 N 的幂次，而且 W 的每个取值都会停在各自的不动点 $\beta = -2\sqrt{\delta}$：这就是图 4 中的不动点线。相反，在晶格上，距离是 $L = e^{\epsilon\ell}$，$\beta = \epsilon \ln D$ 则持续减小，每条局域化轨迹都会趋向 $D \to 0$，$\beta \to -\infty$。树上的不动点线被 $\beta = -\infty$ 处的单一吸引子所取代。

c. 离域化相。对于 $\delta < 0$，情况有所不同。此时，$\delta = -|\delta|$ 保持为负，而 $|\delta|$ 则按 $e^{2\epsilon'\ell}$ 增长。在固定的 δ 下，γ 的流 $d\gamma/d\ell = -(\gamma^2 + a\epsilon\gamma + |\delta|)$ 有两个不动点 $\gamma = \frac{1}{2}\big[-a\epsilon \pm \sqrt{a^2\epsilon^2 - 4|\delta|}\big]$，二者均为负：它们是临界点及其紫外伴点，彼此相距 δ。随着 $|\delta|$ 增长，它们逐渐靠近，并在 $|\delta| = a^2\epsilon^2/4$ 处于 $\gamma = -a\epsilon/2$ 合并并消失。这就是树的不动点合并，圈图将其从 $\delta = 0$ 移到了一个有限的 $|\delta|$ 处，而流本身也会到达该处。越过此点后，对任意 γ，右侧均为负，且 γ 无界减小，并在有限尺度处达到 $-\infty$。沿着不变线公式（45），这一情况发生在 J_n 的第一个零点处，此时 $\psi \to 0$：对于图5中的取值，$z = \sqrt{|\delta|}/\epsilon' \simeq 3.32$（$a = b = 0$ 时为 2.405），也就是在 L/ξ 为一阶量的有限尺寸下。相应地，$\beta = -2\gamma \to +\infty$，而 D 无界增长，这表明线性化流已失效。

这个极点并不真实：它源于将线性近似延伸到了远离临界点的区域，而在那里该近似已不再成立。公式（39）是围绕局域化解进行线性化后的流，即取虚部 χ 的一阶项。当 γ 减小时，$P(I)$ 的尾部变得更厚，χ 不再很小；早在极点 D 达到量级为一的数值之前，线性化就已失效；当然，D 永远不会超过一。在树上也会发生同样的情况：在离域化情形下，$m = \frac{1}{2} - \kappa\tan[\kappa(s - s_0)]$ 会在有限范围内趋于 $-\infty$，而公式（6）的非线性项便开始起主导作用（第 III E 节）。极点真正正确地揭示的是流离开临界区域的尺度，即 $L \sim \xi$。超过该尺度后，轨迹转向遍历弧并趋近于 $D = 1$，正如第二节中所述（在树上为 $\beta \simeq \lambda(1 - D_1)$，其中 $\lambda \simeq 1$）；流的这一部分是非线性的，公式（39）无法描述。

d. 从重整化群流到可观测量。在图5(b)中，临界点位于有限的 $D_c = d_f\epsilon$ 处，而在耦合平面中，不动点位于 $(\gamma,\ \delta) = (0,\ 0)$，与树上完全相同。这两种说法并不矛盾，因为它们涉及不同的对象。流作用于耦合常数，而不动点是其平面上的一个点 $(\gamma^*,\ \delta^*)$。D 不是耦合常数：它是一个测量量，是该平面上的函数 $\mathcal{D}(\gamma,\ \delta)$，并随流一起演化。它在不动点处的值 $D_c = \mathcal{D}(\gamma^*,\ \delta^*)$ 取决于所测量的是哪一个函数；而作为线性化流的特征值的指数则不然。这是众所周知的。在安德森跃迁处，D_1 和 D_2 在同一个不动点处取不同的值；在树上，$D_q/D_1 = r_q \neq 1$ 在每个 ℓ 处都如此：D_q 是在同一个耦合平面上的不同函数。同样，在文献 [9] 的标度理论中，

临界电导取决于电导的定义方式，而 ν 则不然。

在树上，该定义迫使 $D_c = 0$。根据公式 (33)，

$$D = \frac{2}{c}\left(\gamma^2 - \delta\right) = -\frac{2}{c}\,\frac{d\gamma}{d\ell}\,; \tag{49}$$

D 衡量耦合 γ 的运行速度，也就是说，它与 γ的贝塔函数相差一个因子，并且在任何不动点处都为零。仅改变流无法改变这一点。在树上，$D_c = 0$ 是正确的：当 W_c时，$D = 2/[c(\ell + \ell_0)^2] \to 0$。

晶格改变了 D 与 L之间的关系，因此除了修改耦合常数的重整化群方程之外，还必须考虑这一点*on top*。回到 D、$D = d\ln \mathcal{N}/d\ln N$的计数定义，其中$\mathcal{N}$ 是本征函数所分布的格点数：我们有 $\mathcal{N} \propto N^D$。假设在临界点处，该支撑集在实空间中是一个维数为 d_f [28]的分形，因此边长为 L 的盒子包含其中的 $\mathcal{N} \propto L^{d_f}$ 个格点。在晶格上，$N = L^d$，因此

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &\propto L^{d_f} = N^{d_f/d}, \\ \ln\mathcal{N} &= \frac{d_f}{d}\,\ln N + \text{const}, \qquad D = \frac{d_f}{d}. \end{aligned} \tag{50}$$

距离的幂现在是 N 的幂（不同于树上的情形），而分形支集给出一个有限的 D。一般而言，$\mathcal{N}$ 还包含一个由耦合常数 $\mathcal{N} = L^{d_f} F$ 控制的因子 F，并且 $\ln \mathcal{N}$ 是两个对数之和，因此 $D = d_f/d + d\ln F/d\ln N$。一旦 L 超过 ξ，支集便停止增长，可观测量的形式为

$$\mathcal{D}(\gamma, \delta) = T(\gamma, \delta) + \epsilon d_f\, \Phi(\delta), \tag{51}$$

而在尺度 ℓ 处测得的值为 $D(\ell) = \mathcal{D}\big(\gamma(\ell)\ \delta(\ell)\big)$。第二项是分形支集：$\Phi$ 仅通过 $\delta(\ell)$，即通过 $z = \sqrt{|\delta|}/\epsilon'$，依赖于尺度；在临界点处为 $\Phi = 1$，而在局域化相中，当 $L \gg \xi$ ($z \gg 1$) 时为 $\Phi \to 0$。

第一项衡量瞬态，即 γ偏离单参数曲线的程度，并且在该曲线上必须为零。在树上，这一作用由 D 本身承担；$D = -(2/c)\ (\gamma - \sqrt{\delta})\ (\gamma + \sqrt{\delta}$：它是到两条固定线的距离之积 $\gamma = \pm\sqrt{\delta}$；在树上，由于 δ 不发生流动，它们是精确解。加入圈图后，δ 发生流动，固定线不再是解：γ落后于吸引的那条，$\simeq \sqrt{\delta} - a\epsilon/2$，落后量为 $\epsilon'/2$，而树公式会将这一滞后误读为速度，并在局域化相中给出负的 D。因此，我们改为测量到线性化流的两个精确解的距离：方程（45）中的不变线 γ_I，以及 γ_K，其中用 K_n 替代 I_n所得到的直线；该直线偏离紫外不动点。对于 $\delta > 0$,

$$T = \frac{2}{c}\,(\gamma - \gamma_I)(\gamma - \gamma_K), \tag{52}$$

当 $\sqrt{\delta} \gg \epsilon$ 时变为 $T \simeq (2/c)[(\gamma + \frac{a\epsilon+\epsilon'}{2})^2 - \delta]$，并在 $\epsilon = 0$处化为树公式。对于 $\delta < 0$，那里不存在第二个实解，因此我们选择 $T = (2/c)(\gamma - \gamma_J)(\gamma - \gamma_J + a\epsilon)$，其中 γ_J为不变线；由于在 $\delta = 0$处 $\gamma_I = 0$ 和 $\gamma_K = -a\epsilon$，该形式与 $\delta > 0$的形式连续衔接。

该函数 Φ 由要求树关系 $\beta = -2\gamma$ 方程（33）沿单参数曲线严格成立来确定。这里 $T = 0$，因此 $D = \epsilon d_f \Phi$ 且 $\beta = d\ln\Phi/d\ell$；利用 $\gamma = d\ln\psi/d\ell - a\epsilon/2$ 以及 $\psi = I_n(z)$ 由方程（45）可得

$$\Phi(\delta) = \left[\frac{(z/2)^n}{\Gamma(n+1)\, I_n(z)}\right]^2, \qquad D_c = \mathcal{D}(0,0) = \frac{d_f}{d}, \tag{53}$$

在 $\delta < 0$ 时，以 J_n 代替 I_n。对于 $a = b = 0$，这是 $\Phi = 1/I_0(\sqrt{\delta}/\epsilon)^2$。由于 $(z/2)^{-n} I_n(z)$ 是关于 $z^2 \propto \delta$ 的幂级数，$1/\Phi$ 是 δ 的整函数，而 D 在相变过程中解析。在局域化相深处，$\sqrt{\delta} \gg \epsilon$，$\Phi \propto e^{-2z}$（差一个幂律前因子）；沿曲线$\beta \simeq \epsilon' \ln(D/D_c)$（差对数修正），如上所示。因此，$D_c$ 的值等于临界支撑集的实空间分形维数除以 d，这是可观测量的性质，而非流的性质。

相反，指数可由D_c处的斜率读出。在不动点附近，$(z/2)^{-n} I_n(z)\,\Gamma(n+1) = 1 + z^2/[4(n+1)] + \ldots$，因此公式（53）给出 $D \simeq D_c\{1 - \delta/[2\epsilon'^2(n+1)]\}$，而公式（45）给出 $\gamma \simeq \delta/[2\epsilon'(n+1)]$，即$\beta = -2\gamma \simeq -\delta/[\epsilon'(n+1)]$。因子 $n+1$ 在比值中相消，并且

$$\left.\frac{d\beta}{d\ln D}\right|_{D_c} = 2\epsilon' = 2\epsilon - b\epsilon^2, \qquad \frac{1}{\nu} = d\left.\frac{d\beta}{d\ln D}\right|_{D_c} = 2 - \frac{b}{d}, \tag{54}$$

这与公式（42）一致；对于 $a = b = 0$，斜率为2ϵ，且 $\nu = \frac{1}{2}$。这是图5(b)中的虚线切线。在平面 $(\ln D, \beta)$ 中，斜率就是 δ本身的特征值：它既不依赖于 d_f，也不依赖于 a。D_c 属于可观测量，ν 属于流。这并非巧合：由于 $\beta = d\ln D/d\ell$，在不动点附近，$\ln D - \ln D_c$沿不稳定流形按 $e^{\lambda_t \ell}$ 增长，因此，对于任何平滑依赖于耦合常数且具有 $D_c \neq 0$ 的可观测量，都有 $\beta \simeq \lambda_t(\ln D - \ln D_c)$；这与参考文献 [9] 的标度理论中 g_c处的关系$1/\nu = d\beta/d\ln g$相同。相反，在树上，$D_c = 0$，而公式（34）的不变量在$\delta = 0$ 处给出 $\beta = -\sqrt{2cD}$，其斜率为无穷大。

V. 结论

我们已经证明，在 $d \to \infty$ 的极限下，Anderson 跃迁失去其共形场论特征，并由 BKT 型流描述；这是 Kaplan 等人提出的 共形性丧失情景的一个特例，[1]，该情景此前曾出现在高能物理的其他背景中。我们还发现，文献 [1] 中的 AdS/CFT 图景在安德森模型中得到了自然实现：超对称表述中的序参量存在于双曲平面$\mathbb{H}_2$上，而 Zirnbauer 以及 Mirlin 和 Fyodorov 所讨论的慢模，不过是 AdS_2中的一个标量场。

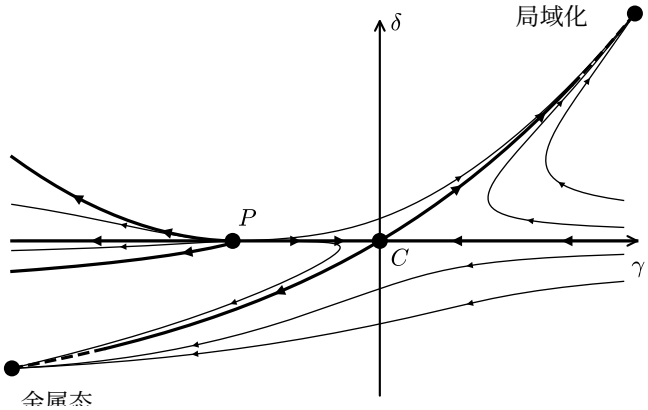

图 6. 示意性描绘了在任意有限 d 下耦合平面 (γ, δ) 中所猜想的重整化群流，$\gamma = m - \frac{1}{2}$。临界点 C 沿 γ 具有吸引性,-而沿其不稳定流形具有排斥性；该不稳定流形通向局域化相和金属态（遍历态，$D = 1$），在此尺度上二者都位于无穷远处（虚线端点和圆点）。 P: C 的紫外伴点（在大 d 时位于 $\gamma = -a\epsilon$），沿两个方向均具有排斥性，并带有不变线。细线：一般轨迹，从 P 离开或从大 γ 处进入。在 $d = \infty$ 处， P 和 C 合并。

安德森跃迁发生在该标量场的质量越过 BF界之处。这意味着，驻定条件 $\Lambda(\mu) = 1$ 的两个解正是重整化群流的两个不动点；该重整化群流具有两个耦合常数： δ （衰减率）和运行指数 m （局域态密度分布的局域幂律）。我们以此为出发点，对安德森跃迁的临界理论进行了 $\epsilon = 1/d$ 展开，表明衰减率的维数为 2，而指数m 是边缘的；并提出了一个关于在 $O(\epsilon)$ 处修改重整化群方程的简单图景，该图景解释了 $d \gtrsim 4$ 的临界指数 ν和第一个无关指数 y 的数值。我们在重整化群方程中确定了两个项：一个是圈图对局域态密度分布指数的影响，另一个是共振数量的增加；后者使波函数随距离衰减的速率降低。

所得图景总结于图 6 中。在 $d = \infty$ 处， m 的两个不动点在 $m = \frac{1}{2}$ 处合并，并随着 W 递减穿过 W_c-而湮灭：这就是共形性丧失情景。在有限 d 下，圈图将它们分开：临界点 C 仍位于 $\gamma = 0$，此时 γ 变为无关，其特征值为 $-a\epsilon$；而无序 δ 是相关的，特征值为 $2\epsilon - b\epsilon^2$，即 $1/\nu = 2 - b/d$，见式（42）；其紫外伴点 P 位于 $\gamma = -a\epsilon$，沿两个方向均具有排斥性。 C 的不稳定流形将临界点与两个相连接。在局域侧，它通向 γ、$\delta \to \infty$。在离域侧，线性化流（39）将 $\gamma \to -\infty$ 送至有限尺度，此时围绕局域化解的线性化不再成立；完整的流反而通向金属相。

从场论推导重整化群方程是未来的工作任务可能是 Wegner 和 Efetov 的非线性 σ-模型 [7, 8], ，并确定其系数的取值（或在方程中增加更多项）。

相关结果由 Rizzo、Tarzia 和 Vecchiarelli 独立且同时获得 [40, 41],。他们根据逆参与率的有限尺寸标度，解析地推导出 BKT流及其系数，结果与他们的数值结果一致，并证明有限-N 与有限-η 修正具有相同的指数。

致谢

我们谨向 B.L. Altshuler 和 V. E. Kravtsov 致谢，感谢他们与我们的合作和讨论，这些交流启发了本研究。本研究所报告结果所用的代码是在 Claude 的协助下生成的，并在由普林斯顿研究计算中心管理和支持的计算资源上运行。Claude 也被用于文献检索，并对理论图景进行了实质性的完善。我们已独立验证所提出的论证，并对其有效性负全部责任。

附录 A：种群动力学：运行与详细结果

本附录汇集了第 IIB 节的详细内容：运行及其误差分析、D_1 的流拟合及其系统误差，以及对 D_2的分析。

1. 运行与误差分析

代码采用 C++并使用 OpenMP。图 1 和附录 A 2 的数据来自 100 个独立总体，每个总体包含 $N = 10^7$ 个成员，位于 $K = 2$ 和 $E = 0$，涵盖从 $W = 12$ 到 30 的 28 种无序：$W = 18.1$、18.17、18.2 各有 8 个总体； $W = 18$ 和 18.3 各有 6 个； $W = 16.5$、17、17.25、17.5 各有 5 个； $W = 17.75$、18.5、19 各有 4 个；其余无序各有 2 个（$W = 12$–16，步长为 0.5，以及 $W = 19.5$、20、21、22、24、26、30）。每个总体都演化 η的完整网格，从 $\eta = 10^{-1/2}$开始，每十年取四个点，并使用共同随机数： η 的所有取值在每一代都使用相同的随机数，因此种群噪声在 ℓ 中高度相关，并在 S 的导数中大幅抵消（ℓ）。对于，网格终止于 $\eta = 10^{-12.75}$ $\ell = 29.4$ $16.5 \le W \le 19$ 10^{-14} ()；对于$W = 16$，终止于；其他情况下终止于 10^{-10}。位于 $16.5 \le W \le 19$ 的总体经过 1500 代预热和 2500 个测量代数，其余总体分别经过 500 代和 1800 个测量代数。测量代数的前 10% 也会被舍弃，因此每个总体最终保留 2250 代或 1620 代。

$S(\ell)$ 是对各代 $\langle w \ln I\rangle/\langle w\rangle$ 的平均值，而$D_1 = 1 - S'$ 和 $\beta = -S''/D_1$ 来自对 ℓ进行的同一个加权局部二次拟合，该拟合对 $D_1(\ell)$ 使用五个点

[图 1(a)] ，而对流 [图1(b)]；最后一个居中的七点导数位于 $\ell = 27.63$。统计误差取两个刀切估计中较大者：一个基于独立总体，另一个基于每个保留历史的两半。在只有两个总体可用的情况下，需要采用后者。

a. 平衡化。 比较每条历史记录的后半段和前半段，可以检验残余漂移。在 W =17.5 和 $\ell = 27.63$ 处，在离域弧上， β 的后半段估计值比前半段高 0.059(13)，因此在最大的 ℓ 处，这些总体尚未完全达到平衡。

b. 有限总体。 通过早期运行（附录 A4）检验了对 N 的依赖性。在 $W = 15$和 18.17 处， $N = 10^6$ 和 $N = 10^7$ 在每个 ℓ处均在两个标准差以内一致，而 $N = 10^5$ 在交叉区域以及较大的 ℓ处出现偏离。在 $W = 18.0$–18.3 处，$N = 10^7$的 S 值与 $N = 10^6$ 的值一致；在 ℓ不超过 $\ell = 28$的每个窗口中，平均拉动量均低于一个标准差。因而，在 N 处的有限总体 $N = 10^7$ 效应低于这些运行的统计误差；尚未以当前数据的精度直接检验这些效应。

2. 对 D_1的流进行拟合

a. 积分流。 对第III E节中的流进行积分，$dm/d\ell = -[(m-\tfrac{1}{2})^2-\delta]$ 与 $\mathcal{D}_1 = (2/c)[(m-1\,2)^2 - \delta]$ 以及 $\beta = 1 - 2m$，在转变两侧均得到

$$D_1 = \frac{2\delta}{c\,\sinh^2\!\big[\sqrt{\delta}\,(\ell+\ell_0)\big]}, \qquad S(\ell) = S_0 + \ell + \frac{2\sqrt{\delta}}{c}\coth\!\big[\sqrt{\delta}\,(\ell+\ell_0)\big], \tag{A1}$$

延续为 $\delta < 0$ (sinh $\to$ sin, coth $\to$ cot)，并在 $\delta = 0$ 处延续至$D_1 = 2/[c(\ell+\ell_0)^2]$。包括延续至 $\delta < 0$在内的相同形式，也由文献 [41] [中的式（107）]独立得出。

b. 临界括号。 我们直接拟合 $S(\ell)$，不使用有限差分；针对九种无序 $17.5 \le W \le 19$和 $9.2 \le \ell \le 23.1$，其中 c 和 ℓ_0 对所有 W均相同，每种无序对应一个常数 $S_0(W)$， $\delta = a(W - W_c)$，且 W_c 为自由参数。由此得到

$$W_c = 18.099, \qquad c = 0.381, \qquad \ell_0 = 1.29, \qquad a = 0.00960. \tag{A2}$$

关于 W_c 的刀切误差约为 0.003，远小于在 ℓ 的测试窗口范围内，由无序区间和加权选择造成的波动： W_c = 18.07–18.13、c = 0.37–0.40 和 a = 0.0094–0.0099；我们将其视为不确定度。 W_c 和 c 会协同变化：例如，将拟合限制在 $17.75 \le W \le 18.5$ 和 $11.5 \le \ell \le 23.1$ 时，得到 $W_c = 18.132$ 和 $c = 0.404$。以逐点误差为单位的残差平方和为 3189，名义自由度为 212。由于

表 I。最小值 D_A 及其在 $D_1(\ell)$ 中的位置 $\ell_{\min}$，在离域侧由 $S(\ell)$ 的四次拟合得到，并与流预测 $2|\delta|/c$ 和 $\pi/(2\kappa) - \ell_0$进行比较， $\kappa = \sqrt{a(W_c - W)}$，其中采用公式（A2）的参数。另见参考文献 [41]。

W	D_A	$2\lvert\delta\rvert/c$	$\ell_{\min}$	$\pi/(2\kappa) - \ell_0$
12	0.4116	0.3074	4.51	5.20
13	0.3297	0.2570	5.29	5.81
14	0.2519	0.2066	6.28	6.63
15	0.1797	0.1562	7.64	7.82
16	0.1142	0.1058	9.72	9.78
16.5	0.0844	0.0806	11.35	11.39
17	0.0565	0.0554	13.89	14.00
17.5	0.0310	0.0302	18.8	19.4

共同随机数会使 ℓ 中的各点相关，因此该数值并不服从 χ^2 分布，我们仅将其作为不匹配程度的度量：在这一精度下，数据能够分辨出偏离主导阶流的情况，见式（A1）。在 $\delta(W)$ 中加入二次项后，残差平方和降至 457，名义自由度为 211，而 W_c 在同一窗口中仍接近 18.10。因此，出于这些原因，我们不对其与 $W_c = 18.17$ 的差异赋予显著性；该数值是 $K = 2$ 在参考文献 [2]，中引用的值，略高于我们的拟合范围。在 $W = 18.1$，临界定律在已达到的最大 ℓ 处仍然成立：在 $\ell = 27.63$ 处，数据给出$D_1 = 0.00657(40)$ 和 $\beta = -0.051$ (26)，而式（.00628 和 -0.069 ）中的值为 0A2）。

c. 离域侧。通过对其周围的 $S(\ell)$进行四次拟合，在 W 介于 12 和 17.5 之间的 13 个取值处确定了 D_1 的最小值；表 I 列出了其中一部分。流预测了 $D_A = 2|\delta|/c$ ；并且使用与临界处相同的 ℓ_0 时，还预测了最小值的位置 $\ell_{\min} = \pi/(2\kappa) - \ell_0$，其 $\kappa = \sqrt{a(W_c - W)}$；采用方程 (A2) 的参数时，这两项预测都没有自由参数。文献 [41]也独立得到了关于最小值、D_A 和 $\ln N_A \simeq \pi/\kappa$的相同预测。在相变附近，两者与数据的偏差都只有几个百分点：在 W = 17 和 16.5 处，预测值分别为 D_A = 0.0554和 0.0806，而测量值为 0.0565 和 0.0844；在 W = 15、16.5 和 17 处，预测值为 $\ell_{\min}$ = 7.82、11.39、14.00，而测量值为 7.64、11.35、13.89。当 D_A 不再很小时，吻合程度会变差：在 $W = 12$处，$\ell_{\min} = 5.20$ ，而对应值为 4.51。图 1(c) 中的二次引导曲线 $D_A \simeq 0.051\,x + 0.0029\,x^2$、 $x = 18.02 - W$，其线性系数与 $2a/c = 0.050$一致。然而，其残差大于统计误差；等权拟合得到的外推零点从 18.02 移至 18.10，而将加权拟合限制在 $W \ge 15$时，零点移至 18.15；对临界括号的拟合则给出了更稳定的 W_c估计值。最小值处的曲率 D_1''/D_A^2，通过抛物线 $\beta^2 = 2c(D_1 - D_A)$估算 c。随着接近相变，它从 $W = 12$ 处的 0.20 上升至 $W = 15$处的 0.32、 $W = 16.5$处的 0.39，以及 $W = 17$处的 0.43。

表 II. 局域化衰减率 α 根据对公式（A1）在$6.9 \le \ell \le 23.1$ 范围内的拟合结果（末位数字的统计误差），以及使用公式（ $2\sqrt{a}\,(W - W_c)$ 中的参数得到的预测值A2）。

W	α	$2\sqrt{a(W - W_c)}$
18.5	0.1219(9)	0.124
19	0.1832(9)	0.186
19.5	0.2226(39)	0.232
20	0.2579(8)	0.270
21	0.3118(23)	0.334
22	0.3518(4)	0.387
24	0.4129(19)	0.476
26	0.4601(8)	0.551
30	0.5247(19)	0.676

d. 局域侧。对于每个 $W > W_c$，我们分别拟合方程 (A1)（$6.9 \le \ell \le 23.1$），其中 $\alpha = 2\sqrt{\delta}$、 c和 $\bar{\ell}_0$为自由参数（表 II）。在相变附近，速率接近采用方程 (A2) 参数得到的 $2\sqrt{a}(W - W_c)$：在 $W = 19$处为 $\alpha =$，而测量值为 0.186；在 $W = 20$处为 0.258，而测量值为 0.270。比值 $\alpha(W{=}20)/\alpha(W{=}19)$在统计上为 1.408(8)，在拟合窗口所测试的各个较低截断下介于 1.397 和 1.408 之间；相比之下，平方根对应 1.45，线性定律对应 2.1。因此， D_1 的衰减率近似按 $(W - W_c)^{1/2}$趋于零，而局域化长度具有 $\nu_{\rm loc} = 1$。偏离主导阶流的程度随 W增大：在 $W = 30$ 处，速率为 0.525，而根据方程 (A2) 外推得到的值为 0.676；且 $\alpha^2/4$ 向下弯离直线 $a(W - W_c)$ [图 1(d)]；对 $\alpha^2/4$ 在 $18.5 \le W \le 20$ 范围内进行加权线性拟合，得到斜率 0.0086，零点位于 $W = 18.06$。沿每条局域化轨迹，不变量 $\beta^2/2 - cD_1 = \alpha^2/2$ 给出的有效值为 $c = 0.34$–0.43（对应 $18.5 \le W \le 19.5$），具体取值取决于导数计算和拟合所用的窗口。

e. 常数 c。c是流的参数，而不是由流预测得到的。三种测定使用了大体上相互独立的数据：临界括号的联合拟合，$c \simeq 0.38$ (0.37–0.40)；局域化轨迹上的不变量，对于 $18.5 \le W \le 19.5$ 为 0.34–0.43；以及离域化极小值处的曲率，对于$16.5 \le W \le 17$达到 0.39–0.43。它们彼此一致，因此在转变附近， $c \simeq 0.4$ 是流的一种性质。它沿离域弧并非常数：曲率估计值在 $W = 12$处降至 0.20。在重标度 $\ell \to k\ell$下， $c \to c/k^2$，因此与 RRG 的比较假定 $\ln(1/\eta)$ 和 $\ln N$ 以单位斜率相匹配。支撑这一假设的有限-η 与有限-N 修正指数相等性已在文献 [40]中证明；振幅以及由此得到的 c，在两者之间可能不同。

f. 向遍历点逼近。在 $D_1 = 1$ 附近，流为 $\beta \simeq \lambda(1 - D_1)$，预测斜率为 $\lambda = 1$。在 $W = 13$和 14 处拟合$S(\ell)$并纳入下一阶项时，$1 - D_1 = Ae^{-\lambda\ell} + Be^{-2\lambda\ell}$给出 $\lambda = 0.993$–0。999，此时拟合从 $D_1 \simeq 0.95$ 开始。起点距离 $D_1 = 1$ 越远的窗口返回的速率越小，尤其是在 $W = 14$ 时；因此，当窗口限制在遍历点邻域内时，拟合速率趋近于 $\lambda = 1$ 。

3. 流动 D_2

我们的原始数据与文献 [25] 的结果一致：在 $\log_{10}(1/\eta) = 2$ 处为 $2\eta\langle I^2\rangle$ =0.071，在 7.25 处为 0.058；在 $W = 18$ 范围内用 $\zeta = \frac{1}{2}$ 拟合得到 $c_1 = 0.043$，而文献中的结果为 0.041。然而，导数并不能由 $\zeta = \frac{1}{2}$ [图 2(a)]描述。在 ζ 自由的情况下，拟合得到$\zeta = 0.82$–0.85（对应 $4.6 \le \ell \le 16.1$ ）以及 0.90–1.07（对应$12 \le \ell \le 29.4$ ），范围为 $W = 18.1$–18.2。上升的有效ζ 是对 const $+ A/(\ell + \ell_0)$ 进行拟合时，不带偏移量的形式所得到的结果： $\zeta_{\rm eff} = \ell/(\ell + \ell_0)$。对后者在 $9.2 \le \ell \le 29.4$ 上的直接拟合得到 $A = 1.89$(1) 和$\ell_0 = 1.59$ (4)（位于 $W = 18.1$处），并在整个范围 [内描述了 D_2 ，如]图 2(a)所示。相同的结论也独立地在文献 [41]（第 VI A 节）中得出，其中将文献 [25] 较小的有效指数解释为渐近前行为。注意，我们的流在 W_c处给出 $D_2 \to 0$ ，因此$\eta\langle I^2\rangle$ 达到平台，而不是像文献 [51]中那样按 $\eta^{1/2}$ 趋于零。

比值 D_2/D_1 沿着每条具有 $D_1 \ll 1$的轨迹几乎保持不变：在局域侧，它在 $W = 19$处保持在 0.320–0.328 之间，在 $W = 20$ 处为 0.304–0.308，在 $W = 21$ 处为 0.290–0.293，而 D_1 则下降了 15 至 20 倍；在 W_c 附近，它缓慢漂移，在 $W = 18.1$处经过 $6 \le \ell \le 28$ 从 0.335 变为 0.354，并在较大的 ℓ [处趋于平坦，如图 2(b)], 所示，这符合 $O(1/\ell)$ 修正的预期。在离域弧上，该比值逐渐升向 1；这是必然的，因为在遍历点处所有 $D_q \to 1$ （在 $W = 17$处从 0.36 升至 0.43，在 $W = 16$处从 0.38 升至 0.84，且$6 \le \ell \le 23$）。

4. 早期运行

图 3 的条件生成函数以及对有限N 效应的检查使用了早期运行的数据；在这些运行中，每个 η 值都是用独立的随机数演化得到的。主数据集使用了 $N = 10^6$，每个数量级取四个 η 值，范围从 10^{-2}起；每个 η 包含 80 代预热和 1500 个测量代数（其中前 10% 也予以舍弃），无序样本数仍为 28 个。其中 13 个样本的范围从 $W = 16$ 到 19，并延伸至 $\eta = 10^{-14}$（$\ell \le 32$）。误差根据积分自相关时间计算，并乘以 1.25 至 1.8 的系数进行放大；系数取值由比较每次运行的前后两半确定。第二组数据在 $N = 10^7$ 下涵盖了 $W = 18.0$、18.1、18.2（$9.2 \le \ell \le 27.6$）、 $W = 16$处的离域弧段、16.5 和 17，以及对 $W = 17$、18.17 和 18.3 的检查。

[1] D. B. Kaplan、J.-W. Lee、D. T. Son 和 M. A. Stephanov，《共形性丧失》，《物理评论D》80，125005（2009）。[2] C. Vanoni、B. L. Altshuler、V. E. Kravtsov 和 A. Scardicchio，《随机正则图上安德森模型的重整化群分析》，《美国国家科学院院刊》121，10 1073 2401955121 2024 . /pnas. ( )。[3] P. W. Anderson，《某些随机晶格中的扩散缺失》，《物理评论》109，1492（1958）。[4] J. Fr¨ öhlich 和 T. Spencer，《大无序或低能量下安德森紧束缚模型中的扩散缺失》，《数学物理通讯》88，151（1983）。[5] F. Evers 和 A. D. Mirlin，《安德森转变》，《现代物理评论》80，1355（2008）。[6] M. R. Zirnbauer，《安德森局域化与具有分次对称性的非线性σ模型》，《核物理B》265，375（1986）。[7] K. Efetov，《超对称性与无序金属理论》，《物理学进展》32，53（1983）。[8] F. Wegner，《迁移率边问题：连续对称性与一个猜想》，《物理学杂志B》35，207（1979）。[9] E. Abrahams、P. W. Anderson、D. C. Licciardello 和 T. V. Ramakrishnan，《局域化标度理论：二维中的量子扩散缺失》，《物理评论快报》42，673（1979）。[10] S. Hikami，《非线性σ模型表述中的安德森局域化》，《物理评论B》24，2671（1981）。[11] S. Hikami，《局域化、非线性 σ 模型与弦理论》，《理论物理进展增刊》107，213 1992( )。[12] L. Fleishman 和 P. W. Anderson，《相互作用与安德森跃迁》，《物理评论B》21，2366（1980）。[13] D. Basko、I. Aleiner 和 B. Altshuler，《具有局域单粒子态的弱相互作用多电子系统中的金属-绝缘体转变》，《物理年鉴》321，1126（2006）。[14] A. Pal 和 D. A. Huse，《多体局域化相变》，《物理评论B》82，174411（2010）。[15] V. Oganesyan 和 D. A. Huse，《高温下相互作用费米子的局域化》，《物理评论B》75，155111（2007）。[16] D. A. Abanin、E. Altman、I. Bloch 和 M. Serbyn，《专题综述：多体局域化、热化与纠缠》，《现代物理评论》91，021001（2019）。[17] P. Sierant、M. Lewenstein、A. Scardicchio、L. Vidmar 和 J. Zakrzewski，《经典计算时代的多体局域化》，《物理学进展报告》88，026502 2025( )。[18] J. Z. Imbrie、V. Ros 和 A. Scardicchio，《多体局域化系统中的局域运动积分》，《物理学年鉴》529，1600278（2017）。[19] V. Ros、M. M¨uller 和 A. Scardicchio，《多体局域化相中的运动积分》，《核物理B》891，420（2015）。[20] Y. Ueoka 和 K. Slevin，《正交普适类中安德森跃迁临界指数的维度依赖性》，《日本物理学会志》83，084711（2014）。[21]Y. Ueoka 和 K. Slevin，描述 Wigner–Dyson 对称类中安德森局域化的 β-函数的 Borel–Pad´e 重求和，《日本物理学会志》86，094707（2017）。[22] A. D. Mirlin 和 Y. V. Fyodorov，安德森跃迁附近局域态密度、序参量函数及临界行为的分布，《物理评论快报》72，526（1994）。[23] M. R. Zirnbauer，高维中的 Wegner 模型：U(1) 对称性破缺与无序电子物质的一种非标准相，I. 单副本理论，预印本（2023），arXiv:2309.17323。[24] N. Goldenfeld 和 R. Haydock，安德森无序的相图：超越单参数标度，《物理评论B》73，045118（2006）。[25] K. S. Tikhonov 和 A. D. Mirlin，随机正则图上局域化转变附近本征态的统计，《物理评论B》99，024202（2019）。[26] E. Tarquini、G. Biroli 和 M. Tarzia，安德森局域化转变的临界性质与高维极限，《物理评论B》95，094204（2017）。[27] J. Arenz 和 M. R. Zirnbauer，树图上的 Wegner 模型：U(1) 对称性破缺与无序电子物质的一种非标准相，arXiv（2023），arXiv:2305.00243。[28] B. L. Altshuler、V. E. Kravtsov、A. Scardicchio、P. Sierant 和 C. Vanoni，高维晶格上安德森局域化的重整化群，《美国国家科学院院刊》122，10 1073 2423763122 2025。/pnas.（）。[29] F. Madani、M. Denis、P. Szriftgiser、J.-C. Garreau、A. Ran.con 和 R. Chicireanu，四维相变量子临界性的观测，《自然·通讯》16，2519（2025）。[30] M. Filoche、P. Pelletier、D. Delande 和 S. Mayboroda，安德森迁移率边作为渗流转变，《物理评论B》109，L220202（2024）。[31] A. Altieri、M. C. Angelini、C. Lucibello、G. Parisi、F. Ricci-Tersenghi 和 T. Rizzo，通过 M 层构造在 Bethe 近似周围进行环展开，《统计力学杂志：理论与实验》2017，113303（2017）。[32] M. C. Angelini、S. Palazzi、G. Parisi 和 T. Rizzo，伊辛模型上的 Bethe m 层构造，《统计力学杂志：理论与实验》2024，063301（2024）。[33] M. Baroni、G. G. Lorenzana、T. Rizzo 和 M. Tarzia，安德森局域化 Bethe 晶格解的修正，《物理评论B》109，174216（2024）。[34] V. Kravtsov、B. Altshuler 和 L. Ioffe，Bethe 晶格和正则图上安德森模型的非遍历离域化相，《物理年鉴》389，148（2018）。[35] K. S. Tikhonov、A. D. Mirlin 和 M. A. Skvortsov，随机正则图上的安德森局域化与遍历性，《物理评论B》94，220203（2016）。[36] G. Biroli、A. K. Hartmann 和 M. Tarzia，通过大偏差方法研究 Bethe 晶格上安德森模型的临界行为，《物理评论B》105，094202（2022）。[37] I. Garc´ía-Mata、J. Martin、O. Giraud、B. Georgeot、R. Dubertrand 和 G. Lemari´e，

随机图上的安德森跃迁：双参数标度理论、Kosterlitz-Thouless型流以及多体局域化，《物理评论B》106，214202（2022）。[38] P. Sierant、M. Lewenstein 和 A. Scardicchio，具有可变连通度的随机图上安德森局域化的普适性，SciPost Phys. 15，045（2023）。[39] I. Garc´ıa-Mata、W. Chen、J. Martin、B. Georgeot 和 G. Lemari´e，连接随机图上安德森局域化中的有限尺寸标度与重整化群流（2026），arXiv:2609.31872。[40] T. Rizzo、M. Tarzia 和 A. Vecchiarelli，Bethe 晶格上安德森模型局域化相中的逆参与比修正，arXiv（2026），arXiv:2611.28705。[41] T. Rizzo、M. Tarzia 和 A. Vecchiarelli，Bethe 晶格局域化相中逆参与比的反常修正：来自一个可解“玩具”非线性 σ-模型的启示，arXiv（2026），arXiv:2611.28709。[42] C. Vanoni、V. E. Kravtsov、A. V. Lunkin 和 B. L. Altshuler，手性Cayley树上的半分形性与局域化（2026），arXiv:2607.18179。[43] A. D. Mirlin 和 Y. V. Fyodorov，Bethe 晶格上安德森模型的局域化转变：自发对称性破缺与关联函数，《核物理B》366，507（1991）。[44] T. Rizzo 和 M. Tarzia，Bethe 晶格上安德森模型的局域化相，《物理评论B》110，184210 (2024). [45] M. R. Zirnbauer，《Bethe晶格上的局域化转变》，《物理评论B》34，6394（1986）。[46] R. Abou-Chacra、D. J. Thouless 和 P. W. Anderson，《局域化的自洽理论》，Journal of Physics Condensed Matter 6，1734（1973）。[47] G. Parisi、S. Pascazio、F. Pietracaprina、V. Ros 和 A. Scardicchio，《Bethe晶格上的安德森跃迁：一种采用实能量的方法》，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 53，014003（2019）。[48] S. Bera、G. De Tomasi、I. M. Khaymovich 和 A. Scardicchio，《随机正则图上安德森模型的返回概率》，《物理评论B》98，134205（2018）。[49] G. De Tomasi、S. Bera、A. Scardicchio 和 I. M. Khaymovich，《随机正则图上安德森模型中的亚扩散》，Physical Review B 101，100201（2020）。[50] 可以看出，添加一项 $\epsilon\gamma\delta$ 到 $d\gamma/d\ell$ 并不会改变任何结果。[51] J. Arenz 和 M. R. Zirnbauer，《高维中的 Wegner 模型：U(1) 对称性破缺导致的奇异连续谱与 AAT 自洽性》（2026），arXiv:2611.24515。